2023几何(II)实验班期中

1. (20分)记正则参数曲线$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^3$曲率为$\kappa(r)$，挠率为$\tau(r)$. 假设$\sigma:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$，是反向位似变换$\sigma(x,y,z)=(-2x,-2y,-2z)$. 对于所有$r\in\mathbb{R}$，用$\kappa(r),\tau(r)$写出$\tilde{\gamma}(r)=\sigma(\gamma(r))$的曲率$\tilde{\kappa}(r)$和挠率$\tilde{\tau}(r)$.

2. (20分)考虑参数曲面片

$$\phi(s,t)=(s(3-s^2+3t^2),t(3-t^2+3s^2),3(s^2-t^2)),s,t\in\mathbb{R}$$

求：ϕ在参数点$(s,t)=(1,1)$处的Gauss曲率；

3. (20分)给定空间旋转面$S:z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 对于任意$c>0$，平面$\Pi:z=c$与$S$相截而成的圆周在任何点关于$S$的测地曲率$\kappa_g(c)$只与$c$有关(而与点和曲面定向无关). 求：$\kappa_g(c)$的取值范围.

4. (16分)求证：如果定向的空间正则曲面$S\subset\mathbb{E}^3$上有两条垂直相交的直线$a,b\subset S$，那么交点处S的平均曲率为0.

5. 设$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^2$为平面正则参数曲线，且假设$\|\gamma(r)\|<1$和$\gamma(r)=\gamma(r+1)$对任意$r\in\mathbb{R}$成立(条件相当于说，它是落在单位圆盘内部的闭路). 求证：存在$r_0\in\mathbb{R}$，使得曲率$\kappa(r_0)>1$.

6. 设$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{E}^3$是正则参数曲面片，且假设$\phi(s,t)=\phi(s+1,t)=\phi(s,t+1)$对所有$(s,t)\in\mathbb{R}^2$成立. 问：$\phi$的Gauss映射是否一定满射单位球面？加以论证.