期中试卷讲评

第十一周习题课

2019 年 11 月 20 日

第一题

- **法一**： a, b, c, d **终点共面** $\iff [d-a, d-b, d-c] = 0$
  - 利用线性性展开，即证。
- **法二**： **利用四点共面的一个充要条件**
  - 可以设（为什么?） a, b, c 线性无关，于是存在唯一的 λ, μ, ν，使得

$$d = \lambda a + \mu b + \nu c.$$

代回得

$$[a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] = (1 - \lambda - \mu - \nu)[a, b, c].$$

所以

$$\begin{aligned} a, b, c, d \text{ 终点共面} &\iff \lambda + \mu + \nu = 1 \text{（四点共面的充要条件）} \\ &\iff [a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] = 0. \end{aligned}$$

第一题

- **法一**： a, b, c, d **终点共面** $\Longleftrightarrow$ $[d-a, d-b, d-c]=0$
- **法二**： **利用四点共面的一个充要条件**
- **法三**： **行列式方法**
  - 具体地说，以起点为原点建立空间直角坐标系，设 a, b, c, d 的终点坐标分别为

$$(a_1, a_2, a_3)^T, (b_1, b_2, b_3)^T, (c_1, c_2, c_3)^T, (d_1, d_2, d_3)^T,$$

则

$$\text{终点共面} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

将这个行列式按第四列展开，即证。

第一题

- 法一：a, b, c, d 终点共面 $\Longleftrightarrow$ $[d-a, d-b, d-c] = 0$
- 法二：利用四点共面的一个充要条件
- 法三：行列式方法
- 法四（不严谨）："有向体积"
  - 注意
    $$\begin{aligned} & [a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] \\ = & \overline{V}_{OABC} - \overline{V}_{OBCD} + \overline{V}_{OCDA} - \overline{V}_{ODAB} \\ = & \overline{V}_{ABCD}, \end{aligned}$$
    其中 $\overline{V}$ 是某种带"方向"的体积。
  - 但这样很难给出严谨的证明。

第一题及评分标准

- 法一：a, b, c, d 终点共面 $\iff [d-a, d-b, d-c] = 0$
- 法二：利用四点共面的一个充要条件
- 法三：行列式方法
- 法四（不严谨）：“有向体积”

以下情况会被扣分：

- 使用法四——扣 2-5 分
- 使用法二，但没有讨论 a, b, c 线性相关的情况——扣 2-3 分
- 只证明了等价性的一边——如果证明方法逆过来可以推出等价性的另一边，扣 2 分
- 其他逻辑错误——酌情扣分

第二题及评分标准

- 答案为:

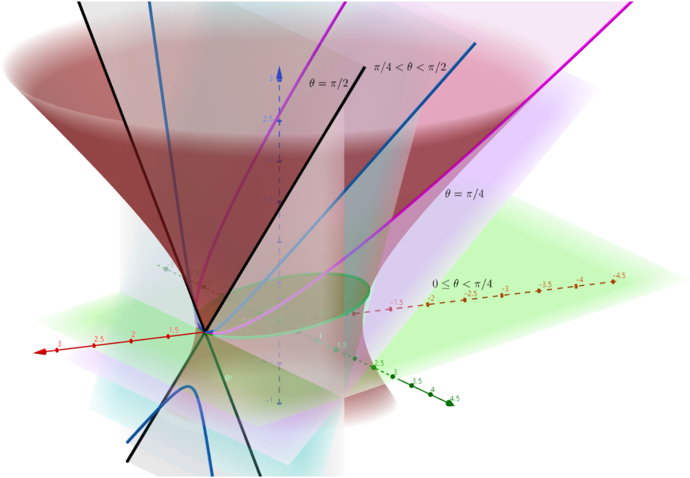
$$x + 3y = 0 \quad \text{或} \quad 3x - y = 0.$$

以下情况会被扣分:

