

Wydział WIMiIP	Imię i nazwisko Mateusz Witkowski	Rok II	Grupa 4
Temat: Rozwiązywanie równań różniczkowych metodami Rungego-Kutty: Huena i klasycznej RK4.			Prowadzący dr hab. inż. Hojny Marcin, prof. AGH
Data ćwiczenia 28.05.2020	Data oddania 04.06.2020	Data zaliczenia	OCENA

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się oraz implementacja sposobu rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych używając metod Rungego-Kutty: Huena i klasycznej RK4.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Metoda Huena jest ulepszoną wersją metody Eulera poznanej na poprzednich zajęciach. Główną modyfikacją jest to, że zamiast obliczać tylko stałą wartość na początku przedziału oblicza się również pochodną na końcu przedziału co daje efekty w postaci dokładniejszych wyników w porównaniu do poprzedniej metody.

Pierwszym krokiem podczas korzystania z tej metody jest wyliczenie liczby koniecznych do wykonania kroków przy pomocy wzoru:

$$N = \frac{b - a}{h}$$

Gdzie:

a – początek przedziału

b – koniec przedziału

h – wielkość ustalonego kroku

Wzór ogólny natomiast wygląda następująco:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

Gdzie:

- $f(x_n, y_n) = \frac{dy}{dx}$
- $n = 0, 1, \dots, N$
- h – wielkość ustalonego kroku

Klasyczna metoda RK4 – zakładamy, że znane jest $y(x)$ i chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość $y(x + h)$. Obliczamy wartości $f(x, y(x))$ w pewnych szczególnie dobranych punktach leżących w pobliżu krzywej rozwiązania w przedziale $(x, x + h)$ i zastosowaniu odpowiednio dobrego wzoru złożonego z kombinacji wspomnianych wartości w celu oszacowania przyrostu $y(x + h) - y(x)$.

Wzory Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$k_1 = h \cdot f(x, y(x))$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y(x) + k_3)$$

OGólny wzór metody RK czwartego rzędu wygląda następująco:

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Gdzie:

- $n = 0, 1, \dots, N$
- h – wielkość ustalonego kroku

3. Kod programu

Zdefiniowano funkcję pomocniczą zwracającą wartość pochodnej w przekazanym do niej punkcie, co znacznie ułatwi nam pracę w przypadku modyfikacji kodu, gdyż będziemy chcieli rozpatrywać wiele różnych funkcji.

```
double fh(double x, double y) { //Funkcja pomocnicza
    return (cos(x) - sin(x) - y);
    //return x * x + y;
}
```

Rysunek 1. Funkcja wartości pochodnej.

Następnie zaimplementowano algorytm Huena w postaci funkcji przyjmującej za zmienne punkt początkowy – współrzędną x i y , kraniec interesującego nas przedziału oraz wielkość kroku wyznaczającą kolejne punkty. Na podstawie punktu początkowego, krańca przedziału i wielkości kroku wyliczono wartość N , czyli potrzebną liczbę iteracji do wykonania algorytmu. Utworzono pętlę `for` odpowiedzialną za wyliczanie i wypisywanie kolejnych x i y .

```

void Huen(double a, double b, double y0, double h) {
    double N = (b - a) / h; //wyliczamy liczbe iteracji
    double x = a; //przypisujemy x punkt startowy
    double y = y0; //przypisujemy parametr poczatkowy
    for (size_t i = 0; i < N; i++)
    {
        y = y + (h/2) * (fh(x, y) + fh(x+h, y + h * fh(x, y))); //wyliczamy i wypisujemy kolejne y
        cout << "y[" << i + 1 << "] = " << y << endl;
        x = x + h; //wyliczamy i wypisujemy kolejne x
        cout << "x[" << i + 1 << "] = " << x << endl;
        cout << endl;
    }
}

```

Rysunek 2. Implementacja metody Huena.

Dla metody RK4 również utworzyliśmy funkcję pomocniczą oraz obliczyliśmy N. Algorytm w każdej iteracji obliczał nowy zestaw wartości k oraz na ich podstawie interesujące nas wyniki.

```

double fR(double x, double y) { //Funkcja pomocnicza
    //return x * x + y;
    return x + y;
}

void RK4(double a, double b, double y0, double h) {
    double N = (b - a) / h; //wyliczamy liczbe iteracji
    double x = a; //przypisujemy x punkt startowy
    double y = y0; //przypisujemy parametr poczatkowy
    double k1,k2,k3,k4;
    for (size_t i = 0; i < N; i++)
    {
        //Obliczanie kolejnych wartosci k
        k1 = h * fR(x, y);
        cout << "k1: " << setprecision(6) << k1 << endl;
        k2 = h * fR(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k1);
        cout << "k2: " << k2 << endl;
        k3 = h * fR(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k2);
        cout << "k3: " << k3 << endl;
        k4 = h * fR(x + h, y + k3);
        cout << "k4: " << k4 << endl;

        y = y + (k1 + 2 * k2 + 2* k3 + k4)/6; //wyliczamy i wypisujemy kolejne y
        cout << "y[" << i + 1 << "] = " << y << endl;
        x = x + h; //wyliczamy i wypisujemy kolejne x
        cout << "x[" << i + 1 << "] = " << x << endl;
        cout << endl;
    }
}

```

Rysunek 3. Implementacja metody RK4.

W funkcji main przed i po wywołaniu funkcji Huen bądź RK4 zdefiniowano zmienne pobierające moment czasowy w celu obliczenia oraz wyświetlenia czasu potrzebnego do zrealizowania algorytmu.

```
int main() {  
    auto start = std::chrono::steady_clock::now();    //punkt startowy pomiaru czasu  
    //Huen(0, 0.3, 2, 0.1);  
    RK4(0, 0.2, 1, 0.1);  
    auto end = std::chrono::steady_clock::now();    //punkt koncowy pomiaru czasu  
    std::chrono::duration<double, milli> elapsed_seconds = end - start;    //wyliczamy czas który upłynął  
    std::cout << "Czas wykonania algorytmu: " << elapsed_seconds.count() << "ms\n";  
  
    getchar(); getchar();  
    return 0;  
}
```

Rysunek 4. Funkcja main.

Cały kod:

```
double fh(double x, double y) { //Funkcja pomocnicza  
    return (cos(x) - sin(x) - y);  
    //return x * x + y;  
}  
  
void Huen(double a, double b, double y0, double h) {  
    double N = (b - a) / h; //wyliczamy liczbe iteracji  
    double x = a;    //przypisujemy x punkt startowy  
    double y = y0;    //przypisujemy parametr poczatkowy  
    for (size_t i = 0; i < N; i++)  
    {  
        y = y + (h/2) * (fh(x, y) + fh(x+h, y + h * fh(x, y))); //wyliczamy i wypisujemy kolejne y  
        cout << "y[" << i + 1 << "] = " << y << endl;  
        x = x + h;    //wyliczamy i wypisujemy kolejne x  
        cout << "x[" << i + 1 << "] = " << x << endl;  
        cout << endl;  
    }  
}
```

Rysunek 5. Cały kod cz.1

```

double fR(double x, double y) { //Funkcja pomocnicza
    //return x * x + y;
    return x + y;
}

void RK4(double a, double b, double y0, double h) {
    double N = (b - a) / h; //wyliczamy liczbe iteracji
    double x = a; //przypisujemy x punkt startowy
    double y = y0; //przypisujemy parametr poczatkowy
    double k1,k2,k3,k4;
    for (size_t i = 0; i < N; i++)
    {
        //Obliczanie kolejnych wartosci k
        k1 = h * fR(x, y);
        cout << "k1: " << setprecision(6) << k1 << endl;
        k2 = h * fR(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k1);
        cout << "k2: " << k2 << endl;
        k3 = h * fR(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k2);
        cout << "k3: " << k3 << endl;
        k4 = h * fR(x + h, y + k3);
        cout << "k4: " << k4 << endl;

        y = y + (k1 + 2 * k2 + 2* k3 + k4)/6; //wyliczamy i wypisujemy kolejne y
        cout << "y[" << i + 1 << "] = " << y << endl;
        x = x + h; //wyliczamy i wypisujemy kolejne x
        cout << "x[" << i + 1 << "] = " << x << endl;
        cout << endl;
    }
}

int main() {

    auto start = std::chrono::steady_clock::now(); //punkt startowy pomiaru czasu
    //Huen(0, 0.3, 2, 0.1);
    RK4(0, 0.2, 1, 0.1);
    auto end = std::chrono::steady_clock::now(); //punkt koncowy pomiaru czasu
    std::chrono::duration<double, milli> elapsed_seconds = end - start; //wyliczamy czas ktory uplynal
    std::cout << "Czas wykonania algorytmu: " << elapsed_seconds.count() << "ms\n";

    getchar(); getchar();
    return 0;
}

```

Rysunek 6. Cały kod cz.2

4. Testy

W celu zweryfikowania wyników programu dokonano testów na podanych w instrukcji parametrach oraz na własnym równaniu różniczkowym. Wszystkie wyniki porównano z rozwiązaniami dokładnymi oraz wykreślono odpowiednie wykresy przy użyciu programu Microsoft Excel.

Testy metody Huena

Test 1 – Równanie różniczkowe z instrukcji.

Przypadek A.

