数学分析期末复习

幂级数

- **幂级数的收敛半径**:(利用Weierstrass控制收敛定理)

$$R := \sup\{|x_0|| \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 x_0^n < +\infty\}$$

- **幂级数的一致收敛:**在`[0,R)`一致手链等价于在`R`处收敛
- **阿达马公式**：

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

  证明需要用到Cauchy判别法

  思考:用D'Alembert判别法寻找类似公式(4.1.3)

- **逐项导数\积分:**(Taylor级数)
- 实解析函数(这部分学习请参见《复变函数简明教程》第三章)
- 幂级数的加减乘除复合
- 初等函数的幂级数打开

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\arcsin x = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

- 幂级数的应用:近似计算,高阶导数积分的计算,求解常微分方程
- 矩阵的幂级数:P116

- **Weierstrass逼近定理:**
    - 概率方法(**Bernstein多项式**)
    - 卷积核`f*g(x)`
    - 先一致逼近`|x|`然后用线性组合一致逼近
    $$(1-x^n)^{2^n}\to sgn(\frac{1}{2}-x)$$
- fourier级数模式(fejer核逼近)

附录

- Lagrange余项的Taylor公式
$$R_n(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
- 积分余项的Taylor
$$R_n(f,x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

fourier级数

- 熟练使用**第二积分中值定理,分部积分**
- **平方可积函数:**由于空间`L^2([-pi,pi])`是可分的Hilbert空间，有着Fourier级数，Bessel恒等式什么的都是自然的，此处不再详细展开。

    可分注意用到Fejer核

    ~~对此处不太理解的读者请阅读《泛函分析讲义(1)》《实变函数与泛函分析》中Hilbert空间和L2空间对应章节~~
- **Dirichlet积分**:`g(x)`是一个区间`[0,h]`上的单调函数
$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h g(x)\frac{\sin px}{x}dx=\frac{\pi}{2}g(0^+)$$

    p.s.熟练掌握如下积分:(~~复变证明方法见《复变函数简明教程》5.5~~);当然也可以考虑`f(x)=1`的Fourier级数
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$
- **Riemann-Lebesgue Lemma**
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos pxdx=0$$

证明想法就是用阶梯函数逼近，~~更一般的结论见《实变函数》~~

推广(用于一致收敛性的使用)`g(x)`绝对可积or有届变差

$$S_p := \sup_{a,b\in[A,B]}(|\int_a^b g(t)\sin ptdt|) + \sup_{a,b\in[A,B]}(|\int_a^b g(t)\cos ptdt|)$$

则有

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = 0$$

证明想法:用多项式f平均逼近g

Col:

$$a_n(f), b_n(f) \to 0$$

- 有关`a_n,b_n`你需要知道:

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = -\frac{a_n(f')}{n}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos xdx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+\frac{\pi}{n}))\cos nxdx$$

  - 灵机应变使用**积分第二中值定理**
  - `|a_n|,|b_n|`的级数收敛的话`S_n(f)`就一直收敛到`f`

- **Fourier Series**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$$

p.s.这只是一个形式的记号

- Fourier 级数的部分和

$$S_n(x)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)dy = f * D_n$$

其中

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$$

- 在用`R-L Lemma`可以证明得到`Riemann局部化定理`
- 一般讨论**Fourier级数的收敛**有两种:
  - L-连续
  - 有届变差(本质上为分段单调)

- 用到的引理基本就下面两条，请把握证明:
  - `\phi(x)`Riemann可积`\phi(0+)`存在,并且

$$\int_0^\delta |\frac{\phi(t)-\phi(0^+)}{t}|dt < +\infty$$

    则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta \phi(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \frac{\pi\phi(0^+)}{2}$$

- 有关单调函数:
  - `\phi(x)`单调,那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta \phi(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \frac{\pi\phi(0^+)}{2}$$

- **Fourier级数的平均收敛、Fejer核**

$$\sigma_n(f,x) = \frac{\sum_{i=0}^n S_n(f,x)}{n+1}$$
$$= \frac{\pi}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

  一致收敛到`f(x)`

- **Fourier级数的一致收敛**:如果

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|) < +\infty$$

  那么一致收敛

  Col:`f'`平方可积,那么Fourier级数一致收敛

- **Fourier级数的逐项求导积分**
  - 逐项求导:

    `f`可导`f'`绝对可以积
  - 逐项积分:

    `f`平方可积(**证明重要**)

- **其他形式的Fourier级数:**详细写这部分的书简直脑子有病就说的是伍爷爷,小江班级的熟悉下**复数形式**也不错

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}, c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx$$

$$f(x) = \frac{a0}{2} + \sum n = 1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

如果你复习的足够好了，你可以如此挑战自我：

- 用Fourier级数来计算级数

期中考试前考试内容：

函数序列&函数项级数

思考： 本章的证明中哪里用到了**闭区间(紧集)**条件

一致收敛

1. 函数序列的极限的几个反例:破坏连续性,可积函数的不完备性(Dirichlet函数),积分值的不收敛(`2(n+1)x(1-x^2)^n`),可导性的破坏
2. 基本定理**Thm 3.2.4**`经典的三分法的证明`及其证明;Din Thm
3. 等度连续**说明对每一个单极限而言是一致收敛的**
4. **导数和积分的传递**难点在求导的传递**(开区间呢)**，本质上都是基本定理的推论
5. **Dini Thm**

一致收敛的判别

1. Cauchy准则**闭区间可以改为开区间**;Abel,Dirchlet**(开区间呢)** `证明重要` 还是用Abel不等式吧，不要凑时尚用基本定理（白眼）
2. Weiestrass控制判别法(M值判别法);计算简单但是不强(只能判别绝对收敛的级数)

瞎bb:对于连续函数而言Weiestrass判别法也是绝对收敛＋一致收敛的最强的判别法吧