九章筭術新編題解卷一

錦州苑之宇　學

第一題　荅曰。兩次飲水相繼。與一次飲如是多之水無異。兩次注水相繼。亦可視作一次注如是多之水。蓋若今盃中水有亥所記之多。水溫爲酉。而接連

一　亥即西國字母 v 也

二　酉即西國字母 t 也

三 西國書作 $V+V_1+V_2\leq 1$

注入亥一，亥二等量之沸水。且亥⊥亥一⊥亥二≤一。如合作一

四 西國分子在上分母在下書作 $\frac{tV+100(V_1+V_2)}{V+V_1+V_2}$

次注入。乃得水溫

亥⊥亥一⊥亥二

西亥⊥百（亥一⊥亥二）

如分兩次注入。

第二半葉

則最終水溫爲

$$\frac{(亥\perp亥_{一})\perp亥_{二}}{酉亥\perp百亥_{一}\perp百亥_{二}}$$

易見兩式相等。于是

吾人不妨以爲甲生凡飲水之後即注水。注水之後。如可飲水。即飲水。因初始時盃已滿。甲生必先飲水而後得注水。

今以地$_{壬}$ 人$_{壬}$ 記甲生壬次飲水注水之

總量，且令 $\text{地}_{\text{零}}=\text{零}$ 及 $\text{人}_{\text{零}}=\text{零}$。則甲生第壬次飲水量為 $\text{地}_{\text{壬}}\,\text{丅}\,\text{地}_{\text{壬丅一}}$，第壬次注水量為 $\text{人}_{\text{壬}}\,\text{丅}\,\text{人}_{\text{壬丅一}}$。經第

壬次飲水●餘水$\text{一}\perp\text{人}_{\text{壬}}\top\bigcirc\text{一}\top\text{地}_{\text{壬}}$經第壬次注水●餘水$\text{一}\top\text{地}_{\text{壬}}\bigcirc\perp\text{人}_{\text{壬}}$因盃容量爲一●故須有$(\text{一}\top\text{地}_{\text{壬}}\perp\text{人}_{\text{壬}})\leq\text{一}$●即$\text{地}_{\text{壬}}\geq\text{人}_{\text{壬}}$○易

見注水必使盃中水溫上昇。以$西_{壬}$記第壬次注水後之水溫。且設$西_{零}=二十$。則

有

$$酉_{零} < 酉_{一} < \cdots \leq 六十$$

。且對

$$一 \leq 壬 \leq 卯$$

，$酉_{壬}$ $地_{壬}$ $人_{壬}$ 有如

下關係

$$\text{西}_{\text{壬}\perp\text{一}} = \frac{\text{一}\top\text{地}_{\text{壬}}\perp\text{人}_{\text{壬}}}{\text{西}_{\text{壬}}(\text{一}\top\text{地}_{\text{壬}}\perp\text{人}_{\text{壬}\top\text{一}})\perp\text{百}\ (\text{人}_{\text{壬}}\top\text{人}_{\text{壬}\top\text{一}})}$$

變易乃得

$$(\text{百}\top\text{西}_{\text{壬}\top\text{一}})(\text{人}_{\text{壬}}\top\text{人}_{\text{壬}\top\text{一}}) = (\text{一}\top(\text{地}_{\text{壬}}\top\text{人}_{\text{壬}}))(\text{西}_{\text{壬}}\top\text{西}_{\text{壬}\top\text{一}}) \leq \text{西}_{\text{壬}}\top\text{西}_{\text{壬}\top\text{一}}$$

若第卯次注

水後●水溫已至六十攝氏度●則不可復

注○此時盃中尚有水(一丅地$_{卯}$丄人$_{卯}$)○爲使飲水量極

大●甲生須盡飲盃中之水○故甲生所飲

之水總量爲

$$一丅地_{卯}丄人_{卯}丄地_{卯}=一丄人_{卯}$$

○故吾人僅須令

$$西_{卯}=六十$$

時

之人$_{卯}$達到極大。令

$$午_{壬丅一} = \frac{百丅酉_{壬丅一}}{酉_{壬}丅酉_{壬丅一}}$$

則

$$(一丅午_{零})(一丅午_{一})\cdots(一丅午_{卯丅一}) = \frac{百丅酉_{零}}{百丅酉_{卯}} = 三$$

且對

$$一 \leq 壬 \leq 卯$$

有

$$人_{壬}丅人_{壬丅一}\leq 午_{壬丅一}$$

此式對壬從一到卯丅一求和有

此取自然對數

$$\text{人}_{\text{卯}} = \text{人}_{\text{卯}} \top \text{人}_{\text{零}} \leq \text{午}_{\text{零}} \perp \text{午}_{\text{一}} \perp \cdots \perp \text{午}_{\text{卯}\top\text{一}}$$