Tabela 1. Dane dla testu 1, przypadku A.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	2	0.3	0.1	$\cos(x) - \sin(x) - y$	$e^{-x} + \cos(x)$

Wartości zwrócone przez program:

```
D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
y[1] = 1.89976
x[1] = 0.1

y[2] = 1.79863
x[2] = 0.2

y[3] = 1.69592
x[3] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 3.1088ms
```

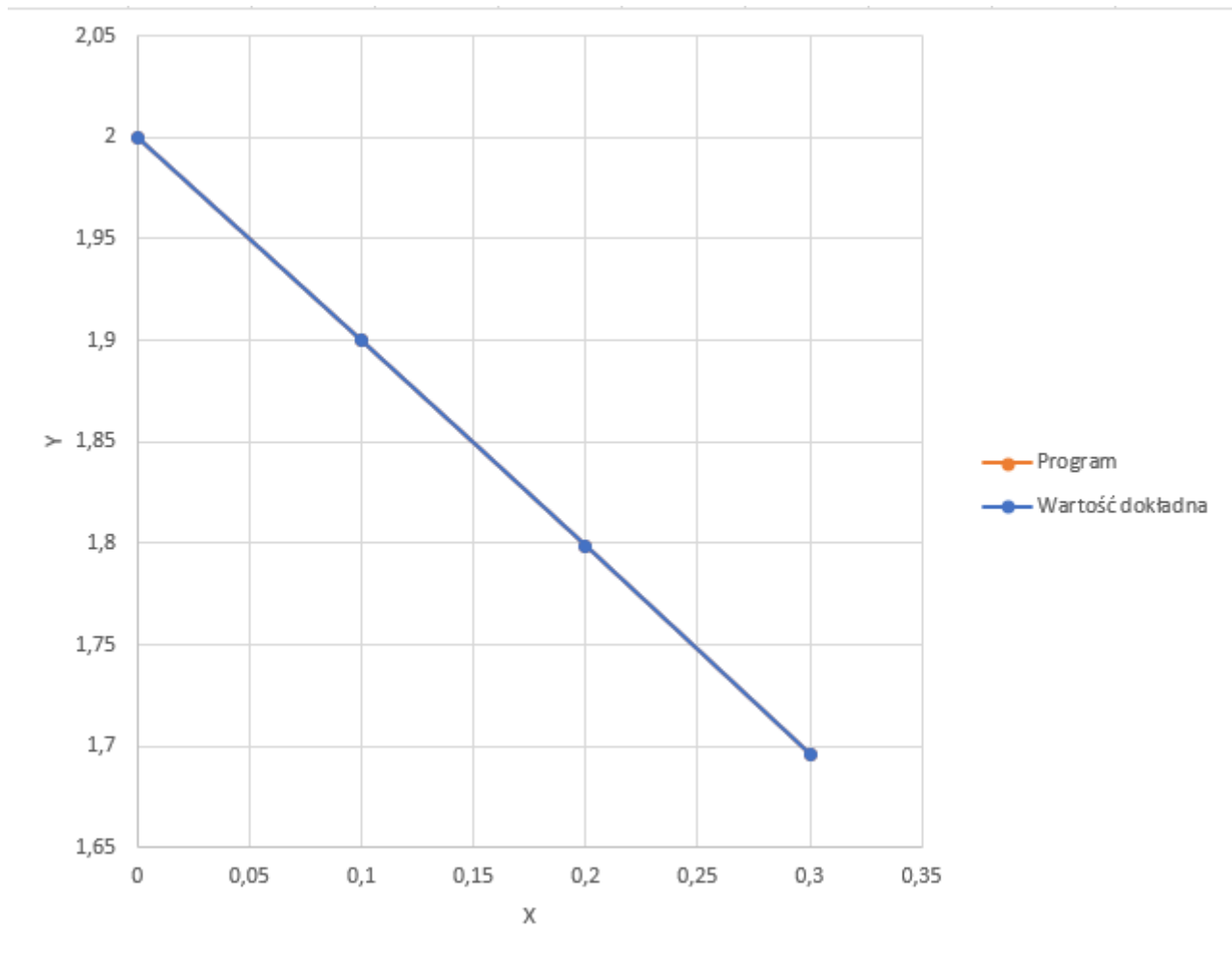
Rysunek 7. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.1$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty		Program		EXP(-X) + COS(X)	
x0	0	y0	2	y0	2
x1	0,1	y1	1,899759	y1	1,899842
x2	0,2	y2	1,798634	y2	1,798797
x3	0,3	y3	1,695917	y3	1,696155

Rysunek 8. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 9. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek B.

Tabela 2. Dane dla testu 1, przypadku B.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	2	0.3	0.05	$\cos(x) - \sin(x) - y$	$e^{-x} + \cos(x)$

Wartości zwrócone przez program:

```
C:\ D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
y[1] = 1.94997
x[1] = 0.05

y[2] = 1.89982
x[2] = 0.1

y[3] = 1.84945
x[3] = 0.15

y[4] = 1.79876
x[4] = 0.2

y[5] = 1.74766
x[5] = 0.25

y[6] = 1.6961
x[6] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 3.9691ms
```

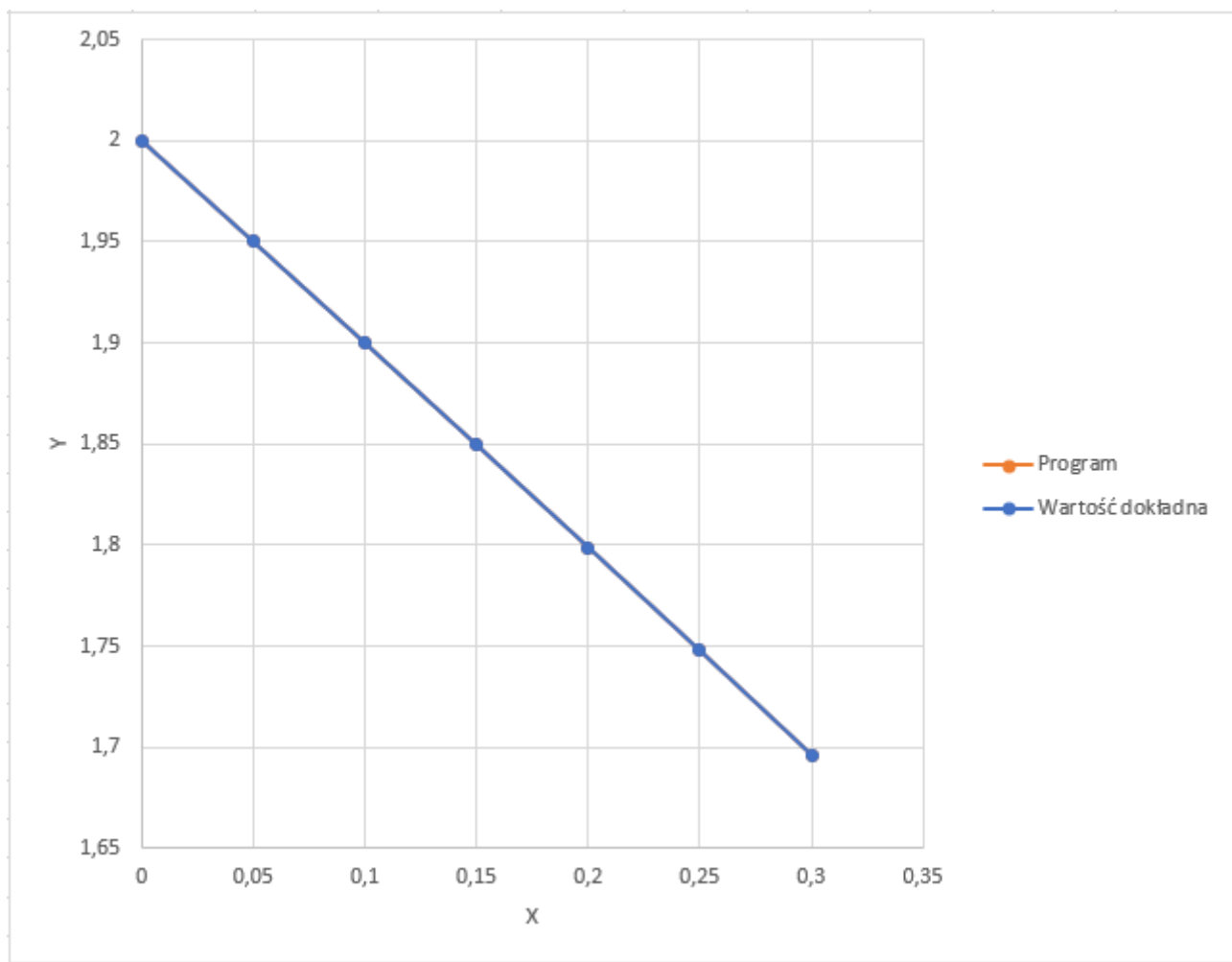
Rysunek 10. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.05$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty		Program		EXP(-X) + COS(X)	
x0	0	y0	2	y0	2
x1	0,05	y1	1,949969	y1	1,94998
x2	0,1	y2	1,899821	y2	1,899842
x3	0,15	y3	1,849448	y3	1,849479
x4	0,2	y4	1,798757	y4	1,798797
x5	0,25	y5	1,747663	y5	1,747713
x6	0,3	y6	1,696096	y6	1,696155

