

概率论 2017 秋季期末试题

任艳霞教授

2017.06

1、某药物的有效率是 80%，现对任选的 N 位病人试用此药。试求此药物对 85% 以上的病人有效的概率。（结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示）。

2、相互独立的随机变量列 X_n 的分布为 $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n \ln n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}$ 。证明 X_n 依概率收敛到 0，但不几乎处处收敛到 0。

3、汽车的保险索赔额是随机变量，服从指数分布。在有了扣除额 d （即 d 以下不赔付， d 以上则减去 d ）之后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？

4、随机变量 X 、 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)},$$

随机变量 $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$ 。

- (1) 证明 X 、 Z 相互独立；
- (2) 求 $|X|$ 、 $|Z|$ 的联合密度；
- (3) 求 $P(X > 0, Y > 0)$ 。

5、随机变量 X 、 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \geq x; \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

- (1) 求常数 c ;
- (2) 求 $X = x$ 条件下 Y 的条件密度;
- (3) 求 $P(X + Y \leq 1)$ 。

6、设抛一枚硬币正面向上的概率为 p ，重复抛硬币，设第一次出现连续 n 次抛出正面时的抛硬币总次数为随机变量 X_n ，求 X_n 的数学期望。

7、一道不等式证明题，要用到 Markov 不等式。

8、初始股价为 p 。已知一次交易后股价以概率 p 增长为原先的 u 倍，以概率 $1 - p$ 减少为原先的 d 倍。设 n 次交易后的股价为随机变量 X_n ，问：

(1) $\frac{\ln X_n}{n}$ 几乎处处收敛到什么？

(2) 估计 $P(0.98np < X_n < 1.11np)$ （结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示）。（具体 n, p, u, d 是多少忘记了）

9、 X_n 是一列独立同分布的随机变量， X_n 二阶矩存在。若 $\forall x \in \mathbb{R}^1, P(X \leq -x) = P(X \geq x)$ ，则称 X 的分布对称。

(1) 证明：分布函数对称的充要条件是它的特征函数是实值偶函数；

(2) 已知 X_n 的特征函数（具体忘了），设 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，试给出一实数列 a_n ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n}$ 趋于一个非零常量，并给出极限分布。