Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$

[Platzhalter für Datum]

Vorbemerkung: Innerhalb dieses Vortrags sei $k = \mathbb{Q}_p$ mit p einer Primzahl. Alle quadratischen Formen seien nicht ausgeartet. Zuerst erinnern wir uns an das Hilbertsymbol aus §3:

Erinnerung (Hilbertsymbol)**.** Sei $k \in \{\mathbb{Q}_p, \mathbb{R}\}$. Die Abbildung

$$k^\times/(k^\times)^2 \times k^\times/(k^\times)^2 \to \{0,1\}$$
$$(a,b) \mapsto (a,b) \coloneqq \begin{cases} 1, & Z^2 - aX^2 - bY^2 \text{ hat Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } k^3 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. Der Audruck (a,b) heißt das Hilbertsymbol von a und b relativ zu k. Insbesondere haben wir

- $(a,b) = (b,a)$ und $(a,c^2) = 1$
- $(a,-a) = 1$ und $(a,1-a) = 1$
- $(a,b) = (a,-ab) = (a,(1-a)b)$

der Ausdruck „nicht-ausgeartet“ soll in diesem Kontext heißen, dass $(a,b) = 1$ für alle $b \in k$ impliziert a ein Quadrat.

Die Invarianten quadratischer Formen

Sei (V,Q) ein quadratischer Modul und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die induzierte symmetrische Bilinearform, dann gibt es eine Orthogonalbasis von (V,Q), etwa $e = (e_1, \ldots, e_n)$ und $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$, dann ist

$$\operatorname{disc}(Q) \coloneqq \det A = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

als Element von $k^\times/(k^\times)^2$ eindeutig bestimmt.