数学模型第二次作业

1.

$$\frac{dC}{dt} = k_1SE - k_2C - k_3C$$
$$\frac{dE}{dt} = -k_1SE + k_2C + k_3C$$
$$\frac{dP}{dt} = k_3C$$
$$\frac{dS}{dt} = \quad k_1SE + k_2C$$

2.

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dt}} = A + BY(t) - CX(t)$$

$$\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}} = CX(t) - (B + E)Y(t) - 3GY(t)^3 + DZ(t)$$

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dt}} = EY(t) + GY(t)^3 - (H + D)Z(t)$$

3. (a). phase plane system:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \quad \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

解方程

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \quad \frac{1}{2}x^2 = 0 \end{cases}$$

得到平衡点 $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$.

若令 $f(x,y) = y$ $g(x,y) = x \quad \frac{1}{2}x^2$, 则 Jacobi 矩阵

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 \quad x & 0 \end{pmatrix}$$

记 $p = \quad (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}) = \quad tr(J)$, $q = det(J)$.

则对于 P_1, $p = 0, q < 0$, 不稳定

对于 $P_2, p = 0$, $q > 0$, 此时 J 的特征值为 $\pm i$, 所以 P_2 **临界状态**

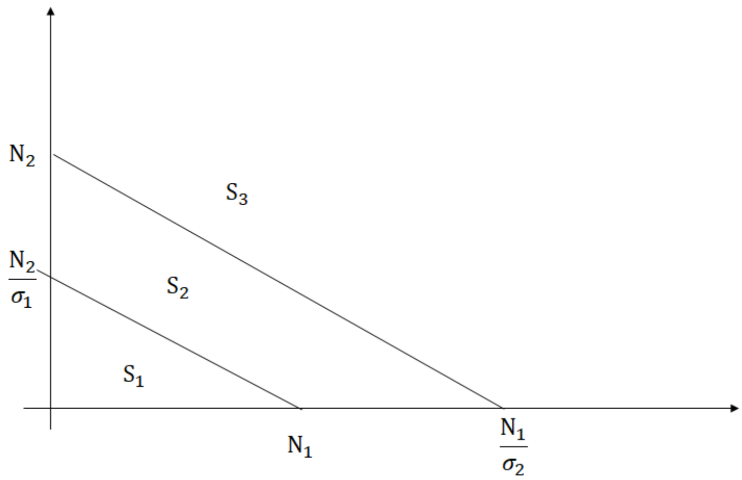
(b). 令 $h=\frac{1}{2}(x')^2 \quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$, 将 $y=\frac{dx}{dt}=x'$ 代入, 并对 h 关于 t 求导得

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=yy'+(\frac{1}{2}x^2 \quad x)x'\\&=y(x \quad \frac{1}{2}x^2)+(\frac{1}{2}x^2 \quad x)y\\&=0\end{aligned}$$

由此 h 与 t 无关 $h\equiv H$ 也即 $\frac{1}{2}(x')^2 \quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3=H$

4.

a.



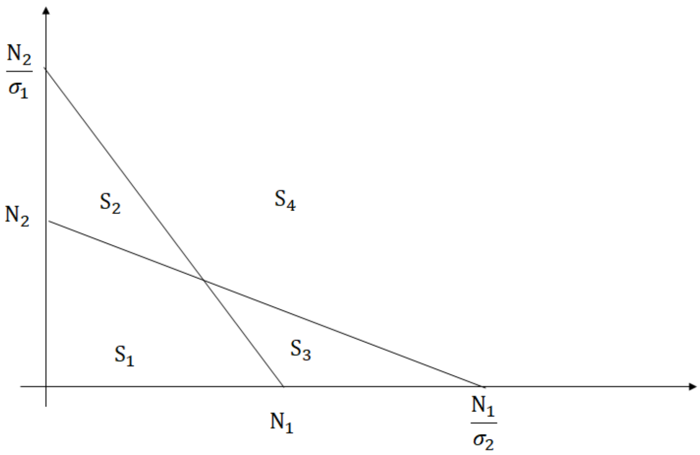
在S_3时$\dot{x}_1<0$，$\dot{x}_2<0$

在S_2时$\dot{x}_1<0$，$\dot{x}_2>0$

在S_1时$\dot{x}_1>0$，$\dot{x}_2>0$

在任何区域都趋向于P_2点，所以P_2全局稳定

b.



在S_4时$\dot{x}_1$ <0，$\dot{x}_2$<0

在S_3时$\dot{x}_1$ <0，$\dot{x}_2$>0

在S_2时$\dot{x}_1$ >0，$\dot{x}_2$<0

在S_1时$\dot{x}_1$ >0，$\dot{x}_2$>0

在任何区域都趋向于P_3，所以P_3全局稳定

5.

