几何学期末考试参考答案与评分标准

考试日期: 2010 年 1 月 7 日。**考试时间**: 2 小时。

题 1 (共 20 分) 设 Γ 是平面 Σ 上一个正五边形。回答以下问题并说明理由。

(i) 有多少平面 Σ 上非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ? (10 分)

(ii) 有多少空间中非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ? (10 分)

• 解：(i) 的答案是 9 个，(ii) 的答案是 19 个。注意等距变换必把顶点映为顶点，且保持相邻顶点仍为相邻顶点。若设顶点 $ABCDE$ 顺序排列，则变换后要么顺时针要么逆时针，每种情形下又有 5 种可能性，各顶点位置只差一个 72 度角的整数倍的旋转。扣除恒同变换，满足要求的平面等距共有 9 个。当考虑空间等距时，设它在平面 Σ 上的作用效果给定，为 10 个平面等距变换之一，则不同空间等距之间只差关于平面 Σ 的反射（可看在平面 Σ 的某单位法向上的作用效果，或看 $\phi_1^{-1}\circ\phi_2$ 以整个平面 Σ 为不动点集），故共有 20 个，扣除恒同之后有 19 个。 （若按不同类型变换来穷举，则 (i) 中有 4 个旋转和 5 个反射，(ii) 中有 4 个绕过 O 点的 Σ 垂线的旋转，5 个绕 Γ 不同对称轴的旋转，5 个关于对称平面（均垂直于 Σ 且过 Γ 中心）的反射，1 个关于 Σ 的平面反射，以及 4 个“旋转反射”。

• 评分标准：*给出正确答案且有适当讨论，无论详略均不扣分。很多人试图通过穷举不同类型空间等距变换的个数来做，但很容易出错。(ii) 小题结论为 14 个或 15 个时，都遗漏了一个情形，扣 3 分。为 9 个，则往往是遗漏了两种情形，且不理解题意，扣 6 分。数出 10 个的，往往是只增加了 1 个关于 Σ 的平面反射，扣 5 分。*

题 2 (共 20 分) 设平面 Σ 在单位直角坐标系下的方程为 $ax+by+cz+d=0$.

(i) 设 X' 是平面反射 Σ 下点 X 的像点，n 是一个垂直于平面 Σ 的单位法向量，X_0 是平面 Σ 上一点。证明 $X'=X-2((X-X_0)\cdot n)n$. (10 分)

(ii) 求平面反射 Σ 的坐标表示（或矩阵表示）。(10 分)

• 解：(i) 只需指出，$X'-X$ 必须垂直于平面 Σ，故平行于 n，可设 $X'-X=\lambda n$。又 X',X 的中点 $\frac{1}{2}(X+X')$ 必在平面 Σ 上，故 $\frac{1}{2}(X+X')-X_0$ 垂直于 n。由此得方程 $0=(X'+X-2X_0)\cdot n=\lambda+2(X-X_0)\cdot n$，推出欲证结论。

(ii) 设 $X=(x,y,z), X'=(x',y',z'), \triangle=a^2+b^2+c^2$，则结果为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{2d}{\triangle}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

• 评分标准：*(ii) 未合并同类项扣 1 分；系数差简单倍数扣 2 分，漏掉 $\triangle$ 因子扣 4 分，未把 X_0 分量替换掉的扣 2-3 分。有些错误如把“向量乘法”弄错，或算内积时加绝对值号，都很不应该。*

题 3 (10 分) 将一个不透明的实心椭球放在一个水平平面 Σ 上。在平面 Σ 上方放置位于椭球外的点光源 Q，它照射椭球并在平面 Σ 上形成一个阴影区域。设该区域的边界曲线为 Γ。问：Γ 是何种曲线？请证明你的论断。

• 证：作一个空间仿射变换，将椭球映为圆球，此时光线依然为直线，与椭球相切的性质也保持不变，对应过来映为圆锥，则它被对应平面截得的曲线为非退化圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线一支），由于此性质是仿射不变的，故原截线也是非退化圆锥曲线。另一种看法类似，但指出球面情形切点轨迹为圆，故椭球上被照亮的区域边界是椭圆（平面曲线），中心投影下在 Σ 上的像为椭圆、抛物线、双曲线一支，视 Q 点是否高于椭球最高点而定。

• 评分标准：只需简要说明理由，不必重新证明课上结论。

题 4 （共 15 分）设 Γ 为平面上一条双曲线。请证明：

(i) 平行弦族的中点落在同一条直线上；(10 分）

(ii) 任给 Γ 上的两点 P 和 Q, 存在平面仿射变换 ϕ, 它将 Γ 映成 Γ, 并将 P 变成 Q. (5 分）

• 证：(i) 是作业中出现过的题目。取平行直线族的方程，与 Γ 标准方程联立求解弦中点坐标即得证。或用更高等的方法，将平行线族看作过某无穷远点 p_∞ 的直线族，则弦中点轨迹为 p_∞ 相对 Γ 的极线，自然是在一条直线上。(ii) 只需利用上题结论，由于与 PQ 平行的弦族中点在某直线 l 上，构造平面上的仿射镜像对称变换为：对任一点 A，过 A 引 PQ 平行线，与 l 相交并延长一倍，得 A' 点为变换的像点。此变换已在习题课上讨论过，指出为仿射变换。若用仿射标架可以写出简单的坐标表示。在此变换下，双曲线 Γ 显然保持不变，而 P 变成 Q。另一种做法是：根据双曲线彼此仿射等价，只需考虑一种双曲线 $xy=1$，仿射变换 $x \to \frac{a}{b}x$, $y \to \frac{b}{a}y$ 明显保持该双曲线不变，而可以把 $P(b, \frac{1}{b})$ 映到 $Q(a, \frac{1}{a})$.

