Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$

[Platzhalter für Datum]

Vorbemerkung: Innerhalb dieses Vortrags sei $k = \mathbb{Q}_p$ mit p einer Primzahl. Alle quadratischen Formen seien nicht ausgeartet. Zuerst erinnern wir uns an das Hilbertsymbol aus §3:

Erinnerung (Hilbertsymbol)**.** *Sei $k \in \{\mathbb{Q}_p, \mathbb{R}\}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} k^\times/(k^\times)^2 \times k^\times/(k^\times)^2 &\to \{0,1\} \\ (a,b) \mapsto (a,b) &:= \begin{cases} 1, & Z^2 - aX^2 - bY^2 \text{ hat Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } k^3 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. Der Audruck (a,b) heißt das Hilbertsymbol von a und b relativ zu k.

Die Invarianten quadratischer Formen

Sei (V,Q) ein quadratischer Modul und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die induzierte symmetrische Bilinearform, dann gibt es eine Orthogonalbasis von (V,Q), etwa $e = (e_1, \ldots, e_n)$ und $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$, dann ist

$$\operatorname{disc}(Q) := \det A = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

als Element von $k^\times/(k^\times)^2$ eindeutig bestimmt. Der folgende Satz liefert uns die zweite Invariante quadratischer Moduln

Satz 1 (Hasse-Invariante)**.** *Sei e wie oben eine Orthogonalbasis von (V,Q), dann ist die Zahl*

$$\varepsilon(e) := \prod_{i<j} (e_i, e_j)$$

unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis von (V,Q).

Übersetzt in die Sprache der quadratischen Formen liest sich das Resultat: Für eine quadratischen Form f, wobei $f \sim a_1 X_1^2 + \ldots + a_n X_n^2$ sind die Zahlen

$$\begin{aligned} d(f) &= a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in k^\times/(k^\times)^2 \\ \varepsilon(f) &= \prod_{i<j} (a_i, a_j) \end{aligned}$$

Invarianten der Äquivalenzklasse von f.

Ziel: Zwei quadratische Formen genau dann äquivalent sind, wenn sie denselben Rang, dieselbe Diskriminante und dieselbe Hasse-Invariante haben.