线性代数模拟期中考试

数学科学学院学生会学术组　考试时间：90 分钟

2025 年 10 月

注意事项：

1. 本试卷共 **8** 大题，满分 **100** 分；
2. 所有答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效；
3. 禁止使用计算器；
4. 不得直接使用教材对应章节未涉及的定理；
5. $\det(A)$ 表示矩阵 A 的行列式，α^T 表示向量 α 的转置。

---

1. (12 分) 已知方程组

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+3z=0 \\ -x+cy+z=0 \end{cases} \qquad (c\in\mathbb{R})$$

有非零解。求 c 的值

2. (12 分) $\mathbb{R}^4$ 上的向量 $(1,0,2,-3)$ 可以被另外两个 $\mathbb{R}^4$ 上的向量 $(-3,1,4,2)$ 和 $(2x-5,-2,1-x,-x-2)$ 线性表出，求 x 的值

3. (24 分) 设 $\alpha_1=(3,-3,2,5)^T$，$\alpha_2=(2,4,0,-6)^T$, $\alpha_3=(1,0,1,-1)^T$，$\alpha_4=(6,-1,4,0)^T$ 为 $\mathbb{R}^4$ 上的向量组

   (1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组

   (2) 设矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，求 A 行空间的一组基

   (3) 设 $\beta=(7,-10,7,13)^T$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解

4. (12 分) 给定矩阵 A 和 B，求证：$\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

5. (10 分) 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$

   已知 $\det(\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha)=2$

   求 $\det(\alpha+2\beta,\ \beta+2\gamma,\ \gamma+2\alpha)$ 的值

6. (10 分) 给定正整数 n，求下列 n 阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} (x_1+y_1)^2 & (x_1+y_2)^2 & \cdots & (x_1+y_n)^2 \\ (x_2+y_1)^2 & (x_2+y_2)^2 & \cdots & (x_2+y_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n+y_1)^2 & (x_n+y_2)^2 & \cdots & (x_n+y_n)^2 \end{vmatrix}$$

7. (10 分) 设 m 和 n 为正整数，$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ 是 m 个 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 维向量，二元函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足：

$$\forall 1 \le i, j \le m,\ \ f(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

并且 $\forall k, l \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ 均有 $f(k\alpha + l\beta, \gamma) = kf(\alpha, \gamma) + lf(\beta, \gamma)$ 和 $f(\alpha, k\beta + l\gamma) = kf(\alpha, \beta) + lf(\alpha, \gamma)$ 成立

求证：$m \le n$

8. (10 分)
给定正数 $a_{ij}\,(1 \le i, j \le n)$，满足
$a_{ij} = a_{ji} > 0,\ \forall\, i \ne j$
定义矩阵 $B = (b_{ij})$：

$$b_{ii} = \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij}\ (1 \le i \le n), \qquad b_{ij} = -a_{ij}\ (i \ne j).$$

(1) 求方程组 $Bx = 0$ 的解

(2) 证明对任意 $\beta = (b_1, \dots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，方程组 $Bx = \beta$ 有解的充要条件为 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$