Sachen, die Schmidti nicht ausführt

Wintersemester 2020

Satz 1 (1. Fortsetzungssatz)**.** *K ein Körper und $K' = K(a)$ ein einfache, algebraische Körpererweiterung von K mit Minimalpolynom $f \in K[X]$. Und sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus.*

(i) Ist $\sigma' : K' \to L$ ein Körperhomomorphismus, der σ fortsetzt, so gilt, dass $\sigma'(a) \in L$ eine Nullstelle von f^σ ist.

(ii) Sei $\beta \in L$ eine Nullstelle von f, so gibt es genau eine Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$ mit $\sigma'(a) = \beta$.

Satz 2 (2. Fortsetzungssatz)**.** *Sei $K \subset K'$ algebraisch und $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus und L sei algebraisch abgeschlossen, dann gibt es zu σ eine Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$.*

Lemma 1. *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung. Und seien $\alpha, \beta \in L$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(\alpha) = \alpha$, $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ und, dass $\sigma(\beta) \neq \beta$ und zwar für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann gilt*

(i) $L = K(\beta)$ und

(ii) $\alpha \in K$

Beweis. Wir betrachten die einfache Körpererweiterung $K(\beta) = K'$, dann gilt insbesondere, dass $\sigma|_{K'} \neq \mathrm{id}_{K'}$ falls $\sigma \neq \mathrm{id}_L$. Denn zumindest wird $\beta \in K'$ nicht auf sich selbst geschickt. Insbesondere ist also

$$\mathrm{Gal}(L/K') = \mathrm{Aut}_{K'}(L) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(L) : \sigma|_{K'} = \mathrm{id}_{K'}\} = \{\mathrm{id}_L\}$$

Der Fixkörper von $\mathrm{Gal}(L/K')$ ist also $L^{\{\mathrm{id}_L\}} = L$. Da die Zuordnungen aus dem Hauptsatz bijektiv sind, folgt $K' = K(\beta) = L$.
Zu (ii). Da $\sigma(\alpha) = \alpha$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ gilt, dass $\mathrm{Gal}(L/K(\alpha)) = \mathrm{Gal}(L/K)$ und nach dem Hauptsatz der Galoistheorie folgt das Resultat, weil

$$K(\alpha) = L^{\mathrm{Gal}(L/K(\alpha))} = L^{\mathrm{Gal}(L/K)} = K$$

Also $\alpha \in K$. $\square$

Lemma 2. *Sei L/K einfach, algebraisch. Also sei $a \in L$ mit $L = K(a)$ und $f \in K[X]$ sei das Minimalpolynom von a und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.*
Dann gilt, dass $[L : K]_s$ =Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in $\overline{K}$.

Beweis. Die „Umformulierung von Lemma 3.40" machen wir explizit. Sei nun $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f in $\overline{K}$. Wir können $K \hookrightarrow \overline{K}$ und erhalten nach 3.40(ii) eine eindeutige Fortsetzung der kanonischen Inklusion $\tau : K(a) \to \overline{K}$ mit $\tau(a) = \alpha$ und $\tau|_K = \mathrm{id}_K$. Dann ist τ ein K-Homomorphismus von $K(a) = L \to \overline{K}$ und somit erhalten wir aus jeder Nullstelle genau einen K-Homomorphismus $L \to \overline{K}$.
Sei nun $\sigma : L = K(a) \to \overline{K}$ ein K-Homomorphismus, dann ist σ durch seinen Wert auf a eindeutig festgelegt und mit dem Standardargument ist $\sigma(a)$ eine Nullstelle von f. Zu jedem K-Homomorphismus von $L \to \overline{K}$ erhalten wir also dadurch genau eine Nullstelle von f in $\overline{K}$. □

Proposition 1. Sei L/K normal und endlich mit $\operatorname{char} K = p > 0$. Dann ist L/K galoissch genau dann, wenn $\# \operatorname{Aut}_K(L) = [L : K]$.

