数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 5.　Time: 08:05 am to 09:45 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 带约束的优化问题。考虑平面上的封闭曲线，其参数化方程为 $(x(t), y(t)), 0 \le t \le T$ 且满足 $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$。参数 t 的选取使得曲线是逆时针定向的。由微积分我们知道，曲线的总长度为

$$L = \int_0^T \sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

而曲线围成的区域的面积大小为

$$A = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right) dt.$$

a. (10 分) 如果曲线的长度一定，我们希望曲线围成的区域面积最大。将这个问题写成一个带约束的优化问题，并用Lagrange Multiplier的方法写出对应的 Euler-Lagrangian 方程。

b. (10 分) 如果 $x(t)$、$y(t)$ 满足上述方程，证明存在 x_0、y_0 使得

$$\left(x(t) - x_0\right)^2 + \left(y(t) - y_0\right)^2 = r^2, \quad r = \frac{L}{2\pi}.$$

上述结果说明了什么？

2. 两点边值问题的格林函数。

a. (10 分) 利用格林公式和格林函数的如下定义，

$$\begin{cases} \mathscr{L} G(x, x_s) = \delta(x - x_s), & a < x < b, \\ G(a, x_s) = 0, \quad G(b, x_s) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

证明格林函数是对称的，即

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1).$$

b. (10 分) 考虑$u(x)$满足如下BVP

$$u''(x) = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(L) = b.$$

虽然BVP中的边值条件是非齐次的，但是我们仍然按照如下的方式定义格林函数

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} G(x, x_s) = \delta(x - x_s), & 0 < x < L, \\ G(0, x_s) = 0, \quad G(L, x_s) = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

请利用格林公式将BVP的解$u(x)$用格林函数表示出来。

3. a. (10 分) 对于 $m=2$ 和 $m=3$，分别求使得下面的 BVP 有解的 β 的值

$$u''(x)+m^2u(x)=\beta+x,\quad u(0)=0,\quad u(\pi)=0.$$

b. (10 分) 含小参数的特征值问题也可以做渐进展开。考虑如下的，定义在 $[a,b]$ 区间上的特征值问题

$$-\mathscr{L}^{\varepsilon}\psi_n^{\varepsilon}=\lambda_n^{\varepsilon}\psi_n^{\varepsilon},\quad n\geq 1.$$

其中，

$$\mathscr{L}^{\varepsilon}=\mathscr{L}^0+\varepsilon\mathscr{L}^1.$$

而且，算子 $\mathscr{L}^0$ （含一定的边界条件）是Regular Sturm-Liouville 算子，且 $\lambda_n^0>0$，每个特征值只有一个线性无关的特征函数。并且假设，特征值和特征函数有如下的渐进展开

$$\lambda_n^{\varepsilon}=\lambda_n^0+\varepsilon\lambda_n^1+o(\varepsilon),\quad \psi_n^{\varepsilon}=\psi_n^0+\varepsilon\psi_n^1+o(\varepsilon).$$

写出 $O(\varepsilon^0)$ 阶和 $O(\varepsilon^1)$ 阶方程。并推导出 ψ_n^1 解的存在条件，并写出 λ_n^1 的表达式。

(c) (10 分) 如果对于某个 k 已知 ψ_k^1 存在。证明

$$\psi_k^1(x)=\sum_{m\geq 1,m\neq k}\frac{\int_a^b\psi_m^0(y)\mathscr{L}^1\psi_k^0(y)dy}{(\lambda_m^0-\lambda_k^0)\int_a^b(\psi_m^0(y))^2dy}\psi_m^0(x)+c\psi_k^0(x).$$

4. (20 分) 当 $\varepsilon\to 0$ 时，考虑下面的代数方程

$$(x-3)^3=24\varepsilon x^2.$$

通过迭代法求出解的渐近展开的前三项，即 $x\sim\delta_0(\varepsilon)x_0+\delta_1(\varepsilon)x_1+\delta_2(\varepsilon)x_2$。当 $\varepsilon\to 0$ 时，在得到解的渐进形式之前，如何判断方程有几个非奇异解和几个奇异解？本题目所有问题均在复数范围内讨论。

5. (10 分) 时刻 t 的人口用随机变量 $X(t)$ 表示，$X(t)$ 只取整数值。记 $P_n(t)$ 是 $X(t)=n$ 的概率，$n=0,1,2,\cdots$。下面我们对出生和死亡的概率做出适当的假设，寻求 $P_n(t)$ 的变化规律，并由此得到 $X(t)$的期望和方差。

若 $X(t)=n$，对于充分小的时间Δt，我们对人口在 t 到 $t+\Delta t$ 的出生和死亡做如下的假设：

- 出生一人的概率与 Δt 成正比，记为 $b_n\Delta t$，出生两人及以上的概率是$o(\Delta t)$。且 b_n 与 n 成正比，记为 $b_n=\lambda n$。
- 不会出现死亡现象。

如果，在初始时刻（t=0）人口为确定的数量n_0 ($n_0>1$)，则 $P_n(t)$ 的初始条件为

$$P_{n_0}(0)=1,\quad P_n(0)=0,\quad n\neq n_0. \tag{0.3}$$

推导 $P_n(t)$ ($n\geq 0$) 满足的方程，并求解 $E(t)=\sum_n nP_n(t)$。

6. (附加题，5 分，但是总分不会超过100分) The noisy leaky integrate and fire model 被用来刻画一个神经元的电压随时间的演化关系

$$\mathrm{d}V(t)=(-V(t)+I(t))\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W(t)$$
$$V(t^-)=V_F\ \text{(Firing Voltage)}\quad V(t^+)=V_R\ \text{(Reset Voltage)}$$

这里，$V_F>V_R$。模型中的第二行表示，一旦神经元的电压达到 V_F，该神经元就会产生瞬间放电，使得电压恢复到 V_R 的值。如果用 $\rho(v,t)$ 表示在 t 时刻一个神经元系统中电压的概率密度函数，试给出它满足的方程和初边值条件。