应用数学导论期末考试试题

考试时间：2018年6月20日上午8:30–10:30.

本试题6道大题，满分100分，其中前四题，每题20分，后两题，每题10 分.

1. 令$u_i = 2(h_i + h_{i-1})$，$i = 1,\cdots,n-1$，$h_j > 0$，$j = 0,\cdots,n-1$，求下三角矩阵L使得$A = LL^T$，其中

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. 若$f(x)$充分光滑，x^*是$f(x)$的m重根，$m \geq 2$，

   (a) 证明：Newton法只有局部一阶收敛性；

   (b) 若m已知，请基于Newton法构造一种具有二阶局部收敛性的迭代方法.

3. 写出求解线性代数方程组$Ax = b$的Kaczmarz算法，并对$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix}$，$b = 0$的情形分析其收敛速度.

4. 已知线性方程组$Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) 给出求解方程组的Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法；

   (b) 若Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法的初始值都为$x^{(0)} = (0,0,0,0,0)^T$，请分别选择向量范数，给出两种方法第3步得到的近似解在相应范数下的相对误差估计.

5. 对于如下方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

利用特征线方程的一种数值格式，给出一个差分格式，并分析其CFL条件.

6. 已知区间$[-1,1]$上的数值积分公式$I(f) = \sum_{j=1}^{J} f(\xi_j)w_j$的代数精度为$r$，积分系数$w_j \geq 0$，$j = 1,\cdots,J$. 若函数$f(x) \in C^{r+1}[-1,1]$，证明

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - I(f)\right| \leq \frac{4}{(r+1)!2^r}\max_{x\in[-1,1]}|f^{(r+1)}(x)|.$$