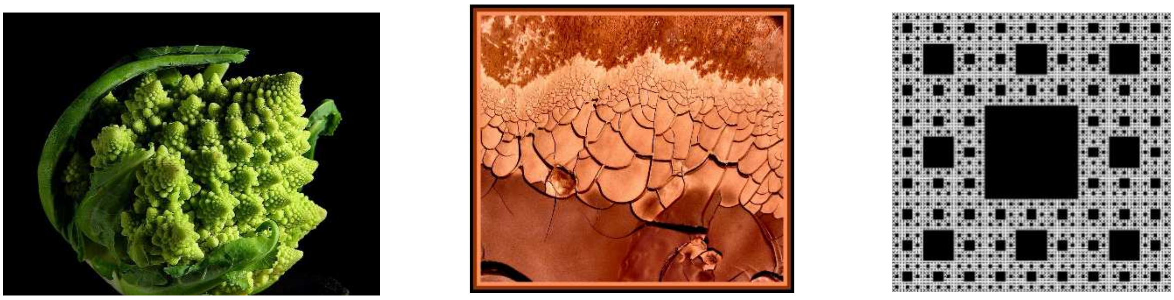
dr hab. Paweł Oświęcimka (e-mail: pawel.oswiecimka@ifj.edu.pl)

„Fraktale – piękno ukryte w Naturze”
(warsztaty dla 2 osób)

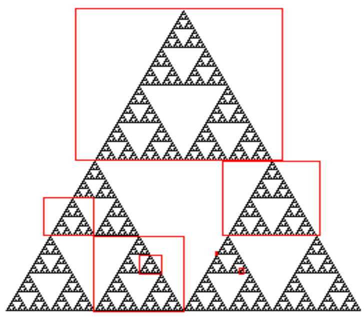
Czy naprawdę można zmierzyć długość linii brzegowej? Czy istnieją w przyrodzie obiekty, „zawieszone” pomiędzy wymiarami? Jak opisać nieregularność przyrody? Znalezienie odpowiedzi na te pytania będzie przedmiotem proponowanych warsztatów.

Nazwa ,,fraktal" została zaproponowana przez B. Mandelbrota jako określenie obiektów tak nieregularnych, a jednak powszechnych w przyrodzie, że nie można ich było opisać w ramach klasycznej geometrii. Geometria fraktalna pozwala nam spojrzeć na Naturę z innego punktu widzenia niż robiliśmy to do tej pory. Paradoksalnie to co na początku mogło wydawać się chaotyczne lub nieregularne, przez pryzmat fraktali ukazuje się jako niezwykle uporządkowana struktura, która poprzez wnikliwe spojrzenie odsłania wciąż nowe szczegóły. Fenomen fraktali związany jest z występowaniem tych struktur niemalże wszędzie. Kształt płatka śniegu, liścia, czy chmury, topograficzne własności terenu, linie brzegowe, układ krwionośny i wiele innych obiektów posiada cechy, które najpełniej można opisać wykorzystując właśnie formalizm fraktali.



Rys. 1. Przykłady obiektów fraktalnych: brokuł Romanesco, wysychające koryto rzeczne (https://www.flickr.com/photos/pictoscribe/398520274), dywan Sierpińskiego.

Najważniejszą własnością fraktali jest *samopodobieństwo*. Samopodobieństwo może być rozumiane intuicyjnie jako *podobieństwo* fragmentu obiektu do całej struktury niezależnie od rozważanej skali. Innymi słowy: fragment obiektu odpowiednio powiększony (przeskalowany) przypomina całość. Dokładne samopodobieństwo cechuje fraktale matematyczne, utworzone poprzez procedury rekurencyjne (patrz Rys. 2). Definicję tę można nieco złagodzić, przyjmując podobieństwo obiektów jedynie w sensie statystycznym. Ten właśnie warunek spełniają fraktale spotykane w Naturze.



Rys. 2. Samopodobieństwo trójkąta Sierpińskiego.

Forma warsztatów będzie miała dwojaki charakter. Pierwsza część poświęcona będzie zaznajomieniu z podstawami teorii fraktalności. Będą tu omawiane zarówno przykłady obiektów fraktalnych, sposoby opisu samopodobieństwa jak i jego identyfikacji w danych rzeczywistych. Na części praktycznej, uczestnicy stworzą program do generowania struktur fraktalnych oraz wyznaczania wymiaru fraktalnego. Co istotne, napisana procedura posłuży do wyznaczenia wymiaru dla rzeczywistych fizycznych danych (np. zmienności liczby plam na Słońcu, indeksu giełdowego itp.) oraz sztucznie wygenerowanych (ruchy Browna, symulowane fraktale).