Rysunek 11. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



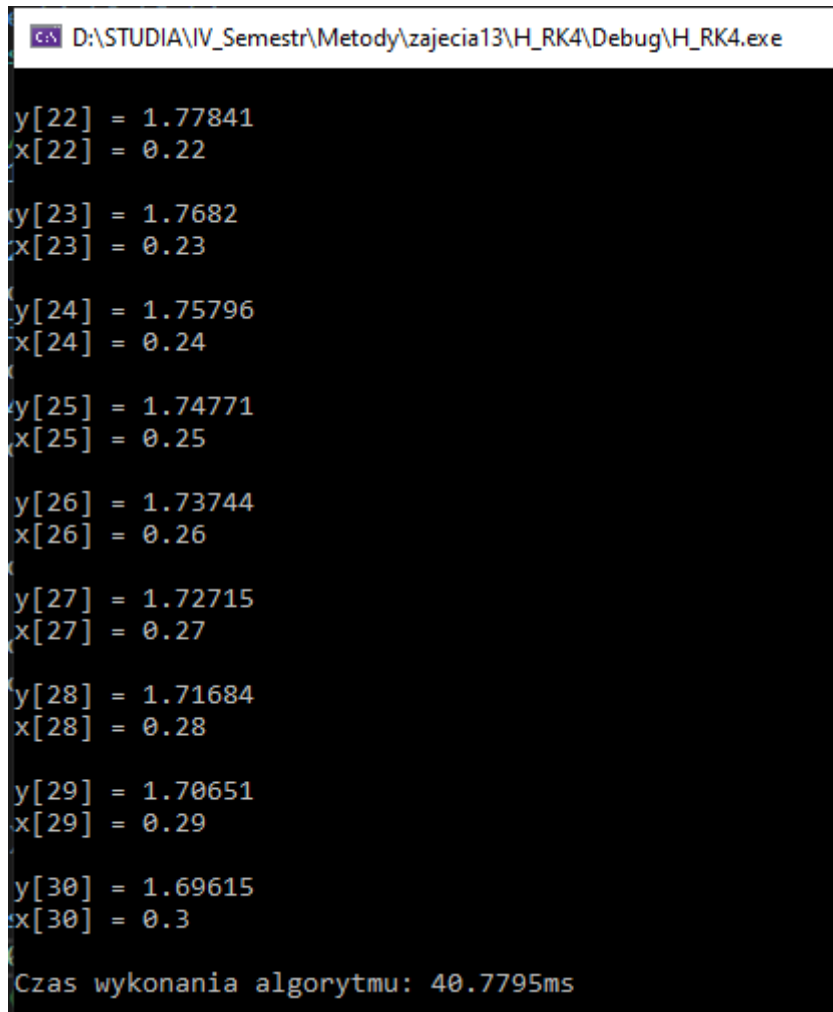
Rysunek 12. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek C.

Tabela 3. Dane dla testu 1, przypadku C.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	2	0.3	0.01	$\cos(x) - \sin(x) - y$	$e^{-x} + \cos(x)$

Wartości zwrócone przez program:



```
D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe

y[22] = 1.77841
x[22] = 0.22

y[23] = 1.7682
x[23] = 0.23

y[24] = 1.75796
x[24] = 0.24

y[25] = 1.74771
x[25] = 0.25

y[26] = 1.73744
x[26] = 0.26

y[27] = 1.72715
x[27] = 0.27

y[28] = 1.71684
x[28] = 0.28

y[29] = 1.70651
x[29] = 0.29

y[30] = 1.69615
x[30] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 40.7795ms
```

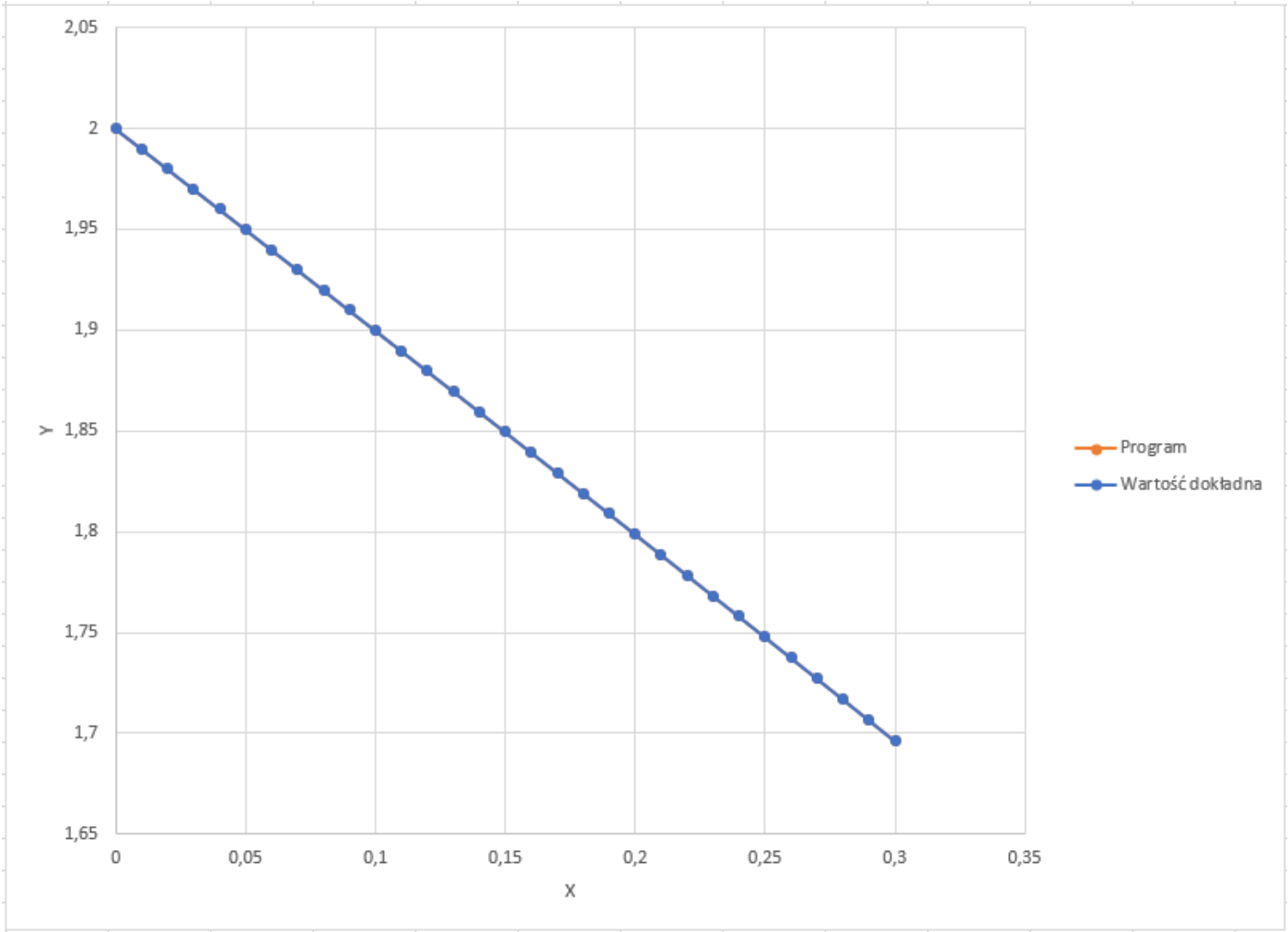
Rysunek 13. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.01$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty			Program			EXP(-X) + COS(X)
x0	0		y0	2		y0 2
x1	0,01		y1	1,99		y1 1,99
x2	0,02		y2	1,979999		y2 1,979999
x3	0,03		y3	1,969995		y3 1,969996
x4	0,04		y4	1,959989		y4 1,95999
x5	0,05		y5	1,949979		y5 1,94998
x6	0,06		y6	1,939965		y6 1,939965
x7	0,07		y7	1,929944		y7 1,929945
x8	0,08		y8	1,919917		y8 1,919918
x9	0,09		y9	1,909883		y9 1,909884
x10	0,1		y10	1,899841		y10 1,899842
x11	0,11		y11	1,889789		y11 1,88979
x12	0,12		y12	1,879728		y12 1,879729
x13	0,13		y13	1,869656		y13 1,869657
x14	0,14		y14	1,859573		y14 1,859574
x15	0,15		y15	1,849478		y15 1,849479
x16	0,16		y16	1,83937		y16 1,839371
x17	0,17		y17	1,829248		y17 1,82925
x18	0,18		y18	1,819112		y18 1,819114
x19	0,19		y19	1,808962		y19 1,808963
x20	0,2		y20	1,798796		y20 1,798797
x21	0,21		y21	1,788613		y21 1,788615
x22	0,22		y22	1,778414		y22 1,778416
x23	0,23		y23	1,768198		y23 1,7682
x24	0,24		y24	1,757964		y24 1,757966
x25	0,25		y25	1,747711		y25 1,747713
x26	0,26		y26	1,73744		y26 1,737442
x27	0,27		y27	1,727148		y27 1,72715
x28	0,28		y28	1,716837		y28 1,716839
x29	0,29		y29	1,706505		y29 1,706507
x30	0,3		y30	1,696152		y30 1,696155

Rysunek 14. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 15. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Test 2 – Własne równanie różniczkowe.

Przypadek A.