- 过程出错——扣 4 分
- 结果出错——扣 2 分
- 漏解——扣 2-3 分

第三题

- 投影法，计算投影曲线的代数不变量
- **一定要强调仿射映射（或平行投影）不改变二次曲线类型**



第三题及评分标准

- 投影法，计算投影曲线的代数不变量
- **一定要强调仿射映射（或平行投影）不改变二次曲线类型**
- 答案为：

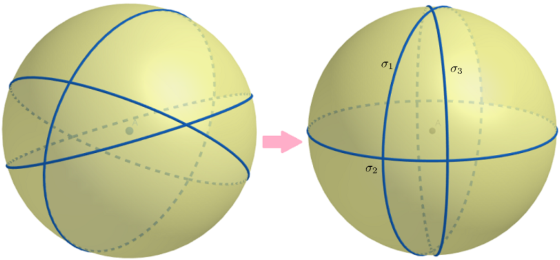
当	$0 \leqslant \theta < \pi/4$	时，	截线为	椭圆；
当	$\theta = \pi/4$	时，	截线为	抛物线；
当	$\pi/4 < \theta < \pi/2$	时，	截线为	双曲线；
当	$\theta = \pi/2$	时，	截线为	相交直线。

以下情况会被扣分：

- 道理没讲清楚——若使用投影法，但没有写仿射映射（或平行投影）不改变二次曲线类型者，扣 6 分
- l_1, l_2, l_3 的计算有问题——视情况扣 3-5 分
- 结果有问题——视情况扣 2-4 分

第四题

- **几何方法**
  - 先将 ϕ 复合一个反射，使之成为保定向、有不动点（甚至可以是有不动直线）的空间等距变换，因此复合结果一定是旋转；
  - 所以 ϕ 可以写成一个旋转与反射的复合；
  - 再说明通过适当几何操作，能将 ϕ 写为（通常是另一对）旋转与反射的复合，且旋转轴与反射平面垂直（参见第六周习题课的讨论）。



第四题

- 几何方法
- 线代方法
  - 先说明 ϕ 必有实特征值 -1（设 ϕ 对应的变换矩阵为 A，计算 $|I+A|$；或者讨论 A 的特征多项式）；
  - 考虑属于特征值 -1 的特征向量 e_3，
    利用 ϕ 是等距变换，证明 e_3 的正交补 $e_3^{\perp}$ 是不变子空间；
  - 设 ϕ 的不动点为 O。取单位正交标架 $\{O; v_1, v_2, v_3\}$，使得 $v_3 \parallel e_3$，则 $v_1, v_2 \in e_3^{\perp}$。于是 ϕ 在此标架下有坐标公式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_0)_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

（参见第八周习题课的讨论）。

- 线代 + 几何方法
  - 在找到 e_3 之后，也可以直接将 ϕ 复合一个反射，其中反射平面经过点 O 且垂直于 e_3。

第四题评分标准

几何方法:

- 使用了保定向空间等距变换的分类定理——至少扣 8 分
- 只推出了 ϕ 是反射与旋转的复合，没有接着说明可以让反射平面与旋转轴垂直——扣 8 分

线代方法:

- 由 ϕ 反定向马上推出必有特征值 -1，没说清楚为什么——扣 3 分
- 写清楚了必有特征值 -1，但没说清楚为什么变换矩阵可以写成

$$\begin{pmatrix} (A_0)_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  也就是没有先说明属于 -1 的特征向量的正交补是不变子空间——扣 3 分

第五题及评分标准

- **法一：几何操作**
  - 将两个滑反射复合写成六个反射的复合，然后对它们进行几何操作，化简成两个反射轴相交的反射；或者是将每个滑反射都写成平移与反射的复合，然后化简。
- **这种做法大体上一般没有问题**
- **可能会用到的结论有：**
  1. 平移 $\circ$ 旋转 $=$ 旋转
  2. 旋转 $\circ$ 旋转 $=$ 旋转或平移，并且只有当两旋转角之和是 2π 的倍数时为平移，其他时候为旋转
- **很多同学用第二条结论时忽略了可能会得到平移，将视其在证明中的重要程度扣 5-10 分**

