《随机过程论》期末考试试卷

1. 试举一例：T 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上遍历的保测变换，但 T^2 不是遍历的。

2. 设 $X_n, n \geq 1$ 为独立同分布随机变量序列，$EX_1 = 0, var(X_1) = 1$，对于 $n \geq 1$，定义 $Y_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i X_{n+i}$, 其中 α_i 为常数，满足 $\sum \alpha_i^2 < \infty$. 证明：

   (a) 定义 Y_n 的和式几乎处处收敛；

   (b) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$ 在几乎处处收敛和 L^1 收敛的意义下成立。

3. $X_n, n \geq 1$ 同上题，试证
$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) X_k \Rightarrow \eta,$$
其中 $\eta \sim N(0, 1/3)$.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布,$P(X_1 = 1) = p \geq 1/2.S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, R_n = |\{S_1, \cdots, S_n\}|$. 试求极限 $lim_{n\to\infty} ER_n/n$. 若进一步假设 $p = 1/2$，证明 $R_n/\sqrt{n}$ 依分布收敛。

5. 设 $\xi_k, k \in Z$ 独立同分布，$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = 0) = 1/2$. 定义
$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_n = 1, \xi_{n+1} = 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$
令 $S_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$ 证明存在常数 μ 和 σ 使得 $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ 渐近服从正态分布。

   在以下五题中，B_t 是一维（标准）布朗运动，$B_0 = 0$.

6. 设 $C > 0$ 证明 $P(\sup_{0\leq\mu\leq t} |B(\mu)| > C) \leq t/C^2$.

7. 设 R 为正数，$0 < x < R; \tau = \inf\{t \geq 0; B_t = 0或R\}$. 试求 $E_x \tau^2$

8. 设 $a > 0, b > 0$, 证明 $P(B(s) \neq 0, o < s < t | B(0) = a, B(t) = b) = 1 - e^{-2ab/t}$.

9. 设 $x > 0, A \subset [0, \infty)$ 是可测集，证明

$$P_x(B(s) \geq 0, 0 \leq s \leq t, B(t) \in A) = P_x(B(t) \in A) - P_{-x}(B(t) \in A).$$

10. 令 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. 试证 $M(t) - B(t)$ 与 $M(t)$ 同分布。