Tabela 4. Dane dla testu 2, przypadku A.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.3	0.1	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
y[1] = 0.111
x[1] = 0.1

y[2] = 0.125205
x[2] = 0.2

y[3] = 0.145052
x[3] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 2.6919ms

```

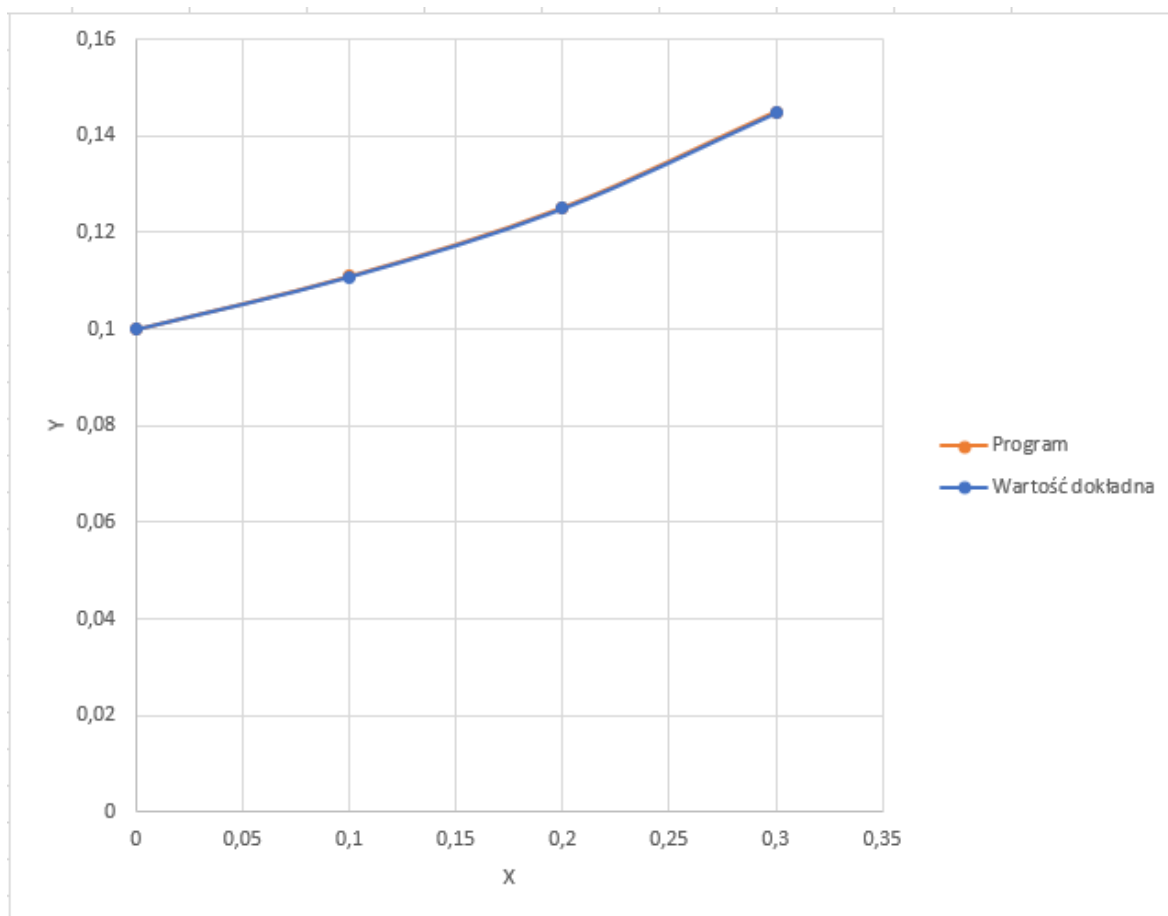
Rysunek 15. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.1$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty		Program		$2,1*EXP(X) - x^2 - 2x - 2$	
x0	0	y0	0,1	y0	0,1
x1	0,1	y1	0,111	y1	0,110858928
x2	0,2	y2	0,125205	y2	0,124945792
x3	0,3	y3	0,145052	y3	0,144703496

Rysunek 16. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 17. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek B.

Tabela 5. Dane dla testu 2, przypadku B.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.3	0.05	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```

C:\ D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
y[1] = 0.105188
x[1] = 0.05

y[2] = 0.110894
x[2] = 0.1

y[3] = 0.117402
x[3] = 0.15

y[4] = 0.12501
x[4] = 0.2

y[5] = 0.134029
x[5] = 0.25

y[6] = 0.144789
x[6] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 4.4866ms

```

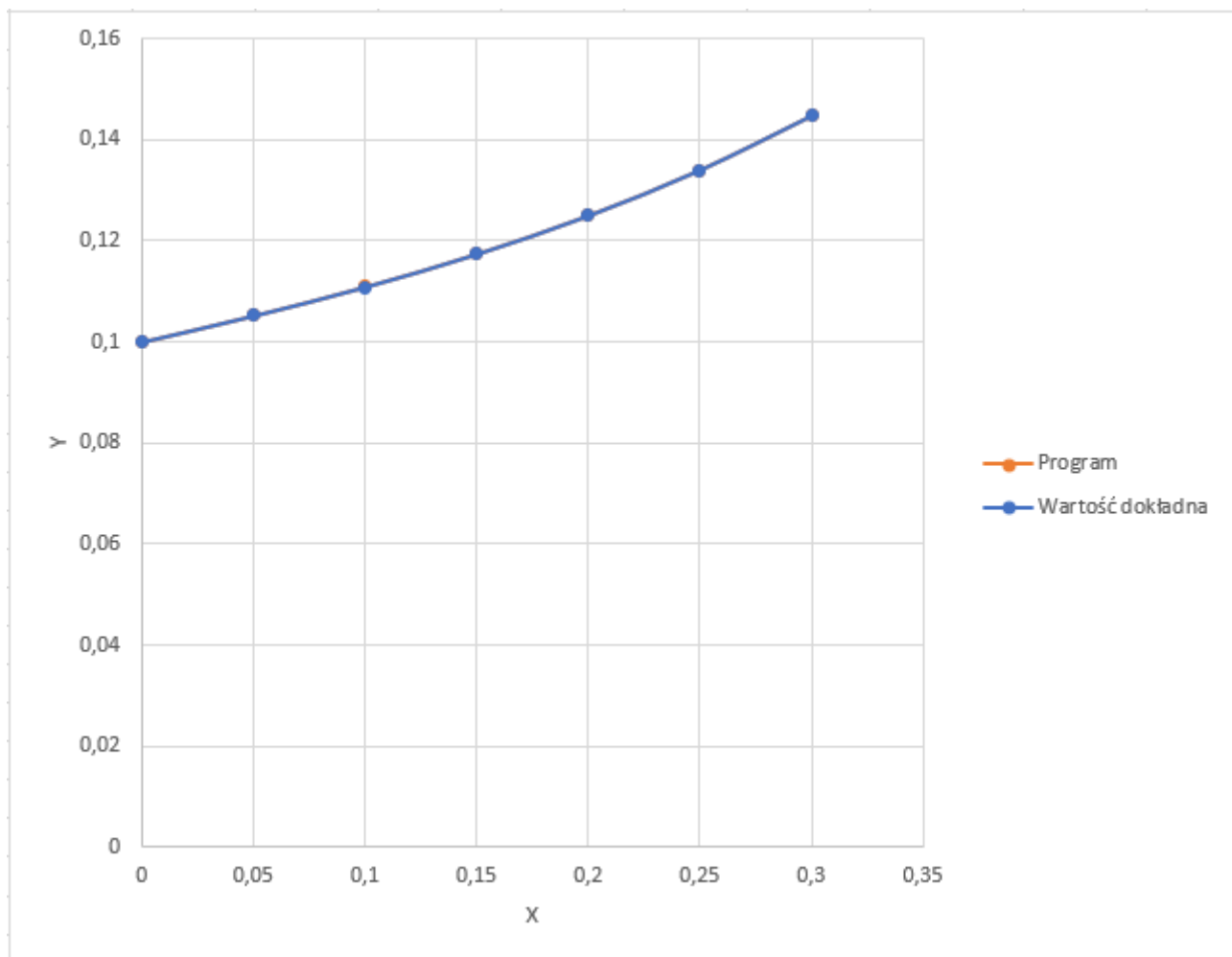
Rysunek 18. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.05$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty		Program		2,1*EXP(X) - x^2 - 2x - 2	
x0	0	y0	0,1	y0	0,1
x1	0,05	y1	0,105188	y1	0,1051693
x2	0,1	y2	0,110894	y2	0,11085893
x3	0,15	y3	0,117402	y3	0,11735191
x4	0,2	y4	0,12501	y4	0,12494579
x5	0,25	y5	0,134029	y5	0,13395338
x6	0,3	y6	0,144789	y6	0,1447035

Rysunek 19. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 20. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek C.

Tabela 6. Dane dla testu 2, przypadku C.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.3	0.01	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```
C:\ D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe

