Topologie von $\mathbb{Z}_p$

Satz von Tychonoff

Sei $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Wir zeigen, dass $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ bezüglich der Produkttopologie kompakt ist. Kurze Reminder für die Begriffe:

Definition 1. Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ heißt kompakt, falls jede Überdeckung $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$ für $U_\alpha \in \mathscr{O}$ eine endliche (Teil-)Überdeckung hat.

Definition 2 (Erzeugte Topologie)**.** Sei $\mathfrak{S} \subset X$ eine Teilmenge, dann heißt

$$\mathscr{O}(\mathfrak{S}) := \left\{ \bigcup_{\alpha\in A} \bigcap_{i\in I_\alpha} S_i : A \text{ beliebig, } I_\alpha \text{endlich}, S_i \in \mathfrak{S}, \forall i \in I_\alpha, \alpha \in A \right\}$$

die von $\mathfrak{S}$ erzeugte Topologie, mit den Konventionen $\bigcap_{i\in\varnothing} M_i = X$ und $\bigcup_{i\in\varnothing} M_i = \varnothing$ ist klar, dass $\mathscr{O}(\mathfrak{S})$ eine Topologie ist. Sie ist ferner die kleinste Topologie, die alle Mengen aus $\mathfrak{S}$ enthält. Man nennt dann $\mathfrak{S}$ eine Subbasis von X.

Für eine Familie topologischer Räumen $(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ bezeichnen wir mit π_λ die Projektion von $X \to X_\lambda$.

Definition 3 (Produkttopologie)**.** Sei $(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ eine Familie topologischer Räumen. Auf $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ definieren wir eine Topologie. Sei zunäcsht

$$M := \{\pi_\lambda^{-1}(O_\lambda) : \lambda \in \Lambda, O \in \mathscr{O}_\lambda\}$$

und dann definieren wir die Produkttopologie als die von M erzeugte Topologie.

Ab jetzt sei X immer mit der Produkttopologie ausgestattet. Wir zeigen zunächst folgendes Lemma:

Lemma 1. *Seien X und X_λ für $\lambda \in \Lambda$ wie oben. Dann gilt: Jede offene Überdeckung durch Mengen der Form $\pi_\lambda^{-1}(O_\lambda)$ mit $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ hat eine endliche Überdeckung von X.*

Beweis. Sei $\mathscr{U}$ eine Überdeckung von X derart wie im Lemma beschrieben, wir definieren

$$\mathscr{C}_\lambda := \{O \in \mathscr{O}_\lambda : \pi_\lambda^{-1}(O) \in \mathscr{U}\}$$

Angenommen $\mathscr{C}_\lambda$ überdeckt nicht X_λ für alle $\lambda \in \Lambda$, dann gibt es ein $x_\lambda \in X_\lambda$ so dass x_λ kein Element der Vereinigung der Mengen aus $\mathscr{C}_\lambda$ ist, für alle $\lambda \in \Lambda$. Das Element $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ wird dann nicht von $\mathscr{U}$ überdeckt, sonst gäbe es ein $\lambda \in \Lambda$ und $O \in \mathscr{O}_\lambda$ mit $x \in \pi_\lambda^{-1}(O)$, dann ist aber $\pi_\lambda(x) = x_\lambda \in O \in \mathscr{C}_\lambda$, was ein Widerspruch dazu ist, dass x_λ kein Element der Vereinigung aus Mengen von $\mathscr{C}_\lambda$ ist.

Also gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ so dass $\mathscr{C}_\lambda$ nun X_λ überdeckt. Da X_λ kompakt ist, gibt es gewisse $O_1, \ldots, O_n \in \mathscr{O}_\lambda$ mit $X_\lambda = \bigcup_{i=1}^n O_i$. Dann ist $\pi_\lambda^{-1}(O_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ eine offene Überdeckung von X, denn sei $x = (x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ beliebig, dann ist $x_\lambda \in X_\lambda$ und es gibt ein O_j für $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_\lambda \in O_j$ und daher $x \in \pi_\lambda^{-1}(O_j)$. Dass die Überdeckung offen ist, folgt aus der Stetigket der Projektionen bezüglich der Produkttopologie. $\square$

Der Rest des Beweises beruht auf dem Konzept von *(Ultra-)Filtern*, die in einem gewissen Sinne den Begriff von Konvergenz auf topologische Räume verallgemeinern.

