Man bestimme die Galoisgruppe des Polynoms $f = (X^4 - 1)(X^2 - 5) \in \mathbb{Q}[X]$, bestimme alle Zwischenkörper. Es gilt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ Zerfällungskörper von f ist, denn es gilt über $\mathbb{C}$, dass

$$f = (X^4 - 1)(X^2 - 5) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$$

und es gilt $\mathbb{Q}(\pm\sqrt{5}, \pm i) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$. Als Zerfällungskörper eines separablen Polynoms ist $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$ insbesondere galoissch.
Nun hat $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})[X]$ nur rein-imaginäre Nullstellen und $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{R}$, also hat X^2+1 keine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, ist also irreduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Wir wenden nun Lemma 3.40 zweimal an: Zu jeder Nullstelle $\pm\sqrt{5}$ von $X^2 - 5$ gibt es genau eine Fortsetzung σ von $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ mit $\sigma(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5}$ und $\sigma\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Nun ist $X^2 + 1$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ irreduzibel und somit gibt es zu jeder Nullstelle $\pm i$ von $X^2 + 1$ genau eine Fortsetzung τ von σ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{5})(i)$ mit $\tau(i) = \pm i$ und $\tau\big|_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \sigma$.
Somit haben wir die Galoisgruppe bestimmt:

$$\sigma_1 : \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5}, i \mapsto i \qquad \sigma_2 : \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}, i \mapsto i$$
$$\sigma_3 : \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5}, i \mapsto -i \qquad \sigma_4 : \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}, i \mapsto -i$$

da alle Elemente $\neq \mathrm{id}_L = \sigma_1$ Ordnung zwei haben und es nur zwei Gruppen der Ordnung vier gibt, wissen wir zudem $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat drei Untergruppen der Ordnung zwei, die wegen $\#G = 4$ Index zwei haben, demnach gibt es nach dem Hauptsatz der Galoistheorie drei Zwischenkörper, die quadratisch über $\mathbb{Q}$ sind.

(i) $L^{\langle\sigma_2\rangle} = \mathbb{Q}(i)$, denn $\sigma_2(i) = i$, also $\mathbb{Q}(i) \subset L^{\langle\sigma_2\rangle}$, aber auch

$$[L^{\langle\sigma_2\rangle} : \mathbb{Q}] = \frac{[L : \mathbb{Q}]}{[L : L^{\langle\sigma_2\rangle}]} = \frac{4}{\#\langle\sigma_2\rangle} = 2$$

Gradsatz liefert dann wegen $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$, dass $\mathbb{Q}(i) = L^{\langle\sigma_2\rangle}$.

(ii) $L^{\langle\sigma_3\rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, denn: $\sigma_3(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, also $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset L^{\langle\sigma_3\rangle}$ mit demselben Gradargument wie in (i) folgt dann, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = L^{\langle\sigma_3\rangle}$.

(iii) $L^{\langle\sigma_4\rangle} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$, denn: $\sigma_4(i\sqrt{5}) = \sigma_4(i)\sigma_4(\sqrt{5}) = -i \cdot (-\sqrt{5}) = i\sqrt{5}$. Demnach gilt: $\mathbb{Q}(i\sqrt{5}) \subset L^{\langle\sigma_4\rangle}$, das das Polynom $X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist (Eisenstein mit $p = 5$) und $i\sqrt{5}$ als Nullstelle hat, folgt, dass $[\mathbb{Q}(i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$, also mit demselben Gradargument gilt $L^{\langle\sigma_4\rangle} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$.

(iv) $L^{\{\mathrm{id}_L\}} = L$ und $L^G = \mathbb{Q}$

Wir bestimmen noch ein primitives Element der Körpererweiterung. Behauptung: $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + i)$, dafür genügt es, nachzuweisen, dass $\sigma_i(\sqrt{5} + i) \neq \sqrt{5} + i$ für $\sigma_i \neq \mathrm{id}_L$, denn dann ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(i + \sqrt{5})) = \{\mathrm{id}_L\}$, weil die σ_i für $i = 2, 3, 4$, dann auf jeden Fall auch nicht $\sqrt{5} + i$ fest lassen, also insbesondere nicht $\mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$, nun gilt

$$\sigma_2(\sqrt{5} + i) = -\sqrt{5} + i, \quad \sigma_3(\sqrt{5} + i) = -i + \sqrt{5}, \quad \sigma_4(\sqrt{5} + i) = -(\sqrt{5} + i)$$

. Daher gilt $Q(i, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$. Wir erhalten also das folgende Körperdiagramm

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(i+\sqrt{5}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(i) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(i\sqrt{5}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$