

# 北京大学数学科学学院期中试题

2012 - 2013 学年 第二学期

考试科目: 复变函数 考试时间: 13 年 05 月 05 日

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (15 分) 判断下列命题的正确性 (不要说明理由)
  - (1) 设  $f(z)$  为有界区域  $D$  内的非常数解析函数, 则  $f(z)$  在  $D$  内只有有限多个零点;
  - (2) 设  $f(z)$  为区域  $D$  内的非常数解析函数, 则  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内必不解析;
  - (3)  $\sqrt{z}$  在  $\mathbb{C}$  内挖掉正虚轴的区域必存在单值解析分支.
2. (10') 设  $f(z) = u(z) + iv(z)$  在区域  $D$  解析并且对于  $\forall z \in D$  成立  $u^2 + \sin^2 v = 1$ . 证明  $f(z)$  必为常数函数.
3. (15 分) 计算积分
  - (1)  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^5(z-2)^2}$ ;
  - (2)  $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{\bar{z}}$ ;
  - (3)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{\bar{z}-3}$ ;
4. (10 分) 求出  $\sqrt[3]{(z-1)^2(z-2)}$  的支点并且给出它的一个存在单值分支的最大区域.
5. (10 分) 证明代数基本定理.
6. (10 分) 叙述并证明 Schwarz 引理.
7. (10 分) 求出上半平面到单位圆盘所有的分式线性变换.
8. (10 分) 设  $f(z)$  是一个非常数整函数, 令  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ , 证明  $M(r)$  是  $(0, +\infty)$  内的严格递增函数.
9. (10 分) 设  $f(z)$  是一个超越整函数, 证明: 必存在复平面内的一条直线  $\Gamma$ , 使得对于  $\forall z \in \Gamma$  及任意的正整数  $n$  成立  $f^{(n)}(z) \neq 0$ .