UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

Um Enigma das Galáxias
Trabalho 1

Bruno dos Santos, **NUSP 10786170**
brunosantos.cps@usp.br

Henrique de S. Q. dos Santos, **NUSP 10819029**
henriquesqs@usp.br

Paulo H. da Silva, **NUSP 10734515**
henrique_phs117@usp.br

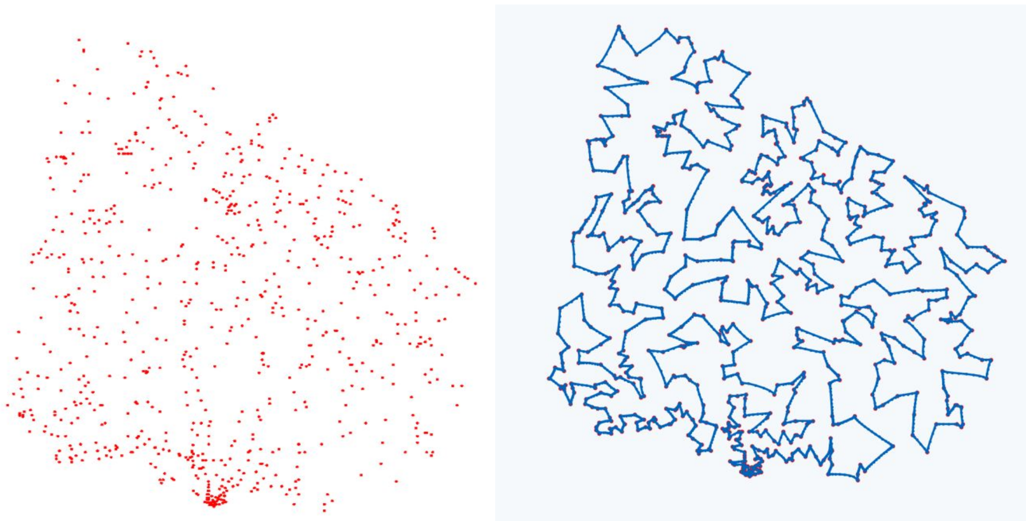
Witor M. A. de Oliveira, **NUSP 10692190**
witor.mao@usp.br

São Carlos
2020

Sumário

1. Introdução

O tema do caixeiro viajante trata-se de um problema antigo que surgiu em meados do século XVII, sendo que só em 1930 os matemáticos universitários começaram a estudá-lo [1]. O problema do caixeiro viajante consiste na procura de um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, visitando cada cidade precisamente uma vez e regressando à cidade inicial. Abaixo, um exemplo de grafo usado nesse problema:



Grafo das 743 cidades do Uruguai, antes e após a resolução do caixeiro viajante.

Para esse trabalho, foi proposta a resolução do tema Enigma das Galáxias. Esse tema é uma derivação do problema original, onde a diferença é que um astrônomo observa o céu a procura de uma supernova, e para isso ele deseja mover o telescópio o mínimo possível já que ele é frágil e difícil de trabalhar. Portanto, esse astrólogo precisa ordenar as galáxias de forma a retornar o menor trajeto possível.

2. Descrição das variáveis

Para resolvermos o problema do Enigma das Galáxias, modelamos o problema da seguinte forma, seguindo a ideia do clássico problema do Caixeiro Viajante:

Função objetivo: $min\ z = \sum_{(i,j)\ \varepsilon\ G} D_{ij} \times p_{ij},\ i \neq j$

Sujeito à:

- $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,\ j = 1, ..., n$ (1)
- $\sum_{j=1}^{n} p_{ji} = 1,\ j = 1, ..., n$ (2)
- $\sum_{i,j\ \varepsilon\ g} p_{ij} = |g|,\ i \neq j$ (3)
- $p_{ij} + p_{ji} \leq 1$ (4)
- $p_{ij} \in \{0, 1\},\ \forall\ i,j \in G$ (5)
- $|g| > 2$ (6)

Onde:

- D_{ij} é o custo de visitar a galáxia j a partir de i, calculado a partir da distância euclidiana entre as coordenadas (x,y) da Galáxia i e da Galáxia j;
- $p_{ij} = 1$, se a aresta (i,j) for escolhida como caminho;
- $p_{ij} = 0$, caso contrário;
- g é um subconjunto do conjunto de galáxias G;
- $|g|$ é o número de galáxias do subconjunto g;

