Analysis 1

Dies ist eine inoffiziele Mitschrift für die Teilnehmer eines Tutoriums der Analysis 1 im Wintersemester 2020/2021 in Heidelberg.

1 Grundlagen

Definition 1.1 (Cantor 1895)**.** Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.
Das bedeutet, dass ein Element entweder in der Menge liegt oder nicht und dass jedes Element höchstens einmal in einer Menge vorkommt.
Für ein Element x, das in einer Menge M liegt, schreiben wir $x \in M$, sonst $x \notin M$. Wir schreiben $\emptyset = \{\}$ für die Menge, die kein Element enthält.

Definition 1.2. Seien M, N Mengen, wir schreiben

(a) $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$, das heißt die Vereinigung von M und N.

(b) $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$, das heißt der Durschnitt von M und N.

(c) $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$, das heißt die (relative) Differenz von M und N.

(d) M und N heißen disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$.

Wir wollen nun Aussagen formalisieren. Eine Aussage ist ein Sachverhalt, von dem entweder Wahrheit oder Falschheit ausgesagt werden kann. Der Wahrheitswert einer zusammgesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte seiner Teilaussagen festgelegt.

Definition 1.3 (Aussagen)**.** Seien A, B Aussagen. Wir definieren die Verknüpfungen mittels Wahrheitstabellen.
Ferner sage wir A, B sind äquivalent, in Zeichen $A \Leftrightarrow B$, falls $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

Definition 1.4 (Teilmengen)**.** M, N Mengen, wir sagen M ist eine Teilmenge von N, Notation: $M \subset N$, falls $x \in M \Rightarrow x \in N$.

Definition 1.5 (Quantoren)**.** Wir schreiben abkürzend $\forall$ als „für alle“, sowie $\exists$ für „es gibt/es existiert“ und $\exists!$ für „es gibt genau ein“.

A	B	A$\wedge$ B	A$\vee$B	A $\implies$ B
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Definition 1.6. M, N Mengen, wir definieren das kartesische Produkt als

$$M \times N \coloneqq \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$$

Eine Teilmenge $R \subset M \times N$ nennen wir Relation. Eine Relation $R \subset M \times N$ heißt rechtseindeutig, falls $\forall x \in M$: es existiert höchstens ein $y \in N : (x, y) \in R$. Sie heißt linkstotal, falls $\forall x \in M$: es gibt mindestens ein $y \in N : (x, y) \in R$

Definition 1.7 (Abbildungen)**.** M, N Mengen. Eine Abbildung f zwischen M, N ist eine Zuordnung, die allen Elementen von M genau ein Element von N zuordnet. In anderen Worten können wir jede linkstotale, rechtseindeutige Relation $R \subset M \times N$ als Abbildung auffassen und umgekehrt.

Definition 1.8. $f : M \to N$ eine Abbildung, wir definieren

(a) $\operatorname{im} f = \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\} \subset N$

(b) $f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in M : f(x) \in B\} \subset M$ für alle $B \subset N$

(c) Für $A \subset M$ definieren wir die Einschränkung von f auf A, Notation: $f\mid_A$, durch $f\mid_A : A \to N, a \mapsto f(a)$.

(d) Den Graphen von f definieren wir als $\mathrm{Graph}(f) \coloneqq \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$

Zwei Abbildungen $f, g : M \to N$ heißen gleich, falls $\forall x \in M : f(x) = g(x)$.

Definition 1.9 (Komposition)**.** U, V, W Mengen, $f : U \to V, g : V \to W$ Abbildungen, wir definieren die Komposition $g \circ f : U \to W$ durch

$$(g \circ f)(u) \coloneqq g(f(u)),\ \forall u \in U$$

Lemma 1.1. *Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung. Seien $A, B \subset M$ und $X, Y \subset N$. Es gilt*

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Definition 1.10 (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)**.** $f : M \to N$ eine Abbildung. f heißt

1. injektiv, falls $\forall x, y \in M : (f(x) = f(y)) \implies (x = y)$.
2. surjektiv, falls $\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$.
3. bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

Lemma 1.2. *Falls $f : M \to N$ bijektiv, so existiert genau eine Abbildung $g : N \to M$, sodass $(g \circ f)(m) = m$, $\forall m \in M$ und $(f \circ g)(n) = n$, $\forall n \in N$. Dann heißt g die Umkehrabbildung von f und wir schreiben $g = f^{-1}$.*

