

# 北京大学数学科学学院期末考试试题

2015-2016 学年第一学期

考试科目: 抽象代数 考试时间: 2016 年 1 月 8 日  
姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

本试题共 7 道大题, 满分 100 分

1. (15 分) 设  $H$  是有限群  $G$  的一个非平凡子群。证明

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

2. (15 分) 设群  $G$  的阶为  $n = p^l m$ , 其中  $p$  为素数且  $(p, m) = 1, l > 0$ , 如果  $1 \leq k \leq l$ , 那么  $G$  的任一  $p^K$  阶子群一定是某一 Sylow  $p$ -子群的子群。试证之。
3. (15 分) 试叙述代数形式的中国剩余定理, 并证明。
4. (10 分) 设  $K$  为  $F$  上的域扩张。证明: 如果  $u \in K$  是  $F$  上的一个奇次代数元, 那么  $u^2$  也是  $F$  上的奇次代数元并且  $F(u) = F(u^2)$ 。
5. (25 分)  $n$  是一个自然数。试分别估计具有  $n$  个元素且互不同构的群, 环, 域的个数的上界。简单论述你的理由。
6. (10 分)  $C = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$  是一个  $n$  维几何体。假设  $G$  是所有  $C$  到它自身的保距离线性变换构成的群。试分析确定这个群的阶。
7. (10 分) (本题二选一)
- (1) 简述论证  $60^\circ$  角不能用直尺和圆规三等分的思路。
- (2) 简述 Galois 理论的基本思路。