Das Bewertungsspektrum eines Ringes

Seminar zu Bewertungstheorie

Sei $(\Gamma, \leq)$ eine total geordnete (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, A ein Ring.

Wiederholung

Eine *Bewertung* $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$ ist eine Abbildung mit

(i) $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ für alle $a, b \in A$

(ii) $|ab| = |a||b|$ für alle $a, b \in A$

(iii) $|0| = 0$ und $|1| = 1$

die Menge $|\cdot|^{-1}(\{0\}) =: \operatorname{supp}(|\cdot|)$ heißt der *Träger* von $|\cdot|$ und die Untergruppe in Γ, die von $\operatorname{im}(|\cdot|) \setminus \{0\}$ erzeugt wird, heißt Wertegruppe von $|\cdot|$ und wird mit $\Gamma_{|\cdot|}$ bezeichnet.
Zwei Bewertungen $|\cdot|_1,\ |\cdot|_2$ heißen äquivalent, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist

(i) Es gibt einen Isomorphismus total georndeter Monoide $f : \Gamma_{|\cdot|_1} \cup \{0\} \to \Gamma_{|\cdot|_2} \cup \{0\}$ mit $f \circ |\cdot|_1 = |\cdot|_2$

(ii) $\operatorname{supp}(|\cdot|_1) = \operatorname{supp}(|\cdot|_2)$ und $A(|\cdot|_1) = A(|\cdot|_2)$

(iii) Es gilt $|a|_1 \leq |b|_1 \Leftrightarrow |a|_2 \leq |b|_2$ für alle $a, b \in A$.

Das Bewertungsspektrum eines Ringes

Definition 1. Das *Bewertungsspektrum* von A ist die Menge aller Äquivalenzklassen von Bewertungen auf A und wird mit $\operatorname{Spv}(A)$ bezeichnet. Man betrachte für $f_1, \ldots, f_n, g \in A$

$$U(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}) = \{|\cdot| \in \operatorname{Spv}(A) : |f_i| \leq |g| \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

dann gilt für $f, f', g, g' \in A$, dass

$$U(\frac{f}{g}) \cap U(\frac{f'}{g'}) = U(\frac{fg', f'g}{gg'})$$

Grund: Es ist $|gg'| = |g||g'|$ und daher $|gg'| \neq 0$ äquivalent zu $|g|, |g'| \neq 0$. $|fg'| \leq |gg'|$ und $|f'g| \leq |gg'|$ sind wegen $|g|, |g'| \neq 0$ äquivalent zu $|f| \leq |g|$ und $|f'| \leq |g'|$.
Daher erzeugen die Mengen $U((f_1, \ldots, f_n)/g)$ mit $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ eine Topologie auf $\operatorname{Spv}(A)$.

Man hat eine Bijektion

$$X := \{(\mathfrak{p}, R) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A),\ R \text{ Bur von } \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})\} \longleftrightarrow \operatorname{Spv}(A)$$

Inutuitiv: R kodiert den Bereich, in dem die Bewertung ≤ 1 ist und $\mathfrak{p}$ den, wo sie $= 0$ ist, so kann die gesamte Bewertung rekonstruiert werden. Sei $(\mathfrak{p}, R) \in X$ auf $\kappa(\mathfrak{p}) = \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$ haben wir die Bewertung

$$\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R^\times \cup \{0\},\ x \mapsto \begin{cases} xR^\times & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und kanonische Homomorphismen $\varphi^{\mathfrak{p}} : A \to A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$ dadurch erhalten wir dann eine Bewertung auf A. Diese sieht dann konkret aus

$$|\cdot|_{\mathfrak{p}}^R : A \to \kappa(\mathfrak{p})^\times/R^\times \cup \{0\}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}}R^\times, & x \notin \mathfrak{p} \\ 0, & x \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

