Borel-Mengen auf dem $\mathbb{R}^n$.

Wintersemester 2020

Seien hier stets X, X_1 und X_2 nichtleere Mengen.

Lemma 1. *Sei Y eine nichtleere Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $\mathscr{E}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra auf Y. Dann sind*

$$f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(F) : F \in \mathscr{F}\}, \quad f_*(\mathscr{E}) = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{E}\}$$

σ-Algebren.

Beweis. (a) Es ist $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, also $\emptyset \in f^{-1}(\mathscr{F})$. Jedes $A \in f^{-1}(\mathscr{F})$ können wir als $A = f^{-1}(F)$ für ein $F \in \mathscr{F}$ schreiben. Dann ist direkt klar, dass

$$A^c = (f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$$

wegen $F^c \in \mathscr{F}$ auch $A^c \in f^{-1}(\mathscr{F})$ ist. Seien noch $A_n \in f^{-1}(\mathscr{F})$ für $n \in \mathbb{N}$, so existieren $F_n \in \mathscr{F}$ mit $f^{-1}(F_n) = A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$$

und daher wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathscr{F}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in f^{-1}(\mathscr{F})$.

(b) Da $\emptyset \in \mathscr{E}$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, ist auch $\emptyset \in f_*(\mathscr{E})$. Sei $A \in f_*(\mathscr{E})$, dann gilt

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$$

und wegen $f^{-1}(A) \in \mathscr{E}$, ist auch $f^{-1}(A)^c \in \mathscr{E}$, also ist $A^c \in f_*(\mathscr{E})$. Seien $A_n \in f_*(\mathscr{E})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$

und da $f^{-1}(A_n) \in \mathscr{E},\ \forall n \in \mathbb{N}$, ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathscr{E}$.

$\square$

Definition 1 (Borelsche σ-Algebra und topolgischer Raum)**.** Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topolgischer Raum. Das heißt $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften

(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$

(2) Für $A, B \in \mathfrak{T}$ gilt $A \cap B \in \mathfrak{T}$

(3) Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige nichtleere Indexmenge und $A_i \in \mathfrak{T}$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}$.

Wir nennen $\sigma(\mathfrak{T}) = \mathscr{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra auf X.

Seien $(X_j, \mathscr{A}_j)$ für $j = 1, 2$ messbare Räume. Wir definieren die Produkt-σ-Algebra wie folgt

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 := \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{A}_1, B \in \mathscr{A}_2\})$$

Ferner bezeichnen wir mit

$$\mathscr{A}_1 \boxtimes \mathscr{A}_2 := \{A \times B : A \in \mathscr{A}_1, B \in \mathscr{A}_2\}$$

die Menge der kartesischen Produkte. Das nächste Lemma war das eigentliche Ziel, das ich dir zeigen wollte. Es ist eine Verallgemeinerung davon, dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1, A_2 \subset \mathbb{R} \text{ offen}\})$. Dass sich also die Produkt-σ-Algebra von den kartesischen Produkten von Erzeugern erzeugen lässt. Also bei uns war es, dass die Produkt-σ-Algebra die kleinste σ-Algebra ist, die alle kartesischen Produkte enthält und falls es Erzeuger gibt, liefert uns das nachfolgende Lemma, dass die Produkt-σ-Algebra aus den kartesischen Produkten der Erzeuger erzeugt wird.

Lemma 2. *Seien $\mathscr{S}_j \in \mathfrak{P}(X_j)$ Systeme von Teilmengen mit $X_j \in \mathscr{S}_j$ für $j = 1, 2$. So gilt*

$$\sigma(\mathscr{S}_1) \otimes \sigma(\mathscr{S}_2) = \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$$

Beweis. Wir definieren $\mathscr{A}_j = \sigma(\mathscr{S}_j)$ für $j = 1, 2$. Es gilt $\sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2) \subset \sigma(\mathscr{S}_1) \otimes \sigma(\mathscr{S}_2)$, denn sei $S_1 \times S_2 \in \mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2$, dann gilt insbesondere, dass $S_1 \in \sigma(\mathscr{S}_1) = \mathscr{A}_1$ und $S_2 \in \sigma(\mathscr{S}_2) = \mathscr{A}_2$, also ist $S_1 \times S_2 \in \{A \times B : A \in \mathscr{A}_1, B \in \mathscr{A}_2\}$ und daher nach Definition $S_1 \times S_2 \in \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{A}_1, B \in \mathscr{A}_2\}) = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.
Da $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ eine σ-Algebra ist, die $\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2$ enthält, folgt die Behauptung. Noch die andere Inklusion. Wir definieren die σ-Algebren

