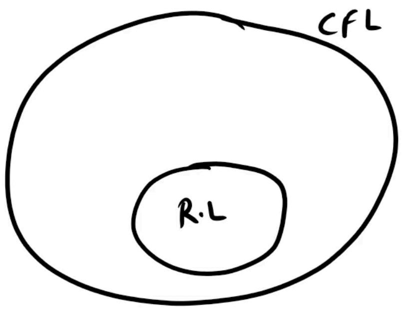
Pumping Lemma ←

Thursday, May 15, 202 10:51 PM

Reg. L → CFL

L → if yes, draw DFA ✓
→ if no, pumping lemma



Pumping lemma If A is a regular language, then there is a number p (the pumping length) where if s is any string in A of length at least p, then s may be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:

1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$.

$s = xyz \in A$

$xyyz \in A$

$xyyyz \in A$

$\boxed{xy^iz \in A}$

Let B be the language $\boxed{\{0^n1^n | n > 0\}}$. We use the pumping lemma to prove that B is not regular. The proof is by contradiction.

Let, pumping length p — more 0's — $0^p1^p \in B$ ✓

Case 1: y contains only 0's — $xy^2z \notin B$

Case 2: y contains only 1's

Case 3: y contains some 0's & some 1's

$\underbrace{0000}_{x} \cdots \underbrace{01}_{y} \cdots \underbrace{1111}_{z}$

$0\,0\,\underbrace{0\,0}_{y}00\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \notin B$

Let B be the language $\boxed{\{0^n1^n | n > 0\}}$. We use the pumping lemma to prove that B is not regular. The proof is by contradiction.

Let, pumping length p — more 0's — $0^p1^p \in B$ ✓

Case 1: y contains only 0's — $xy^2z \notin B$

Case 2: y contains only 1's — $xy^2z \notin B$ — more 1's

Case 3: y contains some 0's & some 1's

$\underbrace{0000}_{x} \cdots \underbrace{01}_{y} \cdots \underbrace{1111}_{z}$

$0\,0\,0\,\overbrace{0\,0\,1\,1}^{y}\,1\,1\,1$

$0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1$

Pumping Lemma ←

Thursday, May 15, 2025 10:51 PM

(L) p থেকে বড় all strings of L

xyz

such that :

(i) $xy^iz \in L$ for $i \in N$

(ii) $|y| > 0$

(iii) $|xy| \leq p$

0^n1^n is not regular

Let, the pumping length be p. 0^p1^p

$000\ldots0011\ldots111 = xyz$

Case 1: If y consists of only 0's. Then xy^2z will have more 0's.

Case 2: If y consists of only 1's. Then xy^2z will have more 1's.

Case 3: If y consists of both 0's and 1's, then format will get ruined.

$\therefore$ L is not regular..

$L = \{w \mid w \text{ is not a pallindrome}\}$ L is not regular

$\bar{L}$ is not regular. $\bar{\bar{L}} = L$ is also not regular

$\bar{L} = \{w \mid w \text{ is a pallindrome}\}$ $\therefore |xy| \le p$

$\rightarrow p$ $\boxed{0^p} 1 0^p$

$\boxed{000 \cdots \underbrace{0}_{y}} \underbrace{0 1 0}_{y} 0 \cdots \underbrace{\;}_{y} \cdots 000$

$$L = \{w = 0^n 1^{n+1} \mid n \text{ is } 1 \text{ more than a multiple of } 4\}$$

অর্থাৎ, $n = 4k + 1$ for some integer $k \ge 0$

এখন আমাদের **Pumping Lemma** ব্যবহার করে প্রমাণ করতে হবে যে এই ভাষাটি regular **নয়**।

🔁 Pumping Lemma (for Regular Languages):

যদি একটি ভাষা regular হয়, তবে একটি পাম্পিং লেমা সত্য থাকবে:

> যদি L regular হয়, তবে একটি ধ্রুবক সংখ্যা p (pumping length) থাকবে এমন যে,
> যে কোনো স্ট্রিং $w \in L$ এবং $|w| \ge p$, তাহলে w কে এমনভাবে ভাগ করা যাবে:
>
> $$w = xyz$$
>
> এমনভাবে যে:
>
> 1. "$|xy| \le p$"
> 2. "$|y| > 0$"
> 3. "$xy^iz \in L$ for all $i \ge 0$"

✅ Step-by-step Proof:

Step 1: ধরে নিই L regular

ধরি, L regular।

তাহলে Pumping Lemma অবশ্যই প্রযোজ্য হবে।

Step 2: একটি স্ট্রিং বাছাই করি $w \in L$, যেখানে $|w| \geq p$

ধরি pumping length p।

আমরা নিই $n = 4k + 1$, এবং বেছে নিই k যেন $4k + 1 \geq p$

তাহলে নিই:

$$n = 4p + 1 \Rightarrow w = 0^{4p+1}1^{4p+2}$$

এটি অবশ্যই L-এর একটি উপাদান, কারণ:

- $n = 4p + 1$, which is 1 more than a multiple of 4
- $w = 0^n 1^{n+1}$

Step 3: Now, apply Pumping Lemma: $w = xyz$, where $|xy| \leq p$, $|y| > 0$

তাহলে, যেহেতু $|xy| \leq p$, আর w শুরু হয়েছে অনেকগুলো `0` দিয়ে, তাই:

- $x = 0^a$,
- $y = 0^b$, যেখানে $b > 0$
- অর্থাৎ, y কেবলমাত্র কিছু `0` হবে।

Step 4: Pump y — অর্থাৎ, $xy^i z$ বানাও

ধরি $i = 2$

তাহলে $w' = xy^2z$ হবে:

- অতিরিক্ত কিছু `0` যোগ হয়ে যাবে,
- অর্থাৎ, নতুন স্ট্রিং এ থাকবে `0^{n + b} 1^{n+1}`

কিন্তু এখন:

- নতুন সংখ্যক `0` হলো: $n + b$
- কিন্তু `1` এর সংখ্যা একই থাকছে: $n + 1$

Step 5: এখন যাচাই করি নতুন w' কি L-এ আছে?

যদি $w' \in L$ হয়, তাহলে অবশ্যই `1` এর সংখ্যা = `0` এর সংখ্যা + 1 হতে হবে।

কিন্তু এখানে:

- `0` এর সংখ্যা = $n + b$
- `1` এর সংখ্যা = $n + 1$

তাহলে পার্থক্য = $(n + b) + 1 - (n + 1) = b$

তাহলে দরকার ছিল `b = 0`, কিন্তু এটি সম্ভব না কারণ $|y| = b > 0$

❌ এইঅসঙ্গতি (contradiction) দেখায় যে Pumping Lemma fail করেছে।

✅ Final Conclusion:

আমাদের ধরনা ছিল যে L regular। কিন্তু pumping lemma অনুযায়ী, কোনো স্ট্রিং $w \in L$ কে পাম্প করলে তা আবারও L-এর মধ্যে থাকবে — এই শর্ত মিথ্যা প্রমাণিত হয়েছে।

🔚 **তাই, L regular নয়।**