数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 9.　Time: 08:05 am to 09:45 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1、最优控制 (20分)

考虑一个稍微不同于课本中的最优控制问题。我们希望求如下泛函的极值

$$\int_0^1 x(t)+u(t)dt,$$

并满足如下的约束条件

$$\dot{x}=1-u^2, \quad x(0)=1.$$

（a）为了求解该问题，我们不妨考虑一个一般的形式。我们希望求如下的泛函的极值

$$J=\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt$$

使得 $x(t)$，$t\in[0,T]$ 满足约束微分方程和初始条件

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x(t),u(t)), \quad x(0)=x_0.$$

注意，我们没有规定终止条件，但是终止时间 T 是固定的。请用变分法和拉格朗日乘子法推导最优解满足的必要条件。（10分）

（b）利用（a）中的结论求解该具体问题。我们求得的极值是极大值，还是极小值？（5分）

（c）开放性问题。请编造一个场景和一个实际问题，使得该实际问题可以转化成此最优控制问题。从实际的角度看，我们此问题的解可能有什么问题？（5分）

2、边值问题及应用 (30分)

考虑如下的边值问题

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \quad \text{with} \quad u(0)=c_1 \quad \text{and} \quad \frac{du}{dx}(L)=c_2.$$

它由一个 Euler-Lagrange 方程，一个第一类边界条件和一个第二类边界条件组成。

(a) 令 $c_1=c_2=0$，求解此边值问题对应的特征值问题，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \quad \text{with} \quad \phi(0)=0 \quad \text{and} \quad \frac{d\phi}{dx}(L)=0.$$

并利用特征函数展开法求该边值问题的 Green's function。（15分）

(b) 令 $c_1=c_2=0$，利用带 delta function 的定义直接求该边值问题的 Green's function。（10分）

(c) 如果 c_1, c_2 不为 0，那么此边值问题有非齐次的边界条件。对非齐次边值问题的解 $u(x)$ 和齐次边值问题的 Green's function （即小题（b）中的Green's function）使用 Green's formula，并整理得到 u 的表达式。（5分）

3、渐进分析 (30分)

（a）求下面代数方程的所有解的渐近展开的首项

$$\varepsilon x^2 - 2x + \varepsilon = 0.$$

需要有完整的求解过程，直接利用求根公式不得分。（10分）

（b）考虑如下无量纲的初值问题，

$$\begin{cases} u' + (1+\varepsilon x)u = 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

利用展开法求解该问题解的任意阶的渐近展开。（10分）

（c）令 $f(t,x,v)$ 是相空间上的密度函数，该密度函数的时间演化满足如下的动理学方程，

$$\varepsilon \partial_t f + v \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\mathscr{L}(f).$$

其中 $t, x, v \in \mathbb{R}$ 是无量纲的时间、位置、速度坐标， $\varepsilon \ll 1$ 是一个无量纲参数.而右端的碰撞项定义如下

$$\mathscr{L}(f) = \int_{\mathbb{R}} \{M(v)f(w) - M(w)f(v)\} dw,$$

其中 $M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2}$。我们记 $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f dv$，那么易知

$$\mathscr{L}(f) = 0 \quad \text{可推出} \quad f(t,x,v) = \rho(t,x)M(v).$$

我们引入对称-反对称展开

$$r(t,x,v) = \frac{1}{2}[f(t,x,v) + f(t,x,-v)], \quad j(t,x,v) = \frac{1}{2\varepsilon}[f(t,x,v) - f(t,x,-v)].$$

请推导 r 和 j 满足的方程组。对这个方程组，利用展开法形式上推导当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\rho(t,x)$ 的方程。（10分）

4、概率模型（20分）

(a) 在共有 k 个等级的等级结构模型中，我们回顾如下的记号：

- $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \cdots, n_k(t))$，$n_i(t)$ 为第 t 年属于等级 i 的人数。
- $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \cdots, a_k(t))$ 称等级结构，$a_i(t) = \frac{n_i(t)}{N(t)}$ 为第 t 年属于等级 i 的人数比例，$\sum_{i=1}^k a_i(t) = 1$。
- $Q = \{p_{ij}\}_{k\times k}$， p_{ij} 为每年从等级 i 转移至等级 j （的人口在等级 i 人口中占）的比例。
- $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_k)$ 为每年从等级 i 退出（在等级 i 中占）的比例。
- $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_k)$ 为每年调入等级 i 的在总调入人数的比例。

假设总人数不变，请推导矩阵 P，使得

$$\mathbf{a}(t+1) = \mathbf{a}(t)P.$$

并证明矩阵 P 是一个概率转移矩阵。(10分)

（b）假设 $X_t \in \mathbb{R}$ 满足

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t.$$

考虑光滑函数 $g(t,x)$, 由 Ito's formula 计算 $\mathrm{d}g(t, X_t)$。(注意，和讲义不同的是这里的 g 也依赖 t。)

如果对于任意的 $T > 0$，我们有

$$\mathbb{E}g(T, X_T) = \mathbb{E}g(0, X_0)$$

形式上推导函数 $g(t,x)$ 满足的方程。 (10分)