

# 数学相关

Cai

cssyz

2017 年 3 月 1 日

# Contents

- ① 线性递推
- ② 矩阵乘法
- ③ 数论相关
- ④ 高斯消元
- ⑤ Noip数学题

- 1 线性递推
- 2 矩阵乘法
- 3 数论相关
- 4 高斯消元
- 5 Noip数学题

# 一般形式

# 一般形式

$$\bullet f_n = \sum_{i=1}^k a_i * f_{n-i}$$

# 一般形式

- $f_n = \sum_{i=1}^k a_i * f_{n-i}$
- 例子: fibonacci数列:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

# 特征方程

# 特征方程

- 这里只说明形如 $f_n = pf_{n-1} + qf_{n-2}$ 的形式的



# 特征方程

- 这里只说明形如 $f_n = pf_{n-1} + qf_{n-2}$ 的形式的
- 特征方程为 $x^2 = px + q$

# 特征方程

- 这里只说明形如 $f_n = pf_{n-1} + qf_{n-2}$ 的形式的
- 特征方程为 $x^2 = px + q$
- 设特征方程可解出两个根 $s, t$

# 特征方程

- 这里只说明形如 $f_n = pf_{n-1} + qf_{n-2}$ 的形式的
- 特征方程为 $x^2 = px + q$
- 设特征方程可解出两个根 $s, t$
- 则数列通项公式为 $f_n = as^n + bt^n$ ,  $a, b$ 的值由数列的任意两项决定

# 特征方程

- 这里只说明形如 $f_n = pf_{n-1} + qf_{n-2}$ 的形式的
- 特征方程为 $x^2 = px + q$
- 设特征方程可解出两个根 $s, t$
- 则数列通项公式为 $f_n = as^n + bt^n$ ,  $a, b$ 的值由数列的任意两项决定

# 特征方程

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{d}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{d}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{(d)}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$
- 则  $x = 1, s = \frac{b+\sqrt{(d)}}{2}, t = \frac{b-\sqrt{(d)}}{2}$



# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{(d)}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$
- 则  $x = 1, s = \frac{b+\sqrt{(d)}}{2}, t = \frac{b-\sqrt{(d)}}{2}$
- 进一步  $f_0 = 1 + b, f_1 = \frac{(1+y)b}{2} + \frac{(1-y)\sqrt{d}}{2}$ ，显然  $y$  取 1 好算

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{(d)}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$
- 则  $x = 1, s = \frac{b+\sqrt{(d)}}{2}, t = \frac{b-\sqrt{(d)}}{2}$
- 进一步  $f_0 = 1 + b, f_1 = \frac{(1+y)b}{2} + \frac{(1-y)\sqrt{d}}{2}$ ，显然  $y$  取 1 好算
- 由  $s, t$  是方程  $x^2 - px - q = 0$  的两根，于是  $p = b, q = \frac{d-b^2}{4}$

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{(d)}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$
- 则  $x = 1, s = \frac{b+\sqrt{(d)}}{2}, t = \frac{b-\sqrt{(d)}}{2}$
- 进一步  $f_0 = 1 + b, f_1 = \frac{(1+y)b}{2} + \frac{(1-y)\sqrt{d}}{2}$ ，显然  $y$  取 1 好算
- 由  $s, t$  是方程  $x^2 - px - q = 0$  的两根，于是  $p = b, q = \frac{d-b^2}{4}$
- 矩阵乘法算出  $f_n$ ， $s^n = f_n - t^n$ ，其中  $-1 < t \leq 0$