Definition 4. Ein System von Teilmengen $\mathcal{F}$ heißt Filter, falls

(i) Falls $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(ii) Falls $A \in \mathcal{F}$ und $B \supseteq A$, dann $B \in \mathcal{F}$.

(iii) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ ist ein maximaler Filter bezüglich der partiellen Ordnung $\subseteq$ auf der Menge aller Filter, das heißt, dass für alle Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Definition 5. Sei $(P, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, eine Kette ist eine Teilmenge $K \subset P$, sodass für alle $x, y \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Das Lemma von Zorn besagt, dass eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, ein maximales Element enthält.

Lemma 2. *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter und sei $\mathscr{U}$ die Menge aller Filter (offenbar durch $\subseteq$ eine halbgeordnete Menge), die $\mathcal{F}$ enthalten. Sei $\mathcal{C}$ eine Kette in $\mathscr{U}$. Dann ist

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}} \mathcal{G}$$

ein Filter und insbesondere eine obere Schranke von $\mathcal{C}$ (dass es ein Filter ist, sieht man sofort, wobei man beachtet, dass beim Nachweisen von (i) in der Definition explizit eingeht, dass $\mathcal{C}$ eine Kette ist). Nach dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element in $\mathscr{U}$. $\square$

Lemma 3. *Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf einem topologischen Raum X, dann gilt für alle $A \subset X$, dass etnweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Wären $A, X \setminus A \in \mathcal{F}$, dann auch $\varnothing = (X \setminus A) \cap A$, aber $\mathcal{F}$ ist ein Filter. Sei also $A \notin \mathcal{F}$. Dann gilt für jede Menge $M \subset A$, dass $M \notin \mathcal{F}$, sonst wäre $A \in \mathcal{F}$, folglich hat jede Menge in $\mathcal{F}$ einen nichtleeren Schnitt mit $X \setminus A$.
Die Menge

$$\mathcal{G} := \{M \subseteq X : M \supseteq P \cap (X \setminus A) \text{ für ein } P \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Filter, der $\mathcal{F}$ enthält. Grund:

(i) Seien $A, B \in \mathcal{G}$, dann gibt es $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$ mit $A \supseteq P_1 \cap (X \setminus A)$ und $B \supseteq P_2 \cap (X \setminus A)$. Dann gilt

$$A \cap B \supseteq (\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\in \mathcal{F}}) \cap (X \setminus A) \implies A \cap B \in \mathcal{G}$$

(ii) Sei $A \in \mathcal{G}$ und $B \supseteq A$, dann gibt es $P \in \mathcal{F}$ mit

$$B \supseteq A \supseteq P \cap (X \setminus A) \implies B \in \mathcal{G}$$

(iii) Da für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $P \in \mathcal{F}$ gilt, dass $G \supseteq P \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ ist also $\varnothing \notin \mathcal{G}$.

(iv) Sei $F \in \mathcal{F}$, dann gilt $F \supseteq F \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, also $F \in \mathcal{G}$, da $\mathcal{G}$ ein Filter ist. Folglich ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Es gilt $X \in \mathcal{F}$ (das gilt für jeden Filter), also gilt $X \cap (X \setminus A) = X \setminus A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$, was zu zeigen war. □

Wir führen noch den Begriff einer Subbasis ein

Definition 6. Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, dann ist $\mathscr{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Subbasis, falls alle offenen Mengen eine Darstellung als beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen aus $\mathscr{S}$ hat.

Definition 7. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt konvergent gegen ein $a \in X$, falls jede Umgebung von a ein Element des Filter ist.

Der folgende Satz zusammen mit Lemma 1 liefert den Satz von Tychonoff.

