

# 理论计算机科学基础 2017 年期中考试

November 14, 2017

1. (4 分) (1) 记  $\pi(x)$  为小于等于  $x$  的素数个数, 证明  $\pi(x)$  是原始递归函数; (2) Fibonacci 数列定义为  $f(0) = f(1) = 1$ ,  $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$  ( $n \geq 1$ ), 证明  $f(n)$  是原始递归函数.
2. (3 分) 证明集合  $B = \{t \in \mathbb{N} : \text{dom } \Phi_t(x) \neq \emptyset\}$  是递归可枚举集.
3. (4 分) 设计一台图灵机接受语言  $\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ 中 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的个数相同}\}$ . 先描述详细的设计思路, 然后画出状态转移图.
4. (3 分) 设语言  $L$  是递归的, 证明存在一台总停机的图灵机接受  $L$ .
5. (3 分) 构造文法  $G = (V, T, \Gamma, S)$ , 其中  $T = \{a, b\}$ , 使得  $L(G) = \{a^n b^m : n \geq m \geq 0\}$ .
6. (3 分) 问题一: 任给有穷集  $S$  上的等价关系  $R$  以及  $S$  的两个元素  $x$  和  $y$ , 问:  $x, y$  是否在  $R$  定义的同一个等价类中?  
问题二: 任给无向图  $G = (V, E)$  及两个顶点  $u, v \in V$ , 问:  $u, v$  是否在同一个连通分支中?  
试给出从问题一到问题二的归约. 设  $A$  是解决问题二的算法, 试利用  $A$  构造解决问题一的算法.