Beweis. Für alle $y \in N$ existiert genau ein $x_y \in M$, s.d. $f(x_y) = y$. Wir definieren $g : N \to M$ durch $g(y) = x_y$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, weil jedes $y \in N$ genau ein Urbild $x \in M$ hat. Dieses g erfüllt offenbar die gewünschten Eigenschaften.
Sei $g' : N \to M$ mit den geforderten Eigenschaften. Sei $y \in N$ beliebig mit Urbild $x_y \in M$. Dann ist

$$g(y) = g(f(x_y)) = x_y = g'(f(x_y)) = g'(y)$$

□

1.1 Vollständige Induktion

Wir gehen nicht auf die Beweismethode ein.

Definition 1.11. Für $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x \cdot x^{n-1}, & n > 0 \end{cases}$$

Definition 1.12. Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq m$ ohne Einschränkung und $a_n, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ wir definieren

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \coloneqq a_n + \ldots + a_m$$

Lemma 1.3 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Definition 1.13. Sei $n \in \mathbb{N}$, wir definieren rekursiv $0! \coloneqq 1$ und $n! = n \cdot (n-1)!$, falls $n > 0$.
Ferner definieren wir den Binomialkoeffizienten für $n, k \in \mathbb{N}_0$ als

$$\binom{n}{k} \coloneqq \frac{n!}{k!(n-k)!},\ n \geq k \qquad \binom{n}{k} \coloneqq 0,\ n < k$$

Lemma 1.4. *Für $0 < k < n$ und $k, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Lemma 1.5. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

ferner gilt

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$$

2 Körper und angeordnete Körper

Definition 2.1. Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge und zwei binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, s.d. die folgenden Axiome erfüllt sind

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \forall a, b, c \in K$

(2) $\exists 0 \in K : a + 0 = a$

(3) $\forall a \in K : \exists b \in K : a + b = 0$

(4) $a + b = b + a, \ \forall a, b \in K$

(5) $a(bc) = (ab)c, \ \forall a, b, c \in K$

(6) $\exists 1 \in K^\times = K \setminus \{0\} : a \cdot 1 = a, \ \forall a \in K$

(7) $\forall a \in K^\times : \exists b \in K^\times : ab = 1$

Definition 2.2. Ein angeordneter Körper ist ein Körper zusammen mit einer Teilmenge $P \subset K$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt

(O1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen

  (1) $a \in P$

  (2) $a \notin P$

  (3) $-a \in P$

  Man nennt diese Eigenschaft auch oft Trichotomie.

(O2) Für alle $a, b \in P$ gilt $a + b \in P, \ a \cdot b \in P$

Lemma 2.1. *Sei K ein Körper, dann gilt $a^2 = (-a)^2$.*

Beweis. Sei $a \in K$ beliebig, es ist

$$\begin{aligned} a + (-a) = 0 \Rightarrow a^2 + a \cdot (-a) = 0 \Rightarrow a^2 &= -(a \cdot (-a)) \\ &= (-1) \cdot (a \cdot (-a)) = ((-1)a)(-a) = (-a)^2 \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. *In jedem angeordneten Körper K gilt $a^2 \geq 0$ für alle $a \in K$.*

Beweis. Ist $a \geq 0$, so ist $a \cdot a = a^2 \geq 0$ ist $a \leq 0$, so ist $(-a) \geq 0$ und es ist $0 \leq (-a)^2 = a^2$ □

Lemma 2.3. *Jeder angeordnete Körper hat unendliche viele Elemente, insbesondere ist die Abbildung $\mathbb{N} \to K,\ n \mapsto n \cdot 1_K$ injektiv.*

Definition 2.3. K ein angeordneter Körper, für zwei Elemente $a, b \in K$ definieren wir

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ferner definieren wir den Absolutbetrag auf K durch $|\cdot| : K \to K,\ a \mapsto |a| := \max(a, -a)$.

Lemma 2.4. *Sei $|\cdot|$ wie oben definiert, dann gilt*

(a) $\forall a \in K : |a| \geq 0$

(b) $\forall a, b \in K : |ab| = |a| \cdot |b|$

(c) $\forall a, b \in K : |a + b| \leq |a| + |b|$

Ferner gilt die sogenannte umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in K : ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

3 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Sei im Folgenden K stets ein angeordneter Körper mit Ordnungsrelation $\leq$.

