

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 集合论与图论 姓名： \_\_\_\_\_ 学号： \_\_\_\_\_

## 一、(20 分) 单项选择题

- (1) 设  $A, B, C$  是集合, 则  $B=A$  是  $A \cup (B \cap C) = A$  的 ( )
- A. 充分条件      B. 必要条件      C. 充要条件      D. 都不对
- (2) 反自反的和传递的二元关系一定是 ( )
- A. 对称的      B. 反对称的      C. 既不对称也不反对称      D. 都不对
- (3) 设  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 则  $\{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}$  是  $A$  到  $B$  的 ( )
- A. 全函数      B. 偏函数      C. 真偏函数      D. 都不对
- (4) 自然数 3 等于 ( )
- A.  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$       B.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$       C.  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$       D. 都不对
- (5) 每一个自然数都是 ( )
- A. 归纳集      B. 传递集      C. 无穷集      D. 都不对
- (6) 竞赛图一定是 ( )
- A. 哈密顿图      B. 单向连通的      C. 强连通的      D. 都不对
- (7) 非同构的 6 阶无向树有 ( )
- A. 5 种      B. 6 种      C. 7 种      D. 都不对
- (8) 非同构的 8 阶自补自对偶简单平面图有 ( )
- A. 0 种      B. 1 种      C. 2 种      D. 都不对
- (9) 11 阶 4-正则简单图一定是 ( )
- A. 欧拉图      B. 哈密顿图      C. 平面图      D. 都不对
- (10) 每个非平凡无向树一定是 ( )
- A. 欧拉图      B. 哈密顿图      C. 平面图      D. 都不对

## 二、(30 分) 填空题

- (1) 设谓词  $M(x)$  表示“ $x$  是人”， $F(x)$  表示“ $x$  爱吃糖”。当采用全总个体域时，“有的人爱吃糖”可符号化为\_\_\_\_\_。当采用全体人作为个体域时，“所有人爱吃糖”可符号化为\_\_\_\_\_。
- (2) 有序对  $\langle a, b \rangle$  的定义是\_\_\_\_\_，卡式积  $A \times B$  的定义是\_\_\_\_\_。
- (3) 设  $|A|=n$ ,  $|B|=m$ , 当  $n \leq m$  时,  $A \rightarrow B$  中单射的个数是\_\_\_\_\_, 双射的个数是\_\_\_\_\_, 满射的个数是\_\_\_\_\_。
- (4) 皮亚诺系统是三元组  $\langle M, F, e \rangle$ , 其中  $M$  是\_\_\_\_\_,  $F$  是\_\_\_\_\_,  $e$  是\_\_\_\_\_, 满足以下 5 条公设: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。
- (5) 集合  $A$  的后继是\_\_\_\_\_。归纳集是包含\_\_\_\_\_并且\_\_\_\_\_的集合。递归集是\_\_\_\_\_的集合。
- (6) 无向图的握手定理是说\_\_\_\_\_。
- (7) 无向完全图  $K_4$  中, 两个不同顶点之间长度为 3 的通路总数是\_\_\_\_\_, 两个不同顶点之间长度不超过 3 的通路总数是\_\_\_\_\_。
- (8) 平面图的充要条件是不含有\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_作为可同胚到或可边收缩到的子图。外平面图的充要条件是不含有\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_作为可同胚到或可边收缩到的子图。
- (9) 无向图有完美匹配的充要条件是: 删除任意一组顶点后, \_\_\_\_\_的个数不超过\_\_\_\_\_。
- (10) 二部图有完备匹配的充要条件是: 从一侧任选一组顶点, \_\_\_\_\_的顶点个数不低于\_\_\_\_\_。

三、(10 分) 求有理数的全体有穷子集构成的集合的基数，并证明。

四、(10 分) 设  $A=\{1,2,3\}$ ，回答下列问题并说明理由。

- (1)  $A$  上不同的二元关系有多少个？
- (2)  $A$  上不同的良序关系有多少个？
- (3)  $A$  上不同的等价关系有多少个？
- (4)  $A$  上不同的传递关系有多少个？

五、(10 分) 回答下列问题，并说明理由。

- (1) 彼得森图的最小顶点覆盖包含几个顶点？
- (2) 彼得森图的最小支配集包含几个顶点？
- (3) 彼得森图中不相邻的两个顶点之间最多有几条独立路径？
- (4) 在边长都为 1 的彼得森图上，中国邮递员问题最佳路线的长度为多少？

六、(10 分) 如果在一个简单图中，任意两个不同顶点之间都恰好有一条长度为 2 的通路，那么这个简单图一定是奇数阶吗？一定是平面图吗？试证明你的结论。

七、(10 分) 对于右图，求出色多项式（写出必要的计算步骤）并回答问题。

(1) 求色多项式。

(2) 该图有多少种不同的 3 着色？

(3) 该图有多少种不同的 4 着色？