Satz 1. *Sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{S}$ ein Subbasis von X, so dass jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Dann ist X kompakt.*

Beweis. Erster Schritt: Jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Denn: Angenommen es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der nicht konvergiert. Erster Teilschritt: Dann gibt es für alle $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$, so dass $U_x \in \mathscr{S} \setminus \mathcal{F}$, denn: angenommen jede Menge in $\mathscr{S}$, die eine Umgebung von x ist, wäre enthalten in $\mathcal{F}$, dann sei U eine beliebige Umgebung von x, dann gilt, dass U eine Darstellung hat als

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I_\alpha} S_i, \quad S_i \in \mathscr{S}, \ \forall \alpha \in A, i \in I_\alpha$$

angenommen jede Menge in $\mathscr{S}$, die x umfasst, wäre in $\mathcal{F}$. Dann gibt es ein $\alpha \in A$, so dass $x \in \bigcap_{i \in I_\alpha} S_i$, insbesondere gilt dann $x \in S_i$ für $i \in I_\alpha$, also $S_i \in \mathcal{F}$, da $S_i \in \mathscr{S}$. Also gilt $\bigcap_{i \in I_\alpha} S_i \in \mathcal{F}$, weil $\mathcal{F}$ ein Filter ist und I_α eine endliche Menge. Weil $U \supseteq \bigcap_{i \in I_\alpha} S_i \in \mathcal{F}$, ist auch $U \in \mathcal{F}$, da U eine beliebige Umgebung von x war, konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x im Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{F}$ nicht konvergiert.

Für alle $x \in X$ gibt es nun also Umgebungen $U_x \in \mathscr{S} \setminus \mathcal{F}$. Die Familie $(U_x)_{x \in X}$ ist eine Überdeckung durch Mengen aus $\mathscr{S}$, daher gibt es gewisse $x_1, \ldots, x_n \in X$, so dass

$$X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

Alle U_{x_i} liegen nicht in $\mathcal{F}$, daher liegen deren Komplemente alle in $\mathcal{F}$, weil $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, aber dann gilt

$$X \setminus U_{x_1} \cap \ldots \cap X \setminus U_{x_n} \subseteq X \setminus \bigcup_{i \in \{1, \ldots, n\}} U_{x_i} = \varnothing$$

im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist. Also konvergiert $\mathcal{F}$.
Zweiter Schritt: X ist kompakt. Denn: Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung, dann gilt für jede endliche Auswahl $I_\alpha \subset A$, dass

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I_\alpha} U_i \right) \neq \varnothing$$

die folgende Menge

$$\{F \subseteq X : F \supseteq X \setminus (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \text{ für ein } n \geq 0\}$$

ist ein Filter (interessant ist dabei, dass die leere Menge nicht in der Menge liegt). Sei $\mathcal{F}$ der Ultrafilter, der die Menge umfasst. Also gibt es ein $a \in X$, so dass $\mathcal{F}$ gegen a konvergiert. Nun ist $a \in U_\alpha$ für ein $\alpha \in A$, daher gilt $U_\alpha \in \mathcal{F}$, gleichzeitig gilt aber auch, dass $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{F}$. Dann ist aber $\varnothing \in \mathcal{F}$, was ein Widerspruch ist. Also ist X doch kompakt. $\square$

Nun noch ein paar weitere hilfreiche Tricks

Lemma 4. *Sei $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume und X deren Produkt ausgestattet mit der Produkttopologie. Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to X$ ein Abbildung. Dann gilt, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind*

(i) f ist stetig.

(ii) Für alle $\lambda \in \Lambda$ ist $\pi_\lambda \circ f$ stetig.

Beweis. Sei f stetig, dann ist $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig, also $\pi_\lambda \circ f$ stetig. Angenommen es gilt, dass $\pi_\lambda \circ f$ stetig ist für alle $\lambda \in \Lambda$. Die Produkttopologie auf X wird von den Mengen

$$M := \{\pi_\lambda^{-1}(O_\lambda) : \lambda \in \Lambda, O_\lambda \subset X_\lambda \text{ offen}\}$$

erzeugt. Sei also $O \subset X$ offen, dann gibt es eine Darstellung der Form

$$O = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i \in I_\alpha} M_i$$

wobei I_α endlich ist und A beliebig und $M_i \in M$. Es gilt

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha\in A} \bigcap_{i\in I_\alpha} f^{-1}(M_i)$$

und es gibt immer ein $\lambda \in \Lambda, O_\lambda \subset X_\lambda$ offen, so dass $M_i = \pi_\lambda^{-1}(O_\lambda)$, also gilt $f^{-1}(M_i) = (\pi_\lambda \circ f)^{-1}(O_\lambda)$ offen, daher ist $f^{-1}(O)$ offen, was zu zeigen war. □

