北京大学
2024–2025 学年第一学期高等代数 (I) 期末考

课程号: 00132331　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2024 年 12 月 31 日 08:30 — 10:30.
- 总分为 100 分.
- 课程和作业中的结论可以直接使用, 其余知识需要证明.
- 符号 ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置, $\mathbf{1}_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵, $\mathrm{M}_{m\times n}(R)$ 代表交换环 R 上的所有 $m\times n$ 矩阵所成集合.

---

1. (15 分) 计算以下实矩阵的特征多项式, 判断它在 $\mathbb{R}$ 和在 $\mathbb{C}$ 上可否对角化.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答. 计算得特征多项式 $X^4 - 5X^2 + 18$, 无实根但有四个相异复根, 故在 $\mathbb{R}$ 上无法对角化, 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化.

2. (10 分) 设 $p: V \to W$ 为线性满射, V 有限维, $f: V \to V$ 和 $g: W \to W$ 为满足 $pf = gp$ 的线性映射. 证明 g 的特征多项式整除 f 的特征多项式, 且 g 的极小多项式整除 f 的极小多项式.

解答. 回忆 $\dim\ker(p) + \mathrm{rk}(p) = \dim V$ 的证明, 可知适当取基后不妨设 V 带有直和分解 $V = W \oplus W'$ 而 p 是向直和项 W 的投影. 由此容易将 f 表成分块下三角矩阵, 其左上分块是 g 的矩阵, 如:

$$\begin{array}{c} \\ W \\ W' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} W & W' \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} g & \\ \hline \star & \star \end{array}\right) \end{array} \quad \text{留白部分为零,}$$

按此处理特征多项式与极小多项式.

3. (10 分) 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 定义 $\mathbb{Q}$ 上的 $n\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\det \boldsymbol{D}_n$ 的通式.

解答. 对 $n=3,4$ 直接计算, 在 $n\geq 5$ 时对最后一行展开两次得到递推公式 $\det \boldsymbol{D}_n = 2\det \boldsymbol{D}_{n-1} - \det \boldsymbol{D}_{n-2}$, 从而解出 $\det \boldsymbol{D}_n = 4$.

4. (20 分) 对以下实矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$, 要求 $\boldsymbol{D}$ 的对角元递减:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解答. 可取

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

其 1-特征子空间是方程 $X+2Y-2Z=0$ 的解空间, $\boldsymbol{P}$ 的后两列可为此空间的任意单位正交子集, 但 $\boldsymbol{P}$ 的第一列精确到 ± 1 是唯一的.

5. (15 分) 设 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 证明由下式确定的实对称矩阵 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 正定:

$$h_{ij} := \frac{1}{i+j-1}.$$

解答. 运用 $h_{ij} = \int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}\,\mathrm{d}t \implies {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \sum_{j=1}^n y_j t^{j-1}\,\mathrm{d}t$. 另一种过于复杂的方法是将 $\boldsymbol{H}$ 视为 Cauchy 矩阵的特例, 说明其行列式非零, 然后代入正定性的判准, 但必需证明用到的性质.

6. (20 分) 证明以下事实.

(i) 考虑任意域上的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{PQ}$ 和 $\boldsymbol{QP}$ 有相同的非零特征值 (不记重数).

解答. 直接的论证是设 $\boldsymbol{PQv} = \lambda\boldsymbol{v}$ 而 $\lambda\neq 0$ 且 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{Qv}\neq\boldsymbol{0}$, 因此有 $\boldsymbol{QP}(\boldsymbol{Qv}) = \lambda(\boldsymbol{Qv})$. 反方向是对称的. 另一种方法是等同 $\boldsymbol{PQ}$ 和 $\boldsymbol{QP}$ 的特征多项式, 讲义有记载.

(ii) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为半正定对称矩阵. 证明 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值皆为非负实数.

解答. 注意到可取半正定对称的 $\sqrt{\boldsymbol{B}}$, 而 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 和 $\sqrt{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}} = {}^{\mathrm{t}}\sqrt{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 有相同的非零特征值.

7. (10 分) 一个环 H (容许非交换) 的双边理想定义为对加法封闭并且满足 $HI \subset I$ 和 $IH \subset I$ 的非空子集 $I \subset H$.

以下设 R 为交换环, I 为环 $\mathrm{M}_{n\times n}(R)$ 的双边理想, 证明存在唯一的理想 $J \subset R$ 使得 $I = \mathrm{M}_{n\times n}(J) := \{(a_{ij})_{1\le i,j\le n} : \forall i, j,\ a_{ij} \in J\}$.

解答. 以 $\boldsymbol{E}_{ij} \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$ 代表 (i,j) 矩阵元为 1, 其余为零的矩阵. 以下说明可取 $J = \{r \in R : r\boldsymbol{E}_{11} \in I\}$. 首先易见 J 是理想. 其次从 $r\boldsymbol{E}_{11}$ 能以左乘或右乘以置换矩阵得到所有 $r\boldsymbol{E}_{ij}$, 故 $\mathrm{M}_{n\times n}(J) \subset I$. 最后对于给定的 $\boldsymbol{A} \in I$ 和 (i,j), 左右乘以合适的矩阵能得到 $a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} \in I$, 再用置换矩阵可得 $a_{ij}\boldsymbol{E}_{11} \in I$, 故 $a_{ij} \in J$. 这就说明 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{n\times n}(J)$.

唯一性说明如下: 若 J 是 R 的理想而 $I = \mathrm{M}_{n\times n}(J)$, 则 $r\boldsymbol{E}_{11} \in I \iff r \in J$ 表明 I 唯一地确定 J.