组合数学2017年秋期末考试

请在试卷和答题纸上写上姓名，学号以及email 和手机号码
请详细写出解答过程，复杂数值不需要计算出来，列出计算式子即可

院系：姓名：学号：手机：

1、选椅子问题（14分）。

（1）有 n 把完全相同的椅子从左到右摆成一行，占据n个位置，要从中选出r把，如果选出的椅子中没有两把是位置相邻的，有多少种选择？（6分）

（2）有n 把完全相同的椅子从左到右摆成一行，占据n个位置，要从中选出r 把，其方案数为M(n,r), 请证明$M(n,1)+2M(n,2)+3M(n,3)+\ldots\ldots+nM(n,n)=n*2^{n-1}$（8分）

解答：（1）C(n-r+1,r)（**6分，不给步骤分**）

（2）（**8分，思路正确可酌情给4分**）

［方法1］ 由 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$,得

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$$
$$=nC_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+nC_{n-1}^2+\cdots+nC_{n-1}^{n-1}$$
$$=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$$
$$=n\cdot2^{n-1}.$$

［方法2］ 设 $S_n=0C_n^0+C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$,

则 $S_n=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+(n-2)C_n^{n-2}+\cdots+C_n^1+0C_n^0$.

两式相加,并注意到 $C_n^k=C_n^{n-k}$,得

$$2S_n=nC_n^0+nC_n^1+nC_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot2^n.$$

故 $S_n=n\cdot2^{n-1}$.

［方法3］ 在等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ 中,

两边对 x 求导,得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}.$$

在上式中,取 $x=1$,得

$$n\cdot2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n.$$

2、就不爱三（18 分+5 分）。考虑由若干“0”和“1”组成的 n 位二进制串，

（1）如果要求不允许出现连续三个相同数字，请问满足条件 n 位二进制串共有多少个？（12 分）

（2）如果要求“0”只能出现偶数次，请问满足条件 n 位二进制串共有多少个？（6 分）

（3）如果要求“0”和“1”出现的次数都不能为三的倍数（0 也认为是 3 的倍数），请问满足条件的 n 位二进制串共有多少个？（选做，附加分 5 分）

解答：（1）设a_n为满足提议的长度为 n 的可行的二进制串。共有一下三种可能，（i）最后一位与倒数第二位不同，则前 n-1 位构成满足条件的串；（ii）最后两位相同且与倒数第三位不同，可得递推关系为

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（**6 分**）

且有初值 a1=2，a2=4。（**2 分**）

特征根为$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。（**2 分**）

由斐波那契通项公式可知，$a_n = \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$。（**2 分**）

（2）设b_n为满足提议的长度为 n 的可行的二进制串。对应的指数型母函数为

$G_e(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^x = \frac{e^{2x}+1}{2}$（**4 分**）

满足条件的 n 位串共有$b_n = 2^{n-1}$（**2 分**）

另解：$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = 2^{n-1}$ ***（6 分）***

（3）设c_n为满足提议的长度为 n 的可行的二进制串。对应的指数型母函数为

$$G_e(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\cdots\right)^2$$

令$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，则有$w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$和$w^3 = 1$。显然有关系$w + w^2 + 1 = 0$。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{wx} = 1 + wx + \frac{w^2x^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{w^2x} = 1 + w^2x + \frac{wx^2}{2!} + \cdots$$

我们有$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{2e^x - e^{wx} - e^{w^2x}}{3}$，所以

$G_e(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\cdots\right)^2 = \left(\frac{2e^x - e^{wx} - e^{w^2x}}{3}\right)^2 = \frac{4e^{2x} + e^{2wx} + e^{2w^2x} - 4e^{(1+w)x} - 4e^{(1+w^2)x} + 2e^{-x}}{9} = \frac{4e^{2x} + e^{2wx} + e^{2w^2x} - 4e^{-w^2x} - 4e^{-wx} + 2e^{-x}}{9}$（**3 分**）

满足条件的 n 位串共有$c_n = \frac{1}{9}(4\cdot 2^n + w^n 2^n + w^{2n} 2^n - 4w^{2n}\cdot(-1)^n - 4w^n\cdot(-1)^n + 2\cdot(-1)^n)$

当 n 为 3 的倍数时$w^n + w^{2n} = 2$，否则$w^n + w^{2n} = -1$。综上所述，我们有

$c_n = \begin{cases} \frac{1}{9}(6\cdot 2^n - 6\cdot(-1)^n), & n = 3k \\ \frac{1}{9}(3\cdot 2^n + 6\cdot(-1)^n), & n \neq 3k \end{cases}$（**2 分**）

