高等数学模拟期中考试

数学科学学院学生会学术组　考试时间：90 分钟

2025 年 10 月

注意事项：

1. 本试卷共 **7** 大题，满分 **100** 分，附加分 **10** 分；
2. 所有答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效；
3. 禁止使用计算器；
4. 不得直接使用教材对应章节未涉及的定理。

---

1. (10+10=20 分) 求极限:

   (1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

   (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$

2. (10+10+10=30 分)

   (1) 设
   $$y(x)=\ln\left(\sin\left(e^{x^2-x}\right)\right)\cdot\arctan\left(\sqrt{2+\cos x}\right)\quad (0<x<1).$$
   求 $y'(x)$（结果保留最简形式，可含三角、指数及根号）

   (2) 设函数 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=\sin t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

   (3) $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2} e^{x+\sin t}dt$ ，求 $f'(x)$

3. (10 分) 计算 $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx \quad (a,b\neq 0)$

4. (12 分) 求曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面的侧面积

5. (12 分) 序列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n},\ n = 1, 2, 3, ...$$

求序列 $\{a_n\}$ 的极限

6. (8 分) 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 二阶连续可导，即 f 的二阶导数处处存在且连续，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = M, \quad L, M \in \mathbb{R}.$$

证明：存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得

$$f''(\alpha) = 0.$$

7. (8 分) 设 $0 < \lambda < 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，计算极限

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \cdots + a_0\lambda^n).$$

8. **附加题，5+5=10 分**

如果函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足：$\forall\ a \le u \le v \le b$ ，$\forall \min\{f(u), f(v)\} \le y \le \max\{f(u), f(v)\}$ ，均存在 $\xi \in [u, v]$ 使得 $f(\xi) = y$，则称 f 在 $[a, b]$ 上具有介值性质。

判断下列命题是否成立，若成立，给出严格证明。若不成立，举出反例，并证明该反例满足条件。

(1) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的**单调**函数，且在 $[a, b]$ 上有介值性质，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

(2) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的**可积**函数，且在 $[a, b]$ 上有介值性质，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续