一. 在复数域上求下列矩阵的特征多项式、最小多项式、有理标准形和Jordan标准形.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}, \qquad\qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

解. (1) 特征多项式=最小多项式$=(x-3)(x-2)^2$,

$$\text{有理标准形}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{Jordan标准形}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 特征多项式$=(x-6)(x-2)^2$, 最小多项式$=(x-6)(x-2)$,

$$\text{有理标准形}=\begin{bmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{Jordan标准形}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

二. 设V是n维F-线性空间, $T\in L(V)$循环, $g\in F[x]$是T的特征多项式的因式. 证明

$$\dim \operatorname{Ker}(g(T))=\deg g.$$

证明. 记$R=F[x]$. 设$\alpha\in V$是循环向量, $f_T=p_\alpha=gh$, $\beta=h\alpha$. 我们先证明

$$\operatorname{Ker}(g(T))=R\beta. \tag{1}$$

首先, 对$q\beta\in R\beta$, 有$gq\beta=qp_\alpha\alpha=0$. 因此$q\beta\in\operatorname{Ker}(g(T))$. 另一方面, 设$u\alpha\in\operatorname{Ker}(g(T))$, 则$gu\alpha=0$, 从而$p_\alpha|gu$, 因此$h|u$. 所以$u\alpha=(u/h)\beta\in R\beta$. 这就证明了(1)式. 由此即得

$$\dim\operatorname{Ker}(g(T))=\dim R\beta=\deg p_\beta=\deg g. \qquad\square$$

三. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的最小多项式为$x^n$, 正整数$k\le[\frac{n}{2}]$. 证明在$A^k$的Jordan标准形中, Jordan块的最小阶数为$[\frac{n}{k}]$.

证明. 设J为A^k的Jordan标准形. 由条件可知A的Jordan标准型为$J_n(0)$, 并且J中Jordan块的对角元均为0. 从而J中Jordan块的个数为

$$\dim\operatorname{Ker}(J)=\dim\operatorname{Ker}(A^k)=\dim\operatorname{Ker}(J_n(0)^k)=k.$$

记$d=[\frac{n}{k}]$, 并设$n=kd+r$, 其中$0\le r<k$. 由于$J^{d+1}=(A^k)^{d+1}=0$, 所以J 没有阶数大于$d+1$的Jordan块, 从而J中的$d+1$阶Jordan块的个数为

$$\operatorname{rank}(J^d)=\operatorname{rank}(A^{kd})=\operatorname{rank}(J_n(0)^{kd})=n-kd=r.$$

因此, J中阶数小于等于d的Jordan块的个数为$k-r$. 但是, 这$k-r$个Jordan块的阶数之和为$n-r(d+1)=(k-r)d$. 因此这$k-r$个Jordan块只能都是d阶的. 综合起来, J中恰有r个$d+1$ 阶Jordan块和$k-r$个d阶Jordan块, 而没有其他阶数的Jordan块. 这就完成了证明. $\square$

四. 设$\operatorname{char} F=0$, $A\in F^{n\times n}$的特征多项式为$(x-1)^n$. 证明对任意正整数k, A^k与A相似.

证明. 首先假设A循环. 则$p_A=(x-1)^n$. 从而对于正整数d, 有

$$
\begin{aligned}
(x-1)^d\text{是}A^k\text{的零化多项式} &\iff (x^k-1)^d\text{是}A\text{的零化多项式}\\
&\iff (x-1)^n|(x^k-1)^d \iff d\geq n.
\end{aligned}
$$

特别地, $(x-1)^n$是A^k的零化多项式, 但$(x-1)^{n-1}$不是A^k的零化多项式. 因此$p_{A^k}=(x-1)^n$. 这说明A与A^k均只有一个不变因子$(x-1)^n$, 从而它们相似. 这就完成了循环情况的证明.

对一般情况, 设A的有理标准形为$\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_r)$, 其中$A_i$循环并且特征多项式为$x-1$的幂. 则$A^k$相似于$\operatorname{diag}(A_1^k,\dots,A_r^k)$. 由已证的结果, 每个$A_i$与$A_i^k$相似. 于是$\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_k)$与$\operatorname{diag}(A_1^k,\dots,A_r^k)$相似. 因此$A$与$A^k$相似. □

五. 设V是n维F-线性空间, $T,U\in L(V)$不可逆, 并且TU可对角化. 证明$(UT)^2$可对角化.

证明. 由于TU可对角化, 所以p_{TU}为互不相同的首项系数是1的一次式的乘积. 因此, 存在TU的零化多项式g使得$h:=xg$形如

$$h=x^2(x^2-c_1^2)\cdots(x^2-c_r^2),$$

其中$c_1^2,\dots,c_r^2$非零并且互不相同. 注意到

$$h(UT)=UTg(UT)=Ug(TU)T=0,$$

所以h是UT的零化多项式. 因此

$$x(x-c_1^2)\cdots(x-c_r^2)$$

是$(UT)^2$的零化多项式. 这说明$(UT)^2$的最小多项式是互不相同的首项系数是1的一次式的乘积, 从而可对角化. □

六. 设V是n维复线性空间, $T,U\in L(V)$满足$\operatorname{rank}(TU-UT)=1$. 证明存在$V$的有序基$\mathcal{B}$使得$[T]_{\mathcal{B}}$和$[U]_{\mathcal{B}}$同时为上三角矩阵.

证明. 先证明:

引理. 在题目条件下, 如果$n\geq 2$, 则存在T和U的非平凡公共不变子空间.

引理的证明. 如果T和U均为恒同映射的常数倍, 则引理显然. 不妨设T不是恒同映射的常数倍. 只需证明对于$c\in\sigma(T)$, 非平凡T-不变子空间$\operatorname{Ker}(T-cI)$和$\operatorname{Im}(T-cI)$至少有一个是U-不变的. 记$S=TU-UT$. 如果对任意$\alpha\in\operatorname{Ker}(T-cI)$有$S\alpha=0$, 则

$$TU\alpha=UT\alpha+S\alpha=cU\alpha,$$

即$U\alpha\in\operatorname{Ker}(T-cI)$. 这说明$\operatorname{Ker}(T-cI)$是$U$-不变子空间. 如果存在$\alpha\in\operatorname{Ker}(T-cI)$使得$S\alpha\neq 0$, 则对任意$\beta\in V$, 由于$\operatorname{rank}(S)=1$, 所以存在$t\in\mathbb{C}$满足$\beta+t\alpha\in\operatorname{Ker}(S)$, 从而

$$U(T-cI)\beta=U(T-cI)(\beta+t\alpha)=(T-cI)U(\beta+t\alpha)\in\operatorname{Im}(T-cI).$$

这说明$\operatorname{Im}(T-cI)$是U-不变子空间. 引理证毕.

现在证明原题. 设k是满足如下条件的最大正整数: 存在T和U的公共不变子空间序列$\{0\}=W_0\subsetneq W_1\subsetneq\cdots\subsetneq W_k=V$. 只需证明$k=n$. 若不然, 则对某个$1\leq i\leq k$有$\dim W_i/W_{i-1}\geq 2$. 对$T$和$U$在$W_i/W_{i-1}$上诱导的映射应用引理, 可知存在$T$和$U$的公共不变子空间$W\subset V$满足$W_{i-1}\subsetneq W\subsetneq W_i$, 与$k$的最大性矛盾. □