Definition 3.1. Eine Teilmenge $M \subset K$ heißt nach oben/unten beschränkt, falls ein $T \in K$ existiert mit $T \geq x, \forall x \in K$ beziehungsweise, falls ein $T' \in K$ existiert mit $T' \leq x, \forall x \in K$. Eine Teilmenge heißt beschränkt, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist. Jedes Element T beziehungsweise T' mit der obigen Eingenschaft heißt obere/untere Schranke von M.

Definition 3.2. Sei $M \subset K$ eine Teilmenge, falls M eine obere Schranke von M enthält, also ein Element $t \in M$, sodass $t \geq x$ für alle $x \in M$, so heißt t das Maximum der Menge M. Analog definiert man im Falle der Existenz das Minimum einer Teilmenge von K. Wir bezeichnen dieses Element dann mit dem Symbol $\max(M)$ beziehungsweise $\min(M)$.

Bemerkung. Das Maximum(/Minimum) ist eindeutig bestimmt, denn seien $m, m' = \max(M)$, so gilt $m \geq m'$ und $m' \geq m$, also $m = m'$. Analog für das Minimum.

Definition 3.3. Sei $M \subset K$, ein Element $s \in K$ heißt Supremum von M, falls

(a) s ist obere Schranke von M

(b) Für alle oberen Schranken $t \in K$ von M gilt $t \geq s$

s ist in einem bestimmten Sinne also die kleinste obere Schranke von M.
Analog definiert man das Infimum einer nach unten beschränkten Menge $\emptyset \neq M$ als die größte untere Schranke, Notation: $\inf M$.

Bemerkung. Das Supremum einer nicht leeren Teilmenge ist eindeutig bestimmt. Es gibt nicht leere Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die kein Supremum in $\mathbb{Q}$ haben. Etwa $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

Definition 3.4. Ein angeordneter Körper K heißt supremumsvollständig (oder auch Dedekindvollständig), falls jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat.

Bemerkung. Bis auf Isomorphie gibt es einen angeordneten Dedekind-vollständigen Körper, nämlich die reellen Zahlen.

Satz 3.1. *Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt. D.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$*

Lemma 3.1. *Es gelten die folgenden Aussagen*

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann existiert eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k + 1$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1/n < \varepsilon$

(c) Die Menge $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.

Bemerkung. Man kann jede reelle Zahl in der Dezimaldarstellung schreiben.

Definition 3.5. Sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen, dann nennen wir die Anzahl der Elemente von M die Mächtigkeit oder Kardinalität von M, Notation $|M|$ oder $\#M$.
Seien M, N endliche Mengen. Gibt es eine Bijektion $\varphi : M \to N$, so ist $\#M = \#N$.

Definition 3.6. Seien nun M, N zwei beliebige Mengen. Wir nennen M, N gleichmächtig, falls es eine Bijektion $M \to N$ gibt.
Sei A eine Menge, exisitert eine Bijektion $\mathbb{N} \to A$, so heißt A abzählbar, andernfalls heißt A überabzählbar.

Bemerkung. Die Mengen $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind beispielsweise abzählbar, denn

(a) $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ ist eine Bijektion.

(b) Man sieht leicht, dass $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist eine Bijektion.

Gleichmächtig ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch klar) und weil die Komposition von Bijektionen eine Bijektion ist, ist sie auch transitiv.

Satz 3.2. *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Satz 3.3. *Die Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Lemma 3.2. *Sei* S *eine Menge mit mindestens zwei Elementen, dann ist* $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, S)$ *überabzählbar.*

Definition 3.7. Sei M eine Menge, dann heißt

$$\mathfrak{P}(M) = 2^M = \{A : A \subset M\}$$

die Potenzmenge von M. Die Potenzmenge ist also die Menge aller Teilmengen.

Bemerkung. Falls $\#M = n < \infty$, so ist $\#\mathfrak{P}(M) = 2^n$.
Es ist $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.
Frage: Gibt es eine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der der reellen Zahlen und der natürlichen Zahlen liegt? (Kontinuumshypothese)

4 Folgen

Definition 4.1. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir eine Folge reeller beziehungsweise komplexer Zahlen, statt $a(n)$ schreiben wir oft a_n und statt a suggestiv $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung. Wir schreiben statt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oft auch (a_n) oder auch $\{a_n\}$.

