# 几何学期末考试参考答案

考试日期：2019年1月9日。考试时间：120分钟。

题1（15分） 已知$I$和$I'$都是平面右手直角坐标系，$I'$的$x'$轴在$I$中的方程为$3x-4y+5=0$，$I$的原点在$I'$中的坐标为$(2,1)$。

(1) 求$I$到$I'$的点的坐标变换公式（即$(x,y)$依赖于$(x',y')$的表达式）。

(2) 求在$I$中方程为$x^2+y^2=1$的圆在$I'$中的方程。

• 解：可直接根据题意作出图形，并从中确认$e_1'$在$I$中的坐标为$(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$，$e_2'$在$I$中的坐标为$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$，$O'$在$I$中的坐标为$(1,2)$。所以可以直接写出变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

如果忘记了对应关系，也可以先写出

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

（相当于用待定系数法。）然后根据$(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(x',y')=(1,2)$推出

$$2\cos\theta+\sin\theta+a=0,$$
$$-2\sin\theta+\cos\theta+b=0.$$

根据$3x-4y+5=0\Leftrightarrow y'=0$推出

$$3\cos\theta+4\sin\theta=0,$$
$$3a-4b+5=0.$$

联立解得$\cos\theta=-\frac{4}{5},\sin\theta=\frac{3}{5},a=1,b=2$。将以上$(x,y)$替换为$(x',y')$的表达式代入$x^2+y^2=1$，得到在$I'$中对应的方程$x'^2+y'^2-4x'-2y'+4=0$.（或直接由圆半径为1，圆心在$I'$中坐标为$(2,1)$而推出。）

• 评分标准：求坐标变换公式*10*分，圆的新方程*5*分。另外在最后公式中将$(x,y)$与$(x',y')$弄颠倒要扣*5*分。最后方程用变量$(x,y)$而非$(x',y')$写出者扣*1*分，常数项*4*错为*5*扣*1*分，只代入坐标变换公式不计算出最后答案扣*3*分。采用待定系数法求解出错或由图形推导出错的，基本全扣。

题2（25分） 设$\mathbb{P}$为顶点在单位球面上的正八面体，它的六个顶点为$\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$，其中$A_1A_3,A_2A_4,A_5A_6$是主对角线，$O$为其重心。以$\{O;\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_5}\}$为右手直角坐标系中$x,y,z$轴的正向单位向量。请用空间解析几何的方法来解答以下问题，每小题5分。

(1) 求三角形$A_3A_4A_5$所在平面$\Sigma$的方程；

(2) 求直线$A_1A_6$与平面$\Sigma$之间的夹角；

(3) 求$A_1$到平面$\Sigma$的距离；

(4) 求直线$A_1A_5$与$A_2A_3$之间的夹角和距离；

(5) 求三角形$A_2A_3A_6$所在平面与平面$\Sigma$之间的夹角。

• 解：(1) $x+y-z+1=0$。(2) $\theta=0$，即直线与平面平行。(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$。(4) 夹角为$\pi/3$，距离为$\frac{2}{\sqrt{3}}$。(5) $\arccos\frac{1}{3}$。过程略。

题3（25分） 判断以下说法的正误，并简要说明理由。

（1）一个凹四边形的二维区域，不能射影等价于一个正方形的平面区域。

（2）平面上两个图形的面积之比是仿射不变量，但不是射影不变量。

（3）三维空间建立一个仿射坐标系，恰好需要12个独立的参数（实变量）才能确定。

（4）空间直角坐标系中绕$z$轴的$\theta$角旋转变换的全体，构成了一个单参数变换群。

（5）射影平面上的任何一个射影变换都有至少一个不动点。

• 证：五个命题全是正确的!