吾人知

$$\text{對}\,(\text{一} \top \text{午}_{\text{壬}}) \leq \top \text{午}_{\text{壬}}$$

故得

$$\text{午}_{\text{零}} \perp \cdots \perp \text{午}_{\text{卯}\top\text{一}} \leq \top \text{對}\,((\text{一} \top \text{午}_{\text{零}})(\text{一} \top \text{午}_{\text{一}}) \cdots (\text{一} \top \text{午}_{\text{卯}\top\text{一}})) = \top \text{對三} = \text{對二}$$

是以知

$$\text{人}_{\text{卯}}$$

之上界爲對二。而所求乙零之上界亦爲一⊥對二也。吾人可尋適當值以達此界。取

$$\text{午}_{\text{壬}} = \text{一丅二}^{\text{丅}\frac{\text{卯}}{\text{一}}}$$

則

$$\text{酉}_{\text{壬}} = \text{百丅八十}\cdot\text{二}^{\text{丅}\frac{\text{卯}}{\text{壬}}}$$

而

$$\text{人}_{\text{壬}} = \text{地}_{\text{壬}} = \text{午}_{\text{零}} \perp \text{午}_{\text{一}} \perp \cdots \perp \text{午}_{\text{壬丅一}} = \text{壬}\left(\text{一丅二}^{\text{丅}\frac{\text{卯}}{\text{一}}}\right)$$

即甲生每次飲水注水量

均爲$(一丅二^{丅\frac{卯}{二}})$、經卯次水溫達六十度、而總飲水量爲$一丄卯(一丅二^{丅\frac{卯}{二}})$也。命卯大至無窮、則此

值收斂于一丄對二是以一丄對二實爲上塙界乙零

若注水不逾卯次，即在

$$(\text{一}\text{丅}\text{午}_{\text{零}})(\text{一}\text{丅}\text{午}_{\text{一}})\cdots(\text{一}\text{丅}\text{午}_{\text{卯}\text{丅}\text{一}}) = \frac{\text{二}}{\text{一}}$$

條件下，求

$$\text{一}\perp\text{午}_{\text{零}}\perp\text{午}_{\text{一}}\perp\cdots\perp\text{午}_{\text{卯}\top\text{一}}$$

之極大值。吾人使用均值不等式。

$$\text{三}=(\text{一}\top\text{午}_{\text{零}})(\text{一}\top\text{午}_{\text{一}})\cdots(\text{一}\top\text{午}_{\text{卯}\top\text{一}})\leq\left(\text{一}\top\frac{\text{卯}}{\text{午}_{\text{零}}\perp\text{午}_{\text{一}}\perp\cdots\perp\text{午}_{\text{卯}}}\right)^{\text{卯}}$$

九 即 $B_n = 1 + n(1-2^{-1/n})$

故知

$$一 \perp 午_{零} \perp 午_{一} \perp \cdots \perp 午_{卯} \leq 卯\left(一 \top 二^{\top \frac{卯}{一}}\right) \perp 一$$