y[22] = 0.128364
x[22] = 0.22

y[23] = 0.130163
x[23] = 0.23

y[24] = 0.132026
x[24] = 0.24

y[25] = 0.133956
x[25] = 0.25

y[26] = 0.135956
x[26] = 0.26

y[27] = 0.138028
x[27] = 0.27

y[28] = 0.140176
x[28] = 0.28

y[29] = 0.142401
x[29] = 0.29

y[30] = 0.144707
x[30] = 0.3

Czas wykonania algorytmu: 37.9651ms
```

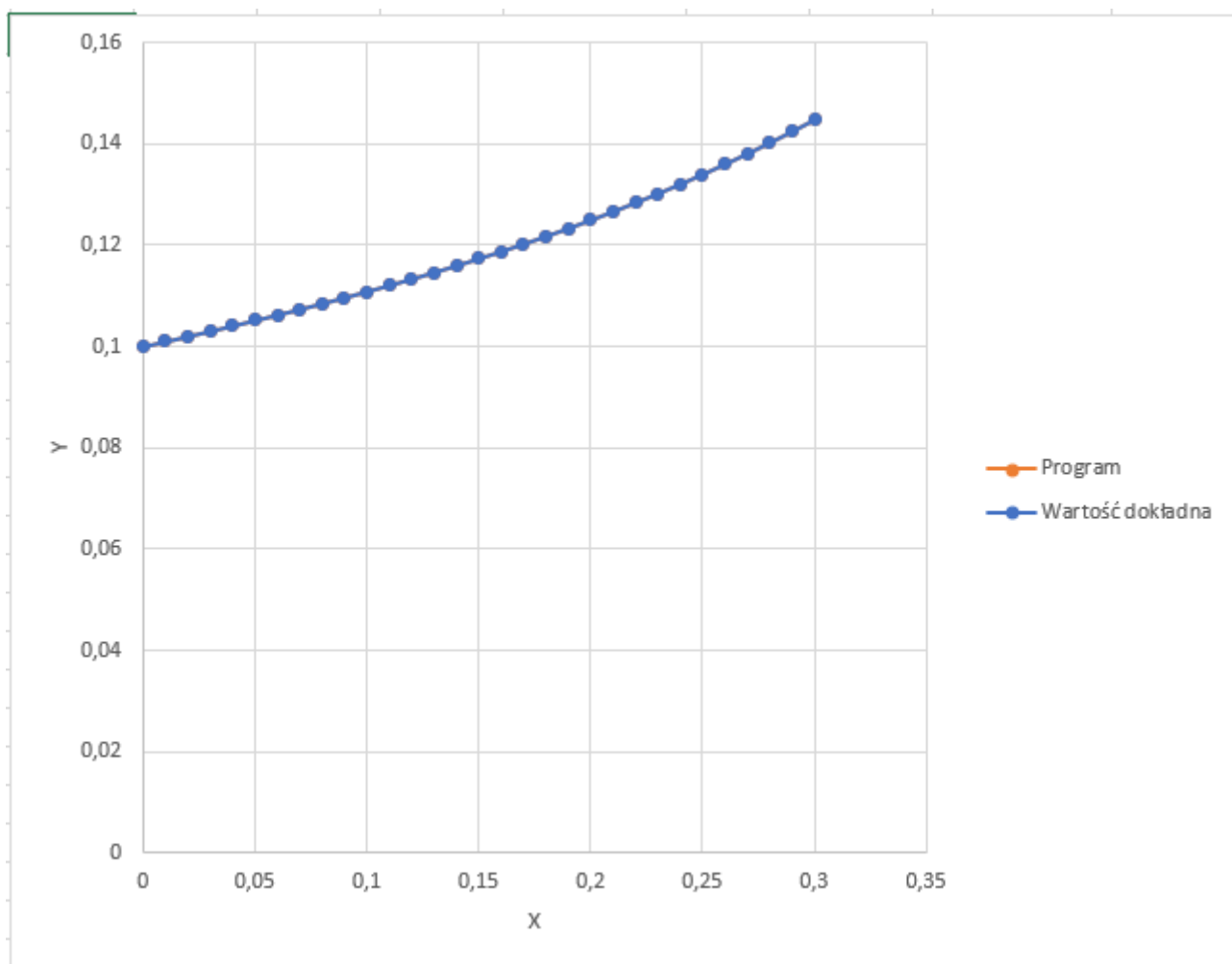
Rysunek 21. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.01$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty			Program			2,1*EXP(X) - x^2 - 2x - 2
x0	0		y0	0,1		y0 0,1
x1	0,01		y1	0,1010055		y1 0,101005351
x2	0,02		y2	0,10202311		y2 0,102022814
x3	0,03		y3	0,103054963		y3 0,103054521
x4	0,04		y4	0,10410321		y4 0,104102626
x5	0,05		y5	0,105170027		y5 0,105169302
x6	0,06		y6	0,106257611		y6 0,106256748
x7	0,07		y7	0,10736818		y7 0,107367181
x8	0,08		y8	0,108503975		y8 0,108502842
x9	0,09		y9	0,10966726		y9 0,109665996
x10	0,1		y10	0,110860321		y10 0,110858928
x11	0,11		y11	0,112085467		y11 0,112083948
x12	0,12		y12	0,113345031		y12 0,113343388
x13	0,13		y13	0,114641369		y13 0,114639605
x14	0,14		y14	0,11597686		y14 0,115974978
x15	0,15		y15	0,117353907		y15 0,11735191
x16	0,16		y16	0,118774939		y16 0,118772829
x17	0,17		y17	0,120242407		y17 0,120240188
x18	0,18		y18	0,121758788		y18 0,121756463
x19	0,19		y19	0,123326584		y19 0,123324155
x20	0,2		y20	0,124948321		y20 0,124945792
x21	0,21		y21	0,126626552		y21 0,126623926
x22	0,22		y22	0,128363854		y22 0,128361134
x23	0,23		y23	0,13016283		y23 0,130160021
x24	0,24		y24	0,132026112		y24 0,132023216
x25	0,25		y25	0,133956354		y25 0,133953375
x26	0,26		y26	0,13595624		y26 0,135953182
x27	0,27		y27	0,138028481		y27 0,138025347
x28	0,28		y28	0,140175812		y28 0,140172606
x29	0,29		y29	0,142400999		y29 0,142397725
x30	0,3		y30	0,144706834		y30 0,144703496

Rysunek 22. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 23. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Testy metody RK4

Test 1 – Równanie różniczkowe z instrukcji.

Przypadek A.

Tabela 7. Dane dla testu 1, przypadku A.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	1	0.2	0.1	$x + y$	$2e^x - x - 1$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.1
k2: 0.11
k3: 0.1105
k4: 0.12105
y[1] = 1.11034
x[1] = 0.1

k1: 0.121034
k2: 0.132086
k3: 0.132638
k4: 0.144298
y[2] = 1.24281
x[2] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 3.3374ms

```

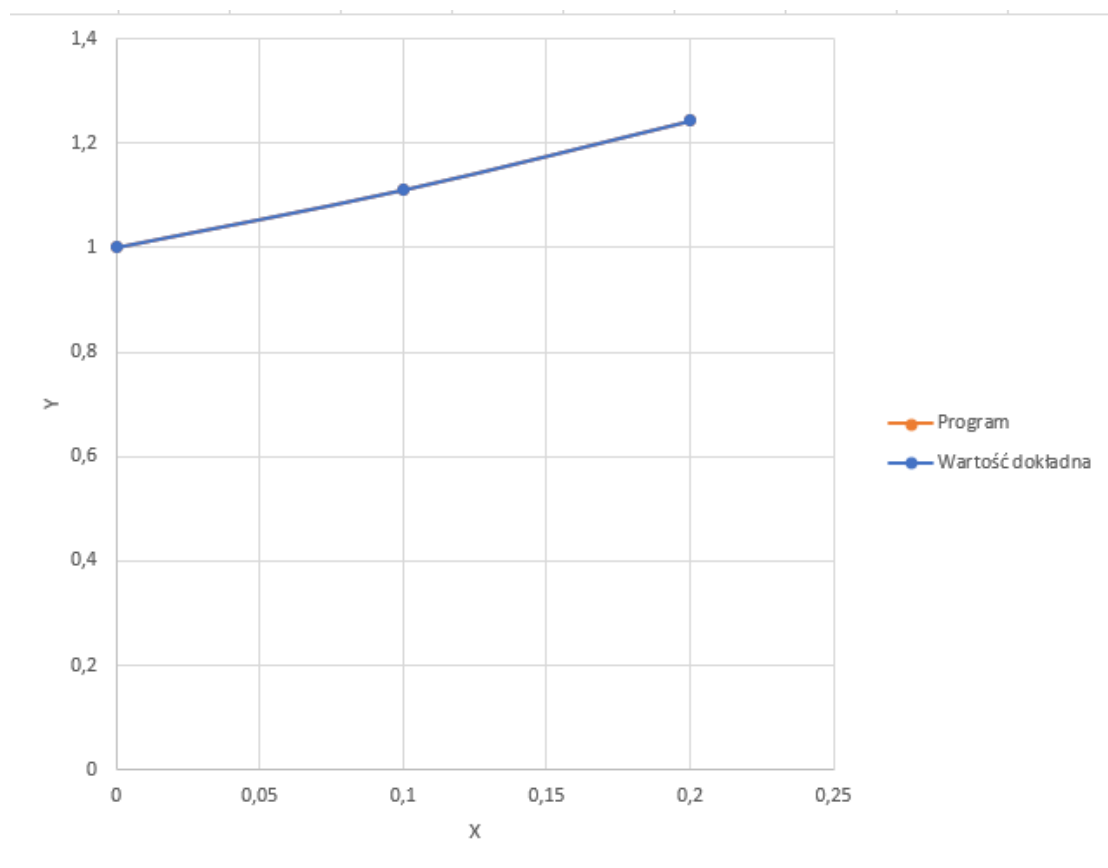
Rysunek 24. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.1$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty						Program		2*EXP(X) - X - 1	
x0	0	k1	k2	k3	k4	y0	1	y0	1
x1	0,1	0,1	0,11	0,1105	0,12105	y1	1,110342	y1	1,110342
x2	0,2	0,121034	0,132086	0,132638	0,144298	y2	1,242805	y2	1,242806

Rysunek 25. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 26. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek B.

