ćwiczenia 4

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=b}$$

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

Tworzymy mac. rozszerzoną

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Krok 1 $\quad w_2' = w_2 - \frac{1}{2} w_1 \quad , \quad w_3' = w_3 + \frac{1}{2} w_1$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

Krok 2

$w_3' = w_3 + \frac{3}{2} w_2$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \quad \frac{1}{4}x_3 = -\frac{1}{4}$$

$x_3 = -1$

$-2x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1)$

$-2x_2 = -\frac{8}{2}$

$x_2 = 2$

$2x_1 = 3 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)$

$2x_1 = 3 - 4 + 3 \qquad 2x_1 = 2 \qquad x_1 = 1$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gaussa-Jordana

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A^T}$$

I $w_1' = \frac{1}{2}w_1$, $w_2' = w_2 - w_1'$, $w_3' = w_3 + w_1'$

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2\frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

II $w_2' = \left(\frac{1}{2}w_2\right)$ $w_1' = w_1 - w_2'$ $w_3' = w_3 - 3w_2'$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Metoda Gaussa-Dolittle'a

$A = LU$

$Ax = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b$

I

$Ly = b \Rightarrow y = L^{-1}b$

$Ux = y \Rightarrow x = U^{-1}y$

Rozkład LU istnieje o ile wszystkie minory główne kątowe są różne od 0.

Minor gł - wyznacznik spod macierzy

$$A_{\{m-i\}\times\{n-i\}} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

Aby rozkład był jednoznaczny zakłada się, że wszystkie elem. przekątnej macierzy m (met G-D) lub U (met G-C) są równe

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad \text{dla } j \in \{i, i+1, \dots, n\}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) \quad \text{dla } j \in \{i+1, \dots, n\}$$

$$\begin{array}{cc} L & U \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

Roztożyć macierz na iloczyn macierzy trójkątnej

$W_1 = |2| = 2$

$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ wszystkie są $\neq 0$ więc rozkład istnieje

$\det(A) = -2 + 6 - (3+2) = -1 \neq 0$

$i=1$ $\quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{i-1} = 2$

$j=1$ $\quad u_{12} = a_{12} = 2$

$j=2$

$\quad u_{13} = a_{13} = 3$

$j=3$ $\quad l_{21} = \frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{21}) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$j=2$

$j=3$ $\quad l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \cdot a_{31} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$

$i=2$

$j=2$ $\quad u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{2-1=1} l_{2k} u_{k2} = a_{22} - l_{21} u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$

$j=3$ $\quad u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$

$j=3$ $\quad l_{32} = \frac{1}{u_{22}} (a_{32} - l_{31} u_{12}) = \frac{1}{2} \left[2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \right] = -\frac{1}{2} (2+1) = -\frac{3}{2}$

$i=3$ $\quad u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{3-1=2} l_{3k} u_{k3} = a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}) = 1$

$j=3$

Ćwiczenia 5

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & /: a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & /: a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & /: a_{nn} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \dots - \frac{a_{1n}}{a_n}x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{11}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nnn}} - \frac{a_{n1}}{a_n}$$

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad d_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$$

$i = 1, 2, \dots, n \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad i \neq j$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots d_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 + d_{21}x_1 + d_{23}x_3 + \dots d_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n = c_n + d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + d_{n3}x_3 + \dots \end{cases}$$

metoda Jacobiego

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x = C + Dx$$

$$x^{(k+1)} = C + Dx^{(k)}$$

$$\bigwedge_{i \in \{1, 2, \dots n\}} |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\bigwedge_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Rozwiązać ukł. r. metodą iteracji zbieżnych

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$|3| > |1| + |-1|$

$|5| > |-1| + |-1|$

$|8| > |2| + |4|$

$x^{(k+1)} = C + D_x^{(k)}$

$x^{(0)} = C \vee x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \quad |:3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \quad |:5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2 \quad |:8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x \\ x_2 = 2 + \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1/3 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1/5 \\ -1/4 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = C + D\, x^{(0)}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & \frac{1}{3} \\ 1/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} +$$

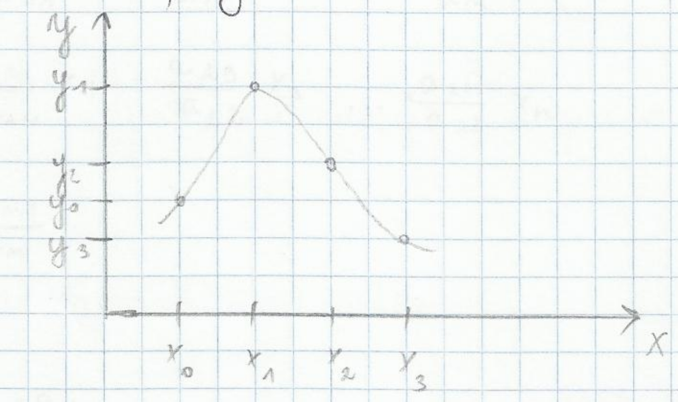
$$+ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{20} \\ \frac{1}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ 9/20 \\ -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{12} \\ \frac{49}{20} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = C + D x^{(1)}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1/4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17/12 \\ 49/20 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 0.7667 \\ 2.0333 \\ -1.3292 \end{bmatrix}$$

Interpolacja - przybliżenie funkcji zachowujące wartość między funkcją którą chcemy przybliżyć a f. przybliżającą

$$f(x) : f(x_n) = y^n \qquad n = 0, 1, .., n$$



$(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$W_m(x) = \sum_{i=0}^{m} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_m)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_m)}$$

$(-2,1), (0,-2), (1,2), (3,1)$

$$W_m(x) = 1 \cdot \frac{\cancel{(x+2)}(x)(x-1)(x-3)}{\cancel{(-2+2)}(-2)(-2-1)(-2-3)} - 2 \cdot \frac{(x+2)\cancel{(x)}(x-1)(x-3)}{(0+2)\cancel{(0-0)}(0-1)(0-3)} +$$

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	3
y_i	1	-2	2	1

$$+ 2 \frac{(x+2)(x)\cancel{(x-1)}(x-3)}{(1+2)(1-0)\cancel{(1-1)}(1-3)} + 1 \frac{(x+2)(x)(x-1)\cancel{(x-3)}}{(3+2)(3-0)(3-1)\cancel{(3-3)}}$$