2020 拓扑学期中考试

考试时间: 11 月 20 日　3pm-5pm

一、

11. Let $p : X \to Y$ be a quotient map. Show that if each set $p^{-1}(\{y\})$ is connected, and if Y is connected, then X is connected.

二、设 Y 是紧致 Hausdorff 空间,X 是 Y 的子空间, 赋予 Y 的子空间拓扑, 如果 $\overline{X} = Y$, 且 $Y \backslash X$ 有且仅有一个元素 ∞, 则称 Y 是 X 的一点紧致化;

(a) 试用 X 的拓扑来定义 Y 中的拓扑 (要求证明你定义的拓扑确实是 Y 中原有的拓扑);

(b) 证明 $X = [0, 1) \subset \mathbb{E}^1$ 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 给出 X 的一点紧致化并证明;

(c) 证明 $X = [0, 1] \subset \mathbb{E}^1$ 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 给出 X 的一点紧致化并证明.

三、设 $A = \mathbb{R} \times \{0\} \cup [0, +\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^2$, 定义 A 到 $\mathbb{E}^1$ 的映射 p 为 $p(x, y) = x, \forall (x, y) \in A$. 证明 p 是商映射, 但既不是开映射也不是闭映射.

四、考虑用参数形式给出的曲线 $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{E}^2$ 定义为

$$\gamma(t) = \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right) \cos t, \left(1 + \frac{1}{t}\right) \sin t \right), \forall t \in (0, +\infty)$$

设 X 是 $\gamma((0, 1))$ 与 $\mathbb{E}^2$ 中单位圆周的并, 证明 X 连通, 但不道路连通.

五、

3. Let X be metrizable. Show that the following are equivalent:

(i) X is bounded under every metric that gives the topology of X.

(ii) Every continuous function $\phi : X \to \mathbb{R}$ is bounded.

(iii) X is limit point compact.

六、

6. Let $p : X \to Y$ be a closed continuous surjective map. Show that if X is normal, then so is Y.

七、

9. Let X be a compact Hausdorff space that is the union of the closed subspaces X_1 and X_2. If X_1 and X_2 are metrizable, show that X is metrizable.

注: 1、5、6、7 四题均出自 *Munkres* 的 *Topology.*