Tabela 8. Dane dla testu 1, przypadku B.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	1	0.2	0.05	$x + y$	$2e^x - x - 1$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.05
k2: 0.0525
k3: 0.0525625
k4: 0.0551281
y[1] = 1.05254
x[1] = 0.05

k1: 0.0551271
k2: 0.0577553
k3: 0.057821
k4: 0.0605182
y[2] = 1.11034
x[2] = 0.1

k1: 0.0605171
k2: 0.06328
k3: 0.0633491
k4: 0.0661845
y[3] = 1.17367
x[3] = 0.15

k1: 0.0661834
k2: 0.069088
k3: 0.0691606
k4: 0.0721415
y[4] = 1.24281
x[4] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 7.6875ms
  
```

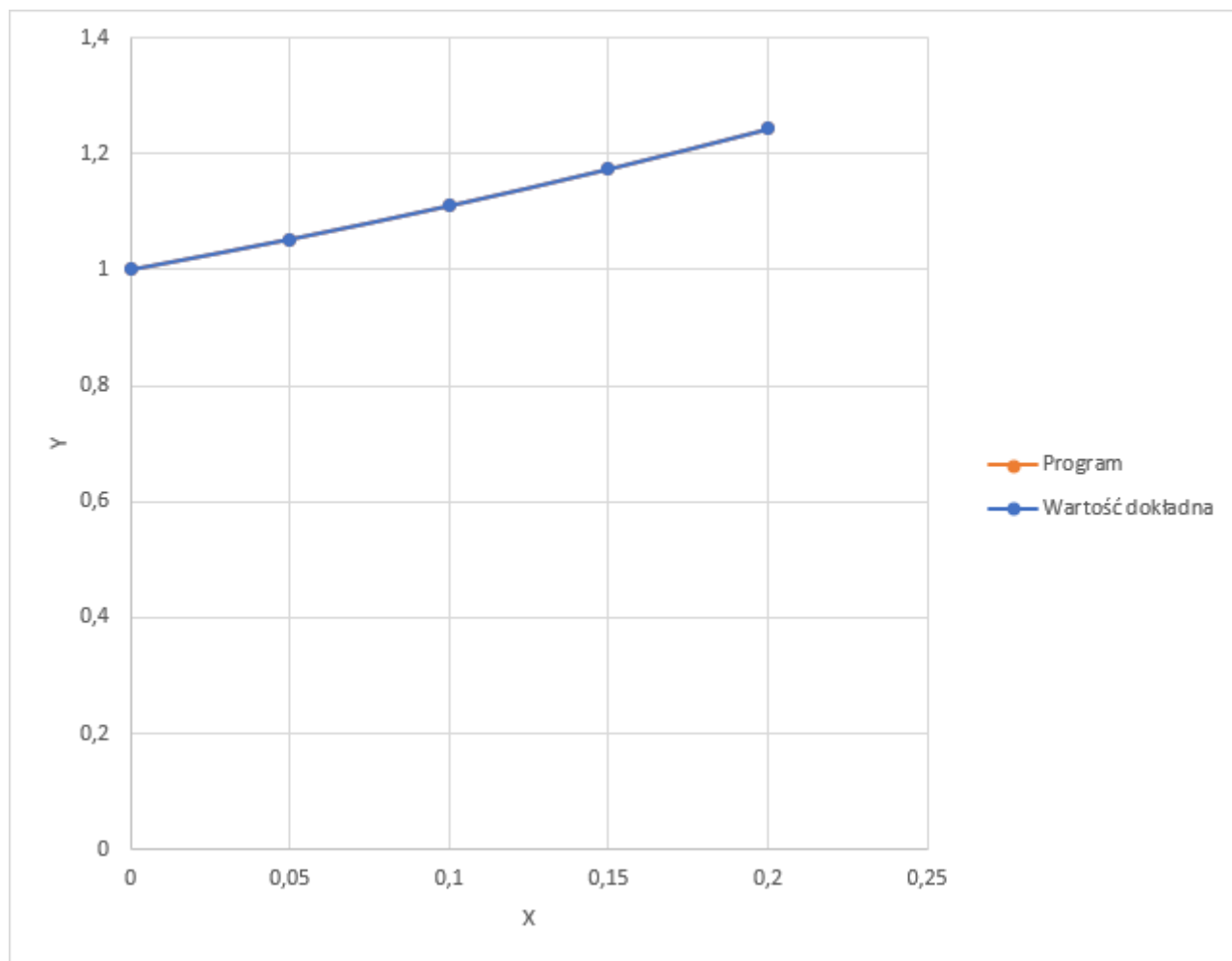
Rysunek 27. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.05$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty						Program		2*EXP(X) - X - 1	
x0	0	k1	k2	k3	k4	y0	1	y0	1
x1	0,05	0,05	0,0525	0,052563	0,055128	y1	1,052542	y1	1,052542
x2	0,1	0,055127	0,057755	0,057821	0,060518	y2	1,110342	y2	1,110342
x3	0,15	0,060517	0,06328	0,063349	0,066185	y3	1,173668	y3	1,173668
x4	0,2	0,066183	0,069088	0,069161	0,072141	y4	1,242805	y4	1,242806

Rysunek 28. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 29. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek C.

Tabela 9. Dane dla testu 1, przypadku C.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	1	0.2	0.01	$x + y$	$2e^x - x - 1$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.0134702
k2: 0.0135876
k3: 0.0135882
k4: 0.0137061
y[17] = 1.20061
x[17] = 0.17

k1: 0.0137061
k2: 0.0138246
k3: 0.0138252
k4: 0.0139443
y[18] = 1.21443
x[18] = 0.18

k1: 0.0139443
k2: 0.0140641
k3: 0.0140647
k4: 0.014185
y[19] = 1.2285
x[19] = 0.19

k1: 0.014185
k2: 0.0143059
k3: 0.0143065
k4: 0.0144281
y[20] = 1.24281
x[20] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 87.2118ms

```

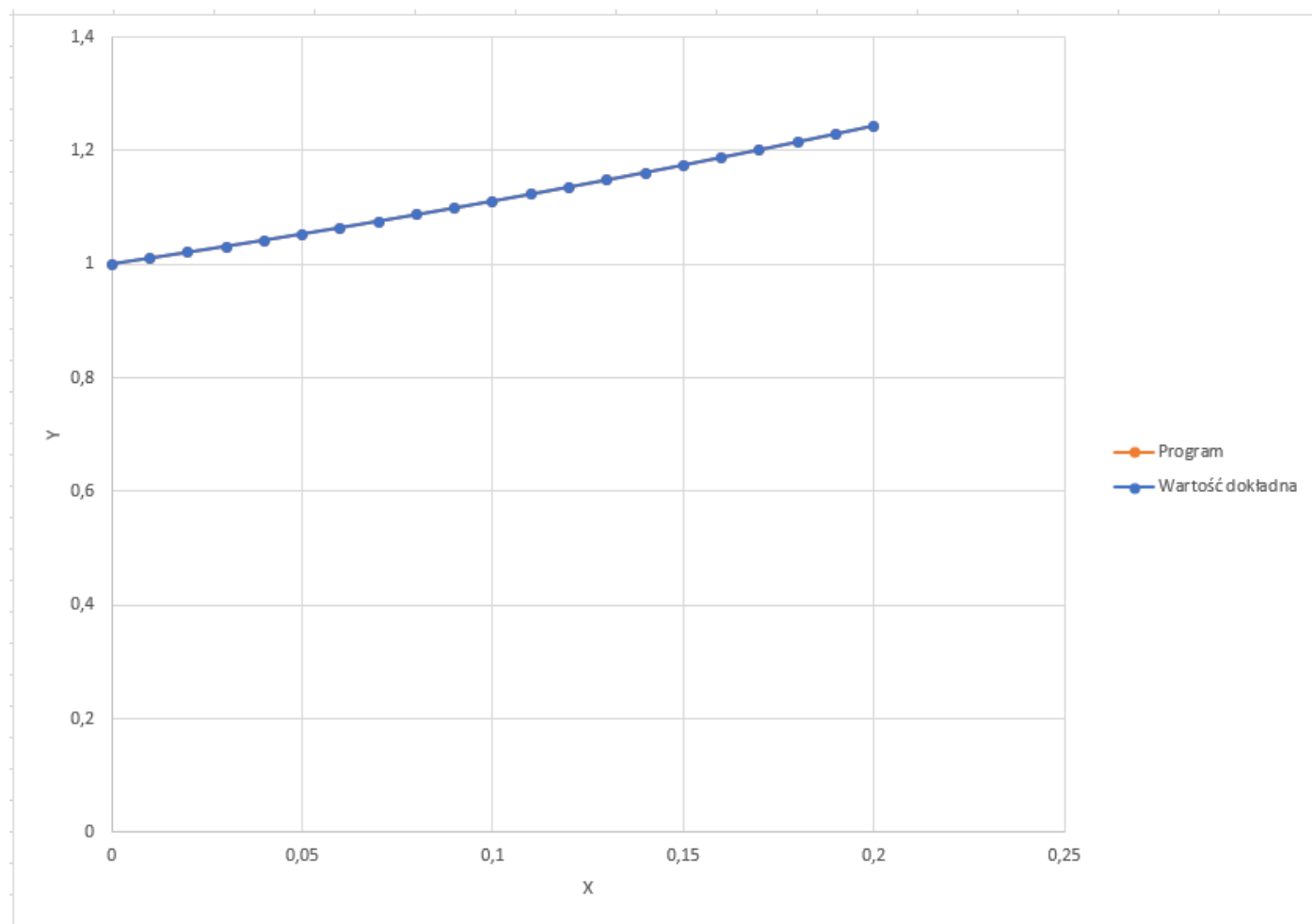
Rysunek 30. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.01$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty							Program			2*EXP(X) - X - 1
x0	0	k1	k2	k3	k4		y0	1	y0	1
x1	0,01	0,01	0,0101	0,010101	0,010201		y1	1,0101	y1	1,0101
x2	0,02	0,010201	0,010302	0,010303	0,010404		y2	1,020403	y2	1,020403
x3	0,03	0,010404	0,010506	0,010507	0,010609		y3	1,030909	y3	1,030909
x4	0,04	0,010609	0,010712	0,010713	0,010816		y4	1,041622	y4	1,041622
x5	0,05	0,010816	0,01092	0,010921	0,011025		y5	1,052542	y5	1,052542
x6	0,06	0,011025	0,011131	0,011131	0,011237		y6	1,063673	y6	1,063673
x7	0,07	0,011237	0,011343	0,011343	0,01145		y7	1,075016	y7	1,075016
x8	0,08	0,01145	0,011557	0,011558	0,011666		y8	1,086574	y8	1,086574
x9	0,09	0,011666	0,011774	0,011775	0,011883		y9	1,098349	y9	1,098349
x10	0,1	0,011883	0,011993	0,011993	0,012103		y10	1,110342	y10	1,110342
x11	0,11	0,012103	0,012214	0,012214	0,012326		y11	1,122556	y11	1,122556
x12	0,12	0,012326	0,012437	0,012438	0,01255		y12	1,134994	y12	1,134994
x13	0,13	0,01255	0,012663	0,012663	0,012777		y13	1,147657	y13	1,147657
x14	0,14	0,012777	0,01289	0,012891	0,013005		y14	1,160548	y14	1,160548
x15	0,15	0,013005	0,013121	0,013121	0,013237		y15	1,173668	y15	1,173668
x16	0,16	0,013237	0,013353	0,013353	0,01347		y16	1,187022	y16	1,187022
x17	0,17	0,01347	0,013588	0,013588	0,013706		y17	1,20061	y17	1,20061
x18	0,18	0,013706	0,013825	0,013825	0,013944		y18	1,214435	y18	1,214435
x19	0,19	0,013944	0,014064	0,014065	0,014185		y19	1,228499	y19	1,228499
x20	0,2	0,014185	0,014306	0,014307	0,014428		y20	1,242806	y20	1,242806

