Potentiell wichtige Zusammenhänge

Wintersemester 2020/2021

Definition 1 (Borel-σ-Algebra)**.** Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\sigma(\mathscr{T})$ die Borel-σ-Algebra und wird mit $\mathscr{B}(X)$ bezeichnet.

Sei $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 2 (Verteilung)**.** Sei $(X, \mathscr{A}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Dann definieren wir die Verteilungsfunktion $\mathbb{F} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ durch

$$\mathbb{F}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist $X \subset \mathbb{R}$ abzählbar und $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(X)$ (insbesondere also für $X = \mathbb{N}$) und $\mathbb{p}$ die Zähldichte von $\mathbb{P}$, so wird folgendes Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ induziert

$$\tilde{\mathbb{P}}(B) := \sum_{\omega \in X} \mathbb{p}(\omega)\delta_B(\omega), \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \tag{$*$}$$

mit der zugehörigen Verteilungsfunktion

$$\tilde{\mathbb{F}}(x) = \tilde{\mathbb{P}}((-\infty, x])), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{$**$}$$

das Wahrscheinlichkeitsmaß und die Verteilung in $(*)$ und $(**)$ heißen diskret.

Definition 3 (Wahrscheinlichkeitsdichte)**.** Sei $\mathbb{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{f}(x) d\mathscr{L}^n = 1$$

so heißt $\mathbb{f}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 1 (Aus Dichte Maß bekommen)**.** *Jede Dichte $\mathbb{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erzeugt ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, indem wir für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$ (komponentenweise) setzen*

$$\mathbb{P}([a, b]) := \int_a^b \mathbb{f}(x) \ \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \mathbb{f}(x_1, \ldots, x_n) \ \mathrm{d}x_n \cdots \ \mathrm{d}x_1$$

Dann gilt für alle $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, dass

$$\mathbb{P}(B) = \int_B \mathbb{f}(x) \ \mathrm{d}x$$

Definition 4. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ heißt stetig, falls eine Dichte $\mathbb{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}(B) = \int_B \mathbb{f}(x)\ \mathrm{d}x,\ \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

der Raum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ heißt dann ein stetiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Lemma 1 (Verteilungen berechnen)**.** *Ist $\mathbb{f}$ Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass*

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}(t)\ \mathrm{d}t$$

Definition 5 (Produktdichte)**.** Seien $\mathbb{f}_1, \ldots, \mathbb{f}_n$ Dichten auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, so heißt

$$\mathbb{f}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{f}_i(x_i) \text{ mit } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die Produktdichte von $\mathbb{f}_1, \ldots, \mathbb{f}_n$ auf $\mathbb{R}^n$

Definition 6. Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$ Maßräume. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{S}$ heißt $(\mathscr{A}\text{-}\mathscr{S})$-messbar, falls

$$\sigma(X) \coloneqq X^{-1}(\mathscr{S}) = \{X^{-1}(S) : S \in \mathscr{S}\} \subset \mathscr{A}$$

Etwas konkreter heißt das, dass $\forall S \in \mathscr{S}$ gilt $X^{-1}(S) \in \mathscr{A}$. Eine $\mathscr{A}$-$\mathscr{S}$-messbare Abbildung heißt Zufallsvariable. $\sigma(X)$ heißt die Initial-σ-Algebra von X und sie ist die kleinste σ-Algebra bezüglich der X messbar ist.

Lemma 2. *Sei $X : \Omega \to \mathcal{S}$ eine Zufallsvariable und $\mathscr{E} \subset \mathcal{S}$, dann gilt*

$$X^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(X^{-1}(\mathscr{E}))$$

Lemma 3 (Messbarkeit reicht auf Erzeuger)**.** *Sei $\mathscr{E}$ ein Erzeuger von $\mathscr{S}$, das heißt $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{S}$, dann gilt*

$$X^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A} \Rightarrow X \textit{ ist } (\mathscr{A}\text{-}\mathscr{S})\textit{-messbar}$$

Messbarkeit für Abbildungen nach $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ und nach $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ ist ganz natürlich

Lemma 4. $(\Omega, \mathscr{A})$ *ein messbarer Raum. X sei eine $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-wertige Abbildung. X ist eine Zufallsvariable genau dann, wenn*

$$\{X \leq x\} = X^{-1}([-\infty, x]) \in \mathscr{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ferner ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$-wertige Zufallsvariable – ein Zufallsvektor – falls jede Komponente eine Zufallsvariable ist.

Definition 7 (Furchtbare Notation)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathcal{S}, \mathscr{S})$ eine Zufallsvariable, dann nennen wir

(1) Falls $(\mathcal{S}, \mathscr{S}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, so heißt X eine numerische Zufallsvariable. Notation: $X \in \overline{\mathscr{A}}$.
Falls $(\mathcal{S}, \mathscr{S}) = (\overline{\mathbb{R}}^+, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^+))$, so heißt X eine positive, numerische Zufallsvariable. Notation: $X \in \overline{\mathscr{A}}^+$.

(2) Falls $(\mathcal{S}, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B})$, so heißt X eine reelle Zufallsvariable, Notation: $X \in \mathscr{A}$
Falls $(\mathcal{S}, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$, so heißt X eine positive reelle Zufallsvariable, Notation: $X \in \mathscr{A}^+$.

(3) Falls $(\mathcal{S}, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, so heißt X ein Zufallsvektor, kurz: $X \in \mathscr{A}^n$.

