模拟期中考试 (数学组)

数学科学学院学生会学术组　考试时间：3 小时 30 分钟

2025 年 10 月

注意事项：

1. 本试卷共 **11** 大题，其中 **1 至 5 题**为必做题，共 **60** 分；**6 至 8 题**可根据所学知识选择 **2** 道题目作答，共 **20** 分；**9 至 11 题**可根据所学知识选择 **2** 道题目作答，共 **20** 分。选做题计分按照可选题目中得分最高的两题分数之和计算。
2. 评奖时先按选做规则计算的总分排名；若相同，则按卷面实际应得总分排名；若实际应得总分仍相同，则从后到前依次比较各题得分，得分高者排名在前；
3. 所有答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效；

以下五题必做，满分 12 * 5 =60 分

1. (12 分) 设三维向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2025$。求 $((\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c}))\cdot(\vec{a}+\vec{c})$ 的值。

2. (12 分) 已知矩阵 A,B 和向量 b 如下：

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&u&4\\4&u-v&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2-v&1\\2&1&2\\2&u+v+1&6\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

求所有实数对 (u,v)，使得线性方程组 $(A+B)\cdot x=b$ 有解，但 $(A-B)\cdot x=b$ 无解。

3. (12 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^1+n^2+\cdots+n^n}$$

4. (12 分) 设 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(\bar{x},\bar{z})$ 是给定的一点，若对任意 $x,z\in\mathbb{R}$，如下性质成立：

$$f(\bar{x},z)\le f(\bar{x},\bar{z})\le f(x,\bar{z}).$$

证明 f 满足性质：

$$\sup_z\inf_x f(x,z)=\inf_x\sup_z f(x,z).$$

5. (12 分) 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x^2+1)=f(2x)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立，且 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续。求证：$f(x)$ 为常值函数。

以下三题选做两题，满分 20 分

6. (10 分) 对所有的正整数 n, 与 $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$, 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} (x_1+y_1)^2 & (x_1+y_2)^2 & \cdots & (x_1+y_n)^2 \\ (x_2+y_1)^2 & (x_2+y_2)^2 & \cdots & (x_2+y_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n+y_1)^2 & (x_n+y_2)^2 & \cdots & (x_n+y_n)^2 \end{vmatrix}$$

7. (10 分) 对于 $t\in\mathbb{R}$，讨论曲线 $\Gamma_t : x^2-4xy+4y^2+(4+t)x+(2-2t)y+2=0$ 的类型；并求焦点距原点的最近距离。

8. (10 分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为具有介值性的函数：若 $f(a)<r<f(b)$，则在 a 与 b 之间存在 x 使得 $f(x)=r$。且对任意的有理数 r ，集合

$$f^{-1}(r) := \{x : f(x)=r\}$$

为闭集。证明：f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。

注：称一个集合是闭集，当且仅当它包含它的所有聚点

以下三题选做两题，满分 20 分

9. (10 分) 设 $V=\mathbb{F}_p^{k+2}$ 为 $k+2$ 维线性空间，其中 p 是素数. V 的子空间 W 满足 $\dim W=k$.

注：$\mathbb{F}_p$ 是特征为 p 的有限域，可以理解为模 p 的整数系统 $\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{p-1}\}$，满足 $\bar{p}=\bar{0}$.

(1) 证明：满足 $W\subset X\subset V$ 且 $\dim X=k+1$ 的子空间 X 有 $p+1$ 个。

(2) S 是 V 的子集，满足 S 中任意 $k+2$ 个元素都可以生成 V，证明：$|S|\le k+p+1$。

10. (10 分) 给定正整数 $n>k$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 用 $f(\alpha)$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中非零实数的数目。求最小的整数 C, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 的任一 k 维子空间 W, 都存在 W 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$, 满足

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\cdots+f(\alpha_k)\le C.$$

11. (10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，判断下列命题是否成立，并说明理由：

(1) 若 $\lim_{x\to\infty} xg(x)=0$，则 $f(x)g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

(2) 存在 $\alpha\in(0,1)$，使得当 $\lim_{x\to\infty}|x|^\alpha g(x)=0$ 时，一定有 $f(x)g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续