Ćwiczenia 3

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

Tworzymy mac. rozszerzoną

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Krok 1 $\quad w_2' = w_2 - \frac{1}{2} w_1 \quad , \quad w_3' = w_3 + \frac{1}{2} w_1$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

Krok 2

$$w_3' = w_3 + \frac{3}{2} w_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \qquad \frac{1}{4} x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$x_3 = -1$$

$$-2x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1)$$

$$-2x_2 = -\frac{8}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 = 3 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)$$

$$2x_1 = 3 - 4 + 3 \qquad 2x_1 = 2 \qquad x_1 = 1$$

Gauss - Jordan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A^T}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I $w_1' = \frac{1}{2}w_1$, $w_2' = w_2 - w_1'$, $w_3' = w_3 + w_1'$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2\frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

II $w_2' = \left(\frac{1}{2}w_2\right)$ $w_1' = w_1 - w_2'$ $w_3' = w_3 - 3w_2'$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Metoda Gaussa - Dolittle'a

$A = LU$

$Ax = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b$

I

$Ly = b \Rightarrow y = L^{-1}b$

$Ux = y \Rightarrow x = U^{-1}y$

Rozkład LU istnieje o ile wszystkie minory główne kątowe są różne od 0.

Minor gł - wyznacznik spod macierzy

$$A_{[m-i] \times [m-i]} \quad i = 1, 2, \dots m-1$$

Aby rozkład był jednoznaczny zakłada się, że wszystkie elem. przekątnej macierzy m (met G-D) lub U (met G-C) są równe 1

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad \text{dla } j \in \{i, i+1, \dots, n\}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) \quad \text{dla } j \in \{i+1, \dots, n\}$$

$$\begin{array}{cc} L & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

Rozłożyć macierz na iloczyn macierzy trójkątnej

$W_1 = |2| = 2$

$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ wszystkie są $\neq 0$ więc rozkład istnieje

$\det(A) = -2 + 6 - (3+2) = -1 \neq 0$

$i=1$ $\quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{i-1} = 2$

$j=1$ $\quad u_{12} = a_{12} = 2$

$j=2$

$j=3$ $\quad u_{13} = a_{13} = 3$

$j=2$ $\quad l_{21} = \frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{21}) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$j=3$ $\quad l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \cdot a_{31} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$

$i=2$

$j=2$ $\quad u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1=1} l_{2k} u_{k2} = a_{22} - l_{21} u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$

$j=3$ $\quad u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$

$j=3$ $\quad l_{32} = \frac{1}{u_{22}} (a_{32} - l_{31} u_{12}) = \frac{1}{2} \left[2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\right] = -\frac{1}{2} (2+1) = -\frac{3}{2}$

$i=3$ $\quad u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1=2} l_{3k} u_{k3} = a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}) = 1$

$j=3$