# 高等代数 (I) 期末考试

2024年1月2日

1 [8 分]. 计算以下矩阵:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^n$

2. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$

2 [8 分]. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

求 $A^{-1}B$.

3 [8 分]. 设 $x$ 是不定元,

$$X = \begin{bmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

将 $\det X$ 表为 $x$ 的多项式.

4 [8 分]. 设 $V = K^3$, 定义线性变换 $f : V \to V$ 为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$$

令 $\eta_1 = (1, 1, 0), \eta_2 = (1, 0, 1), \eta_3 = (0, 1, 1)$. 求 $f$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 下的矩阵.

5 [8 分]. 设 $K$ 是数域, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. 假设 $AB = BA$. 令

$$C = [A, B] \in M_{n,2n}(\mathbb{K}).$$

证明: $\operatorname{rank} C + \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

6 [8 分]. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

何时 $A$ 的秩等于 2?

7 [8 分]. 设

$$f\left(x_1, \cdots, x_n\right)=\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} x_i y_j, a_{i, j}=a_{j, i}$$

是实二次型. 假设存在非零向量 $v_1 \in \mathbb{R}^n$ 和 $v_2 \in \mathbb{R}^n$, 满足 $f\left(v_1, v_1\right)>0, f\left(v_2, v_2\right)<0$. 证明: 存在非零向量 $v=\left(x_1, \cdots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$, 满足 $f(v, v)=0$

8 [8 分]. 设 $K=\mathbb{C}$. 令 $X=\left[x_{i, j}\right]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ 为

$$\left[x_{i, j}\right]\begin{cases}1 \text{ 若} |i-j|=1 \\ 0 \text{ 若} |i-j| \neq 1\end{cases}$$

求 $X$ 的全部特征值.

9 [8 分]. 设 $K=\mathbb{C}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

假如

$$\lambda>\max_{1 \leq i \leq 3}\left(\left|a_{i, 1}\right|+\left|a_{i, 2}\right|+\left|a_{i, 3}\right|\right).$$

证明: $\lambda$ 不是 $A$ 的特征值.

10 [8 分]. 设 $K=\mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是两两不相等的复数, $n_1, \cdots, n_s$ 是正整数. 令上三角矩阵

$$X_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i}$$

令

$$X=\begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_s \end{bmatrix}$$

求次数最小的多项式

$$f(t)=t^m+\sum_{1 \leq i \leq m} a_i t^{m-i}, m>0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{C}$$

满足 $f(X)=0$.

11 [8 分]. 设 $K$ 是数域, $n$ 是正整数, $A, B \in M_n(K)$. 假设

$$A^2=A, B^2=B, AB+BA=0.$$

证明: 存在可逆矩阵 $T \in M_n(K)$, 使得 $TAT^{-1}$ 和 $TBT^{-1}$ 都是对角矩阵.

12 [6 分]. 设 $n$ 是正整数, 记 $V=\mathbb{C}^{2n}$. 定义反对称双线性函数

$$\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\right),\left(y_1,y_2,\cdots,y_{2n}\right)\right)=\sum_{1\le j\le n}\left(x_{2j-1}y_{2j}-x_{2j}y_{2j-1}\right)$$

假设线性变换 $f:V\to V$ 满足:

$$(f(u),f(v))=(u,v),\forall u,v\in V.$$

对任何复数 $\lambda$, 记

$$W_\lambda=\{v\in V:\exists k\ge 1 \text{ such that } (f-\lambda I)^k v=0\}.$$

(1) 若 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$, 则 $(v_1,v_2)=0(\forall(v_1,v_2)\in W_{\lambda_1}\times W_{\lambda_2})$.

(2) $f$ 在任意基下的矩阵的行列式为 1.

13 [6 分]. 设 $n$ 是正整数, $x_0,x_1,\cdots,x_{2n}$ 是复数. 令

$$\begin{aligned}
A&=\left[x_{|i-j|}\right]_{1\le i,j\le 2n+1}\in M_{2n+1}(\mathbb{C}),\\
C&=\left[x_{|i-j|}-x_{2n+2-i-j}\right]_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C}),\\
D&=\left[x_{|i-j|}+x_{2n+2-i-j}\right]_{1\le i,j\le n+1}\in M_{n+1}(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

(1) 若 $n=1$ 或者 2, 证明 $2\det A=\det C\det D$.

(2) 对任意 $n\ge 1$, 证明 $2\det A=\det C\det D$.