北京大学数学科学学院 2019 级数学分析 II 期末试卷

1. (10 分) 讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1-\sin\frac{1}{n}\right)$的敛散性。

2. (10 分) 讨论积分$\int_1^{+\infty}\sin(x^2)\arctan(x^3)dx$的敛散性（不必考虑绝对收敛性）。

3. (15=5+10 分)

（1）设$g(x)=g(x+T),\forall x\in R(T>0),g(x)\in C[0,T],\int_0^T g(x)dx=0$。证明

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\lambda x)dx=0,\forall[a,b]\subset R$。

（2）设$g(x)=g(x+T),\forall x\in R(T>0),g(x)\in C[0,T],f(x)\in R[a,b]$。证明

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\lambda x)f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx,\forall[a,b]\subset R$。

4. (15 分) 证明：极坐标下曲线$r=r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$（此处$0\le\alpha<\beta\le\pi$）与$\theta=\alpha$和$\theta=\beta$所围的平面图形绕极轴旋转一周所得立体的体积是

$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta$。

5. (15 分) 证明：$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$。

6. (20=10+10 分) 设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛到 *A*，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛到 *B*。

（1）它们的 *Cauchy* 乘积级数$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$是否一定收敛？给出证明或反例。

（2）如果它们的 *Cauchy* 乘积级数$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$收敛到 *C*，是否一定有 *C=AB*？给出证明或反例。

7. (15=5+10 分) 设$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n}\sin nx,x\in R$。

（1）证明$f'(x)$存在，$\forall x\in R$。

（2）存在x_0使得$|f'(x_0)|\ge\frac{e}{\sqrt{2}(e^2-1)}$。