# 特征方程

- 例题：求  $\lfloor (\frac{b+\sqrt{(d)}}{2})^n \rfloor \pmod{7528443412579576937}$
- 将上式还原成一个递推式，设其通项公式为  $f_n = xs^n + yt^n$
- 则  $x = 1, s = \frac{b+\sqrt{(d)}}{2}, t = \frac{b-\sqrt{(d)}}{2}$
- 进一步  $f_0 = 1 + b, f_1 = \frac{(1+y)b}{2} + \frac{(1-y)\sqrt{d}}{2}$ ，显然  $y$  取 1 好算
- 由  $s, t$  是方程  $x^2 - px - q = 0$  的两根，于是  $p = b, q = \frac{d-b^2}{4}$
- 矩阵乘法算出  $f_n$ ， $s^n = f_n - t^n$ ，其中  $-1 < t \leq 0$
- 如果  $d \neq b^2$  and  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ，则  $ans = f_n - 1$ ，否则  $ans = f_n$

- 1 线性递推
- 2 矩阵乘法
- 3 数论相关
- 4 高斯消元
- 5 Noip数学题

# 计算公式

# 计算公式

- $(A * B)[i][j] = \sum_{k=1}^n A[i][k] * B[k][j]$

# 计算公式

- $(A * B)[i][j] = \sum_{k=1}^n A[i][k] * B[k][j]$
- 时间复杂度  $O(n^3)$



# 优化线性递推

# 优化线性递推

- 线性递推: 形如  $f_n = \sum_{i=1}^k a_i * f_{n-i}$

# 优化线性递推

- 线性递推: 形如  $f_n = \sum_{i=1}^k a_i * f_{n-i}$
- 时间复杂度  $O(k^3 \log n)$

# 优化线性递推

- 线性递推: 形如  $f_n = \sum_{i=1}^k a_i * f_{n-i}$
- 时间复杂度  $O(k^3 \log n)$
- 当  $k$  较小但  $n$  很大的时候使用

# 优化动态规划

# 优化动态规划

- 形如 $f[i][j] = \sum_{k=1}^n f[i][k] * g[k][j]$ 的动态规划

# 优化动态规划

- 形如 $f[i][j] = \sum_{k=1}^n f[i][k] * g[k][j]$ 的动态规划
- 时间复杂度 $O(n^3 \log m)$

# 优化动态规划

- 形如 $f[i][j] = \sum_{k=1}^n f[i][k] * g[k][j]$ 的动态规划
- 时间复杂度 $O(n^3 \log m)$
- 例题：HNOI GT考试



# 矩阵乘法与图论

# 矩阵乘法与图论

- floyd算法判断两点是否联通  $L[i][j] = \sum_{k=1}^n L[i][k] \&\& L[k][j]$

# 矩阵乘法与图论

- floyd算法判断两点是否联通  $L[i][j] = \sum_{k=1}^n L[i][k] \&\& L[k][j]$
- 时间复杂度  $O(n^3)$

# 矩阵乘法与图论

- floyd算法判断两点是否联通  $L[i][j] = \sum_{k=1}^n L[i][k] \&\& L[k][j]$
- 时间复杂度  $O(n^3)$
- 判断两点是否可以经过  $k$  条边到达：矩阵乘法

# 矩阵乘法与图论

- floyd算法判断两点是否联通  $L[i][j] = \sum_{k=1}^n L[i][k] \&\& L[k][j]$
- 时间复杂度  $O(n^3)$
- 判断两点是否可以经过  $k$  条边到达：矩阵乘法
- 时间复杂度  $O(n^3 \log k)$

# 矩阵乘法与图论

- floyd算法判断两点是否联通  $L[i][j] = \sum_{k=1}^n L[i][k] \&\& L[k][j]$
- 时间复杂度  $O(n^3)$
- 判断两点是否可以经过  $k$  条边到达：矩阵乘法
- 时间复杂度  $O(n^3 \log k)$

# 矩阵乘法与图论

# 矩阵乘法与图论

- 例题: 给出一张  $n \leq 20, m \leq 60$  的图, 问你在图上走  $t$  条边(相邻两次走过的边不能相同)之后从  $A$  到  $B$  的方案数



# 矩阵乘法与图论

- 例题: 给出一张 $n \leq 20, m \leq 60$ 的图, 问你在图上走 $t$ 条边(相邻两次走过的边不能相同)之后从 $A$ 到 $B$ 的方案数
- 由于相邻两次走过的边不能相同, 所以要转化边与点的关系