理由:（1）凹四边形区域有一个特定的“凹点”，过该点作任一(射影)直线，都必定与词实心区域有交点，而正方形区域过任一顶点都可以作射影线与正方形区域内部不交。这个性质在射影变换下不变，因此两区域必定不会射影等价。

（2）给定平面仿射变换，其面积变化有固定的“变积系数”，从而两区域变化前后的面积之比不变。而射影变换下容易构造反例，说明此比例一般会变(例如把平面上的正方形格点阵在透视下变为不均匀的四边形格点阵，原来面积相等的棋盘格在透视下显然不再等面积)。

（3）显然正确，因为我们可以事先任意取定某一仿射或直角坐标系，则任何一个其它仿射坐标系的原点需要三个坐标确定，三个标架向量各需要3个坐标，共12个相对独立的坐标(参数)。

（4）在直角坐标系中写成三阶矩阵的表示，中间用到二阶旋转矩阵，易见是单参数变换群，特别是变换复合时参数相加。

（5）写成三阶矩阵表示射影变换，则必有实特征向量，对应射影平面上的不动点。注意欧氏平面上的平移有无穷远处的不动点。

题4（10分） (1)证明：用一族平行平面（与$z$轴不平行）去截椭圆抛物面$x^2+2y^2=z$，所得的截线是彼此相似的椭圆（即长短轴之比相等）。

(2)证明：平面$y+z=0$截此椭圆抛物面得圆周。

• 证：最好的办法是设想取坐标变换，使得平行平面族表达为$z'=c$。此时曲面方程依然为二次，代入$z'=c$得到平面曲线方程，易于看出其二次部分不变，故是相似的二次曲线。第二问有很多同学具体写出了转轴过程，更省事的办法是直接指出原交线同时满足$0=x^2+2y^2-z=x^2+y^2+(-z)^2-z$，后者为球面方程，故交线同时也是球面与平面交线，必为圆周。

• 评分标准：两问各*5*分。未注意说明空间曲线与投影曲线关系的，扣*2*分。

题5（10分） 陈述笛沙格（Desargues）定理的对偶定理。然后选择一种方法，证明此对偶定理。

• 证：对偶定理的表述是“如果两个三角形的对应边交点符合三点共线，则对应顶点的连线满足三线共点”。证明方法可以选择射影变换将条件中的共线三点扔到无穷远，则变成三条对应边分别平行的一对三角形，由Thales定理及其逆定理易证。

题6（10分） 圆锥曲线的内接三角形，作各边与相对顶点处切线的交点。证明此三交点共线。

• 证：最简单的办法是把它看做Pascal定理的退化情形，即六边形AABBCC，则由该定理结论直接得到证明。另一种习题课上说过的办法，是把上述三个交点当中的两个，用射影变换（中心投影）扔到无穷远，再适当作仿射变换，可以将图形变成圆内接正三角形，结论易证，再由射影不变性知道原命题正确。

题7（5分） 任意给定平面上一条非退化圆锥曲线$\Gamma$及其“内部”两个不同的点$A_1, A_2$，是否一定存在一个适当的射影变换$\phi$，将$\Gamma$映为一个椭圆，而将$A_1, A_2$映为该椭圆的一对焦点？给出你的结论并予以证明。

• 证：结论是一定存在（而且这样的椭圆其实是唯一的，也就是这样两个符合题意的椭圆一定彼此等距）。有同学指出了一个特别漂亮的证明，是取$A_1, A_2$连线关于$\Gamma$的极点$P$，然后取$PA_1, PA_2$两条连线，

分别与$\Gamma$交于四点，取出这四点的另一对对边交点$Q$和对角线交点$O$，不难证明这三点互相关于$\Gamma$调和共轭。然后通过射影变换将$PQ$变为无穷远直线，则$O$变为椭圆的中心，可进一步仿射变换成为一个圆的圆心，而刚才的四点变为圆内接矩形，$A_1, A_2$变为关于圆心对称的两点，此时再通过适当的正压缩（作一点计算求适当的压缩比和离心率），就可以变成符合要求的椭圆和一对焦点。