Bemerkung (Komplexe Zahlen). Wir definieren $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $i^2 = -1$ gilt. Man definiert

$$(a + bi) + (x + yi) := (a + x) + (b + y)i$$
$$(a + bi) \cdot (x + yi) := (ac - bd) + i(ad + bc)$$

und $1_\mathbb{C} = 1_\mathbb{R}$ sowie $0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{C}$ mit diesen Strukturen ist $\mathbb{C}$ ein Körper. Offenbar ist $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ und insbesondere ist $\mathbb{C}$ ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\mathbb{R}$-Basis $(1, i)$.
Für ein $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definieren wir $\Re(z) = a$ und $\Im(z) = b$ sowie $\overline{z} = a - bi$ und $\overline{z}$ heißt das komplexe Konjugat zu z. Man sieht direkt, dass $\overline{\overline{z}} = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Man kann zeigen, dass $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ der einzige nicht triviale Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist, der eingeshränkt auf $\mathbb{R}$ die Identität ist.
Wir definieren die Norm oder den Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ durch

$$|z| \coloneqq \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$, sowie $|zw| = |z||w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
Wir können $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ betrachten, indem wir $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ a + bi \mapsto a$.

Definition 4.2 (Konvergenz)**.** Eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) : \forall n \geq n(\varepsilon) : |a - a_n| < \varepsilon$$

a heißt dann der Grenzwert oder Limes von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie divergent. Konvergiert eine Folge gegen Null, so nennen wir sie Nullfolge.

Bemerkung. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$.
Wir definieren $D_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\}$ (das D steht für Disc).
Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in D_\varepsilon(a)$.

Lemma 4.1. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Ferner ist jede konvergente Folge beschränkt.*

Bemerkung. Es ist

(a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

(b) Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Lemma 4.2. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente komplexwertige Folgen und es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{C}$. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(i) $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda a$

(ii) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a + b$

(iii) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b$

(iv) Falls $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$$

Lemma 4.3. *Seien (a_n) und (b_n) konvergente reelle Folgen mit $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Lemma 4.4 (Sandwich-Lemma)**.** *Seien (a_n) und (c_n) konvergente Folgen mit $\lim a_n = \lim c_n$ und es gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

(i) (b_n) *ist konvergent*

(ii) $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$

Definition 4.3. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt monoton wachsend, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Monoton fallsend ist analog definiert.

Lemma 4.5. *Sei (a_n) eine beschränkt Folge, dann gilt*

(i) Ist (a_n) monoton wachsend, so ist (a_n) konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) Ist (a_n) monoton fallend, so ist die Folge konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Definition 4.4. Sei (a_n) eine komplexwertige Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von (a_n), falls für alle $\varepsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Bemerkung. Ist eine Folge (a_n) konvergent, so hat sie genau einen Häufungspunkt, nämlich $\lim a_n$. Es gibt aber Folgen, die genau einen Häufungspunkt haben und divergent sind, etwa

$$a_n := \begin{cases} n, & n \in 2\mathbb{N} \\ 0, & n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

Die Folge hat 0 als Häufungspunkt, sie ist unbeschränkt, also divergent und man sieht leicht, dass sie keinen anderen Häufungspunkt hat.

Definition 4.5. Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).

Lemma 4.6. *Sei (a_n) eine komplexwertige Folge, dann ist $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von (a_n) genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a Konvergiert.*

Bemerkung (Irres Beispiel). $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, das heißt es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto a_n$. Wir betrachten die so definierte Folge (a_n). Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (q_n) mit rationalen Folgegliedern, sodass $\lim q_n = x$, weil $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht. Also gibt es für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Teilfolge von (a_n), die gegen x konvergiert, also ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge.

Lemma 4.7. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Satz 4.1 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Definition 4.6 (Cauchy-Folge)**.** Eine komplexwertige Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Satz 4.2. *Sei (a_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Es gilt: Die Folge (a_n) ist konvergent geanu dann, wenn die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.*

Bemerkung. Dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, gilt im Allgemeinen (in sogenannten metrischen Räumen und $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind auf natürliche Weise metrische Räume). Dass jede Cauchy-Folge konvergiert gilt nicht im Allgemeinen, etwa in $\mathbb{Q}$ nicht. Man nennt deshalb $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig (bezüglich Konvergenz von Cauchy-Folgen).
Der Beweis hat ferner gezeigt, dass falls eine Folge (a_n) komplexer Zahlen konvergent ist, so auch jede Teilfolge von (a_n) und die Teilfolge hat denselben Grenzwert.