$$\widetilde{\mathscr{A}_j} := (\mathrm{pr}_j)_*(\sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2))$$

wobei pr_j die Projektion von $X_1 \times X_2$ auf den Raum X_j meint, für $j = 1, 2$. Nun gilt *nach Voraussetzung*, dass $X_j \in \mathscr{S}_j$ für $j = 1, 2$. Wir zeigen, dass $\mathscr{A}_j \subset \widetilde{\mathscr{A}_j}$ für $j = 1, 2$. Sei nun $j = 1$ und sei $S_1 \in \mathscr{S}_1$ beliebig, dann ist

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(S_1) = S_1 \times X_2 \in \mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2 \subset \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$$

weil $S_1 \in \mathscr{S}_1$ und $X_2 \in \mathscr{S}_2$. Nach Definition ist

$$\mathscr{A}_1 = (\mathrm{pr}_1)_*(\sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)) = \{A \in X_1 \times X_2 : \mathrm{pr}_1^{-1}(A) \in \sigma(\mathscr{S} \boxtimes \mathscr{S}_2)\}$$

Daher ist also $S_1 \in (\mathrm{pr}_1)_*(\sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)) = \widetilde{\mathscr{A}_1}$. Also ist $\widetilde{\mathscr{A}_1}$ eine σ-Algebra auf X_1, die $\mathscr{S}_1$ enthält, also ist $\sigma(\mathscr{S}_1) = \mathscr{A}_1 \subset \widetilde{\mathscr{A}_1}$. Analog für $j = 2$. Daher haben wir, dass $\mathscr{A}_j \subset \widetilde{\mathscr{A}_j}$ für $j = 1, 2$.
Sei nun $A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathscr{S}_1) \boxtimes \sigma(\mathscr{S}_2) = \mathscr{A}_1 \boxtimes \mathscr{A}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_1 \times X_2 &= (\mathrm{pr}_1)^{-1}(A_1) \in \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2) \\ X_1 \times A_2 &= (\mathrm{pr}_2)^{-1}(A_2) \in \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2) \end{aligned}$$

weil gilt, dass $\sigma(\mathscr{S}_1) = \mathscr{A}_1 \subset \widetilde{\mathscr{A}_1} = (\mathrm{pr}_1)_*(\sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2))$ das bedeutet nach Definition nichts anderes, als, dass für alle $M_1 \in \sigma(\mathscr{S}_1) = \mathscr{A}_1$ gilt, dass $\mathrm{pr}_1^{-1}(M_1) \in \sigma(\mathscr{S} \boxtimes \mathscr{S}_2)$. Aus analogen Gründen sieht man dann die zweite Zeile ein.
Nun bemerkt man noch, dass $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2)$. Ferner gilt, dass $A_1 \times X_2, X_1 \times A_2 \in \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$, da die rechte Menge eine σ-Algebra ist, gilt auch, dass $A_1 \times A_2 \in \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$. Daher gilt, dass $\mathscr{A}_1 \boxtimes \mathscr{A}_2 \subset \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$. Also gilt

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma(\mathscr{A}_1 \boxtimes \mathscr{A}_2) \subset \sigma(\mathscr{S}_1 \boxtimes \mathscr{S}_2)$$

was zu zeigen war. □

Sei nun $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum.

Lemma 3 (Chebyshev'sche-Ungleichung)**.** *Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar, dann gilt für $t \in (0, \infty)$, dass*

$$t \cdot \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \int_X f \; \mathrm{d}\mu$$

Wir zeigen damit, dass für $f : X \to [0, \infty]$ messbar gilt

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu < \infty \implies f < \infty \; \mu\text{-fast-überall}$$

Angenommen f wäre nicht μ-fast-überall endlich, dann gäbe es eine Menge $A \in \mathscr{E}$ mit $\mu(E) > 0$ und $f(x) = \infty$ für alle $x \in E$. Dann wäre aber für alle $t > 0$

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \geq \mu(E)$$

da für alle $x \in E$ gilt, $f(x) = \infty > t$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$n \cdot \mu(E) \leq n \cdot \mu(\{x \in X : f(x) \geq n)\} \leq \int_X f \; \mathrm{d}\mu$$

aber, da $\mu(E)$ konstant ist, gilt $n \cdot \mu(E) \to \infty$, wenn $n \to \infty$. Also kann $\int_X f \; \mathrm{d}\mu$ nicht endlich sein. Widerspruch.