

2024 年第一学期模拟期中考试（数学组）

数学科学学院学生会学术文化部

考试时间：3 小时

1. （本题满分 10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.
求使得方程 $AX = B$ 有解但是方程 $BX = A$ 无解的 a, b 的取值范围.

2. （本题满分 10 分）在欧氏空间 \mathbb{R}^3 中, 求到平面 $x = 0$ 和过点 $(1, 2, 3)$, 方向向量 $\vec{n} = (3, 1, 0)$ 的直线距离相等的点的轨迹.

3. （本题满分 10 分）证明：在 $(0, 1]$ 上连续函数 f 一致连续的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在.

4. （本题满分 10 分）证明：对任意给定的 n 维线性无关的向量组, 都存在一 n 阶方阵 A , 使得它是 $Ax = 0$ 的一组基础解系.

5. （本题满分 12 分）求极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n n^{-1+\frac{1}{i}}$$

的值。

6. （本题满分 12 分）设 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 是一个四面体。 A_i 所对的面与 A_j 所对的面形成的二面角为 θ_{ij} 。如果令 $a_{ij} = \begin{cases} \cos \theta_{ij} & \text{if } i \neq j, \\ -1 & \text{else} \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq 4)$.
证明： $\det(a_{ij}) = 0$.

7. (本题满分 12 分) 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 有最小正周期 1. 证明: $f(x^2)$ 不是周期函数。

8. (本题满分 12 分) 设集合序列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足每一个 D_i 都是由 $[0, 1]$ 中的有限个, 两两没有公共点的闭子区间的并, 且满足每一个 D_i 的区间长度的总和大于 $\frac{1}{2024}$.

论断 (a): 是否总存在开区间 $(a, b) \in [0, 1]$, 使得它是无穷多个 D_i 的公共部分.

论断 (b): 是否总存在实数 $t \in [0, 1]$, 使得它是无穷多个 D_i 的公共部分.

对于你认为正确的论断, 证明之; 对于你认为不正确的论断, 给出反例.

(当然, 如果你认为两个论断都对, 可以只证明 (a), 如果你认为两个论断都错, 可以只证明 (b))

9. (本题满分 12 分) 设 A 是一个 2024 阶整数对称矩阵, 若 α 是一个 2024 维列向量满足 $A\alpha$ 的每一位都是整数, 且 $\alpha^T A \alpha$ 也是一个整数. 证明: $\det(A)\alpha_i^2$ 是整数, 其中 α_i 是 α 的任何一个分量.

附加题:

10. (本题满分 12 分) 已知 A_1, A_2, \dots, A_m 是 2024 阶复可逆矩阵, 满足对任意的 $1 \leq i < j \leq m$ 均有 $A_i + A_j$ 不可逆. 证明: $m \leq C_{4048}^{2024}$.

特别地, 任何缩小这个上界 (缩小 1 或更多) 或者给出大于 2^{2024} 个矩阵的构造将会得到更多的分数和奖励.