# 矩阵乘法与图论

- 例题: 给出一张 $n \leq 20, m \leq 60$ 的图, 问你在图上走 $t$ 条边(相邻两次走过的边不能相同)之后从 $A$ 到 $B$ 的方案数
- 由于相邻两次走过的边不能相同, 所以要转化边与点的关系
- 即边化为点, 点化为边

# 矩阵乘法与图论

- 例题: 给出一张  $n \leq 20, m \leq 60$  的图, 问你在图上走  $t$  条边(相邻两次走过的边不能相同)之后从  $A$  到  $B$  的方案数
- 由于相邻两次走过的边不能相同, 所以要转化边与点的关系
- 即边化为点, 点化为边
- 矩阵乘法即可

# 其他

# 其他

- 见我博客

# 其他

- 见我博客
- <http://blog.csdn.net/cuso45h20/article/details/53439641>

- 1 线性递推
- 2 矩阵乘法
- 3 数论相关
- 4 高斯消元
- 5 Noip数学题

# 素数

- 线性筛  $O(n)$



# 素数

- 线性筛  $O(n)$

# 欧拉函数

# 欧拉函数

•  $x = \prod_{i=1}^t p_i^{a_i}$ , 其中  $p_i$  是质数, 则  $\phi(x) = x \prod_{i=1}^t (1 - \frac{1}{p_i})$

# 欧拉函数

- $x = \prod_{i=1}^t p_i^{a_i}$ , 其中  $p_i$  是质数, 则  $\phi(x) = x \prod_{i=1}^t (1 - \frac{1}{p_i})$
- 积性函数: 如果  $\gcd(a, b) = 1$ , 则  $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$

# 欧拉函数

- $x = \prod_{i=1}^t p_i^{a_i}$ , 其中  $p_i$  是质数, 则  $\phi(x) = x \prod_{i=1}^t (1 - \frac{1}{p_i})$
- 积性函数: 如果  $\gcd(a, b) = 1$ , 则  $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$
- 求  $\phi(i), i \in [1, p]$ : 线性筛  $O(n)$

# 欧拉函数

- $x = \prod_{i=1}^t p_i^{a_i}$ , 其中  $p_i$  是质数, 则  $\phi(x) = x \prod_{i=1}^t (1 - \frac{1}{p_i})$
- 积性函数: 如果  $\gcd(a, b) = 1$ , 则  $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$
- 求  $\phi(i), i \in [1, p]$ : 线性筛  $O(n)$
- 欧拉定理, 如果  $\gcd(a, p) = 1$ , 则  $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$

# 最大公约数

# 最大公约数

- 欧几里得算法



# 最大公约数

- 欧几里得算法
- $O(\log n)$

# 最大公约数

- 欧几里得算法
- $O(\log n)$
- 更相减损术

# 最大公约数

- 欧几里得算法
- $O(\log n)$
- 更相减损术
- 例题Codevs2305 SuperGcd

# 乘法逆元

# 乘法逆元

- 拓展欧几里得算法  $O(\log n)$

# 乘法逆元

- 拓展欧几里得算法  $O(\log n)$
- 欧拉定理：如果  $\gcd(a, b) = 1$ ，则  $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$

# 乘法逆元

- 拓展欧几里得算法  $O(\log n)$
- 欧拉定理：如果  $\gcd(a, b) = 1$ ，则  $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$
- 线性求  $[1, p]$  的逆元

# 乘法逆元

- 拓展欧几里得算法  $O(\log n)$
- 欧拉定理：如果  $\gcd(a, b) = 1$ ，则  $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$
- 线性求  $[1, p]$  的逆元
- 线性求  $[1, p]$  阶乘的逆元：  $(x!)^{-1} \equiv (x+1)((x+1)!)^{-1} \pmod{p}$