。但取午$_{壬}$如前。即得最大。

引證書目

華里思代數術

同氏微積溯源

王徵奇器圖說

附 西 國 記 號 版 本

兩次飲水相繼，與一次飲如是多之水無異；兩次注水相繼，亦可視作一次注如是多之水：蓋若今盃中水有 V 之多，水溫爲 t，而接連注入 V_1, V_2 等量之沸水，且 $V+V_1+V_2 \leq 1$，如合作一次注入，乃得水溫 $\frac{tV+100(V_1+V_2)}{V+V_1+V_2}$；如分兩次注入，則最終水溫爲 $\frac{\frac{tV+100V_1}{V+V_1}(V+V_1)+100V_2}{(V+V_1)+V_2}$：易見兩式相等。于是吾人不妨以爲甲生凡飲水之後即注水，注水之後，如可飲水，即飲水。因初始時盃已滿，甲生必先飲水而後得注水。今以 Y_i, Z_i 記甲生 i 次飲水、注水之總量，且令 $Y_0 = 0, Z_0 = 0$。則甲生第 i 次飲水量爲 $Y_i - Y_{i-1}$，第 i 次注水量爲 $Z_i - Z_{i-1}$。經第 i 次飲水，餘水 $(1 + Z_{i-1} - Y_i$；經第 i 次注水，餘水 $(1 - Y_i + Z_i)$。因盃容量爲 1，故須有 $(1 - Y_i + Z_i) \leq 1$，即 $Y_i \geq Z_i$。

易見注水必使盃中水溫上昇。以 t_i 記第 i 次注水後之水溫，且設 $t_0 = 20$，則有 $t_0 < t_1 < \cdots \leq 60$。且對 $1 \leq i \leq n$ ，t_i, Y_i, Z_i 有如下關係：

$$t_{i+1} = \frac{t_i(1 - Y_i + Z_{i-1}) + 100(Z_i - Z_{i-1})}{1 - Y_i + Z_i},$$

變易乃得

$$(100 - t_{i-1})(Z_i - Z_{i-1}) = (1 - (Y_i - Z_i))(t_i - t_{i-1}) \leq t_i - t_{i-1}。$$

若第 n 次注水後，水溫已至六十攝氏度，則不可復注。此中盃中尚有水 $(1 - Y_n + Z_n)$。爲使飲水量極大，甲生須盡飲盃中之水。故甲生所飲之水總量爲 $1 - Y_n + Z_n + Y_n = 1 + Z_n$。

故吾人僅須令 $t_n=60$ 時之 Z_n 達到極大。令 $q_{i-1}=(t_i-t_{i-1})/(100-t_{i-1})$，則 $(1-q_0)(1-q_1)\cdots(1-q_{n-1})=(100-t_n)/(100-t_0)=\frac{1}{2}$，且對 $1\leq i\leq n$ 有

$$Z_i-Z_{i-1}\leq q_{i-1}。$$

此式對 $i=1,2,\ldots,n-1$ 求和，有

$$Z_n=Z_n-Z_0\leq q_0+q_1+\cdots+q_{n-1}。$$

吾人知 $\log(1-q_i)\leq -q_i$，故得 $q_0+\cdots+q_{n-1}\leq -\log((1-q_0)(1-q_1)\cdots(1-q_{n-1}))=-\log(1/2)=\log 2$。是以知 Z_n 之上界爲 $\log 2$，而所求 B_0 之上界亦爲 $1+\log 2$ 也。

吾人可尋適當值以達此界。取 $q_i=1-2^{-1/n}$，則 $t_i=100-80\cdot 2^{-i/n}$，而 $Z_i=Y_i=q_0+q_1+\cdots+q_{i-1}=i(1-2^{-1/n})$。即：甲生每次飲水，注水量均爲 $(1-2^{-1/n})$，經 n 次水溫達六十度，而總飲水量爲 $1+n(1-2^{-1/n})$ 也。命 $n\to\infty$ 則此值收斂于 $1+\log 2$。是以 $1+\log 2$ 實爲上塥界 B_0。

若注水不逾 n 次，即在 $(1-q_0)(1-q_1)\cdots(1-q_{n-1})=\frac{1}{2}$ 條件下，求 $1+q_0+q_1+\cdots+q_{n-1}$ 之極大值。吾人使用均值不等式：$\frac{1}{2}=(1-q_0)(1-q_1)\cdots(1-q_{n-1})\leq\left(1-\frac{q_0+q_1+\cdots+q_n}{n}\right)^n$，故知 $1+q_0+q_1+\cdots+q_n\leq n(1-2^{-1/n})+1$。但使 q_i 如前，即得最大 $B_n=1+n(1-2^{-1/n})$。

數學科學學院苑之宇于六一節