高等代数测试 2

(本次测试占总成绩 25%，卷面 28 分，超出 25 分者按照 25 分计，按照 1 : 1 计入总评成绩。)

一、**判断题** (共 17 分，每空 1 分。1~7 请填写✓/✗，8,9 请填写是/否/无法判断)。

(若无特殊说明，以下均设 F 是域，$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, V 是 F 上的线性空间，$\mathrm{Hom}_F(V,V)$ 是 V 到 V 的所有 F-线性映射构成的集合。)

1. 令 V^* 为 V 的对偶空间，则 $(V^*)^*$ 同构于 V 。✗
2. 存在 V 真子空间 W_1, W_2, 使得 $V = W_1 \cup W_2$ 成立。✗
3. $T \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$, 对任意的 T 不变子空间 W, 均存在另一 T 不变子空间 U, 使得 $V = W \bigoplus U$。✗
4. 设 $V_1, \cdots, V_n$ 为有限维向量空间 V 的子空间，试判断下列式子是否一定成立:

$$\dim(V_1 + \cdots + V_n) \qquad ?? \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_j \leq n} (-1)^{j+1} \dim \bigcap_{i=1}^{j} V_{k_i}$$

(1) $n = 2$, ?? 为 " = " ✓ ; (2) $n = 3$, ?? 为 " = " ✗ ; (3) $n = 4$, ?? 为 " $\leq$ " ✗ ;

5. 若 $A, B \in M_n(F)$, (1) 若 A 与 B 的特征多项式和最小多项式均相同，则 A 与 B 相似。✗
   (2) 若 A 与 B 有相同的特征多项式，则 A 与 B 有相同的最小多项式。✗
   (3) 若 A 与 B 有相同的最小多项式，则 A 与 B 有相同的特征多项式。✗
6. 任给 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in F$, $\dim_F(V) = n$ ，令 $f(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$。
   (1) 一定存在 $T \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$，使得 T 的极小多项式 $= f(\lambda)$。✓
   (2) 一定存在 $T \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$，使得 T 的特征多项式 $= f(\lambda)$。✓
7. $S, T \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$ (1) 若 $ST = TS$ ， S 的不变子空间也是 T 的不变子空间。✗
   (2) 若 $ST = TS$ ， S, T 至少有一个公共的特征向量。✗
8. 设 T 为复数域的有限维向量空间上的算子，(1) T 满足 $T^5 = I$ 且 $T^4 \neq I$ ，则 T 能否对角化? ✓
   (2) 若条件改为 $T^5 = 0$ 且 $T^4 \neq 0$ ，结论又是怎样呢? ✗
9. 设 $A \in V := M_n(F)$, 考虑 $T(X) := AX - XA \in \mathrm{Hom}(V,V)$。(1) 如果 A 幂零，则 T 是否幂零 ✓
   (2) 如果 A 是可对角化的，则 T 是否可对角化的 ✓

二、**填空题** (共 4 分，每题 1 分。直接在答题纸上写下标号和答案，每行一题。不按照要求书写者计 0 分。)

1. 设 $A \in M_m(\mathbb{C}), B \in M_n(\mathbb{C})$, 定义 $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_{m,n}(\mathbb{C}), M_{m,n}(\mathbb{C}))$, $T(X) := AXB$。求 $\mathrm{tr}(T) =$ $\underline{\mathrm{tr}A \cdot \mathrm{tr}B}$
2. 设 $A, B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ 无共同的本征值。若 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ 满足方程 $AX = XB$, 则 $X =$ $\underline{0}$ 。
3. 不变子空间称为不可约的, 若它非 0, 且除了自身和零空间之外不包含其他不变子空间。设 $T \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$。
   当 $F = \mathbb{C}$ 时, 不可约子空间可能的维数是 $\underline{1, \infty}$; 当 $F = \mathbb{R}$ 时, 不可约子空间可能的维数是 $\underline{1, 2, \infty}$ 。
4. 设 $A_1 : S \to T$ 和 $A_2 : T \to U$ 是秩分别为 r_1 和 r_2 的线性映射, $\dim T = m$, $\rho = \dim A_2A_1(S)$。
   用 r_1, r_2 和 m 给出 ρ 的上界和下界估计: $\underline{\max\{0, r_1 + r_2 - m\}} \leqslant \rho \leqslant \underline{\min\{r_1, r_2\}}$

三、**计算极小多项式** (共 3 分，直接在答题纸上写下答案，无需步骤。不按照要求书写者计 0 分。)

设 F 为域，对自然数 n，我们定义 $n \in F$ 为 n 个单位元相加，$-n$ 为其加法逆元。

令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(F)$, 则 A 的极小多项式为 $m(\lambda) = \begin{cases} (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2) & \mathrm{char}F \neq 2 \\ \lambda(\lambda-1) & \mathrm{char}F = 2 \end{cases}$

四、**计算约当标准型** (共 4 分，直接在答题纸上写下标号和每问答案，无需步骤。不按照要求书写者计 0 分。)

令 $A = (a_{ij}) \in M_{2020}(\mathbb{C})$ 为上三角阵，其中 $a_{ij} = \frac{i}{j}(1 \leq i \leq j \leq 2020)$。求下列矩阵的 Jordan 标准型

① A, $J_{2020}(1)$ ② A^2, $J_{2020}(1)$ ③ $(A-I)^2$, $\mathrm{diag}(J_{1010}(0), J_{1010}(0))$

④ $(A-I)^{1000}$ $\mathrm{diag}(J_2(0), \cdots, J_2(0), J_3(0), \cdots, J_3(0))$ (前面 980 个，后面 20 个)