# 一元一次同余方程

# 一元一次同余方程

- $ax \equiv b \pmod{c}$

# 一元一次同余方程

- $ax \equiv b \pmod{c}$
- 方程当且仅当  $\gcd(a, c) \mid b$  时有解

# 一元一次同余方程

- $ax \equiv b \pmod{c}$
- 方程当且仅当  $\gcd(a, c) \mid b$  时有解
- 解法：将方程转化为  $ax + cy = b$  的不定方程形式

# 一元一次同余方程

- $ax \equiv b \pmod{c}$
- 方程当且仅当  $\gcd(a, c) \mid b$  时有解
- 解法：将方程转化为  $ax + cy = b$  的不定方程形式
- 拓展欧几里得算法求解

# BSGS算法

# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数

# BSGS算法

- 求解 $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中 $p$ 是一个质数
- 利用暴力算法求出 $a^0 - a^m \pmod{p}$ 的值 (baby step)



# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数
- 利用暴力算法求出  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值 (baby step)
- 如果  $k \in [m, 2m)$  且  $k$  是解, 则  $a^{k-m} \equiv b * (a^m)^{-1} \pmod{p}$

# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数
- 利用暴力算法求出  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值 (baby step)
- 如果  $k \in [m, 2m)$  且  $k$  是解, 则  $a^{k-m} \equiv b * (a^m)^{-1} \pmod{p}$
- 把  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值存在哈希表中, 每次就可以  $O(1)$  判断 (giant step)

# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数
- 利用暴力算法求出  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值 (baby step)
- 如果  $k \in [m, 2m]$  且  $k$  是解, 则  $a^{k-m} \equiv b * (a^m)^{-1} \pmod{p}$
- 把  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值存在哈希表中, 每次就可以  $O(1)$  判断 (giant step)
- 显然  $m = \lceil \sqrt{p} \rceil$  时最优

# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数
- 利用暴力算法求出  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值 (baby step)
- 如果  $k \in [m, 2m]$  且  $k$  是解, 则  $a^{k-m} \equiv b * (a^m)^{-1} \pmod{p}$
- 把  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值存在哈希表中, 每次就可以  $O(1)$  判断 (giant step)
- 显然  $m = \lceil \sqrt{p} \rceil$  时最优
- 时间复杂度  $O(\sqrt{p})$

# BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 其中  $p$  是一个质数
- 利用暴力算法求出  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值 (baby step)
- 如果  $k \in [m, 2m]$  且  $k$  是解, 则  $a^{k-m} \equiv b * (a^m)^{-1} \pmod{p}$
- 把  $a^0 - a^m \pmod{p}$  的值存在哈希表中, 每次就可以  $O(1)$  判断 (giant step)
- 显然  $m = \lceil \sqrt{p} \rceil$  时最优
- 时间复杂度  $O(\sqrt{p})$
- 例题: Poj 2417 Discrete Logging (要手打hash表, map有T的风险)

# 拓展BSGS算法

# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数

# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数
- $a^x \equiv b \pmod{c}$



# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数
- $a^x \equiv b \pmod{c}$
- $p * a^x - q * c = b$

# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数
- $a^x \equiv b \pmod{c}$
- $p * a^x - q * c = b$
- 设  $d = \gcd(a^x, c)$

# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数
- $a^x \equiv b \pmod{c}$
- $p * a^x - q * c = b$
- 设  $d = \gcd(a^x, c)$
- $p * \frac{a^x}{d} - q * \frac{c}{d} = \frac{b}{d}$

# 拓展BSGS算法

- 求解  $a^x \equiv b \pmod{c}$ , 其中  $c$  不一定是质数
- $a^x \equiv b \pmod{c}$
- $p * a^x - q * c = b$
- 设  $d = \gcd(a^x, c)$
- $p * \frac{a^x}{d} - q * \frac{c}{d} = \frac{b}{d}$
- $\frac{a^x}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{c}{d}}$

# 拓展BSGS算法

# 拓展BSGS算法

- 我们设  $x = k + i$ ，并使得  $\gcd(a^i, c) = d$

# 拓展BSGS算法

- 我们设  $x = k + i$ ，并使得  $\gcd(a^i, c) = d$
- 那么  $a^k$  在模  $\frac{c}{d}$  下是存在逆元的