Ist andererseits $|\cdot| \in \mathrm{Spv}(A)$, dann ist $\mathfrak{p} := \mathrm{supp}(|\cdot|) \in \mathrm{Spec}(A)$ (denn: $x, y \notin \mathfrak{p}$ und sei Γ die Zielgruppe von $|\cdot|$ dann $|x|, |y| \in \Gamma$, daher $|x||y| = |xy| \in \Gamma$, insb. $\neq 0$) und $|\cdot|$ definiert eine Bewertung auf $A/\mathfrak{p}$, denn seien $x, x' \in A$ mit $x - x' \in \mathfrak{p}$, dann gilt $|x| \leq \max\{|x - x'|, |x'|\} = |x'|$ und umgekehrt. Diese Bewertung auf $A/\mathfrak{p}$ setzt sich dann auf $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ fort, nämlich durch

$$|\cdot|' : \kappa(\mathfrak{p}) \to \Gamma \cup \{0\}, \ \frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}} \mapsto \left|\frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}}\right|' = |x| \cdot |y|^{-1}$$

dies ist wohldefiniert, seien $x, x', y, y' \in A$ mit

$$\frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}} = \frac{x'+\mathfrak{p}}{y'+\mathfrak{p}}$$

also mit $xy' - x'y \in \mathfrak{p}$. Ist $|x'| = 0$, also $x' \in \mathfrak{p}$, so gilt $xy' \in \mathfrak{p}$, da aber $y' \notin \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, folgt $x \in \mathfrak{p}$, also $|x| = 0$. Ist $|x'| \neq 0$, so folgt die Aussage

$$1 = |x'y||x'y|^{-1} = |xy'||x'y|^{-1} \iff |x'||y'|^{-1} = |x||y|^{-1}$$

Man kann zeigen, dass diese Bildungen invers zueinander sind.

Erinnerung (Riemann-Zariski-Räume)**.** Sei A ein Ring, k ein Körper mit $A \subset k$, dann heißt

$$\mathrm{RZ}(k, A) = \{R \mid R \text{ ist Bewertungsunterring} : A \subset R \subset k\}$$

der *Riemann-Zariski-Raum* von k über A, ist A das Bild von $\mathbb{Z}$ in k, so heißt

$$\mathrm{RZ}(k, A) = \mathrm{RZ}(k) = \{R \mid R \text{ ist Bewertungsunterring} : R \subset k\}$$

der Riemann-Zariski-Raum von k. Für $x_1, \ldots, x_n \in k$, sei

$$U(x_1, \ldots, x_n) := \mathrm{RZ}(k, A[x_1, \ldots, x_n]) = \{R \in \mathrm{RZ}(k, A) : x_1, \ldots, x_n \in R\}$$

und wegen $U(x_1, \ldots, x_n) \cap U(y_1, \ldots, y_m) = U(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ können wir diese Mengen zur Definition einer Topologie verwenden.

Lemma 1 (Beschreibung der Fasern als RZ-Räume)**.** *Sei A ein Ring, dann gilt*

(i) Ist A ein Körper, so gilt $\mathrm{Spv}(A) \cong_{\mathsf{Top}} \mathrm{RZ}(A)$

(ii) Die kanonische Abbildung $\mathrm{supp} : \mathrm{Spv}(A) \to \mathrm{Spec}(A), \ |\cdot| \mapsto \mathrm{supp}(|\cdot|)$ *ist stetig (bzgl. der Zariski-Topologie auf* $\mathrm{Spec}(A)$*) und surjektiv. Für jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *ist dessen Faser unter* supp *als topologischer Raum zu* $\mathrm{RZ}(\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}))$ *isomorph.*

Beweis. (ii): Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, dann betrachte die triviale Bewertung $|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{triv}} \in \mathrm{Spv}(A)$, dann gilt $\mathrm{supp}(|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{triv}}) = \mathfrak{p}$, daher ist supp surjektiv. Die Mengen $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f \notin \mathfrak{p}\}$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie, es gilt

$$\mathrm{supp}^{-1}(D(f)) = \{|\cdot| \in \mathrm{Spv}(A) : f \notin \mathrm{supp}(|\cdot|)\} = U(\frac{f}{f})$$

daher ist supp stetig. Mit Wir haben eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Spv}(A) &\longleftrightarrow \{(\mathfrak{p}, R) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), R \in \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}))\} \\ |\cdot| &\mapsto (\mathrm{supp}(|\cdot|), R_{|\cdot|}) \end{aligned}$$

wobei $R_{|\cdot|}$ gegeben ist als

$$R_{|\cdot|} = \left\{ \frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}} \in \kappa(\mathfrak{p}) : |x||y|^{-1} \leq 1 \right\}$$

