常微分方程期中试题

2023.4.10

共 7 道大题，满分 100 分

1. （40分，每题10分）求解下列方程的初值问题，要求适当化简

   (1) $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \dfrac{x^2+y^2}{x} - 2x, \quad y(1) = 0.$

   (2) $y' = x^3y^3 - xy, \quad y(0) = 1.$

   (3) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x} + y(x).$

   (4) $2xy^3\mathrm{d}x + (x^2y^2 - 1)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 1.$

2. （10分） 求满足积分方程

$$\int_0^1 \varphi(xt)\mathrm{d}t = n\varphi(x), \qquad n \neq 0$$

以及 $\varphi(1) = 1$ 的连续函数 $\varphi(x)$.

3. （10分） 试求微分方程 $y'^2 - 2xy' + 2y = 0$ 的所有解。

4. （10分） 设 φ, ψ, ω 是定义在区间 $I: a \le x \le b$ 上的连续函数，$\omega(x) > 0$, 且

Grownwell

$$\varphi(x) \le \psi(x) + \int_a^x \omega(s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

进一步假设$\psi \ge 0$, 单调不减. 证明

$$\varphi(x) \le \psi(x)e^{\int_a^x \omega(s)\mathrm{d}s}, \qquad x \in I.$$

5. （15分） 求曲线族 $\Phi_c: y^2 = 4c(x+c)$ 所满足的微分方程 以及与该曲线族Φ_c正交的轨线族Ψ_c 所满足的微分方程 并求出此正交轨线族 Ψ_c.

6. （5分） 证明: 初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在 $[x_0, +\infty)$ 上存在.

7. （10分） 已知 $f(x,y)$ 为正方形

$$\Omega: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1$$

上的连续函数，并且对所有的 $(x,y) \in \Omega$, 都有$|f(x,y)| < 1$. 证明关于 $\varphi(x)$ $(x \in [0,1])$ 的积分方程

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

有唯一的连续解.

【全卷完】