

# 2014-2015 学年高等代数 (I) 期中考试试题

2014.11.18

注: 本试题为回忆版本, 具体叙述可能与原问题略有差别.

1. (15 分) 求  $A^{-1}B$  的值, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (15 分) 设  $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 4)'$ . 求实数域上的非零 4 维列向量  $\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ , 使得  $\vec{\alpha}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  构成正交向量组.
3. (15 分) 求出所有  $X \in M_2(\mathbb{Q})$ , 使得  $X^2 + X + 1 = 0$ .
4. (15 分) 设正整数  $k \geq 2$ .  $A_i \in M_n(\mathbb{R}), i = 1, 2, \dots, k$ . 已知  $\sum_{i=1}^k A_i^2 = 0$ . 证明  $A_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$ .
5. (10 分) 构造两个方阵  $A, B$  使得  $A + B \neq 0, A - B \neq 0$ , 但是  $A^2 - B^2 = 0$ .
6. (10 分) 证明方阵  $A$  为可逆矩阵当且仅当  $A$  不是右零因子.(所谓  $A$  是右零因子, 即存在非零方阵  $B$ , 使得  $BA = 0$ .)
7. (10 分) 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 且对任何  $X \in M_n(\mathbb{R})$ , 均有  $AXB \in M_n(\mathbb{R})$ . 证明存在  $A_0, B_0 \in M_n(\mathbb{R})$ , 使得对任何  $X \in M_n(\mathbb{R})$ , 均有  $AXB = A_0XB_0$ .
8. (10 分) 设  $A, B, P$  是数域  $\mathbb{K}$  上的方阵. 已知  $P^3 = 0, P^2 \neq 0$ , 且满足  $(A - B)P = P(A - B), BP - PB = 2(A - B)$ . 试构造可逆矩阵  $Q$ , 使得  $AQ = QB$ .