# 拓展BSGS算法

- 我们设  $x = k + i$ ，并使得  $\gcd(a^i, c) = d$
- 那么  $a^k$  在模  $\frac{c}{d}$  下是存在逆元的
- 再套用 *BSGS* 算法求解即可



## 拓展BSGS算法

- 我们设  $x = k + i$ ，并使得  $\gcd(a^i, c) = d$
- 那么  $a^k$  在模  $\frac{c}{d}$  下是存在逆元的
- 再套用BSGS算法求解即可
- 例题：Poj2417 Clever Y

# 孙子定理

- 解线性同余方程组:  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ , 其中  $m_i$  两两互质

# 孙子定理

- 解线性同余方程组:  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ , 其中  $m_i$  两两互质
- 令  $M = \prod_{i=1}^n m_i$ ,  $M_i = \frac{M}{m_i}$ ,  $t_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$

# 孙子定理

- 解线性同余方程组:  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ , 其中  $m_i$  两两互质
- 令  $M = \prod_{i=1}^n m_i$ ,  $M_i = \frac{M}{m_i}$ ,  $t_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$
- 则方程的解为  $x = \sum_{i=1}^n a_i t_i M_i$

# 组合数学

# 组合数学

- $$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

# 组合数学

- $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- 组合数递推:  $\binom{n}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m-1}$

# 组合数学与卡特兰数



# 组合数学与卡特兰数

- $$C[n] = \sum_{i=1}^{n-1} C[i] * C[n-i]$$

# 组合数学与卡特兰数

- $C[n] = \sum_{i=1}^{n-1} C[i] * C[n-i]$
- $C[n] = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$

# 组合数学与卡特兰数

- $C[n] = \sum_{i=1}^{n-1} C[i] * C[n-i]$
- $C[n] = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$
- $C[n] = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

# 组合数学与卡特兰数

- $C[n] = \sum_{i=1}^{n-1} C[i] * C[n-i]$
- $C[n] = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$
- $C[n] = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

# 组合数对质数取模

# 组合数对质数取模

- 根据  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , 用逆元解

# 组合数对质数取模

- 根据  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , 用逆元解
- Lucas定理:  $\binom{n}{m} \equiv \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \binom{n/p}{m/p}$

# 组合数对质数取模

- 根据  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , 用逆元解
- Lucas定理:  $\binom{n}{m} \equiv \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \binom{n/p}{m/p}$
- 例题: Codevs1830 古代猪文



# 组合数对任意数取模

# 组合数对任意数取模

- 线性筛+ 质因数分解+ 快速幂  $O(n\log n)$

# 组合数对任意数取模

- 线性筛+ 质因数分解+ 快速幂  $O(n\log n)$
- 例题：HNOI 有趣的数列

# 组合数对任意数取模

- 线性筛+ 质因数分解+ 快速幂  $O(n\log n)$
- 例题：HNOI 有趣的数列

# 组合数对任意数取模

# 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解，将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组：
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$

## 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解，将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组：
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$
- 最后将同余方程组用孙子定理合并

## 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解，将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组：  
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$
- 最后将同余方程组用孙子定理合并
- 注意计算 $\binom{x}{y} \pmod{m_i}$ 时，因为 $m_i$ 可能不是质数，所以要把阶乘打开



## 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解, 将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组:  
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$
- 最后将同余方程组用孙子定理合并
- 注意计算 $\binom{x}{y} \pmod{m_i}$ 时, 因为 $m_i$ 可能不是质数, 所以要把阶乘打开
- $x! = 1 * 2 * 3 * \dots * p * (p+1) * (p+2) * \dots * (2p) * \dots$ , 每 $p$ 位分一组递归处理

