2020–2021 年第一学期

考试科目 数理统计 考试时间 2020 年 11 月 25 日

姓名__________ 学号__________

本试题共 6 道大题，满分 100 分。

1. (14 分) 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_0,\delta)$ 的简单随机样本，μ_0 已知，试求 δ 的最大似然估计和矩估计。它们是无偏估计吗？证明你的结论，并求 Fisher 信息量 $I(\delta)$。

1. (14 points) Suppose $X_1,\dots,X_n \sim^{i.i.d} N(\mu_0,\delta)$, where μ_0 is known. Calculate the Maximum Likelihood estimator and the moment estimator of δ. Are they unbiased estimator? Verify your answer and calculate the fisher information $I(\delta)$.

2. (14 分) 设 $X_1,\dots,X_n$ 独立，且服从双指数分布，即

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\}$$

(1) 求 μ 和 σ 的矩估计 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$

(2) 求证 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 相互独立。

2. (14 points) Suppose $X_1,\dots,X_n$ are independent random samples from double exponential distribution, that is:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\}$$

(1) Deduce the moment estimator $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ of μ and σ

(2) Show that $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}$ are independent.

3. (14 分) 设 $X_1,\dots,X_n$ 服从 $(0,\theta)$, $\theta>0$ 上的均匀分布，且独立。令 $\nu=g(\theta)$，其中 g 为 $(0,\infty)$ 上的可微函数。

(1) 证明 $T(X)=X_{(n)}$ 为完全充分统计量。

(2) 利用 (1) 中的 $T(X)$ 给出 $\nu=g(\theta)$ 的一致最小方差无偏估计量。

3. (14 points) Let $X_1,\dots,X_n$ be i.i.d from the uniform distribution on $(0,\theta)$, $\theta>0$. Let $\nu=g(\theta)$, where g is a differentiable function on $(0,\infty)$.

(1) Prove that $T(X) = X_{(n)}$ is a complete and sufficient statistic.

(2) Use $T(X)$ in (1) to find the UMVUE of $\nu = g(\theta)$.

4. (14 分) 设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，服从指数分布，密度函数为 $p(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x}{\lambda})$(当 $x > 0$)。试求 λ^2 的一致最小方差无偏估计量，找出并证明其渐近分布。

4. (14 points) Suppose $X_1, \ldots, X_n$ are independent and satisfy exponential distribution with density function $p(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x}{\lambda})$(when $x > 0$). Find the UMVUE of λ^2, find and prove its asymptotic distribution.

5. (14 分) 令 $X_1,\ldots,X_n$ 为服从 $N(\theta,1)$ 的独立同分布样本，且 θ_0 为一常数。

(1) 给出 $H_0 : \theta \geq \theta_0$ 和 $H_1 : \theta < \theta_0$ 的水平 α 的一致最大功效检验

(2) 证明不存在 $H_0 : \theta = \theta_0$ 和 $H_1 : \theta \neq \theta_0$ 的水平 α 的一致最大功效检验。

5. (14 points)Let $X_1,\ldots,X_n$ be i.i.d from $N(\theta,1)$, and let θ_0 be a specific value of θ.

(1) Find the UMP, size α, test of $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$;

(2) Show that there does not exist a UMP, size α test of $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

6. (14 分) 随机变量 X 的分布密度可取下面的 $f_0(x)$ 或 $f_1(x)$:

$$f_0(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{当} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} ; \quad f_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{当} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

基于 X 的观测值，对检验问题 $H_0 : f(x) = f_0(x) \leftrightarrow H_1 : f(x) = f_1(x)$，令 $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{若} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$，求 ϕ 的第一类错误和第二类错误的概率。ϕ 是否是最大功效的？是否是无偏的？说明理由。

6. (14 points) Random variable X has density $f_0(x)$ or $f_1(x)$:

$$f_0(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{when } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ; \quad f_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{when } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Based on the value of X, for the hypothesis testing $H_0 : f(x) = f_0(x) \leftrightarrow H_1 : f(x) = f_1(x)$, let $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{when} 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, calculate the probability of Type I error and Type II error of ϕ. Is ϕ UMP test? Is ϕ unbiased? Please verify your answer.

7. (16 分) 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2 未知，试求假设检验问题 $H_0 : \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$ 的水平为 $\alpha(0 < \alpha < 1$, μ_0 已知) 的似然比检验法 (需给出确定临界值的方法)，并证明当 $\mu < \mu_0$ 时，第一类错误的概率不超过 α。

7. (16 points) Suppose $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} N(\mu_0, \sigma^2)$, where σ^2 is unknown, please solve the size $\alpha(0 < \alpha < 1$, and μ_0 is known) hypothesis testing $H_0 : \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$ by likelihood ratio test(need to describe explicitly how to determine the critical value), and prove that when $\mu < \mu_0$, the type I error is no larger than α.