2020 年秋季学期几何学期末考试 解答与评分标准

考试时间：2021 年 1 月 22 日 8:30-10:30

题 1 （10 分） 平面上某一仿射标架原点在 O，过点 O 的四条相异直线 l_i 的方向向量为 $(a_i, b_i), i = 1, 2, 3, 4$。将它们排列为 2×4 矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. 试用这个矩阵的若干二阶子式来表达交比 (l_1, l_2, l_3, l_4)，并给出推导过程。

提示 按照尤书 237 页的定义，求得交比为

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}$$

（形式不唯一）。过程略。

题 2 （15 分） 椭圆中心 O 和它上面两点 A, B 满足：OA, OB 两向量构成一对共轭方向。试证明 $|OA \times OB|$（表示 OA, OB 张成的有向面积的绝对值）和 $|OA|^2 + |OB|^2$ 是这个椭圆的两个不变量（只与椭圆有关；与共轭方向的选取无关）。

提示 记椭圆的半长轴和半短轴分别为 a, b。可以用各种方法求得

$$|OA \times OB| = ab, \quad |OA|^2 + |OB|^2 = a^2 + b^2$$

与共轭方向的选取无关。过程略。

题 3 （20 分） (1) 证明：用一族平行平面（与 z 轴不平行，也不与 xy 平面平行）去截旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$，所得的截线是彼此相似的椭圆（即长短轴之比相等）。

(2) 证明：这族椭圆各自的中心落在同一条直线上，而且这条直线与旋转轴 z 轴平行。

解 (1) 法一（概要）：联立旋转抛物面方程与这族平面方程（消去 z），得到截线在 xOy 平面的投影曲线方程，进而得出这族投影曲线是中心相同的圆。由仿射映射不改变二次曲线类型，知原先的截线是椭圆。再通过简单的计算知每个椭圆的长短轴之比都等于 $\dfrac{1}{\cos\theta}$，其中 θ 是截平面与 xOy 平面的夹角，与平行平面的选取无关，这说明截线是彼此相似的椭圆。

法二（概要）：取单位正交标架 $\{O; e_1', e_2', e_3'\}$，使得这组平行平面的方程为 $z' = c$。在新坐标系下联立二次曲面方程与这族平面方程（此时得到的就是截线方程），计算知这族曲线是满足 $I_2 > 0$ 的二次曲线，并且二次项系数与 c 无关。这说明截线是彼此相似的椭圆。

(2) 这由法一中投影曲线的中心相同，或是法二的计算结果立即得到。过程略。

评分标准 证明截线是椭圆 10 分，证明这些椭圆彼此相似 5 分，证明椭圆中心共线 5 分。

用法一者，如果只是简单地说“因为平行投影在这族平面上看效果相同，所以椭圆彼此相似”，或是说“平行投影的效果只和夹角有关”但并未给出必要的计算过程，会被扣掉 3 分。

题 4 （15 分） 设 $ABCD$ 是非退化圆锥曲线的一个内接四边形的四点。记 M 是 A 和 C 处切线的交点，N 是 B 和 D 处切线的交点，P 是边 AB 和 CD 的交点，Q 是边 AD 和 BC 的交点。证明：M, N, P, Q 共线。

证明 对退化的六边形 $AABCCD$, $ABBCDD$ 分别使用 Pascal 定理即证。

题 5 （25 分） 判断命题正误。每道 5 分，判断正确得 2 分，简要说清理由得 3 分。

1）射影平面上的任何一个射影变换，必定有至少一个不动点。

解 $\boxed{\text{正确}}$。在射影坐标系下，任一射影变换 ϕ 形如 $[v] \to [Av]$，其中 A 是 3 阶可逆矩阵，故 A 有非零实特征值 λ。取 A 的属于特征值 λ 的特征向量 v，则 $[v]$ 即为 ϕ 的一个不动点。

评分标准 极少数同学未说矩阵阶数（$n = 3$ 为奇数），或将特征向量写成“$(A - I)v = 0$”，扣 2 分。

2）射影平面上把一条双曲线映为自身的全体射影变换，有三个自由度。

解 $\boxed{\text{正确}}$。

法一：根据课上讨论结果，保持一个圆周（圆盘）不变的射影变换，有三个自由度。而双曲线与圆射影等价，因此结论一致。

法二：取这条双曲线上一般位置的四点 A_1, A_2, A_3, A_4。一方面，若射影变换 f 将双曲线映为自身，则 $f(A_i)(i = 1, 2, 3, 4)$ 在双曲线上取值，且当 $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$ 确定后，由 Steiner 定理给出的双曲线上四点的交比（见作业 12 的第 7 题）不变，于是 $f(A_4)$ 随之确定，进而 f 也完全确定，这说明把一条双曲线映为自身的全体射影变换的自由度不超过 3。另一方面，只要 $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$ 是双曲线上一般位置的三点，则由上述约束条件得到的射影变换 f 均把双曲线映为自身，这说明把一条双曲线映为自身的全体射影变换的自由度不小于 3。

评分标准 如果直接用射影变换全体自由度 8 减去双曲线全体自由度 5 得到正确结果 3，但未给出有效论证，会被扣掉 2 分，理由见注。

注 光说自由度为 $8 - 5 = 3$（$\mathrm{DOF}(\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)) = 8$，而 5 点决定双曲线），这样不够！这是因为 $8 - 5$ 本质上可视为按照群作用 (group action) 的观点所得到的结论。事实上，考虑变换群 $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ 在射影平面上全体非退化二次曲线的集合上的群作用。注意到这个群作用是可迁 (transitive) 的（即对任意非退化二次曲线 Γ_1, Γ_2，均存在 $\phi \in \mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$，使得 $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$）。对双曲线 Γ，记 Γ 在此群作用下的轨道 (orbit) 和稳定化子 (stabilizer) 分别为 $\mathrm{Orb}(\Gamma), \mathrm{Stab}(\Gamma)$，则有双射

