离散时间马氏链

1. 转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac13 & 0 & \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & \frac13 & 0 & \frac13 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \end{pmatrix}$

(1) 求 $P(X_0=1, X_1=4, X_2=2, X_3=3)$

(2). 求不变分布 π，并验证是可逆分布

(3). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(X_k)$

2. 泊松过程 $\{N_t\}$，参数为 λ

(1) 求 EN_sN_t $(t>s>0)$

(2). 用大数定律证 $P(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda)=1$

3. $X=\{X_t, t\geq 0\}$ 连续时间马氏链，取值空间 $S=\{0,1\}$

$\tau=\inf\{t: X_t\neq X_0\}$，$P(\tau>t|X_0=0)=e^{-\lambda t}$，$P(\tau>t|X_0=1)=e^{-\mu t}$

(1). 求转移速率矩阵 Q，并写出 $P_{00}(t)$，$P_{11}(t)$ 满足的 Kolmogorov 前进方程

(2). 求 $P_{ij}(t)$，$\forall (i,j)\in\{0,1\}\times\{0,1\}$

4. $N=\{N_t\}$ 为参数 λ 的泊松过程，$Y=\{Y_n: n\geq 0\}$ 为与 N 独立的离散时间参数马氏链，取值在 $\mathbb{Z}$ 上，转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$。设 $X=\{X_t: t\geq 0\}$，$X_t=Y_{N_t}$

(1) 证明 X 为时齐马氏链，并求 Q 和 P.

(2). $\pi=(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为 P 的不变分布，证明其为 X 的不变分布

5. $B=\{B_t, t\geq 0\}$ 为0初值一维Brown运动.

$f(t)$ 连续可微. $X_t=\int_0^t s\,dB_s$. $Y_t=\int_0^t f(s)B_s\,dB_s$.

(1). 求 (B_r, B_s, B_t) 的联合密度. $(r<s<t)$.

(2). 证明 $\{tB_{\frac{1}{t}}, t\geq 0\}$ 也是标准布朗运动.

(3). 求 X_t 的分布.

(4). 证明: $Y_t=\frac{1}{2}\left[tB_t^2-\int_0^t (B_s^2+s)\,ds\right]$.