• 评分标准：*(i)* 用坐标法计算有小错的，一般扣 *2* 分；用射影变换却将平行弦中点对应于圆心的，扣 *8* 分左右。*(ii)* 构造变换时对错切变换说不清的，扣 *1-2* 分；把 P 点映为顶点等做法未说清的，扣 *1-2* 分。其它某些做法等于断言了等价命题的成立，要扣 *3-4* 分，例如说双曲线为仿射齐性，或说 PQ 位置可经仿射变换变为关于对称轴对称，而 Γ 不变。

题 5 （15 分）设 $ABCD$ 是处于一般位置的四点，BC 交 AD 于 X, CA 交 BD 于 Y, AB 交 CD 于 Z, 直线 BC、BD、CD 分别交 YZ、ZX、XY 于 L、M、N。请证明: L、M、N 三点共线。

• 证：最简单的办法是看出来 $\triangle BCD$ 和 $\triangle YZX$ 的对应顶点连线共点 A，由德沙格定理知对应边交点 L、M、N 三点共线。证法二是把四边形 $ABCD$ 射影等价于一个正方形或矩形，则结论由平行线性质易证。证法三用坐标法，这里不细写。

• 评分标准：坐标法计算有小错，不影响大局的，扣 *2-3* 分；很多人乱用配极三角形来做，一般扣 *12* 分；中心投影法但图形出错的，扣 *5* 分左右；用德沙格定理证明但搞错三角形对应关系的，扣 *10* 分。

题 6 （10 分）设 $\{C_1, C_2\}$ 为两圆周，切于点 p; $\{C_1^*, C_2^*\}$ 是另一对圆周，切于点 p^*。它们均在同一平面上。请证明：存在 Möbius 变换，它将 C_1 变成 C_1^*, C_2 变成 C_2^*.

• 证：只需取反演 ψ, 反演中心在点 p, 则反演后 $\{C_1, C_2\}$ 变为平行直线。取反演 ψ^*, 反演中心在点 p^*, 则反演后 $\{C_1^*, C_2^*\}$ 也变为平行直线。两对平行直

线间显然可以通过一个等距变换加相似合同，记其为 ϕ，则 $(\psi^*)^{-1}\circ\phi\circ\psi$ 即为所求。

• 评分标准：

题 7 （10 分）任意给定射影平面上一非退化圆锥曲线 Γ 和一直线 ℓ，其中 ℓ 可能在 Γ 外侧，也可能与 Γ 相切。对于这两种情况，分别讨论以下问题：有多少射影变换，它将 Γ 映为 Γ，ℓ 映为 ℓ?（是否存在？是否唯一？如果不唯一，有多少？有多大的自由度？请说明理由。）

• 答：射影平面上一非退化圆锥曲线 Γ 和一不相交直线 ℓ 可射影等价于一个圆周和无穷远直线，故只需对此情形讨论，一般情形等价于此。保持无穷远直线不变的射影变换为仿射变换，又保持一个圆周不变，则必定是等距，从而是圆周绕圆心的旋转或对某直径的反射，显然存在，不唯一，有一个自由度（1 维变换群），另外可差一“反射”。

射影平面上一非退化圆锥曲线 Γ 和一相切直线 ℓ，可射影等价于一条抛物线和无穷远直线，故只需对此情形讨论，一般情形等价于此。保持无穷远直线不变的射影变换为仿射变换，又抛物线可进一步等价于方程为 $y=x^2$ 的特殊一条。对于它，存在仿射变换将顶点 $(0,0)$ 变到抛物线上任意其它一点，理由同第 4 题。而保持顶点 $(0,0)$ 不动的仿射变换也有一个自由度，即群 $(x,y)\to(\lambda x,\lambda^2 y)$，还可差关于 y 轴的反射。故答案是存在，不唯一，有两个自由度。

此题中没提 ℓ 与 Γ 相交的情形。方法类似，不过是射影等价于一双曲线 $xy=1$ 和无穷远直线。讨论保持 $xy=1$ 不变的仿射变换，其结论与前面圆周情形类似，也是有一个自由度（1 维变换群 $x\to\lambda x,\ y\to\frac{1}{\lambda}y$），另外可差一“反射”。

另外，本题也可用圆锥曲线的射影方程来做，此时对应的三阶矩阵可设为对角阵 $diag(1,1,-1)$，对应单位圆 $x^2+y^2=1$；直线齐次坐标可设 3 种特殊情形，分别为 $<0,1,0>,<0,1,-1>,<0,1,-2>$，对应 ℓ 与 Γ 相交、相切和相离的三种典型位置，讨论得结论。

课上没有谈到的最本质的一件事实：保持一条圆锥曲线不变的射影变换群，同构于双曲圆盘的保长变换群，也是保持单位圆不动的 Moebius 变换群，它允许的自由度，恰好是可以把单位圆周上的任意三点映到指定的三点，且不能更多。我们原题中虽然用到的是 Γ 和直线 ℓ，但也可以转化为看 Γ 及 ℓ 的极点 p_ℓ 保持不变。则 p_ℓ 在 Γ 外侧时，极线 ℓ 与 Γ 的两个交点几乎就是不动点（顶多可以对调），故只剩下第三个点的像点还可以任意定做，有一个自由度。ℓ 与 Γ 相切时，相当于附加要求 p_ℓ 在 Γ 上保持不动，故可以任意定作其它两点的像点，在 Γ 上恰好还各有一个自由度。

• 评分标准：