3、倍数（26 分）。（1）在[1000,10000]区间里与 105 互素的偶数有多少个？（8 分）
（2）若将这些数从小到大排列形成序列，求出该数列的第 1000 项。（10 分）（需计算具体数值）
（3） 请证明，对于任何正整数 m，都可以从斐波那契数列中找到无穷多个元素是 m 的倍数。（8 分）
解答：（1）相当于求[500,5000]区间里与 105 互素的数。

	[1,499]	[1,5000]	[500,5000]
3 的倍数	166	1666	1500
5 的倍数	99	1000	901
7 的倍数	71	714	643
15 的倍数	33	333	300
21 的倍数	23	238	215
35 的倍数	14	142	128
105 的倍数	4	47	43

4501-1500-901-643+300+215+128-43=2057（**8 分，错一个行扣 0.5 分，容斥公式正确给 4 分**）
（2）每 105 个数中不是 3、5、7 的倍数的数共有
105-35-21-15+7+5+3-1=48 个（**4 分**）
第 1 项为 502，第 49 项为 607，以此类推，则第 1009 项为 2707，2704，2701，2699，2698，2696，2693，2692，2689，2687。所以换算成原区间内为 5374。（**6 分**）（3 的倍数：2706、2703、2700、2697、2694、2691、2688）（5 的倍数：2705、2700、2695、2690，2685）（7 的倍数：2702、2695、2688、2681）
（3）考虑(F_(n+1) (mod m),F_n (mod m))，总共有 m^2 种可能的组合，则对于 n 从 1 取到 m^2+1，我们一定可以找到 p 和 q（p>q）使得(F_(p+1) (mod m),F_p (mod m))=(F_(q+1) (mod m),F_q (mod m))，（**4 分**）
因为斐波那契数列是二阶递推的，依次递推那么(F_(n+1) (mod m),F_n (mod m))的周期为 p-q。（**2 分**）
且向前递推有各项周期也为 p-q, 因为 F_0 (mod m)=0，那么对于所有的 k 是 p-q 的倍数，F_k (mod m)=0。无穷多个元素是 m 的倍数。（**2 分**）
4、多面体切角过程（24 分）。
对于一个正多面体的每一个顶点，我们定义与之相连的所有棱的中点与该顶点构成的凸多面体为这个正多面体的一个**角**。去掉一个正多面体所有角的过程称之为**切角过程**。例如，一个正四面体有四个角，对正四面体进行切角之后得到一个正八面体。
（1）对正二十面体进行切角过程得到的多面体，若在每个面上从某一个顶点出发向对边做高，有多少种不同的方案？（12 分）
（2）现在用等同于棱数的火柴搭这个多面体，请问有多少种空间上不相同的组合方式？（12 分）
解答：（1）共有 20 个三角形面和 12 个五边形面。（**2 分，后面全对可不写**）

群类型	三角形面	五边形面	做高的方法	数量	**分数**
不动置换	（1）^20	（1）^12	3^20*5^12	1	**2**
三角形面心对面心旋转±120 度	（1）^2（3）^6	（3）^4	无不动图像	20	**2**
五边形面心对面心旋转±72/144 度	（5）^4	（1）^2（5）^2	无不动图像	24	**2**
顶点对顶点旋转 180 度	（2）^10	（2）^6	3^10*5^6	15	**2**

再给出式子即可。（**2 分**）
（2）共有 60 条棱。（**2 分，后面全对可不写**）

群类型	棱	数量	火柴摆放数	**分数**
不动置换	（1）^60	1	2^60	**2**
三角形面心对面心旋转±120 度	（3）^20	20	2^20	**2**
五边形面心对面心旋转±72/144 度	（5）^12	24	2^12	**2**
顶点对顶点旋转 180 度	（2）^30	15	2^30	**2**

再给出式子即可。（**2 分**）

5、线性规划（18 分）。要求写出**标准型**并使用**单纯形法**求解。

$$Min \quad z = x_1 + 4x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 9 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq -4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 5 \\ x_1 \geq 1, x_3 \leq 3 \end{cases}$$

X1=3,x2=1,x3=1, Z=6

画出表格给 6 分

每个表格给 2 分

结果不正确扣 2-6 分