

《随机过程论》期中考试试卷

1. 设 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是 σ -域流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时, 整数值随机变量 τ 关于 \mathcal{F}_T 可测且 $\tau \geq T$. 证明 τ 也是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时.
2. 设 $\{X_n\}$ 与 σ -域流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 独立, $EX_n = 0, \sup_n E|X_n| < \infty, T$ 为关于 σ -域流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时, $ET < \infty$, 则 $E\sum_{j=1}^T X_j = 0$.
3. 设 $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 其 $EY_n^2 \leq K, n \geq 1$, 其中 K 为常数. 证明随机变量序列 $\{Y_n\}$ 在均方收敛的意义下收敛.
4. 设 $Y = \{Y_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 且 $E|Y_n| \leq K, n \geq 1$, 其中 K 为常数. 证明 Y 可以表示为两个非负鞅之差.
5. 比照下鞅的上穿不等式, 叙述并直接证明关于上鞅的下穿不等式。(即不得借用下鞅的上穿不等式.)
6. 设非负随机变量 ζ_1, ζ_2, \dots 相互独立同分布, 令 $X_n = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n$
 - (1) 请问 $\{X_n\}$ 是鞅的充要条件是什么? 此时由鞅收敛定理你能得出什么结论?
 - (2) 请问 $\{X_n\}$ 是一致可积鞅的充要条件是什么?
7. 设 $\{X_r, 1 \leq r \leq n\}$ 为独立同分布随机变量序列, $E|X_1| < \infty, S_m = \sum_{r=1}^m X_r, m \leq n$. 记 U_1, U_2, \dots, n 为 n 个 $(0, t)$ 区间上均匀分布随机变量的顺序统计量. 记 $U_{n+1} = t, R_{-m} = S_m/U_{m+1}$.
请选择取适当 σ -域 $\mathcal{F}_{-m}, 1 \leq m \leq n$ 使得 $\{R_{-m}, 1 \leq m \leq n\}$ 成为倒向鞅, 并利用此结论证明 $P(S_m/U_{m+1} \geq 1 \text{ for some } m \leq n | S_n = y) \leq \min(y/t, 1)$.
8. 设 $X = X_t, t \geq 0$ 为连续时间参数的随机过程, 给出 X 为严平稳和宽平稳的合理定义. 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程, $X_t = N_{t+1} - N_t, t \geq 0$. 证明 X 既是严平稳的也是宽平稳的.
9. 假设 X_0 是具有如下密度函数的随机变量,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{for } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

给定 X_0, X_1, \dots, X_n , 则 X_{n+1} 服从 $(1 - X_n, 1]$ 均匀分布。证明 $\{X_n\}$ 是平稳遍历的。

10. 假设 g 为周期为 1 的函数, 在 $[0, 1]$ 连续。设 X 是 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量, α 是无理数。定义 $Z_n = g(X + (n - 1)\alpha)$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \int_0^1 g(u) du \quad a.s.$$