Beweis. Es existiert ein eindeutig bestimmter Zwischenkörper K_i von L/K mit der Eigenschaft, dass K_i/K rein inseperanel und L/K_i separabel ist, weil L/K normal. Da L/K algberiasch ist, ist $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von K und wir erhalten

$$1 = [K_i : K]_s = \# \operatorname{Hom}_K(K_i, \overline{K}) = \# \operatorname{Hom}_K(K_i, \overline{L})$$

Daher git, dass $\operatorname{Hom}_K(K_i, \overline{L}) = \{K_i \hookrightarrow \overline{L}\}$. Sei nun $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$, dann betrachte man $\sigma|_{K_i} : K_i \to L$. Da $K \subset K_i$ und indem wir $L \hookrightarrow \overline{L}$, wird $\sigma|_{K_i}$ so zu einem Element von $\operatorname{Hom}_K(K_i, \overline{L})$, also ist $\sigma|_{K_i}$ fortgesetzt nach $\overline{L}$ die natürliche Inklusion von K_i nach $\overline{L}$, insbesondere ist $\sigma|_{K_i} = \mathrm{id}_{K_i}$.
Ferner gilt, dass $\# \operatorname{Aut}_K(L) = [L : K]_s$, denn jeder K-Automorphismus von L ist auf natürliche Weise ein K-Homomorphismus von $L \to \overline{L}$, was $\# \operatorname{Aut}_K(L) \leq [L : K]_s$ zeigt. Wegen der Normalität von L/K beschränkt sich aber jeder K-Homomorphismus von $L \to \overline{L}$ zu einem K-Automorphismus von L. Insbesondere liefern zwei verschiedene K-Homomorphismen von $L \to \overline{L}$ auch zwei verschiedene K-Automorphismen von L und es gilt Gleichheit. Ferner gilt

$$\# \operatorname{Aut}_K(L) = [L : K]_s = [L : K_i]_s \underbrace{[K_i : K]_s}_{=1} = [L : K_i] = [L : K_i][K_i : K] \leq [L : K]$$

Es ist $[K_i : K] = 1 \Leftrightarrow [L : K]_s = [L : K] \Leftrightarrow K = K_i \Leftrightarrow \# \operatorname{Aut}_K(L) = [L : K]$ und $[L : K]_s = [L : K]$ ist äquivalent dazu, dass L/K separabel ist. Wir haben also, dass L/K galoissch ist genau dann, wenn $\# \operatorname{Aut}_K(L) = [L : K]$. □

Proposition 2. Sei L/K galoissch und $L/E/K$ ein Zwischenkörper. Dann sind äquivalent:

(i) E/K ist normal.

(ii) Für alle $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$ gilt $\sigma(E) = E$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Sei $a \in E$ beliebig und sei $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset L$ die Menge der Nullstellen des Minimalpolynoms $f \in K[X]$ von a, wobei wir $a_1 := a$ definiert haben. f hat eine Nullstelle $a \in E$. Da E/K normal ist, zerfällt f über E vollständig. Also gilt $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset E$. Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ permutiert die Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ das heißt es gibt ein a_j mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(a_j) = a_1 = a$ und es gilt $\sigma(a) = a_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Die erste Aussage liefert $\sigma(E) \subset E$ und die zweite $E \subset \sigma(E)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei also $f \in K[X]$ irreduzbel und habe eine Nullstelle $a \in E$. Dann gibt es zu jeder weiteren Nullstelle $\beta \in L$ eine Fortsetzung $\sigma : K(a) \to K(\beta)$ (da L/K normal ist und $a \in E \subset L$ liegen alle Nullstellen von f in L) von der Inklusion $K \to K(\beta)$ mit $\sigma(a) = \beta$. σ setzt sich zu einem K-Homomorphismus $K(a) \to \overline{L}$ fort und nach 3.41 und da $L/K(\beta)$ algebraisch ist, setzt sich σ eindeutig zu einem K-Homomorphismus $L \to \overline{L}$ fort, der sich aufgrund der Normalität von L/K zu einem K-Automorphismus $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ beschränkt. Für dieses τ gilt dann $\tau|_{K(a)} = \sigma$ und insbesondere $\tau(a) = \beta$. Nun gilt (ii) und es folgt $\beta = \tau(a) \in E$. Da β beliebig war, liegen alle Nullstellen von f in E. Was zu zeigen war. $\square$