Rysunek 31. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 32. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Test 2 – Własne równanie różniczkowe.

Przypadek A.

Tabela 10. Dane dla testu 2, przypadku A.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.2	0.1	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.01
k2: 0.01075
k3: 0.0107875
k4: 0.0120788
y[1] = 0.110859
x[1] = 0.1

k1: 0.0120859
k2: 0.0139402
k3: 0.0140329
k4: 0.0164892
y[2] = 0.124946
x[2] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 8.0589ms

```

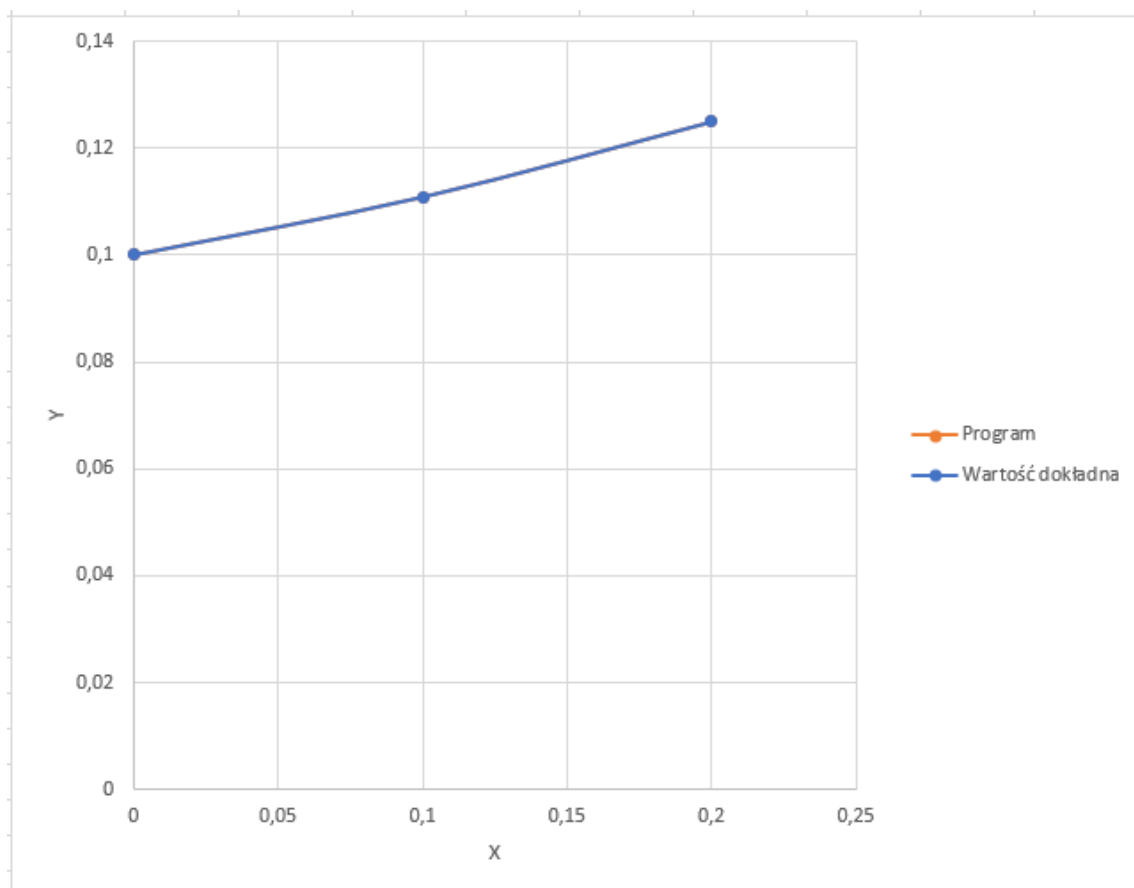
Rysunek 33. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.1$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty						Program		2,1*EXP(X) - x^2 -2x -2	
x0	0	k1	k2	k3	k4	y0	0,1	y0	0,1
x1	0,1	0,01	0,01075	0,010788	0,012079	y1	0,110859	y1	0,110858928
x2	0,2	0,012086	0,01394	0,014033	0,016489	y2	0,124946	y2	0,124945792

Rysunek 34. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 35. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek B.

Tabela 11. Dane dla testu 2, przypadku B.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.2	0.05	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```

D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.005
k2: 0.00515625
k3: 0.00516016
k4: 0.00538301
y[1] = 0.105169
x[1] = 0.05

k1: 0.00538347
k2: 0.0056743
k3: 0.00568157
k4: 0.00604254
y[2] = 0.110859
x[2] = 0.1

k1: 0.00604295
k2: 0.00647527
k3: 0.00648608
k4: 0.00699225
y[3] = 0.117352
x[3] = 0.15

k1: 0.0069926
k2: 0.00757366
k3: 0.00758819
k4: 0.008247
y[4] = 0.124946
x[4] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 14.1607ms

```

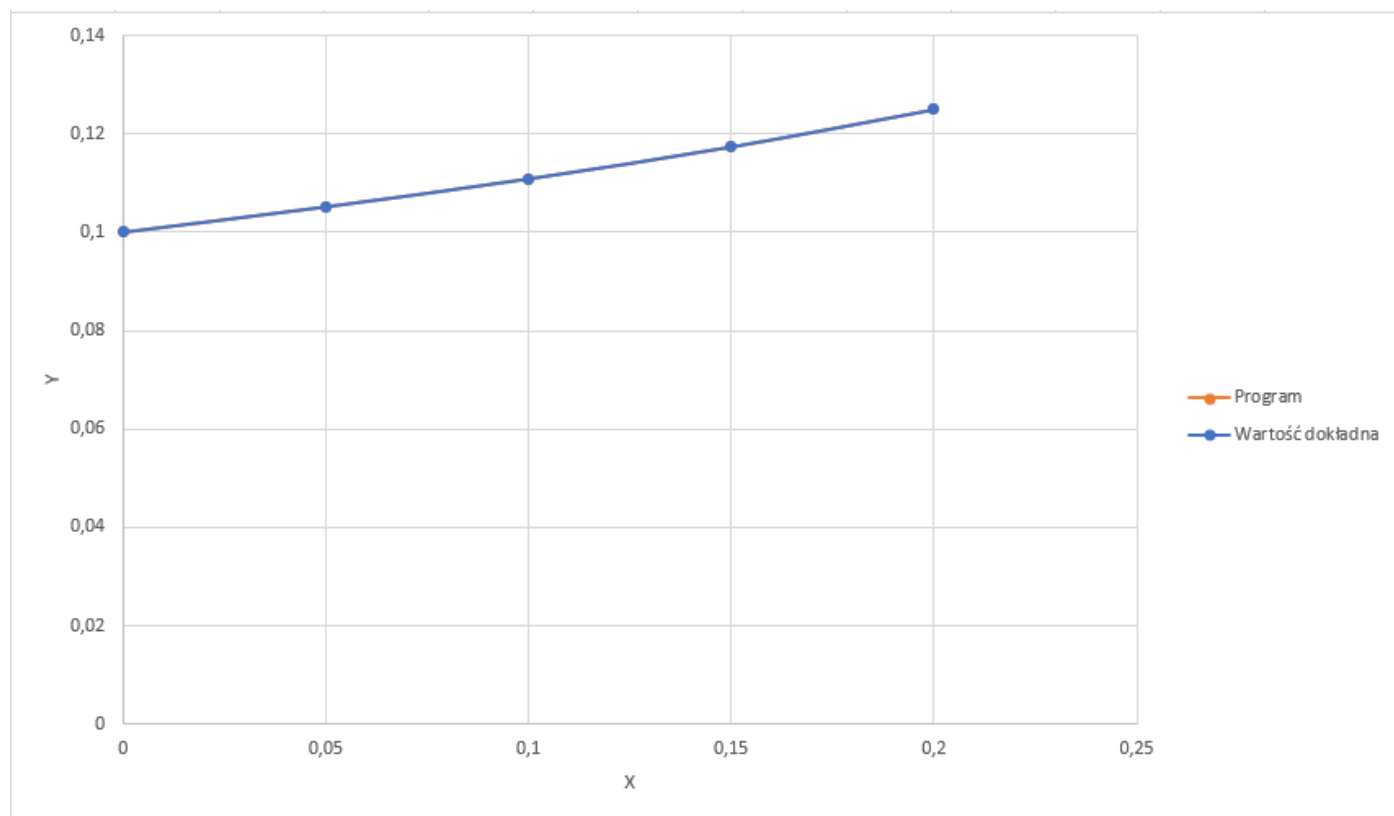
Rysunek 36. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.05$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty							Program			$2,1 * \text{EXP}(X) - x^2 - 2x - 2$
x0	0	k1	k2	k3	k4		y0	0,1	y0	0,1
x1	0,05	0,005	0,005156	0,00516	0,005383		y1	0,105169	y1	0,105169302
x2	0,1	0,005383	0,005674	0,005682	0,006043		y2	0,110859	y2	0,110858928
x3	0,15	0,006043	0,006475	0,006486	0,006992		y3	0,117352	y3	0,11735191
x4	0,2	0,006993	0,007574	0,007588	0,008247		y4	0,124946	y4	0,124945792

Rysunek 37. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 38. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

Przypadek C.