Philosophie: Verknüpfungen von Zufallsvariablen sind wieder Zufallsvariablen.

Lemma 5. *Seien $X, Y : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ Zufallsvariablen. Dann gilt*

(a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist aX eine Zufallsvariable mit der Konvention $(0 \times \infty = 0)$.

(b) $X \vee Y = \min(X, Y)$ und $X \wedge Y = \max(X, Y)$ sind Zufallsvariablen.

(c) $\{X \leq Y\}, \{X < Y\}, \{X = Y\} \in \mathscr{A}$.

Lemma 6. *Seien $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{A}$, d.h. es sind $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$-wertige Zufallsvariablen und sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ messbar. Dann sei $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{A}^n$ der durch die $X_1, \dots, X_n$ entstehende Zufalsvektor, dann ist $h(X) = h \circ X \in \mathscr{A}^m$, also eine $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$-wertige Zufallsvariable.*

Insbesondere ist der Fall für $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y$ und $h(x, y) = x \cdot y$, sowie $h' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = x/y$ interessant.

Lemma 7 (Messbarkeit ist Limesstabil)**.** *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathscr{A}}$. Dann gilt*

(1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n,\ \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n,\ \limsup_{n \in \mathbb{N}} X_n,\ \liminf_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \overline{\mathscr{A}}$

(2) Falls der Limes existiert, so stimmt er mit dem Limes superior und Limes inferior überein. Also gilt dann $\lim_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \overline{\mathscr{A}}$.

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathcal{S}, \mathscr{S})$ eine Zufallsvariable, wir können wir (möglichst kanonisch) auf $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definieren?

Definition 8 (Verteilung einer Zufallsvariable)**.** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ Maßraum und $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$ messbarer Raum, sowie $X : \Omega \to \mathcal{S}$ eine Zufallsvariable, dann induziert X ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$ durch

$$\mathbb{P}^X(S) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(S), \text{ für ein } S \in \mathscr{S}$$

Falls sie existiert, nennen wir die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}^X$ analog $\mathbb{F}^X$.

Wie kann man Verteilungen auf mehrere Zufallsvariablen verallgemeinern?
Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $((\mathcal{S}_i, \mathscr{S}_i))_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie messbarer Räume, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathcal{S}_i, \mathscr{S}_i)$ seien für $i \in \mathcal{I}$ Zufallsvariablen.

Definition 9 (Produkt-σ-Algebra für beliebige Familien)**.** Wir definieren die Produkt-σ-Algebra auf $\mathcal{S}_\mathcal{I} := \times_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ auf möglichst natürliche Weise, nämlich als die kleinste σ-Algebra, s.d. die Projekion $\pi_i : \mathcal{S}_\mathcal{I} \to \mathcal{S}_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$ messbar sind.
In Formel haben wir

$$\mathscr{S}_\mathcal{I} := \bigvee_{i\in\mathcal{I}} \sigma(\pi_i) = \sigma\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \sigma(\pi_i)\right)$$

Wieso ist das sinnvoll? Seien $(M_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ für eine nicht leere Indexmenge I eine Familie topologischer Räume, dann ist die Produkttopologie auf $M = \times_{i\in I} M_i$ definiert als die kleinste Topologie, sodass alle Koordinatenabbildungen stetig sind.

Definition 10. Sei wie oben $(\mathcal{S}_\mathcal{I}, \mathscr{S}_\mathcal{I})$ der Prdouktraum mit Produkt-σ-Algebra. Seien $\mathbb{P}_i$ nun Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathcal{S}_i, \mathscr{S}_i)$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\mathcal{I}$ auf $(\mathcal{S}_\mathcal{I}, \mathscr{S}_\mathcal{I})$ ein Produktmaß, falls für alle endlichen Teilmengen $J \subset \mathcal{I}$ gilt

$$\mathbb{P}_\mathcal{I}\left(\bigcap_{j\in J} \pi_j(S_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(S_j) \quad \text{für alle } S_j \in \mathscr{S}_j$$

Lemma 8. *Eine Abbildung $X = (X_i)_{i\in\mathcal{I}} : \Omega \to \mathcal{S}_\mathcal{I}$ die in jeder Komponente $i \in \mathcal{I}$ eine $(\mathcal{S}_i, \mathscr{S}_i)$-wertige Zufallsvariable ist, ist eine $(\mathcal{S}_\mathcal{I}, \mathscr{S}_\mathcal{I})$-wertige Zufallsvariable.*

Definition 11. Sei $X = (X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von $(\mathcal{S}_i, \mathscr{S}_i)$-wertigen Zufallsvariablen, dann heißt $\mathbb{P}^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_i,\ i \in \mathcal{I}$.

Satz 2. *Sei $I = \{1, \ldots, n\}$ und $X_1, \ldots, X_n \in \overline{\mathscr{A}}$ und $X = (X_1, \ldots, X_n)$, dann gilt*

(a) Sei

$$\mathbb{F}^X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X^{-1}([-\infty, x])) = \mathbb{P}^X([-\infty, x])$$

die gemeinsame Verteilungsfunktion, dann hat jedes der X_i die Randverteilung

$$\mathbb{F}^{X_i}(x_i) = \mathbb{F}^X(\infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty) = \mathbb{P}(X_1 \leq \infty, \ldots, X_i \leq x_i, \ldots, X_n \leq \infty)$$