(a). 种群相互依存模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 (1 \quad \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}) \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 (\quad 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \quad \frac{x_2}{N_2}) \end{cases}$$

解方程

$$\begin{cases} r_1 x_1 (1 \quad \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}) = 0 \\ r_2 x_2 (\quad 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \quad \frac{x_2}{N_2}) = 0 \end{cases}$$

得到平衡点 $P_1(N_1,0)$, $P_2(\frac{N_1(1\quad\sigma_1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2\quad 1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2})$, $P_3(0,0)$, 舍去无意义的 P_3.

$$J(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} r_1(1\quad\frac{2x_1}{N_1}+\frac{\sigma_1 x_2}{N_2}) & \frac{r_1x_1\sigma_1}{N_2} \\ \frac{r_2x_2\sigma_2}{N_1} & r_2(\quad 1+\frac{\sigma_2 x_1}{N_1}\quad\frac{2x_2}{N_2}) \end{pmatrix}$$

(a1). 对于 P_1, $p=\quad tr(J)=r_1+r_2(1\quad\sigma_2)$, $q=det(J)=r_1r_2(1\quad\sigma_2)$, 如果 $P_1(N_1,0)$ 稳定, 需使

$$\begin{cases} r_1+r_2(1\quad\sigma_2)>0 \\ r_1r_2(1\quad\sigma_2)>0 \end{cases}$$

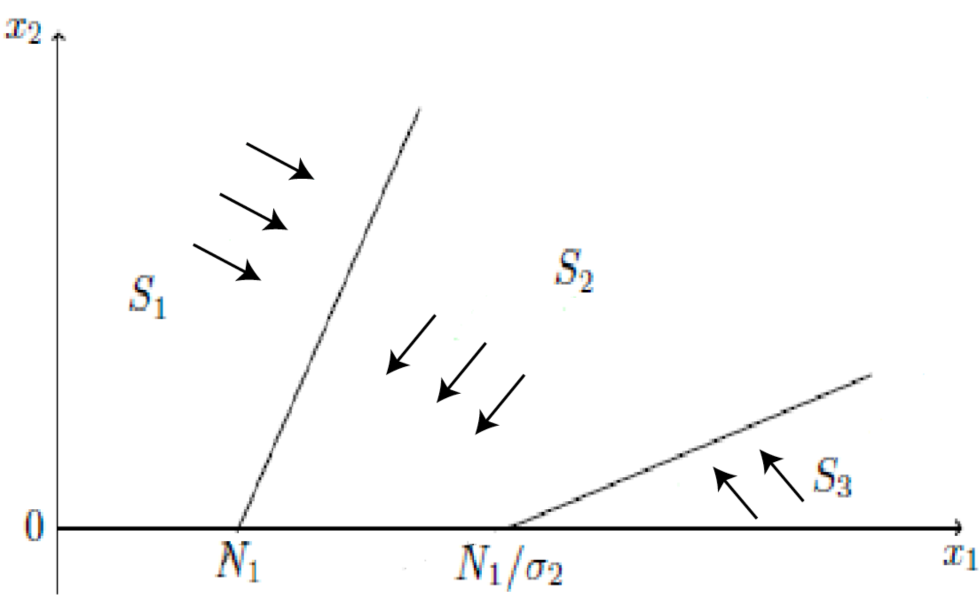
即为 $\sigma_2<1$

(a2). 对于 P_2, $p=\quad tr(J)=\frac{r_1(1\quad\sigma_1)+r_2(\sigma_2\quad 1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2}$, $q=det(J)=\frac{r_1r_2(1\quad\sigma_1)(\sigma_2\quad 1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2}$, 如果 $P_2(\frac{N_1(1\quad\sigma_1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2\quad 1)}{1\quad\sigma_1\sigma_2})$ 稳定, 需使 $p>0$, $q>0$. 由 P_2 在第一象限知 $1\quad\sigma_1$, $1\quad\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\quad 1$ 三者符号相同, 再由 $q>0$ 知此三者必同时为正, 得到 P_2 稳定的条件

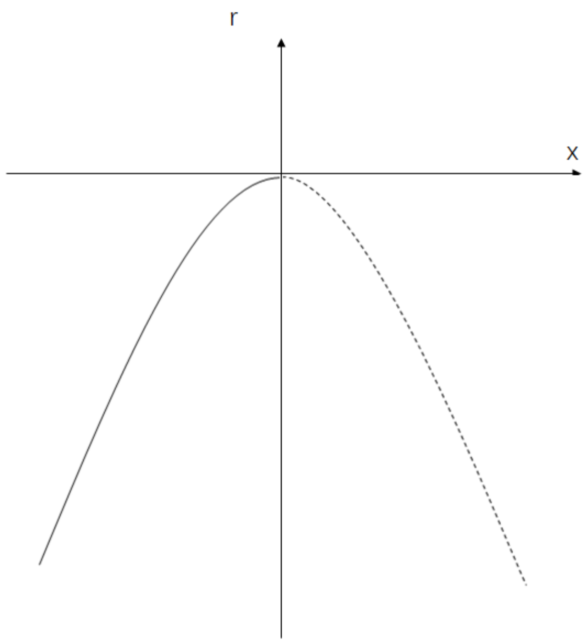
$$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$$

(b). 记 $\phi=1\quad\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}$, $\psi=\quad 1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\quad\frac{x_2}{N_2}$, 则 $\dot{x}_1=r_1x_1\phi$, $\dot{x}_2=r_2x_2\psi$. $\phi=0$, $\psi=0$ 将第一象限分割为 3 个区域:

$$S_1:\phi>0,\psi<0$$
$$S_2:\phi<0,\psi<0$$
$$S_3:\phi<0,\psi>0$$



6.



在 r>0 时没有平衡点

在 r=0 时有一个不稳定平衡点 0

在 r<0 时有一个稳定平衡点$-\sqrt{-r}$ 和一个不稳定平衡点$\sqrt{-r}$