北京大学数学科学学院 期中试题

2011 — 2012 学年第 1 学期

考试科目: 高等代数 I 考试时间: 2011 年 11 月 14 日

系 别: 学 号:

姓 名:

本试题有正反2页, 共4 道大题, 满分 30 分

本试题中设$\mathbb{P}$为一般的数域, $\mathbb{R}$是实数域, Q是有理数域, $\mathbb{C}$是复数域.

1. (10分)

   (a) (3分) 叙述Eisentein判别法.

   (b) (3分) x^6+x^3+1是$\mathbb{Q}[x]$中的不可约多项式吗? (给出详细理由.)

   (c) (2分) 如果$\alpha \in \mathbb{C}$是x^6+x^3+1的一个根, 求多项式$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$使得$\deg(f(x)) < 6$ 且$\alpha^8+\alpha^5 = f(\alpha)$;

   (d) (1分) 以上(c)中的$f(x)$是唯一的吗? 证明你的结论;

   (e) (1分) 求$g(x) \in \mathbb{Q}[x]$使得$g(\alpha) = (\alpha^8+\alpha^5)^{-1}$.

2. (10 分) 计算下列行列式:

$$\text{(a) (3分)} \begin{vmatrix} 146 & 427 & 327 \\ 914 & 543 & 443 \\ -342 & 671 & 571 \end{vmatrix}$$

$$\text{(b) (3分)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(c) (4分) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{n\times n}$

3. (5 分) 求a,b的取值, 使得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解, 并求出此时它的一般解.

4. (5 分) 设$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{P}^n$是线性无关的向量组, $A = (a_{ij})_{s\times n}$是$\mathbb{P}$上的$s \times n$矩阵. 令:

$$\beta_1 = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots a_{1n}\gamma_n$$

$$\beta_2 = a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots a_{2n}\gamma_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_s = a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots a_{sn}\gamma_n$$

证明: 秩(A)=秩($\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$).