Tabela 12. Dane dla testu 2, przypadku C.

x_0	y_0	b	h	$\frac{dy}{dx}$	Rozwiązanie analityczne
0	0.1	0.2	0.01	$x^2 + y$	$2,1 * e^x - x^2 - 2x - 2$

Wartości zwrócone przez program:

```

C:\ D:\STUDIA\IV_Semestr\Metody\zajecia13\H_RK4\Debug\H_RK4.exe
k1: 0.00144373
k2: 0.0014672
k3: 0.00146731
k4: 0.0014914
y[17] = 0.12024
x[17] = 0.17

k1: 0.0014914
k2: 0.00151611
k3: 0.00151623
k4: 0.00154156
y[18] = 0.121756
x[18] = 0.18

k1: 0.00154156
k2: 0.00156752
k3: 0.00156765
k4: 0.00159424
y[19] = 0.123324
x[19] = 0.19

k1: 0.00159424
k2: 0.00162146
k3: 0.0016216
k4: 0.00164946
y[20] = 0.124946
x[20] = 0.2

Czas wykonania algorytmu: 70.3759ms

```

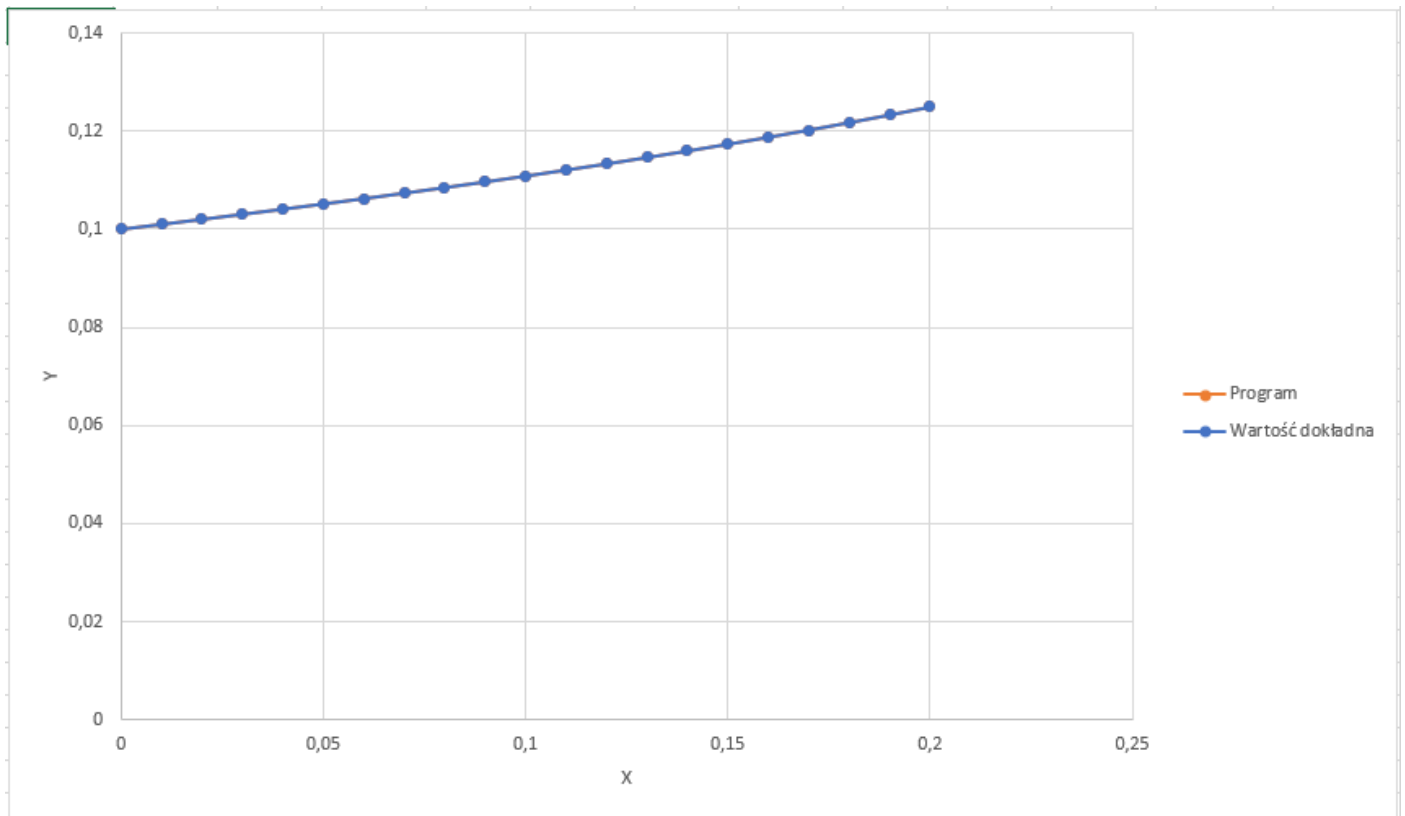
Rysunek 39. Wartości zwrócone przez program dla $h = 0.01$.

Wartości obliczone w Excelu:

Punkty						Program		2,1*EXP(X) - x^2 - 2x - 2	
x0	0	k1	k2	k3	k4	y0	0,1	y0	0,1
x1	0,01	0,001	0,001005	0,001005	0,001011	y1	0,101005	y1	0,10100535
x2	0,02	0,001011	0,001017	0,001017	0,001024	y2	0,102023	y2	0,10202281
x3	0,03	0,001024	0,001032	0,001032	0,00104	y3	0,103055	y3	0,10305452
x4	0,04	0,00104	0,001048	0,001048	0,001057	y4	0,104103	y4	0,10410263
x5	0,05	0,001057	0,001067	0,001067	0,001077	y5	0,105169	y5	0,1051693
x6	0,06	0,001077	0,001087	0,001087	0,001099	y6	0,106257	y6	0,10625675
x7	0,07	0,001099	0,00111	0,00111	0,001123	y7	0,107367	y7	0,10736718
x8	0,08	0,001123	0,001136	0,001136	0,001149	y8	0,108503	y8	0,10850284
x9	0,09	0,001149	0,001163	0,001163	0,001178	y9	0,109666	y9	0,109666
x10	0,1	0,001178	0,001193	0,001193	0,001209	y10	0,110859	y10	0,11085893
x11	0,11	0,001209	0,001225	0,001225	0,001242	y11	0,112084	y11	0,11208395
x12	0,12	0,001242	0,001259	0,001259	0,001277	y12	0,113343	y12	0,11334339
x13	0,13	0,001277	0,001296	0,001296	0,001315	y13	0,11464	y13	0,1146396
x14	0,14	0,001315	0,001335	0,001335	0,001356	y14	0,115975	y14	0,11597498
x15	0,15	0,001356	0,001377	0,001377	0,001399	y15	0,117352	y15	0,11735191
x16	0,16	0,001399	0,001421	0,001421	0,001444	y16	0,118773	y16	0,11877283
x17	0,17	0,001444	0,001467	0,001467	0,001491	y17	0,12024	y17	0,12024019
x18	0,18	0,001491	0,001516	0,001516	0,001542	y18	0,121756	y18	0,12175646
x19	0,19	0,001542	0,001568	0,001568	0,001594	y19	0,123324	y19	0,12332416
x20	0,2	0,001594	0,001621	0,001622	0,001649	y20	0,124946	y20	0,12494579

Rysunek 40. Wyniki otrzymane w Excelu.

Wykres:



Rysunek 41. Wykres porównujący wartości wyliczone w programie z wartościami dokładnymi.

5. Wnioski

Metody wykorzystane w ćwiczeniu są ulepszonymi wersjami metody Eulera opracowanej podczas poprzedniego ćwiczenia. Obydwie cechują się dużo wyższą dokładnością w stosunku do najprostszej numerycznej metody obliczania równania różniczkowego pierwszego rzędu. Dokładność ta jednak jest silnie uzależniona od wielkości przyjętego kroku, szczególnie ma to znaczenie w przypadku metody Huena, której wyniki mocno odbiegają od rzeczywistości jeżeli wybierzemy zbyt duże „h”, wyniki RK4 również w takim przypadku nie będą dokładne ale w zdecydowanie mniejszym stopniu. Dużą zaletą algorytmu Huena jest niski czas jego wykonania. Analizując testy można zauważyć, że algorytm ten dla większej o 10 liczby iteracji (N), zastosowany dla takiej samej funkcji wykonała się niemal dwa razy szybciej niż algorytm RK4. Reasumując, korzystając z metody RK4 uzyskamy bardzo precyzyjne wyniki nawet w przypadku względnie dużych kroków, natomiast używając funkcji Huena czas wykonania będzie znacznie krótszy.