数学模型　期中考试（1）

Exam Date: April 12.　Time: 08:05 pm to 09:45 pm.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 考虑可逆反应 (reversible transform)

$$A \xrightarrow{k_1} 2B \quad \text{and} \quad 2B \xrightarrow{k_2} A.$$

用 $A(t)$ $B(t)$ 分别表示物质A，B的浓度，它们满足初值条件

$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0, \quad M = 2A_0 + B_0.$$

（a）（10分）写出 $A(t), B(t)$ 满足的变化率模型，并求出该系统对应初值条件的平衡解 $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbb{R}^2$。

（b）（10分）写出系统在平衡解 $(\bar{A}, \bar{B})$ 处的近似线性方程对应的系数矩阵。尝试使用 p, q 判别法判断其稳定性。（如果是临界情况，就指出无法这个判别法判断。）

（c）（10分）定义

$$S(t) = A\left[\ln(k_1 A) - 1\right] + B\left[\ln\left(\sqrt{k_2} B\right) - 1\right],$$

通过计算证明 $S'(t) \le 0$.

2. （a）（10分）在很多的应用中，我们会把如下的一维的ODE

$$\dot{\theta} = f(\theta), \quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

看作是一个圆上的流，

$$\dot{\theta} = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

即把 0 和 2π 看作是同一个点。考虑用于描述振荡神经元的模型

$$\dot{\theta} = \omega - a\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

这里，$\omega > 0, a \ge 0$ 是模型的参数。请按照参数的取值，分情况讨论系统的解的行为。(可以不求解出平衡解，只需要定性分析。)

（b）（10分）小蓝在玩一个叫做《节拍英雄》的游戏。在单人模式中，小蓝将于一个AI玩家互动。游戏中，他们各有一个进度条，AI的进度用 $y_0(t) \in [0, 2\pi]$ 表示，小蓝的进度用 $y_1(t) \in [0, 2\pi]$，进度的演化规律是

$$\dot{y}_0 = a_0, \quad \dot{y}_1 = a_1 + b_1 \sin(y_0 - y_1).$$

这里 $a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 \ge 0$ 是常数，且 $b_1 < a_1$。每当进度 y_i $(i = 0, 1)$ 在某时刻 t^*达到 2π，即 $y_i(t^*) = 2\pi$，它会立刻被重置为 $y_i(t^*) = 0$。而玩家（AI或者人类）需要在自己的进度条重置的瞬间击一下鼓。每局游戏中，

参数 a_0, a_1, b_1 都会被随机重置。小蓝发现，有时候，自己的击鼓频率渐渐和AI的变成一样的了，也就是说，小蓝“学会了”AI的频率，但是有时候这种情况却不会发生。请帮小蓝算出，当 a_0, a_1, b_1 满足什么关系时，小蓝会逐渐“学习”AI的频率，并解释原因。

3、令 $u(x)$（$0<x<L$）为一个导热杆的温度，$f(x)$为热源函数，在平衡状态下，我们有如下关系

$$u''(x) = f(x), \quad 0<x<L;$$

$$au(0)+bu'(0)=0, \quad cu(L)+du'(L)=0.$$

这里，a,b,c,d 都是常数。

（a）（10）当 $a=c=d=1$，$b=0$ 时，通过直接求出该问题的格林函数将该问题的解 $u(x)$ 表示出来。

（b）（10）当 $b=d=1$，$a=c=0$ 时，分情况讨论这个边值问题的解的存在性和解的个数。

4、在一些科学和工程问题中，我们会关心一些连续发生的随机事件，例如神经元的放电现象。我们假设这些随机事件都是瞬间发生的，我们不妨称一次事件的发生为一次放电。我们进一步假设，随机事件发生的概率跟距离上一次放电的时间 s 和距离倒数第二次放电的时间 a 有关。我们用一个密度函数 $n(t,s,a)$ 来描述 t 时刻 s 和 a 的分布情况，它的演化满足如下的模型

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_s n + \partial_a n + p(s,a)n = 0, & t>0, a>s>0, \\ n(t,s=0,a) = M(t,a), & t>0, a>0, \\ n(t=0,s,x) = n_0(s,a) \geq 0, & a>s>0. \end{cases}$$

这里 $n_0(s,a)$ 是初始密度函数，$p(s,a)>1$ 是跳跃速率函数。我们自然地假设 $\forall t \geq 0$, 当 $a \leq s$ 时, $n(t,s,a) \equiv 0$。（以下分析中，我们始终可以忽略 n 在无穷远处的边界项。）

（a）（10分）我们暂时假设 $M(t,a)$ 是已知的函数，那么请用特征线法表示出该问题的解。

（b）（10分）事实上，考虑到问题的实际背景，我们需要给出如下的边值条件

$$M(t,a) := \int_0^\infty p(a,u)n(t,a,u)\,\mathrm{d}u.$$

请从 Lagrangian 的角度解释这个模型的特征线和边值条件。并证明如下的质量守恒关系

$$\iint_{a>s>0} n(t,s,a)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}a = \iint_{a>s>0} n(0,s,a)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}a.$$

（c）（10分）保留（b）中的假设。我们定义一个权重函数

$$\sigma(s,a) = \frac{s}{2} + \frac{a}{4}.$$

证明存在 $c_1>0, c_2>0$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{a>s>0} \sigma(s,a)n(t,s,a)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}a \leq -c_1\iint_{a>s>0} \sigma(s,a)n(t,s,a)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}a + c_2.$$