2024 春 yjz 数学分析 2 期末考试

Moon Rabit 回忆

1. 请讨论函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx\left(1-x\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nx\left(1-x\right)^{n^3}$$

在 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

2. 已知幂级数

$$B\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n!\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

1. 求收敛半径 R.
2. 证明: 该函数在 $(R,-R)$ 上满足微分方程 $xy''+y'+xy=0$.

3. 设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$

1. 将 $f\left(x\right)$ 在 0 处展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
2. 求该幂级数的收敛半径和收敛域.
3. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

4. 设函数

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^nx)}{n!}$$

1. 证明：$f\left(x\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 C^{∞} 函数.
2. 求 $f\left(x\right)$ 的 Maclaurin 级数.
3. 求其 Maclaurin 级数的收敛半径.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{4n-1}x^{2n}$ 的和函数.
(提示：可以使用 $\int\frac{u^2}{1-u^4}du=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)+C$)

6. 设函数

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & 0\leq x\leq 1.\\ 0 & 1<x\leq 2.\end{cases}$$

求 $f\left(x\right)$ 以 2 为周期时的 Fourier 级数及其和函数, 并据此求出 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

7. 设函数列 $\{f_n\left(x\right)\}$ 在 (a,b) 上一致收敛，且 $f_n(x)$ 连续，
证明：函数列 $\{f_n\left(x\right)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

8. 称函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ **有界收敛**，若其逐点收敛，且存在 $M>0$，使得其部分和满足 $\left|\sum_{k=1}^{n}u_k\left(x\right)\right|<M$ 在 $[a,b]$ 恒成立.
现已知 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上有界收敛, $u_n\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$, 且存在 $c\in(a,b)$, 使得对任意 $\delta>0(\delta<min\left\{c-a,b-c\right\})$，都有 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(x\right)$ 在 $[a,c-\delta)$ 和 $(c+\delta,b]$ 上一致收敛，试证明：

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(x\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n\left(x\right)$$

(全卷完)