Wymagania

- znajomość własności funkcji potęgowej, wykładniczej i logarytmicznej (definicje, wykresy, przekształcenia);
- znajomość podstaw programowania (pętle „for", „for each", „while"; instrukcje warunkowe „if"; algebra Boola - koniunkcja, alternatywa, negacja);
- znajomość na podstawowym poziomie przynajmniej jednego programu do obliczeń numerycznych typu Matlab , GNU Octave , Scilab lub podobny.

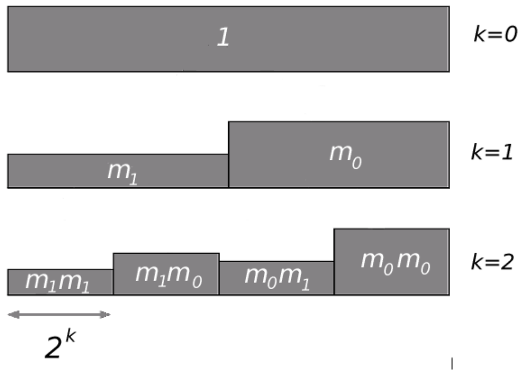
Zadania kwalifikacyjne

1) Trójkąt Sierpińskiego jest obiektem fraktalnym, którego konstrukcję podał polski matematyk Wacław Sierpiński w 1915 roku (https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_triangle). Początkowe kroki jego tworzenia (iteracje) przedstawione są na poniższym rysunku. Czy potrafisz policzyć pole powierzchni trójkąta Sierpińskiego po $n \to \infty$ iteracjach? Przedstaw pełne rozwiązanie problemu.

Rys.3 Początkowe etapy tworzenia trójkąta Sierpińskiego.

2) Napisz program (środowisko dowolne), który generuje dane fraktalne według opisanej poniżej procedury.

Rozważmy odcinek [0,1] oraz dwie liczby m_0 i m_1 takie, że $m_0 + m_1 = 1$. W pierwszym kroku k =1 dzielimy odcinek na dwie równe części [0,1/2) oraz (1/2,1] i przypisujemy im wagi m_1 i m_0 odpowiednio dla lewej i prawej części. Możemy zapisać, że miara μ_k (np. masa) na odcinkach wynosi $\mu_1[0, 1/2) = m_1$ oraz $\mu_1[1/2, 1] = m_0$. W kroku k =2 każdy z dwóch przedziałów jest znowu dzielony na dwie części, którym przypisuje się wagi według tej samej co w poprzednim kroku reguły. Zatem miara po drugim kroku wygląda następująco: $\mu_2[0,1/4) = m_1 m_1$, $\mu_2[1/4, 1/2) = m_1 m_0$, $\mu_2[1/2, 3/4) = m_0 m_1$, $\mu_2[3/4,1] = m_0 m_0$. W następnych krokach reguła ta jest powtarzana (patrz poniższy rysunek). Wygeneruj opisaną kaskadę dla m_0=0.7 oraz liczby poziomów k=10 (obie te zmienne powinny być w programie zadawanymi parametrami). Przedstaw otrzymany rozkład miary μ_k na przedziałach na wykresie. W rozwiązaniu należy przesłać również kod programu (kod źródłowy oraz plik wykonywalny w miarę możliwości).



Rys.4 Początkowe etapy tworzenia kaskady do zadania nr 2.

3) Zmodyfikujmy nieco powyższą konstrukcję w następujący sposób: dzielimy początkowy przedział [0,1] na trzy równe części i usuwamy środkową część tzn. przedział (1/3, 2/3) (wag w tym zadaniu nie rozważamy). Pozostają nam zatem przedziały [0,1/3] oraz [2/3,1]. Następnie te przedziały również dzielimy na trzy równe części i usuwamy środkowe części trzecie itd. Oczywiście tę procedurę możemy powtarzać wiele razy otrzymując w efekcie zbiór punktów rozłożonych na odcinku [0,1] w określony sposób. Pytanie: czy potrafisz podać przepis na punkty z rozważanego zbioru używając rozwinięcia trójkowego? Przeprowadź rozumowanie dotyczące liczebności jak i całkowitej długości zbioru.

W razie jakichkolwiek pytań i/lub wątpliwości dotyczących zadania kwalifikacyjnego i/lub tematyki warsztatów możesz śmiało pisać na maila: **pawel.oswiecimka@ifj.edu.pl** Nawet połowiczne rozwiązanie zadań kwalifikacyjnych jest mile widziane.

Do poczytania dla chętnych

- https://naukawpolsce.pap.pl/aktualnosci/news%2C77847%2Cfragment-jak-calosc-dlaczego-fizykow-fascynuja-fraktale.html
- http://www.foton.if.uj.edu.pl/documents/12579485/3cebdfed-ee7e-4d4e-ba01-6e7fde547c87
- http://loslupca.pl/wp-content/uploads/2015/11/3.-Cudowny-%C5%9Bwiat-fraktali.pdf
- http://www.foton.if.uj.edu.pl/documents/12579485/1d7fa8bd-77d9-44d7-aed3-c122438a5890