E:

1. A restrição (1) indica que só podemos chegar em j a partir de uma aresta, ou seja, nunca visitaremos j mais de uma vez;
2. A restrição (2) indica que só podemos sair de uma cidade j uma vez;
3. A restrição (3) garante que todos os nós devem ser visitados;
4. A restrição (4) determina que uma aresta é percorrida no máximo vez;
5. A restrição (5) determina que a variável p seja binária, ou seja, só assume o valor 0 ou 1;

6. A restrição (6) determina que o número de galáxias em G deve ser de, pelo menos, 3;
7. *A restrição (7) determina que o custo de visitar uma Galáxia i estando em i seja grande o suficiente para que essa aresta não seja considerada.*

3. Problema exemplo

3.1 Descrição

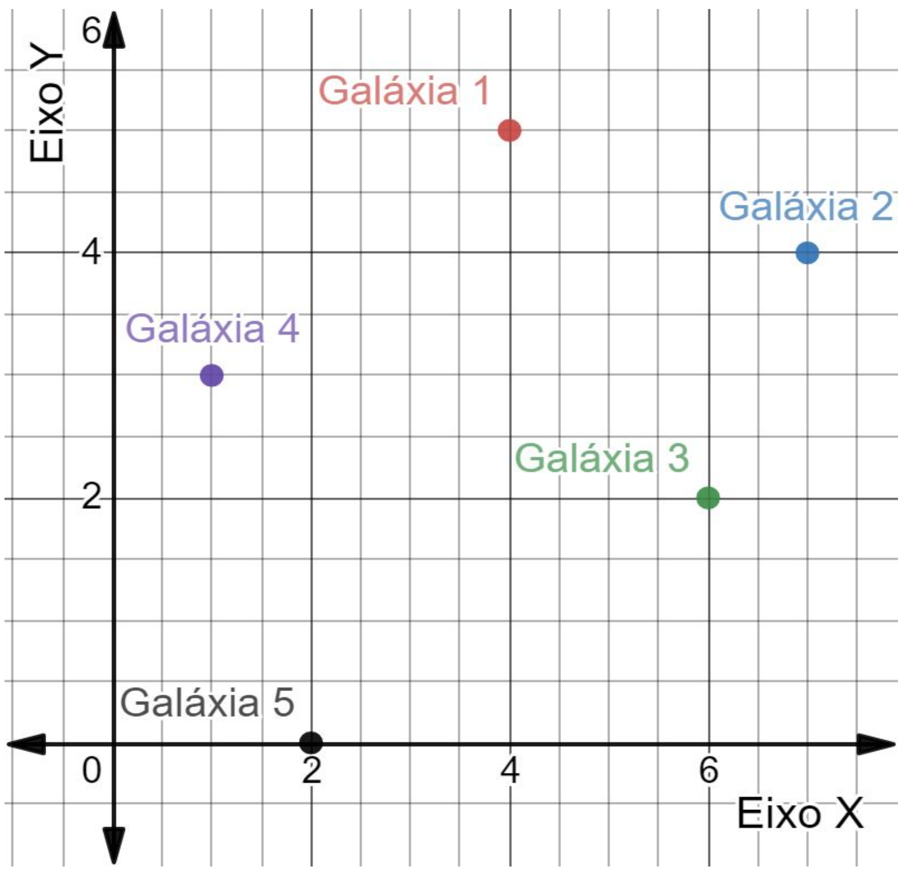
Para testarmos o funcionamento do nosso modelo, criamos um exemplo contendo apenas **5 galáxias** (Galáxia 1, …, Galáxia 5) definidas no plano cartesiano, onde as coordenadas (x,y) de cada uma são mostradas a seguir e representadas no gráfico logo em seguida. Seguindo o problema do caixeiro viajante, definimos que a partir de uma galáxia, podemos chegar em qualquer outra, ou seja, se tratarmos as Galáxias como vértices de um Grafo, temos um grafo completo com 20 arestas.

Para tal exemplo, buscamos o menor trajeto partindo da Galáxia 1 que visitasse todas as outras Galáxias e retornasse para o início (Galáxia 1), como é requisitado pela especificação do trabalho.

