

2023春概率论

1、从52张扑克牌（不含大小王）中抽出五张，求概率：

- (1) 牌型是三带二，即三张点数相同，另两张也相同
  - (2) 五张牌同花色
  - (3) 五张顺次(A2345,23456,· · · ,10JQKA，不能跨过A)

2、甲盒中有2个红球、3个黑球，乙盒中有5个红球和7个黑球，先抛一枚硬币，正面从甲盒中随机取一个，反面从乙盒中随便去一个球，事件A=取出的是红球，事件B=从甲盒中取的，求 $P(B|A)$ .

3、设 $X$ 是非负随机变量，满足

$$P(X \geq m+n | X \geq m) = P(X \geq n)$$

求证： $X$ 服从几何分布

4、一个盒子里有 $M$ 个红球和 $N$ 个黑球，称如下操作为“扔掉同色球”：先随机取一个，记录颜色并扔掉；随后继续取球，若颜色与记录的相同，则扔掉并继续取球；若不同，则放回并终止操作。不断进行“扔掉同色球”的操作，直至盒子变空。记 $p(M, N) = P(\text{最后一次扔掉红球})$ ，求证 $p(M, N) = \frac{1}{2}$ 。

5、设随机变量  $X$  的密度函数  $p_X(x) = Ce^{\lambda x}$

- (1) 求  $C$
  - (2) 求随机变量  $Y = X^2$  的密度函数
  - (3) 求随机变量  $Z = e^{\lambda X}$  的密度函数

6、记 $\mathcal{B}(\mathbf{u}, r) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < r\}$ , 设随机变量 $U, V$ 独立服从 $\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$ 的独立分布

- (1) 求随机变量  $\|U\|$  的密度函数  
 (2) 求  $P(\mathcal{B}(U, \|U - V\|)) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$

7、设随机向量 $(X, Y)$ 有密度函数

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}$$

其中 $\rho \in (-1, 1)$

- (1) 设 $Z = \frac{X-\rho Y}{\sqrt{1-\rho^2}}$ , 求证 $Z \sim N(0, 1)$ 并且 $Z, Y$ 相互独立  
(2) 求 $P(XY \geq 0)$

8、 $X, Y$ 服从 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的独立同分布, 分布函数为 $F(t)$ , 设 $Z = X + Y$

- (1) 对 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ , 证明

$$P(Z \leq \varepsilon) \leq F(\varepsilon)^2, P\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \leq Z \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \geq 2F(\varepsilon)(1 - F(\frac{1}{2} - \varepsilon))$$

- (2) 证明 $Z$ 一定不是均匀分布