4.1 Limes superior und Limes inferior

Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann sind

(i) $B_n \coloneqq \sup\{a_k : k \geq n\}$ und

(ii) $b_n \coloneqq \inf\{a_k : k \geq n\}$

wohldefiniert und existieren. Dann gilt, dass B_n monoton fällt und b_n monoton wächst und beide beschränkt sind, ferner gilt $b_n \leq B_n$. Das heißt sie sind konvergent und es gilt $\lim b_n \leq \lim B_n$.

Definition 4.7 (Limes superior)**.** Sei (a_n) eine beschränkte Folge.

(a) Wir nennen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n) \coloneqq \lim_{n\to\infty} B_n$$

den Limes superior.

(b) Wir nennen

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n) \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

den Limes inferior.

Bemerkung. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

das folgt direkt daraus, dass monotone Folgen gegen das Infimum beziehungsweise Supremum konvergieren.

Definition 4.8. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, wir definieren $\sup A := +\infty$. Ist $A \subset R$ nicht nach unten beschränkt, so definieren wir $\inf A = -\infty$. Ferner definieren wir $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = \infty$. Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ wird druch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ fortgesetzt.

Definition 4.9. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen ∞, falls gilt

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$$

Die Folge (a_n) heißt bestimmt divergent, gegen $-\infty$, falls $(-a_n)$ bestimmt divergent gegen ∞ ist. Wir schreiben $\lim(a_n) = \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und analog im Fall $-\infty$.

Satz 4.3. *Die Folge (a_n) sei bestimmt divergent gegen $\pm\infty$, dann gilt*

(a) $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim 1/a_n = 0$.

Satz 4.4. *Sei (a_n) eine Nullfolge mit der Eigenschaft $a_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n < 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$), dann gilt, dass die Folge $(1/a_n)$ bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$) dviergiert.*

Satz 4.5 (Alternative Charakterisierung von lim sup und lim inf)**.** *Sei (a_n) Folge reeller Zahlen, dann gilt*

(a) $\limsup a_n = a \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt:*
   (i) $a_n < a + \varepsilon$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.
   (ii) $a_n > a - \varepsilon$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt:*
   (i) $a_n > a - \varepsilon$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$
   (ii) $a_n < a + \varepsilon$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$

(c) (a_n) *ist genau dann konvergent, wenn* $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$, *dann ist* $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Korrollar 4.1. *Es gilt*

$$\limsup a_n = \sup\{a \mid a \textit{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}$$
$$\liminf a_n = \inf\{a \mid a \textit{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}$$

5 Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^n$

Definition 5.1. Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$. Eine reellwertige bzw. komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $f : D \to \mathbb{C}$. Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) definieren wir für alle $x \in D$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &\coloneqq f(x) + g(x)\\ (f-g)(x) &\coloneqq f(x) - g(x)\\ (f \cdot g)(x) &\coloneqq f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so auch

$$\frac{f}{g}(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}$$

Da $\mathbb{C}$ (und $\mathbb{R}$) Körper sind, sind diese Konstrutkionen wohldefiniert und wieder Abbildungen $D \to \mathbb{C}$ oder $D \to \mathbb{R}$.

Definition 5.2 (Euklidischer Abstand)**.** Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ Punkte des $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir

$$|x - y| \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Definition 5.3 (ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) heißt stetig in $x_0 \in D$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Ist f in jedem Punkt von D stetig, so heißt f stetig auf D. Wir schreiben

$$\mathscr{C}^0(D, \mathbb{C}) \coloneqq \{f : D \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig in } D\}$$

und analog $\mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$

Satz 5.1. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $x^* \in D$ stetig, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim x_n = x$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Entsprechend „vertauschen stetige Funktionen mit Limesbildung“.

Satz 5.2 (Rechenregeln)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $x^* \in D$. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und falls definiert auch f/g stetig in x^*.*

Satz 5.3 (Komposition stetiger Funktione)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ mit* $\operatorname{im} f \subset E$. *Dann gilt: Ist f stetig in $x^* \in D$ und g stetig ind $f(x^*) \in E$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in x^*.*

Definition 5.4 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, falls gilt

$$\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

***Bemerkung*.** Man sieht leich, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ Lipschitz-steig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Sei $x \in D$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta = \varepsilon / L$, dann gilt für $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

also f stetig in $x \in D$. Da $x \in D$ beliebig war, ist f stetig auf D.