Coordenadas das Galáxias:

- Galáxia 1: (4,5)
- Galáxia 2: (7,4)
- Galáxia 3: (6,2)
- Galáxia 4: (1,3)
- Galáxia 5: (2,0)

Representação no plano:



Como mencionado anteriormente, tratamos o custo de visitar uma Galáxia j a partir de uma Galáxia i como sendo o resultado do cálculo da Distância Euclidiana entre as coordenadas das duas Galáxias. Assim, temos a tabela a seguir, onde o valor na linha i e na coluna j representa o custo da aresta (i, j). Para fins práticos, na tabela abaixo optamos por mostrar apenas duas casas decimais do resultado.

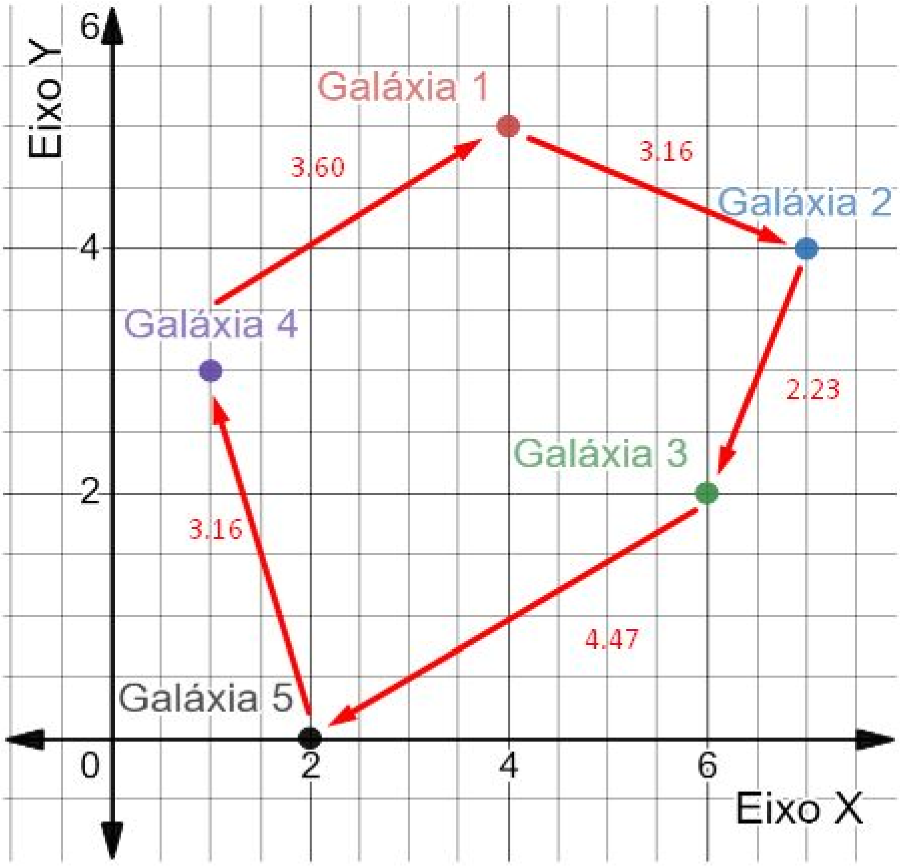
	Galáxia j				
Galáxia i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	3.16	3.60	3.60	5.38
1	3.16	0	2.23	6.08	6.40
2	3.60	2.23	0	5.09	4.72
3	3.60	6.08	5.09	0	3.16
4	5.38	6.40	4.47	3.16	0

3.2 Solução

Para resolvermos a modelagem matemática supracitada, foi utilizado o software de otimização ***Coin-OR PuLP***. Nele, é possível adicionar as variáveis do problema, as restrições e a função objetivo, bem como definir como um problema de minimização ou maximização.

3.3 Resultados

Abaixo, ilustramos graficamente o trajeto encontrado pelo *software* como sendo o de menor custo, bem como os pesos de cada aresta visitada:



Trajeto com menor custo encontrado: 16.62
Tempo de execução (aproximado): 0.00566 segundos

4. Referências

[1] Problema do caixeiro-viajante. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_caixeiro-viajante. Acesso em 07/11/2020.