数学模型　期中考试（2）参考答案

Exam Date: June 9.　Time: 8:05 pm to 09:45 pm.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1、最优控制 (20分)

（a）变分得

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'}\right)=0,\quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}=0,\quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'}(T)=0.$$

（b）求解得

$$u=\frac{1}{2(1-t)},\quad x=t-\frac{1}{4(1-t)}+\frac{5}{4}.$$

是极大值。

（c）合理就行。可能的问题是状态函数 x 和控制函数 u 在 $t=1$时发散。

2、边值问题及应用 (30分)

(a) 直接求解得

$$\lambda_n=\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}\right]^2,\quad \phi_n=c\sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

$$G(x,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n\int_a^b\phi_n^2(x')\,dx'}.$$

(b)

$$G(x,x')=\begin{cases}-x, & 0<x<x',\\ -x', & x'<x<L.\end{cases}$$

(c) 由 Green's formula

$$\int_0^L u(x)\mathscr{L}G(x,x')-G(x,x')\mathscr{L}u(x)\,dx=(uG'-Gu')|_0^L,$$

利用Green's function的对称性，整理得

$$u(x')=\int_0^L G(x',x)f(x)\,dx+c_2x'+c_1.$$

3、渐进分析 (30分)

（a）

$$x_A\sim\frac{\varepsilon}{2},\quad x_B\sim\frac{2}{\varepsilon}.$$

（b）直接展开得

$$P_0:\begin{cases} u_0'+u_0=0 \\ u_0(0)=1, \end{cases}\qquad P_n:\begin{cases} u_n'+u_n=-xu_{n-1}, \\ u_n(0)=0 \end{cases}\qquad n\geqslant 1$$

求解得

$$u_0=e^{-x},$$
$$u_n(x)=-e^{-x}\int_0^x \xi e^{\xi}u_{n-1}(\xi)d\xi,\quad n=1,2,\ldots.$$

再递推知

$$u_n(x)=-e^{-x}\int_0^x \xi\left[\frac{(-1)^{n-1}\xi^{2(n-1)}}{2^{n-1}(n-1)!}\right]d\xi=\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}e^{-x}.$$

于是得到

$$u(x,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}e^{-x}\varepsilon^n.$$

（c）直接计算得

$$\partial_t r+v\partial_x j=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathscr{L}(r)$$
$$\partial_t j+\frac{1}{\varepsilon^2}v\partial_x r=-\frac{1}{\varepsilon^2}j$$

对 r 的方程关于 v 积分，再利用渐进展开得

$$\rho_t=D\rho_{xx},\quad D=\int_{\mathbb{R}}v^2M(v)dv.$$

4、概率模型（20分）

（a）参考讲义。

（b）由 Ito's lemma

$$\begin{aligned}\mathrm{d}g(t,X_t)&=\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t+\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial x}\,\mathrm{d}X_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial x^2}\sigma(X_t)^2\,\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t}+\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial x}b(X_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial x^2}\sigma(X_t)^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial x}\sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t\end{aligned}$$

取期望，得

$$\mathrm{d}\mathbb{E}g(t,X_t)=\mathbb{E}\left(\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t}+\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial x}b(X_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,X_t)}{\partial x^2}\sigma(X_t)^2\right)\mathrm{d}t$$

所以，由条件知，g需要满足

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)+\frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(t,x)=0.$$