北京大学数学学院 2019-2020年
第一学期 高等代数期末试题

2020年01月07日上午8:30-10:30

1. (30分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

   (a) 求正交矩阵T使得$T^{-1}AT$是对角矩阵;

   (b) 求函数$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^t AX$在球面$x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 1$上的最大值和最小值。这里$X = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^t$.

2. （10分）求非退化线性替换，把二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$化成标准型。

3. （20分）

   (a) 设$A, B \in M_n(F)$, 如果$AB = 0$，那么$r(A) + rB) \leq n$.

   (b) 设$A \in M_n(F)$, 如果$A^2 - 7A + 10I_n = 0$, 那么A可对角化。

4. （10分）设A, B是实对称矩阵, $A - B$是正定的，证明：存在可逆矩阵T使得$T^t AT$，$T^t BT$为对角矩阵。

5. （10分）设$A \in M_{mn}$. 证明：$I_n - AA^t$是正定的充要条件是$I_m - A^t A$是正定的。

6. （10分）设A是n阶正定矩阵，证明$(\alpha, A\alpha)(\beta, A^{-1}\beta) \geq (\alpha^t\beta)^2$, 其中$\alpha, \beta$是$\mathbb{R}^n$中的列向量。

7. （10分）

   (a) 证明A正定的充要条件是存在可逆矩阵P使得$A = P^t P$.

   (b) 设$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$是正定矩阵，利用(a) 证明$C = (a_{ij}b_{ij})$是正定矩阵。