## 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解, 将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组:  
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$
- 最后将同余方程组用孙子定理合并
- 注意计算 $\binom{x}{y} \pmod{m_i}$ 时, 因为 $m_i$ 可能不是质数, 所以要把阶乘打开
- $x! = 1 * 2 * 3 * \dots * p * (p+1) * (p+2) * \dots * (2p) * \dots$ , 每 $p$ 位分一组递归处理
- 时间复杂度 $O(\log n \log p)$

## 组合数对任意数取模

- 将模数 $p$ 质因数分解，将 $x \equiv \binom{x}{y} \pmod{p}$ 打开成 $n$ 个同余方程组：
$$x \equiv \binom{x}{y} \pmod{m_i}$$
- 最后将同余方程组用孙子定理合并
- 注意计算 $\binom{x}{y} \pmod{m_i}$ 时，因为 $m_i$ 可能不是质数，所以要把阶乘打开
- $x! = 1 * 2 * 3 * \dots * p * (p+1) * (p+2) * \dots * (2p) * \dots$ ，每 $p$ 位分一组递归处理
- 时间复杂度 $O(\log n \log p)$
- 例题：Codevs 礼物

- 1 线性递推
- 2 矩阵乘法
- 3 数论相关
- 4 高斯消元**
- 5 Noip数学题

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵
- 当消第 $i$ 列的时，在第 $i - n$ 行中找出该列的最大值，交换这两行

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵
- 当消第 $i$ 列的时，在第 $i - n$ 行中找出该列的最大值，交换这两行
- 将第 $i$ 行的第 $i$ 个元素消成1，并将其他列的元素消成0



# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵
- 当消第 $i$ 列的时，在第 $i - n$ 行中找出该列的最大值，交换这两行
- 将第 $i$ 行的第 $i$ 个元素消成1，并将其他列的元素消成0
- $n$ 次之后矩阵就只有对角线的地方有值了

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵
- 当消第 $i$ 列的时，在第 $i - n$ 行中找出该列的最大值，交换这两行
- 将第 $i$ 行的第 $i$ 个元素消成1，并将其他列的元素消成0
- $n$ 次之后矩阵就只有对角线的地方有值了
- 注意：不要忘记第 $n + 1$ 列的元素

# 解方程组

- 网上有很多的解法都是转化成上三角矩阵，我这里就不说了
- 我的做法是将其转化为一个仅在对角线上有值的矩阵
- 当消第 $i$ 列的时，在第 $i - n$ 行中找出该列的最大值，交换这两行
- 将第 $i$ 行的第 $i$ 个元素消成1，并将其他列的元素消成0
- $n$ 次之后矩阵就只有对角线的地方有值了
- 注意：不要忘记第 $n + 1$ 列的元素
- 例题：Bzoj1013 球形空间产生器

# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上

# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上
- 其实线性基就是一个集合 $S$ ，满足对于 $S$ 的任意子集奇异或和不为0

# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上
- 其实线性基就是一个集合 $S$ ，满足对于 $S$ 的任意子集奇异或和不为0
- 利用 $a \wedge b = c \Leftrightarrow a \wedge c = b$ ,所以按二进制位从高到低构造

# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上
- 其实线性基就是一个集合 $S$ ，满足对于 $S$ 的任意子集奇异或和不为0
- 利用 $a \wedge b = c \Leftrightarrow a \wedge c = b$ ,所以按二进制位从高到低构造
- 如果欲将 $x$ 插入到线性基 $P$ 中， $x$ 最高位为 $i$ ，如果 $P_i$ 有值，那么令 $x \wedge P_i$

# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上
- 其实线性基就是一个集合 $S$ ，满足对于 $S$ 的任意子集奇异或和不为0
- 利用 $a \wedge b = c \Leftrightarrow a \wedge c = b$ ,所以按二进制位从高到低构造
- 如果欲将 $x$ 插入到线性基 $P$ 中， $x$ 最高位为 $i$ ，如果 $P_i$ 有值，那么令 $x \wedge P_i$
- 继续，直到 $P_i$ 没有值或者 $x = 0$ ，(如果 $P_i$ 没有值则令 $P_i = x$ )



