数学分析（I）2022-2023 秋季学期期末试题

1. (15分)计算极限

(1) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^{1+\frac{k}{n^2}}$； (2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}\int_0^1 ln^k(1+e^{nx})dx$； (3) $\lim_{x\to0}\frac{[1+\ ln(1+x)\ ]^{\frac{1}{\tan x}}-e(1-x)}{x^2}$。

2. (20分)求积分

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}dx$ ； (2) $\int_1^2\frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}dx$ ； (3) $\int x\sin(ln\,x)\,dx$，其中$x>0$ ；

(4) $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx$。

3. (8分)假设一条曲线L在xy坐标系下可由函数$y=y(x)\in C^4(\mathbb{R})$表示。将$xy$坐标系逆时针旋转$\pi/4$得到新的坐标系$(t,s)$。假设在$ts$坐标系下曲线$L$可由函数$s=s(t)\in C^4(\mathbb{R})$给出。若$y'(x)>-1$且$y''(x)\neq0$, 证明：$s''(t)\neq0$且满足$\left[s''(t)^{-\frac{2}{3}}\right]''(t)=[y''(x)^{-\frac{2}{3}}]''(x)$，其中$(x,y(x))$和$(t,s(t))$对应曲线上同一点。

4. (6分)设$\mathbb{R}$上的函数f有任意阶导数，并且对任意自然数k，有$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left||x|^k|f(x)|+|f^{(k)}(x)|\right|<+\infty$。证明：对任意自然数$k$，$l$，有$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left||x|^k f^{(l)}(x)\right|<+\infty$。

5. (7分)设f在$[-2,2]$上二阶可导， $|f(x)|\le1$，且有$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证明：存在$\xi\in(-2,2)$使得$f''(\xi)+f(\xi)=0$。

6. (12分)设f为$[-1,1]$上的非负凸函数，且满足$f(0)=0, f(-1)=f(1)=1$。$\forall h\in[0,1]$，定义$S(h)=\{x|f(x)\le h\}$。显然$S(h)$为一个闭区间。

(1)若存在$\varepsilon>0$使得$\forall x\in[-1,1]$，$f\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{1-\varepsilon}{2}f(x)$，证明存在实数$\alpha>0$以及$C>0$，使得$\forall\,x$，$f(x)\le C|x|^{1+\alpha}$；

(2)若存在$\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$，使得$\forall h\in[0,1]$，$l\left(\frac{h}{2}\right)\le(1-\varepsilon)l(h)$, 其中$l(h)$为$S(h)$的长度证明存在实数$\beta>0$以及$C>0$，使得$\forall\,x$，$f(x)\ge C|x|^{1+\beta}$。

7. (8分)假设$f\in C^1(\mathbb{R})$且满足：$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\le A\in(0,+\infty)$，$\sup_{x\in\mathbb{R},y>x}\left|\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}\right|\le B\in(0,+\infty)$。证明：$\forall x\in\mathbb{R}, |f'(x)|\le\sqrt{2AB}$。

8. (8分)设f为$[0,1]$上的连续正函数且$\int_0^1 f dx=A$，$\int_0^1 f^2dx=B$。

(1)证明：对任意正整数n，存在划分$0=x_0<\cdots<x_n=1$，使得$\int_{x_{k-1}}^{x_k}f dx=\frac{A}{n}$, $k=1,2,\dots,n$。

(2)求$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$。

9. (8分) 证明： $\left|\int_1^2\sin\left(nx-\frac{1}{x}\right)dx\right|<\frac{2}{n}$对任何正整数$n$成立。

10. (8分) 设f为$[0,\frac{\pi}{2}]$上的非负单调递增函数。证明：当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，

$(1-\cos x)\int_0^x f(t)dt\le x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$。