Die Topologie von $\mathbb{Z}_p$

Für $n > 1$ definieren wir $A_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und betrachten das System

$$\ldots \to A_n \to \ldots \to A_2 \to A_1$$

mit der Übergangsabbildung $A_{n+1} \to A_n,\ x \mod p^{n+1} \mapsto x \mod p^n$. Dann gilt offenbar, dass wir uns Abbildungen $\varphi_{ij} : A_i \to A_j$ für $i \geq j$ definieren können, wobei $x \mod p^i \mapsto x \mod p^j$. Dann gilt offenbar für alle $1 \leq j \leq k \leq i$, dass $\varphi_{ij} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{kj}$. Die ganzen p-adischen Zahlen definieren wir durch

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : \varphi_{ij}(x_i) = x_j,\ \forall i \geq j \right\}$$

wir statten A_n mit der diskreten Topologie aus (das heißt die Topologie ist $\mathfrak{P}(A_n)$), dann ist A_n endlich, also kompakt. Als beliebiges Produkt kompakter topologischer Räume ist dann nach dem Satz von Tychonoff auch $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein kompakter topologischer Raum, wenn wir ihn mit der Produkttopologie versehen, und wir statten dann $\mathbb{Z}_p$ mit der Teilraumtopologie der Produkttopologie aus.

$\mathbb{Z}_p$ ist ein topologischer Ring

Definition 8. Ein Ring $(R, +, \cdot)$ zusammen mit einer Topologie $\mathscr{O}$ auf R heißt topologischer Ring, falls die Verknüpfungen auf R bezüglich der Topologie $\mathscr{O}$ stetig sind.

Wir werden zeigen, dass $\mathbb{Z}_p$ ein topologischer Ring ist.

(1) Die Addition ist stetig. Wir zeigen sogar, dass die Abbildung

$$A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

stetig ist, daraus folgt, dass Addition in $\mathbb{Z}_p$ stetig ist, weil:

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto (x, y) \mapsto x + y$$

als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist. Die Inklusion ist aus folgendem Grunde stetig:
Die Produkte $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ und $A \times A$ seien mit der jeweiligen Produkttopologie ausgestattet. Sei $\pi_i^A : A \times A \to A$ für $i = 1, 2$ die Projektion auf die i-te Komponente. Wir

haben gesehen, dass es genügt, nachzuweisen, dass $\pi_i \circ \iota$, wobei ι die Inklusion $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to A \times A$ sei, stetig ist. Aber wir können die Abbildung dann auch auffassen als $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to A$, das sind alles stetige Abbildungen. Wir zeigen, dass Addition in A stetig ist.
Dafür zeigen wir, dass für alle $n \geq 1$ die Abbildung

$$A \times A \to A_n, \quad (x, y) \mapsto x_n + y_n$$

stetig ist. Das ist offenbar genau dann, der Fall, wenn die Abbildung

$$A \times A \to A_n \times A_n \to A_n, \quad (x, y) \mapsto (x_n, y_n) \mapsto x_n + y_n$$

stetig ist. Die Projektion auf die n-te Komponente ist stetig, denn die ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $(x, y) \mapsto x_n$ und $(x, y) \mapsto y_n$ stetig sind. Das können wir aber auffassen also $(x, y) \mapsto x \mapsto x_n$, was (bzw. alles mit y), was als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist.
Die Addition in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist stetig, weil $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie trägt und damit auch das Produkt die diskrete Topologie trägt, denn die Mengen $\{a\} \times \{b\}$ für $a, b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sind alle offen. Aber Abbildungen aus einem Raum mit der diskreten Topologie sind immer stetig. Daher ist die Addition in A stetig und somit auch die in $\mathbb{Z}_p$.

(2) Weil daher auch Multiplikation in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ stetig ist und mit denselben Argumentationen wie für die Addition ist also auch die Multiplikation in $\mathbb{Z}_p$ stetig.