概率论 2017 年期末考试

June 22, 2017

1.（10 分）设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率的近似公式（用正态分布函数表示）.

2.（10 分）设随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$P(X_n=-n)=P(X_n=n)=\frac{1}{2n\log n},\ P(X_n=0)=1-\frac{1}{n\log n}.$$

证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i$ 依概率收敛到 0，但不是几乎处处收敛到 0.

3.（10 分）设汽车保险索赔额是服从指数分布的随机变量. 若在有扣除额 d（d 以下不赔付，d 以上扣除 d）后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少?

4.（15 分）设 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}.$$

令 $Z=(Y-\rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$.

（1）证明 X,Z 独立且均服从 $N(0,1)$ 分布；

（2）求 $(|X|,|Z|)$ 的密度函数；

（3）求 $P(X\geq 0, Y\geq 0)$.

5.（15 分）设 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0\leq x<y\leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求常数 c；

（2）求条件 $X=x, x\in(0,1)$ 下 Y 的条件密度函数；

（3）求 $P(X+Y\leq 1)$.

6.（8 分）设一枚硬币正面朝上的概率为 p，记 X_n 为出现连续 n 次正面时掷硬币的次数，求 $\mathrm{E}X_n$.

7.（8 分）设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布且与 X 同分布，且存在实数 $b>0$ 使得 $\mathrm{E}\mathrm{e}^{bX}<\infty$，证明对任意实数 a 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq na\right) \leq \mathrm{e}^{-nh(a)},$$

其中 $h(x)=\sup_{0\leq\theta\leq b}\{\theta x-\log \mathrm{E}\mathrm{e}^{\theta X}\}$.

8.（10 分）现设有股票价格模型如下. 假设当前时间的股票价格为 s，则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us，以概率 $1-p$ 下跌为 ds. 记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格.

（1）证明存在常数 c，使得 $\frac{1}{n}\log W_n$ 几乎处处收敛到 c，这里 log 为以 10 为底的对数；

（2）给定 $u=1.012,\ d=0.990,\ p=0.4$，给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似值（用正态分布函数表示）.

9.（14 分）称随机变量 X 是对称分布的，若

$$P(X\leq -x)=P(X\geq x),\quad \forall x\geq 0.$$

（1）证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\phi(t)$ 是实值偶函数；

（2）假设存在某个对称分布的随机变量的特征函数为 $\phi(t)=\mathrm{e}^{-\sqrt{|t|}}$. 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布，$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$，求实数列 a_n 使得 S_n/a_n 依分布收敛到一个非常值的随机变量，并给出极限分布.