

高等代数 期中试题

2018-2019 学年第 2 学期

考试时间: 2019-4-16,

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 9 道大题, 满分 100 分, \mathbb{C} 是复数域, \mathbb{R} 是实数域, \mathbb{Q} 是有理数域。 $2x^2$

1. (10分) 求多项式 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式。
2. (10) 把第1题的 $f((x))$ 分解因式。
3. (15分) 用初等对称多项式表示 $f(x_1 x_2 x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
4. (10分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个不同的整数, 令

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1.$$

证明: 当 n 是奇数时, $f(x)$ 是不可约多项式。

(待证)

5. (10) 设 V_1 是 F -线性空间 V 的子空间, $\dim_F V_1 = \dim_F V - 1 = n - 1$. 证明存在 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 使得 $\alpha_i + V_1 \neq 0$ 互不相等, $i = 1, \dots, n$.
6. (10分) 设 U, W 是 F -线性空间 V 的子空间, 证明:

$$(U + W)/W \cong U/(U \cap W).$$

7. (10分) 设 $A \in M_n(F)$, $f(x), g(x) \in F[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$. 证明:

$$\{X \in F^n, |d(A)X = 0\} = \{X \in F^n, |f(A)X = 0\} \cap \{X \in F^n, |g(A)X = 0\}$$

8. 矩阵 $A \in M_n(F)$.

(a) (10分) 证明集合 $V = \{B \in M_n(F), |AB = 0\}$ 是 $M_n(F)$ 的子空间。 $A \times \infty$.

(b) (5分) 如果秩 $A = r$, 求子空间 V 的维数。

(c) (5分) 类似地 $V_1 = \{B \in M_n(F) | BA = 0\}$ 是 $M_n(F)$ 的子空间 (不用证明), 如果 $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求子空间 $V \cap V_1$ 的维数。

9. (5分) 求 $f(x) = x^n + a$ 的判别式。