

# 概率论 2017 秋季期末试题

任艳霞教授

2017.06

1、某药物的有效率是 80%，现对任选的  $N$  位病人试用此药。试求此药物对 85% 以上的病人有效的概率。(结果用标准正态分布  $\Phi(x)$  表示)。

2、相互独立的随机变量列  $X_n$  的分布为  $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n \ln n}$ ,  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}$ 。证明  $X_n$  依概率收敛到 0，但不几乎处处收敛到 0。

3、汽车的保险索赔额是随机变量，服从指数分布。在有了扣除额  $d$  (即  $d$  以下不赔付， $d$  以上则减去  $d$ ) 之后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？

4、随机变量  $X$ 、 $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)},$$

随机变量  $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$ 。

(1) 证明  $X$ 、 $Z$  相互独立；

(2) 求  $|X|$ 、 $|Z|$  的联合密度；

(3) 求  $P(X > 0, Y > 0)$ .

5、随机变量  $X$ 、 $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \geq x; \\ 0 & others. \end{cases}$$

(1) 求常数  $c$ ;

(2) 求  $X = x$  条件下  $Y$  的条件密度；

(3) 求  $P(X + Y \leq 1)$ .

6、设抛一枚硬币正面向上的概率为  $p$ ，重复抛硬币，设第一次出现连续  $n$  次抛出正面时的抛硬币总次数为随机变量  $X_n$ ，求  $X_n$  的数学期望。

7、一道不等式证明题，要用到 Markov 不等式。

8、初始股价为  $p$ 。已知一次交易后股价以概率  $p$  增长为原先的  $u$  倍，以概率  $1 - p$  减少为原先的  $d$  倍。设  $n$  次交易后的股价为随机变量  $X_n$ , 问:

(1)  $\frac{\ln X_n}{n}$  几乎处处收敛到什么?

(2) 估计  $P(0.98np < X_n < 1.11np)$  (结果用标准正态分布  $\Phi(x)$  表示) . (具体  $n, p, u, d$  是多少忘记了)

9、 $X_n$  是一列独立同分布的随机变量,  $X_n$  二阶矩存在。若  $\forall x \in \mathbb{R}^1, P(X \leq -x) = P(X \geq x)$ , 则称  $X$  的分布对称。

(1) 证明: 分布函数对称的充要条件是它的特征函数是实值偶函数;

(2) 已知  $X_n$  的特征函数 (具体忘了), 设  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , 试给出一实数列  $a_n$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n}$  趋于一个非零常量, 并给出极限分布。