数学模型　期中考试（1）

Exam Date: April 8.　Time: 03:15 pm to 04:55 pm.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

1. 化学反应模型。考虑可逆反应 (reversible transform)

$$A \xrightarrow{k_1} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{k_2} A.$$

用 $A(t)$ $B(t)$ 分别表示物质A，B的浓度，它们满足初值条件

$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0.$$

（a）（10分）写出 $A(t)$ $B(t)$ 满足的变化率模型，并求出该系统的平衡解 $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbb{R}^2$。

（b）（10分）证明当 $x > 0$ 时，$\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$，并用它来证明，$t \geq 0$时

$$A \ln\left(\frac{A}{\bar{A}}\right) + B \ln\left(\frac{B}{\bar{B}}\right) \geq 0.$$

2. （20分）稳定性分析的应用。对于依赖于参数 r 的一维系统，

$$\dot{x} = x - x^3 - r.$$

讨论不同参数取值的时候，系统的平衡点的个数和稳定性（不需要具体找到平衡点的位置，只需要知道个数和稳定性）。r取什么值时，会出现分岔现象（平衡点的个数和性质会随着参数的变化而发生了改变）？

3. 一阶波方程和特征线法。

（a）（10分）考虑一维的Burgers' equation

$$u_t + u u_x = 0.$$

如果已知

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\dfrac{x}{2}, & -2 < x < 0 \\ 1, & x < -2. \end{cases}$$

对于$0 < t < 2$，利用特征线法求方程的解，并画出$u(x,2)$。

（b）（10分）考虑信号传送问题。设 $\rho(x,t)$ $(x \geq 0,\, t \geq 0)$ 为信号的强度，它满足如下的初边值问题

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (x+4)\frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\rho.$$

$$\rho(0,t)=1,\quad \rho(x,0)=0.$$

也就是说，在 $t=0$ 时刻，右半轴 $(x\geq 0)$ 没有任何信号，当 $t\geq 0$ 时，位于 $x=0$ 处的信号站开始释放信号。如果，一个接收站的位置为 $\tilde{x}=12$，请问什么时候这个接收站开始收到信号，此时信号的强度是多少？

4. 输运模型。考虑空间一维的可压缩流体，$\rho(x,t)$ 表示它的密度。设一段流体的物质滴（fluid/material blob）在 $t=0$ 时刻占据了区间 $1\leq x\leq 2$，而且此时在这个区间上，$\rho(x,0)=1$。这个物质滴的密度的时间演化满足如下的质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0.$$

这里，（Eulerian）速度场 $v(x,t)=x^2e^{-3t}$。

（a）（10分）将方程改写成半线性波方程的形式，设这个物质滴在 $t\geq 0$ 时占据的区间为 $x_1(t)\leq x\leq x_2(t)$，求 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。

（b）（10分）这个物质滴的总质量可以表示为

$$m(t)=\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho(x,t)dx.$$

推导此时 Reynolds Transport Theorem 的具体形式，并用它来证明

$$\frac{d}{dt}m(t)=0.$$

5. 变分法的应用。对于一个一维的概率密度函数 $\rho(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$，假设 ρ 充分光滑，并且在有界的区域内不为 0。它的能量泛函由下式给出

$$E=\int_{\mathbb{R}}H(\rho(x))dx+\int_{\mathbb{R}}V(x)\rho(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}W(|x-y|)\rho(x)\rho(y)dxdy.$$

这三项分别表示，内能，势能和相互作用能。H,V,W 均充分光滑。

（a）（10分）令 $\xi=\frac{\delta E}{\delta\rho}$, 利用泛函导数的定义求 ξ.

（b）（10分）现在考虑随时间演化的概率密度函数 $\rho(x,t)\geq 0,\ x\in\mathbb{R},\ t\geq 0$, 仍假设 ρ 充分光滑，并且当 $t\geq 0$ 时，它在有界的区域内不为 0。它时间演化方程由下面的连续性方程给出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

这里的 ξ 由（a）中定义。这时，能量泛函也变成了时间的一元函数

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}}H(\rho(x,t))dx+\int_{\mathbb{R}}V(x)\rho(x,t)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}W(|x-y|)\rho(x,t)\rho(y,t)dxdy.$$

证明：

$$\frac{d}{dt}E(t)\leq 0,\quad \forall t\geq 0.$$