# 线性基

- 又称极大线性无关组，名字高大上
- 其实线性基就是一个集合 $S$ ，满足对于 $S$ 的任意子集奇异或和不为0
- 利用 $a \wedge b = c \Leftrightarrow a \wedge c = b$ ,所以按二进制位从高到低构造
- 如果欲将 $x$ 插入到线性基 $P$ 中， $x$ 最高位为 $i$ ，如果 $P_i$ 有值，那么令 $x \wedge P_i$
- 继续，直到 $P_i$ 没有值或者 $x = 0$ ，(如果 $P_i$ 没有值则令 $P_i = x$ )
- 例题：Hdu4939 , Bzoj2640

- ① 线性递推
- ② 矩阵乘法
- ③ 数论相关
- ④ 高斯消元
- ⑤ Noip数学题

# Noip2011计算系数

- 给出多项式 $(ax + by)^k$ ，求将其展开后 $x^n y^m$ 的系数

# Noip2011计算系数

- 给出多项式 $(ax + by)^k$ ，求将其展开后 $x^n y^m$ 的系数
- 二次项定理： $ans = a^n b^m * \binom{k}{m}$

# Noip2011计算系数

- 给出多项式 $(ax + by)^k$ ，求将其展开后 $x^n y^m$ 的系数
- 二次项定理： $ans = a^n b^m * \binom{k}{m}$
- 组合数部分递推和逆元均可

# Noip2012同余方程

- 给出  $a, b$ , 求  $ax \equiv 1(mod\ b)$  的最小整数解

# Noip2012同余方程

- 给出  $a, b$ , 求  $ax \equiv 1(mod\ b)$  的最小整数解
- 拓展欧几里得算法

# Noip2013转圈游戏

- $n$ 个人，编号 $0 - n - 1$ ，每一轮第 $i$ 个位置的人走到顺时针走 $m$ 个位置， $10^k$ 轮后，原编号为 $x$ 的人走到了哪里



# Noip2013转圈游戏

- $n$ 个人，编号 $0 - n - 1$ ，每一轮第 $i$ 个位置的人走到顺时针走 $m$ 个位置， $10^k$ 轮后，原编号为 $x$ 的人走到了哪里
- $ans = (x + m * 10^k)(mod\ n)$

# Noip2013转圈游戏

- $n$ 个人，编号 $0 - n - 1$ ，每一轮第 $i$ 个位置的人走到顺时针走 $m$ 个位置， $10^k$ 轮后，原编号为 $x$ 的人走到了哪里
- $ans = (x + m * 10^k)(mod\ n)$
- 快速幂就可以了

# Noip2014解方程

- 求方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ , 求  $x$  在  $[1, m]$  内的所有整数解

# Noip2014解方程

- 求方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ ，求  $x$  在  $[1, m]$  内的所有整数解
- 模意义下的哈希：如果  $x_0$  是方程的一个整数解，那么  $x_0$  也是方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i \equiv 0 \pmod{p}$  的整数解

# Noip2014解方程

- 求方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ ，求  $x$  在  $[1, m]$  内的所有整数解
- 模意义下的哈希：如果  $x_0$  是方程的一个整数解，那么  $x_0$  也是方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i \equiv 0 \pmod{p}$  的整数解
- 我们可以选取几个质数  $p$ ，求其在  $[1, p]$  的整数根即可

# Noip2014解方程

- 求方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ , 求  $x$  在  $[1, m]$  内的所有整数解
- 模意义下的哈希: 如果  $x_0$  是方程的一个整数解, 那么  $x_0$  也是方程  $\sum_{i=0}^n a_i x^i \equiv 0 \pmod{p}$  的整数解
- 我们可以选取几个质数  $p$ , 求其在  $[1, p]$  的整数根即可
- 注意整数根要多取几个(或者去网上找), 比如说  $x = 2$  不是  $2x^2 = 0$  的整数根, 但却是  $2x^2 \equiv 0 \pmod{8}$  的整数根