Konvergenz in L^p-Räumen, Konvergenzsätze des Lebesgue-Integrals

Analyis 3

Wintesemester 2020

Sei stets $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

1 Konvergenzsätze: Lebesgue-Integral, L^p-Räume

Wir definieren noch einmal die grundlegenden Begriffe.

Definition 1 ($\mathscr{L}^p$-Räume)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, wir definieren

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty$$

und wir setzen $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_X |f|$. Dann definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_p < \infty\}$$

Dass $\|\cdot\|_p$ auf $\mathscr{L}^p(X)$ keine Norm ist, liegt daran, dass nicht $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ gilt.
Wir lösen dieses Problem.
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{L}^p(X)$ gegeben durch $f \sim g \iff f = g$ μ-fast-überall.
Dann definieren wir

$$L^p(X, \mu) := \mathscr{L}^p(X, \mu)/\sim$$

Zuerst zitieren wir die wichtigsten Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral

Satz 1 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** *Sei $f_k : X \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen mit*

1. *f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$*
2. *f_k monoton wachsend und $f_k \to f$ für $k \to \infty$*

Dann gilt, dass f messbar ist und

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f \ \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f \ \mathrm{d}\mu$$

Satz 2 (Satz von der dominierten Konvergenz)**.** *Sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar. Ferner gelte $\sup_k \|f_k\| \leq g$ für eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu$$

Bemerkung (Monotone Konvergenz in L^p). Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $f_n \in L^p(X)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gelte

1. $f_n \to f$ μ-fast-überall.

2. $f_n \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und μ-fast-überall für ein $g \in L^p(X)$

Dann gilt $f \in L^p(X)$ und $f_k \to f$ in $L^p(X)$.

Gegenbeispiel für $p = \infty$: Betrachte $(\mathbb{R}, \mathscr{L}^1, \lambda)$. Sei $f_k = \chi_{[k,k+1]}$, dann ist $f_k \to 0$ punktweise, es ist $f_k \leq 1 = g$ und $g \in L^\infty(X)$, aber es ist auch

$$\|f_k - 0\|_\infty = \|f_k\|_\infty = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

also gilt nicht $f_k \to 0$ in $L^\infty(X)$.

Lemma 1 (Hölder-Ungleichung)**.** *Sei $f \in \mathscr{L}^p(X)$ und $g \in \mathscr{L}^{p_*}(X)$ mit $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$ dann gilt*

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f|_p \cdot \|g\|_{p_*}$$

Lemma 2 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Für $1 \leq p \leq \infty$ seien $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$, dann gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dadurch wird $\|\cdot\|_p$ auf $\mathscr{L}^p(X)$ zu einer Seminorm.

2 Vergleich der Konvergenzbegriffe

Definition 2 (We're getting closer)**.** Wir führen die Konvergenzbegriffe alle auf. Sei dazu $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen und $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Wir sagen $f_n \to f$ konvergiert gleichmäßig, falls

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2. Wir sagen f_n konvergiert punktweise gegen f, falls

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \ \forall x \in X$$

3. f_n konvergiert gegen f punktweise μ-fast-überall, falls

$$\exists N \subset X : \mu(N) = 0 \text{ und } f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \ \forall x \in X \setminus N$$

4. f_n konvergiert im Maß μ, falls f_n, f messbar und für $\varepsilon > 0$ beliebig gilt

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

5. Für $f_n \in L^p(X)$ sagen wir, dass f_n in $L^p(X)$ konvergiert, falls

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   Insbesondere folgt dann $f \in L^p(X)$, da $\mathscr{L}^p(X)$ ein Banachraum ist.

Jetzt vergleichen wir die Konvergenzbegriffe. Seien $f_n, f : X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ messbar.

1. Falls $f_k \to f$ im Maß, dann existiert eine Teilfolge f_{kj} mit $f_{kj} \to f$ μ-fast-überall.
   Gilt die Umkehrung? Im Allgemeinen können wir auch nicht sagen, dass $f_n \to f$ punktweise, denn:
   Sei $f_1 = \chi_{[0,1]}$ und wir definieren $f_{kj} = \chi_{[j/k,(j+1)/k]}$, $j = 0, \dots, k-1$. Dann nummerieren wir die f_{kj} als f_n und es gilt $f_n \to 0$ im Lebensguemaß, aber es gilt nicht $f_n \to 0$ punktweise.

2. Falls $\mu(X) < \infty$, dann gilt: $f_k \to f$ μ-fast-überall, so folgt $f_k \to f$ im Maß.
   Im Allgemeinen gilt das nicht. Sei $X = \mathbb{R}$ mit Lebensgue-Maß. Sei $f_k = \chi_{[k,k+1]}$, dann ist $f_k \to 0$ punktweise, also insbesondere punktweise μ-fast-überall, aber es ist

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x)| > \varepsilon\}) = \begin{cases} \mu([k, k+1] = 1, & \varepsilon < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Also liegt für $\varepsilon < 1$ keine Konvergenz im Maße vor.

Endliche Maßräume:

- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ Konvergenz in L^p, für alle $p \in [1, \infty]$ $\implies$ Konvergenz im Maß
- Konvergenz in L^p $\implies$ Konvergenz in L^q für $1 \leq q \leq p$

Insbesondere letzteres gilt **nicht** in allgemeinen Maßräumen!
Allgemeine Maßräume:

- Konvergenz im Maß ist schwächer als jede L^p-Konvergenz, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ für ein } p \in [1, \infty] \implies f_n \to f \text{ im Maß } \mu$$

- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ punktweise Konvergenz $\implies$ punktweise fast-überall Konvergenz
- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ Konvergenz in L^∞ $\implies$ punktweise fast-überall