diese induziert eine Bijektion

$$\Psi : \operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) \cong_{\mathsf{Set}} \{(\mathfrak{p}, R) : R \in \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}))\} \cong_{\mathsf{Set}} \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p})), \quad |\cdot| \in \operatorname{Spv}(A) \mapsto R_{|\cdot|}$$

wir wollen zeigen, dass $\operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) \cong_{\mathsf{Top}} \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}))$, wobei $\operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ mit der Teilraumtpologie von $\operatorname{Spv}(A)$ ausgestattet wird. Wir zeigen, dass sie stetig und offen ist.

(i) Seien $x_1, \dots, x_n \in A, y \in A \setminus \mathfrak{p}$. Dann gilt

$$|\cdot| \in \Psi^{-1}(U(\frac{x_1+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}}, \dots, \frac{x_n+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}})) \Leftrightarrow |x_i||y|^{-1} \leq 1,\ \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow |\cdot| \in U(\frac{x_1, \dots, x_n}{y})$$

also ist Ψ stetig.

(ii) Seien $f_1, \dots, f_n, g \in A$ und betrachte $U := U(\frac{f_1, \dots, f_n}{g})$ beliebige offene Menge in $\operatorname{Spv}(A)$, ist $g \in \mathfrak{p}$, so ist $U \cap \operatorname{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) = \varnothing$.
Sei also $g \notin \mathfrak{p}$, dann ist

$$U \cap \operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) = \{|\cdot| \in \operatorname{Spv}(A) : |f_i||g|^{-1} \leq 1,\ i = 1, \dots, n\}$$

daher gilt

$$\begin{aligned}\Psi(U \cap \operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\})) &= \{R \in \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p})) : (f_i+\mathfrak{p})(g+\mathfrak{p})^{-1} \in R,\ \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= U(\frac{f_1+\mathfrak{p}}{g+\mathfrak{p}}, \dots, \frac{f_n+\mathfrak{p}}{g+\mathfrak{p}})\end{aligned}$$

die Inklusion $\subset$ in der ersten Gleichheit ist klar. Sei $R \in \mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}))$ mit $(f_i+\mathfrak{p})(g+\mathfrak{p})^{-1} \in R$ für $i = 1, \dots, n$. So betrachte die Bewertung

$$v : \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R^\times \cup \{0\}, x \mapsto \begin{cases} xR^\times, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und sei $w = v \circ (A \to \kappa(\mathfrak{p}))$, dann gilt $w(f_i) \leq w(g) \neq 0,\ i = 1, \dots, n$, denn: $w(g) \neq 0$, denn $\ker(A \to \kappa(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ und $g \notin \mathfrak{p}$ und v ist eine Bewertung auf einem Körper. Ist $f_i \in \mathfrak{p}$, so ist die Behauptung klar. Also $f_i \notin \mathfrak{p}$, dann

$$w(f_i) = \frac{f_i+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R^\times \leq \frac{g+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R^\times = w(g) \Leftrightarrow \frac{f_i+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} \frac{1+\mathfrak{p}}{g+\mathfrak{p}} = \frac{f_i+\mathfrak{p}}{g+\mathfrak{p}} \in R$$

also $w \in U \cap \operatorname{supp}^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$, wie im Appendix sieht man, dass $R_w = R$ gilt, daher folgt die Aussage.

da stetige, offene Abbildungen Isomorphismen in Top sind, folgt die Aussage.
(i): Ist $A = k$ ein Körper, so ist $\operatorname{Spec}(k) = \{(0)\}$, daher auch $\operatorname{Frac}(k/(0)) = k$, daher $\operatorname{supp}^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Spv}(k) \cong_{\mathsf{Top}} \mathrm{RZ}(k)$. □