第五题及评分标准

- **法一：几何操作**
- **法二：利用保定向平面等距变换的分类结果**
  - 由于两个滑反射的复合保定向，由分类结果，只需证明复合结果不是恒同或平移，进而只需证明以下某一条论断：
    - ★ 它有不动点；
    - ★ 存在两个点的改变量不同；
    - ★ 它改变了某个向量的方向。
- **有些同学不动点找错了，会被扣掉大半分数（7-10 分）**
- **法三：用坐标公式计算**
  - 关键是说明两个滑反射的变换矩阵的乘积一定不是单位阵。
- **没什么问题**

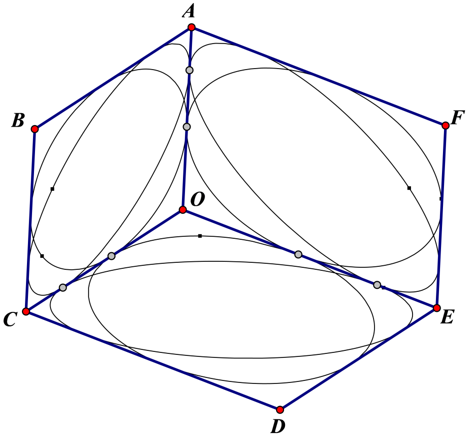
第六题及评分标准

作出正确判断得 2 分，简要说清理由得 4 分。

1. **错误**。因为立方体的自由度是 7。
2. **正确**。设这个立方体为 $\mathcal{C}$。因为 $|\mathsf{Iso}^-(\mathcal{C})| = |\mathsf{Iso}^+(\mathcal{C})|$，而 $|\mathsf{Iso}^+(\mathcal{C})|$ 可以算出是 24；或直接计算 $|\mathsf{Iso}^-(\mathcal{C})| = 24$。
   - **如果枚举出 24 种却没有证明只有这些满足要求，会被扣掉 2 分**
3. **正确**。仿射成一个球，对球证明，再仿射回来。
4. **正确**。可以直接用向量算出位似比；或仿射成正方形，用中心对称性证明（参见作业 5，尤承业书 215 页第 1 题）。
   - **若仿射成正方形，在那边证明出来后，还需证明**
     $$\text{仿射}^{-1} \circ \text{位似} \circ \text{仿射}$$
     还是一个位似，否则会扣去 2 分
   - **也可先说明"只需证明共线以及分比相同"，则不需证明以上事实**

第七题

存在且不唯一。



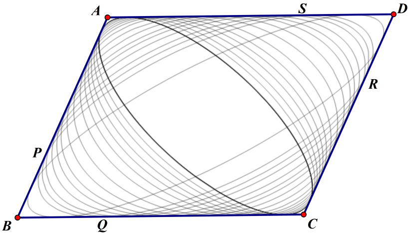
第七题

此题关键是以下的

引理

在平行四边形 $ABCD$ 中，点 P, Q, R, S 分别是边 AB, BC, CD, DA 上的点，则平行四边形 $ABCD$ 存在内切椭圆，使得其在各边上的切点分别为 P, Q, R, S 的充要条件是

$$(A, B; P) = (C, B; Q) = (C, D; R) = (A, D; S).$$



第七题评分标准

引理

在平行四边形 $ABCD$ 中，点 P, Q, R, S 分别是边 AB, BC, CD, DA 上的点，则平行四边形 $ABCD$ 存在内切椭圆，使得其在各边上的切点分别为 P, Q, R, S 的充要条件是

$$(A, B; P) = (C, B; Q) = (C, D; R) = (A, D; S).$$

（大致）评分标准：存在 + 构造 2 分，不唯一性 4 分。

- 存在 + 给出特定情形的一个构造（例如正六边形、取所有切点为中点）——得 1 分
- 存在 + 给出一般情形的一个构造（例如取所有切点为中点）———得 2 分
- 给出了一般情形的一个构造，对特定情形证明了不唯一——得 3 分
- 引理的充分性部分说得不清楚——扣 1 分