Das Bewertungsspektrum eines Ringes

Seminar zu Bewertungstheorie

Sei $(\Gamma, \leq)$ eine total geordnete (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, A ein Ring.

Wiederholung

Eine *Bewertung* $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$ ist eine Abbildung mit

(i) $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ für alle $a, b \in A$

(ii) $|ab| = |a||b|$ für alle $a, b \in A$

(iii) $|0| = 0$ und $|1| = 1$

die Menge $|\cdot|^{-1}(\{0\}) =: \mathrm{supp}(|\cdot|)$ heißt der *Träger* von $|\cdot|$ und die Untergruppe in Γ, die von $\mathrm{im}(|\cdot|) \setminus \{0\}$ erzeugt wird, heißt Wertegruppe von $|\cdot|$ und wird mit $\Gamma_{|\cdot|}$ bezeichnet.
Zwei Bewertungen $|\cdot|_1,\ |\cdot|_2$ heißen äquivalent, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist

(i) Es gibt einen Isomorphismus total georndeter Monoide $f : \Gamma_{|\cdot|_1} \cup \{0\} \to \Gamma_{|\cdot|_2} \cup \{0\}$ mit $f \circ |\cdot|_1 = |\cdot|_2$

(ii) $\mathrm{supp}(|\cdot|_1) = \mathrm{supp}(|\cdot|_2)$ und $A(|\cdot|_1) = A(|\cdot|_2)$

(iii) Es gilt $|a|_1 \leq |b|_1 \Leftrightarrow |a|_2 \leq |b|_2$ für alle $a, b \in A$.

Das Bewertungsspektrum eines Ringes

Definition 1. Das *Bewertungsspektrum* von A ist die Menge aller Äquivalenzklassen von Bewertungen auf A und wird mit $\mathrm{Spv}(A)$ bezeichnet. Man betrachte für $f_1, \ldots, f_n, g \in A$

$$U(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}) = \{|\cdot| \in \mathrm{Spv}(A) : |f_i| \leq |g| \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

dann gilt für $f, f', g, g' \in A$, dass

$$U(\frac{f}{g}) \cap U(\frac{f'}{g'}) = U(\frac{fg', f'g}{gg'})$$

Grund: Es ist $|gg'| = |g||g'|$ und daher $|gg'| \neq 0$ äquivalent zu $|g|, |g'| \neq 0$. $|fg'| \leq |gg'|$ und $|f'g| \leq |gg'|$ sind wegen $|g|, |g'| \neq 0$ äquivalent zu $|f| \leq |g|$ und $|f'| \leq |g'|$.
Daher erzeugen die Mengen $U((f_1, \ldots, f_n)/g)$ mit $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ eine Topologie auf $\mathrm{Spv}(A)$.

Man hat eine Bijektion

$$\{X := (\mathfrak{p}, R) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ R \text{ Bur von } \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})\} \longleftrightarrow \mathrm{Spv}(A)$$

Sei $(\mathfrak{p}, R) \in X$ auf $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ haben wir die Bewertung

$$\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p})^\times / R^\times \cup \{0\},\ x \mapsto \begin{cases} xR^\times & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und kanonische Homomorphismen $\varphi^{\mathfrak{p}} : A \to A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$ dadurch erhalten wir dann eine Bewertung auf A. Diese sieht dann konkret aus

$$|\cdot|_{\mathfrak{p}}^{R} : A \to \kappa(\mathfrak{p})^{\times}/R^{\times} \cup \{0\}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x+\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} R^{\times}, & x \notin \mathfrak{p} \\ 0, & x \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

Ist andererseits $|\cdot| \in \mathrm{Spv}(A)$, dann ist $\mathfrak{p} := \mathrm{supp}(|\cdot|) \in \mathrm{Spec}(A)$ und $|\cdot|$ definiert eine Bewertung auf $A/\mathfrak{p}$, denn seien $x, x' \in A$ mit $x - x' \in \mathfrak{p}$, dann gilt $|x| \leq \max\{|x - x'|, |x'|\} = |x'|$ und umgekehrt. Diese Bewertung auf $A/\mathfrak{p}$ setzt sich dann auf $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ fort.

Lemma 1 (Beschreibung der Fasern als RZ-Räume)**.** *Sei A ein Ring, dann gilt*

(i) Ist A ein Körper, so gilt $\mathrm{Spv}(A) \cong_{\mathsf{Top}} \mathrm{RZ}(A)$

(ii) Die kanonische Abbildung $\mathrm{supp} : \mathrm{Spv}(A) \to \mathrm{Spec}(A), \ |\cdot| \mapsto \mathrm{supp}(|\cdot|)$ *ist stetig (bzgl. der Zariski-Topologie auf* $\mathrm{Spec}(A)$*) und surjektiv. Für jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *ist dessen Faser unter* supp *als topologischer Raum zu* $\mathrm{RZ}(\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}))$ *isomorph.*