Funktorialität von Spv

Seien A, B zwei Ringe (kommutativ, mit 1) und $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, d.h. B ist eine A-Algebra. Dann haben wir die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Spv}(\varphi) : \mathrm{Spv}(B) \to \mathrm{Spv}(A), \quad v \mapsto v \circ \varphi$$

es für $f_1, \ldots, f_n, g \in A$:

$$\mathrm{Spv}(\varphi)^{-1}\left(U\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}\right)\right) = U\left(\frac{\varphi(f_1, \ldots, f_n)}{\varphi(g)}\right)$$

daher ist $\mathrm{Spv}(\varphi)$ stetig. Es ist klar, dass $\mathrm{Spv}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathsf{Spv}(A)}$ und $\mathrm{Spv}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Spv}(\varphi) \circ \mathrm{Spv}(\psi)$ für gewisse Ringhomomorphismen φ, ψ. Daher haben wir einen kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{Spv} : \mathsf{CRing}^{\mathsf{op}} &\to \mathsf{Top} \\ A &\mapsto \mathrm{Spv}(A) \\ [\varphi : A \to B] &\mapsto \mathrm{Spv}(\varphi) \end{aligned}$$

Appendix

Wir zeigen, dass die behauptete Bijektion

$$X := \{(\mathfrak{p}, R) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ R \text{ Bur von } \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})\} \longleftrightarrow \mathrm{Spv}(A)$$

tatsächlich bijektiv ist.

Beweis. Sei $|\cdot| \in \mathrm{Spv}(A)$ und $\mathfrak{p} := \mathrm{supp}(|\cdot|)$ und $|\cdot|_2 : \kappa(\mathfrak{p}) \to \Gamma \cup \{0\}$ die induzierte Bewertung. Definiere $R_2 := \{x \in \kappa(\mathfrak{p}) : |x|_2 \leq 1\}$. Dann definiere

$$|\cdot|_3 : \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R_2^\times \cup \{0\}, \quad x \mapsto \begin{cases} xR_2^\times, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und sei $|\cdot|_4 = |\cdot|_3 \circ (A \to \kappa(\mathfrak{p}))$. Es ist z.z., dass $|\cdot|_4 \sim |\cdot|_1$. Tatsächlich, denn für $a, b \in A$ mit $a, b \notin \mathfrak{p}$ gilt

$$\begin{aligned} |a|_4 = \left|\frac{a+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}}\right|_3 &= \frac{a+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R_2^\times \leq \frac{b+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R_2^\times = |b|_4 \\ \iff \frac{a+\mathfrak{p}}{b+\mathfrak{p}} \in R_2 \iff \left|\frac{a+\mathfrak{p}}{b+\mathfrak{p}}\right|_2 \leq 1 \iff |a|_1 |b|_1^{-1} \leq 1 \end{aligned}$$

außerdem bemerken wir, dass gilt

$$|a|_4 = \left|\frac{a+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}}\right|_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{a+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow a + \mathfrak{p} = 0 \Leftrightarrow |a|_1 = 0$$

wobei die erste Äquivalenz daraus folgt, dass $\mathrm{supp}(|\cdot|_3) = \{0\}$, da $\kappa(\mathfrak{p})$ ein Körper ist.
Sei $(\mathfrak{p}, R) \in X$, so definiere

$$|\cdot| : \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R^\times \cup \{0\}, \quad x \mapsto \begin{cases} xR^\times, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $|\cdot|_2 = |\cdot| \circ (A \to \kappa(\mathfrak{p}))$, dann gilt $\mathrm{supp}(|\cdot|_2) = \mathfrak{p}$. Definiere

$$|\cdot|_3 : \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R^\times \cup \{0\}, \quad \frac{x+\mathfrak{p}}{y+\mathfrak{p}} \mapsto |x|_2 |y|_2^{-1}$$

Es ist zu zeigen, dass $|x|_3 \leq 1 \Leftrightarrow x \in R$. Betrachte also

$$x = \frac{a+\mathfrak{p}}{b+\mathfrak{p}} \in \kappa(\mathfrak{p})$$

Es ist $x = 0 \Leftrightarrow a \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow |x|_3 = 0$. Ist $x \neq 0$, also $a \notin \mathfrak{p}$, dann gilt

$$|x|_3 = |a|_2 |b|_2^{-1} = \frac{a+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R^\times \cdot \left(\frac{b+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R^\times\right)^{-1} = \frac{a+\mathfrak{p}}{b+\mathfrak{p}} R^\times \leq 1 R^\times \Leftrightarrow \frac{a+\mathfrak{p}}{b+\mathfrak{p}} \in R$$

$\square$