Integrationstheorie in der Analysis 3

Wintersemester 2020

Seien stets $(X, \mathscr{A}, \mu)$ und $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ ein Maßräume.

1 Konvergenzsätze: Lebesgue-Integral, L^p-Räume

Wir definieren noch einmal die grundlegenden Begriffe.

Definition 1 ($\mathscr{L}^p$-Räume)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, wir definieren

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty$$

und wir setzen $\|f\|_\infty \coloneqq \operatorname{ess\,sup}_X |f|$. Dann definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_p < \infty\}$$

Dass $\| \cdot \|_p$ auf $\mathscr{L}^p(X)$ keine Norm ist, liegt daran, dass nicht $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ gilt. Wir lösen dieses Problem.
Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{L}^p(X)$ gegeben durch $f \sim g \iff f = g$ μ-fast-überall. Dann definieren wir

$$L^p(X, \mu) \coloneqq \mathscr{L}^p(X, \mu)/ \sim$$

Zuerst zitieren wir die wichtigsten Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral

Satz 1 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** *Sei $f_k : X \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen mit*

1. *f_k messbar für alle $k \in \mathbb{N}$*
2. *f_k monoton wachsend und $f_k \to f$ für $k \to \infty$*

Dann gilt, dass f messbar ist und

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f \ \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f \ \mathrm{d}\mu$$

Satz 2 (Satz von der dominierten Konvergenz). *Sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar. Ferner gelte* $\sup_k \|f_k\| \leq g$ *für eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu$$

Bemerkung (Monotone Konvergenz in L^p). Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $f_n \in L^p(X)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gelte

1. $f_n \to f$ μ-fast-überall.
2. $f_n \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und μ-fast-überall für ein $g \in L^p(X)$

Dann gilt $f \in L^p(X)$ und $f_k \to f$ in $L^p(X)$.

Gegenbeispiel für $p = \infty$: Betrachte $(\mathbb{R}, \mathscr{L}^1, \lambda)$. Sei $f_k = \chi_{[k,k+1]}$, dann ist $f_k \to 0$ punktweise, es ist $f_k \leq 1 = g$ und $g \in L^\infty(X)$, aber es ist auch

$$\|f_k - 0\|_\infty = \|f_k\|_\infty = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

also gilt nicht $f_k \to 0$ in $L^\infty(X)$.

Lemma 1 (Hölder-Ungleichung). *Sei $f \in \mathscr{L}^p(X)$ und $g \in \mathscr{L}^{p_*}(X)$ mit $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$ dann gilt*

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f|_p \cdot \|g\|_{p_*}$$

Lemma 2 (Minkowski-Ungleichung). *Für $1 \leq p \leq \infty$ seien $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$, dann gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dadurch wird $\|\cdot\|_p$ auf $\mathscr{L}^p(X)$ zu einer Seminorm.

2 Vergleich der Konvergenzbegriffe

Definition 2 (We're getting closer). Wir führen die Konvergenzbegriffe alle auf. Sei dazu $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen und $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Wir sagen $f_n \to f$ konvergiert gleichmäßig, falls

   $$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2. Wir sagen f_n konvergiert punktweise gegen f, falls

   $$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \ \forall x \in X$$

3. f_n konvergiert gegen f punktweise μ-fast-überall, falls

   $$\exists N \subset X : \mu(N) = 0 \text{ und } f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \ \forall x \in X \setminus N$$

4. f_n konvergiert im Maß μ, falls f_n, f messbar und für $\varepsilon > 0$ beliebig gilt

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

5. Für $f_n \in L^p(X)$ sagen wir, dass f_n in $L^p(X)$ konvergiert, falls

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   Insbesondere folgt dann $f \in L^p(X)$, da $\mathscr{L}^p(X)$ ein Banachraum ist.

Jetzt vergleichen wir die Konvergenzbegriffe. Seien $f_n, f : X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ messbar.

1. Falls $f_k \to f$ im Maß, dann existiert eine Teilfolge f_{kj} mit $f_{kj} \to f$ μ-fast-überall.
   Gilt die Umkehrung? Im Allgemeinen können wir auch nicht sagen, dass $f_n \to f$ punktweise, denn:
   Sei $f_1 = \chi_{[0,1]}$ und wir definieren $f_{kj} = \chi_{[j/k,(j+1)/k]}$, $j = 0, \dots, k-1$. Dann nummerieren wir die f_{kj} als f_n und es gilt $f_n \to 0$ im Lebensguemaß, aber es gilt nicht $f_n \to 0$ punktweise.

2. Falls $\mu(X) < \infty$, dann gilt: $f_k \to f$ μ-fast-überall, so folgt $f_k \to f$ im Maß.
   Im Allgemeinen gilt das nicht. Sei $X = \mathbb{R}$ mit Lebensgue-Maß. Sei $f_k = \chi_{[k,k+1]}$, dann ist $f_k \to 0$ punktweise, also insbesondere punktweise μ-fast-überall, aber es ist

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x)| > \varepsilon\}) = \begin{cases} \mu([k, k+1] = 1, & \varepsilon < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Also liegt für $\varepsilon < 1$ keine Konvergenz im Maße vor.

Endliche Maßräume:

- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ Konvergenz in L^p, für alle $p \in [1, \infty]$ $\implies$ Konvergenz im Maß
- Konvergenz in L^p $\implies$ Konvergenz in L^q für $1 \leq q \leq p$

Insbesondere letzteres gilt **nicht** in allgemeinen Maßräumen!
Allgemeine Maßräume:

- Konvergenz im Maß ist schwächer als jede L^p-Konvergenz, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ für ein } p \in [1, \infty] \implies f_n \to f \text{ im Maß } \mu$$

- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ punktweise Konvergenz $\implies$ punktweise fast-überall Konvergenz
- Gleichmäßige Konvergenz $\implies$ Konvergenz in L^∞ $\implies$ punktweise fast-überall

3 Fubini, Tonelli und Transformationsformel

Lemma 3 (Tonelli). *Seien* $(X, \mathscr{E}, \mu), (X, \mathscr{F}, \nu)$ *hier* σ*-endlich. Sei* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *bezüglich* $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ *messbare und* ***nicht-negative*** *Funktionen, dann gilt*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu(y)\end{aligned}$$

Falls also eine Funktion bezüglich der Produk-σ*-Algebra zweier Maßräume messbar ist, können wir die Integrationsreihenfolge vertauschen.*

Beispiel: Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x^4y^2$, dann ist f nichtnegativ und stetig, also insbesondere Borel-messbar, also gilt

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} 2x^4y^2\ \mathrm{d}\mathscr{L}^2 &= \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} 2x^4y^2\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]} 2x^4 \int_{[0,1]} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} 2x^4\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 \mathrm{d}x\\ &= \int [0,1] 2x^4\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{[0,1]} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

Satz 3 (Fubini). *Seien* $(X, \mathscr{E}, \mu), (X, \mathscr{F}, \nu)$ *hier* σ*-endlich. Sei* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *bezüglich* $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ *messbar, dann gilt*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} |f(x,y)|\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)\end{aligned}$$

Ist insbesondere eines der Integrale endlich, dann können die Betragsstriche weggelassen werden.

Satz 4 (Transformationsformel). *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $F \in L^1(V)$ *und sei* $\varphi \in C^1(U, V)$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus, dann gilt*

$$\left(\int_V F\ \mathrm{d}x =\right)\int_{\varphi(U)} F\ \mathrm{d}x = \int_U (F\circ\varphi)|\det(D\varphi)|\ \mathrm{d}x$$