# 北京大学数学分析（I）期中试题

2023.11.13

本试题共 九 道大题，满分 100 分

一、 (20 分) 叙述并证明实数系 $\mathbb{R}$ 上的有限覆盖定理(即：陈述定理条件和结论并给出证明).

二、 (20 分) 求下列各极限

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2023^n}{n!}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin\left((\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\pi\right)$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\sin x^{\tan x}$;　　(4) $\displaystyle\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}$.

三、 (10分) 设 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0$. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=0$.

四、 (10分) 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $f(1)-f(0)=1$. 证明存在实数 $\alpha,\beta\in(0,1)$ , 使得 徇

$$f(\beta)-f(\alpha)=\beta-\alpha.$$

五、 (10分) 设 $R(x)$ 和 $R^*(x)$ 是 $x\in[0,1]$ 上如下定义的函数:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p},\quad p,q\in\mathbb{N}_+,\quad (p,q)=1\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\bigcap[0,1],\text{ 或 } x=0,\end{cases}$$

$$R^*(x)=\begin{cases}p, & x=\frac{q}{p},\quad p,q\in\mathbb{N}_+,\quad (p,q)=1\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\bigcap[0,1],\text{ 或 } x=0.\end{cases}$$

(i) 证明: 对任意的 $x_0\in[0,1]$, 极限 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}R(x)$ 都存在.

(ii) 对任意的 $x_0\in[0,1]$, 试讨论函数 $R^*(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内的有界性，以及极限 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}R^*(x)$ 的存在性.

【转下页】

六、 (10分) 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上且取值也在 $[0,1]$ 内的函数，满足

$$|f(\xi)-f(\eta)| \le \frac{1}{2}|\xi-\eta|, \qquad \forall \xi,\eta \in [0,1].$$

定义数列

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+2f(x_n)\right), \qquad n=1,2,\ldots$$

证明：$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是良好定义且收敛的数列.

七、 (10分) 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$. 证明：若 $f(x)$ 一致连续，则 $|f(x)|$ 亦然. 又若 $|f(x)|$ 一致连续，问 $f(x)$ 是否一致连续? 论证你的答案.

---

**注意：下面三道题中任选两道即可**

八、 (5分) 设 $f(x), g(x) \in C[0,1]$. 如果存在无穷点集 $x_n \in [0,1]$, 使得 $f(x_n)=g(x_{n+1})$ $(n=1,2,\ldots)$, 则一定存在点 $\xi \in [0,1]$, 使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

九、 (5分) 设 $a=\sqrt[3]{3}$.

$$x_1=a, \quad x_2=a^a, \quad x_3=a^{a^a}, \cdots, \quad x_{n+1}=a^{x_n}, \qquad n=1,2,\ldots.$$

证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在, 但不是3.

十、 (5分) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$,

$$a_{n+1}=a_n+kb_n, \quad b_{n+1}=\ell a_n+b_n, \quad k\ge 1, \ell \ge 1, \qquad n=1,2,\ldots.$$

试讨论极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 的存在性; 在存在的情况下，求其值.

【全卷完】