REPORT

수강과목	:	전산통계
담당교수	:	노윤환
학 과	:	통계학과
학 번	:	201611531
이 름	:	정호재
제출일자	:	2019.10.17

<뉴턴-랩슨 알고리즘>

※ 모의실험을 위한 seed값은 20191010으로 사용할 것.

1. rgamma(n=100, shape=5, scale=2)를 활용하여 감마분포의 shape, scale parameter에 대한 MLE를 구해 코드와 결과를 제출하세요.

(풀이)

감마분포의 함수 : $f(x|\alpha,\beta) = \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, (0 \le \; x < \infty, \alpha > 0, \beta > 0)$

감마분포의 우도함수 :

$$L(\alpha,\beta) = L(\alpha,\beta|x_1 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\alpha,\beta) = \frac{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha}(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}}}{(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^{n}}$$

감마분포의 MLE :

$$l(\alpha,\beta) = \ln L(\alpha,\beta) = \ln\left(\frac{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha}(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}}}{(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^{n}}\right)$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i) - \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} - nln\Gamma(\alpha) - \alpha nln\beta$$

해를 구하기 위해 미분을 한다.

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i) - n\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}ln\Gamma(\alpha)\right] - nln\beta$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta^2} - \frac{\alpha n}{\beta}$$

```
> f <- function(theta, X, n) {
+ alpha <- theta[1]
+ beta <- theta[2]
+ da <- -n * log(beta) - n * digamma(alpha) + sum(log(X))
+ db <- -n * alpha / beta + n * mean(X) / beta**2
+ return(c(da, db))
+ }
```

한 번 더 미분을 한다.

$$\frac{\partial l^2(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = -n[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} ln\Gamma(\alpha)]$$

$$\frac{\partial l^2(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial l^2(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} = -\frac{n}{\beta}$$

$$\frac{\partial l^2(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} = -\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta^3} + \frac{\alpha n}{\beta^2}$$

```
> df <- function(theta, X, n) {
+ alpha <- theta[1]
+ beta <- theta[2]
+ daa <- -n * trigamma(alpha)
+ dab <- -n / beta
+ dbb <- -n * (2 * mean(X) / beta**3 - alpha / beta**2)
+ return(matrix(c(daa, dab, dab, dbb), 2, 2, byrow=TRUE))
+ }
```

뉴턴-랩슨법을 사용하기 위한 함수식을 만든다.

```
> newton <- function(f, df, x0, tol=1e-07, N=300, ...) {
+ if(!exists("ginv")) library(MASS)
+ x <- x0
+ i <- 1
+ a<-rep(0,N); b<-rep(0,N)
+ while(i<N) {
+ i <- i + 1
+ x1 <- x - as.numeric(ginv(df(x, ...)) %*% f(x, ...))
+ a[i]<-x1[1]; b[i]<-x1[2]
+ if(mean(abs(x1 - x)) < tol) break
+ x <- x1
+ }
+ a<-a[a!=0];b<-b[b!=0]
+ return(cbind(a,b))
+ }
```

주어진 데이터를 newton 함수에 대입하여 MLE를 구하면

```
> set.seed(20191010)
> X <- rgamma(n=100, shape=5, scale=2)
> n <- length(X)
> x0<- c(1,1)
> MLE <- newton(f, df, x0, X=X, n=n)
> MLE
            a        b
 [1,] 2.480698 1.402238
 [2,] 4.467635 1.746492
 [3,] 5.395007 1.903242
 [4,] 5.205270 2.028475
 [5,] 5.032379 2.108489
 [6,] 5.014659 2.119741
 [7,] 5.013879 2.120152
 [8,] 5.013879 2.120152
 [9,] 5.013879 2.120152

> z<-t(MLE[9,])
> f(z,X,n)
[1] 2.842171e-14 0.000000e+00
```

따라서 감마분포의 shape parameter에 대한 MLE는 5.013879, scale parameter에 대한 MLE는 2.120152이다. 그리고 이때의 값을 MLE를 미분한 함수에 대입해보면 0에 근사한 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.