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)/\,\mathrm{Stab}(\Gamma) &\to \mathrm{Orb}(\Gamma), \\
\phi\,\mathrm{Stab}(\Gamma) &\mapsto \phi(\Gamma).
\end{aligned}
$$

（这称为轨道-稳定化子定理 (orbit-stabilizer theorem)）。借助这个双射，再使用 $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ 的自由度是 8 而 $\mathrm{Orb}(\Gamma)$（由可迁性知它就是全体非退化二次曲线的集合）的自由度是 5，才能得出 $\mathrm{Stab}(\Gamma)$（即射影平面上把双曲线 Γ 映为自身的全体射影变换构成的集合（事实上构成群））的自由度是 3。但是射影变换群在全体双曲线的集合上并没有合适的群作用；即便考虑的是射影变换群在全体非退化二次曲线的集合上的群作用，只说 $8 - 5$ 也并没有体现出上述群作用的可迁性。

3）任给一条非退化的二次曲线 Γ，则关于 Γ 的配极对应，把共线四点对应为共点四线，而且保持交比不变。

解 $\boxed{\text{正确}}$。下面仅验证配极对应保交比。记 D 为标准点线对偶（即在射影坐标系下，由点 $[x\ y\ z]^T \leftrightarrow$ 线 $[x\ y\ z]$ 给出的点线对偶）。又记 D_Γ 为关于二次曲线 Γ 的配极对应，Γ_0 为以 $[0\ 0\ 1]^T$ 为圆心的单位圆，则不难验证 D 与 D_{Γ_0} 间仅差一个关于原点的中心对称。而 D 保交比（题目所述意义下，相当于线把模型中取共轴平面法向），故 D_{Γ_0} 保交比。再取射影变换 f，使得 $\Gamma = f(\Gamma_0)$，则可验证

$$D_\Gamma = f \circ D_{\Gamma_0} \circ f^{-1}$$

保交比。

评分标准 若直接说"对偶/配极"保交比，理由不充分，扣 2-3 分。

注 可以用"对 $\Gamma : X^TAX = 0$，点 $[v]$ 的极线是 $[v^TA]$"这个结论；也可以把 Γ 归结于（等价于）圆，再对圆的特例用平面几何验证。

4）平面上任给一个圆 Γ_1 和一条相离直线 l_1，任给另一对圆 Γ_2 和相离直线 l_2，总可以经过一次莫比乌斯变换 ϕ，使得 $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ 和 $\phi(l_1) = l_2$.

解 $\boxed{\text{错误}}$。首先由课上结论知平面上一圆与相离直线可通过反演变为一对同心圆，于是问题转化为平面上两对同心圆是否一定 Möbius 等价。对平面上以 O 为圆心的同心圆 Γ_1, Γ_2 及以 O' 为圆心的同心圆 Γ_1', Γ_2'，若存在 Möbius 变换 f，使得 $f(\Gamma_1) = \Gamma_1'$, $f(\Gamma_2) = \Gamma_2'$，则由 O 关于 Γ_1, Γ_2 的对称点重合，知 $f(O)$ 关于 Γ_1', Γ_2' 的对称点重合，进而知 $f(O) = O'$（否则可用反证法推出两圆 Γ_1', Γ_2' 的半径相同，矛盾）。取相似变换 g，使得 $g(\Gamma_1) = \Gamma_1'$, $g(O) = O'$。则 $g^{-1} \circ f$ 为保 O 点不动的 Möbius 变换，再由 $g^{-1} \circ f(\Gamma_1) = \Gamma_1$，知 $g^{-1} \circ f$ 为保 ∞ 不动的 Möbius 变换，进而为相似变换。故 f 也为相似变换，知这两组同心圆的半径之比必相同。故一般的两组同心圆并不是 Möbius 等价的。

评分标准 判断错误的，扣 5 分。认为命题不成立，但说理不充分（例如未用到交比的不变性），酌情扣 1-3 分。有些学生引用同心圆情形结论，但未说明一个圆和相离直线如何对应到一对同心圆，可能扣 1 分。

5）单位圆球表面被赤道分为北半球和南半球。则北半球内的任何一个圆向赤道平面作垂直投影（也就是沿竖直方向的平行投影），所得的像是一个圆或椭圆，包含在单位圆内，而且在椭圆情形，其短轴正好落在赤道这个单位圆的一条半径上。

解 略。

评分标准 此题因为题目表述有歧义，所以给分很宽松，只要能判断出短轴在赤道圆的一条直径上，理由基本合理，可给全分。

题 6（10 分） （1）平面上两个椭圆 Γ_1,Γ_2 交于 A,B 相异两点，各自中心分别为 O_1,O_2。若直线 O_1A,O_1B 均与 Γ_2 相切，直线 O_2A,O_2B 均与 Γ_1 相切，求证：存在仿射变换 f，使得 $f(\Gamma_1),f(\Gamma_2)$ 是一对正交的圆。

（2）平面上两个椭圆 Γ_1,Γ_2 交于 A,B 相异两点，试问：是否一定存在射影变换 ϕ，使得 $\phi(\Gamma_1),\phi(\Gamma_2)$ 是一对正交的圆？如果你认为一定存在这样的射影变换，请给出证明；如果你认为这样的射影变换可以不存在，请举出反例，并且写出这样的射影变换存在的一个"充分必要条件"，并给出论证。

解 (1) 作仿射变换 f，使得 $f(\Gamma_1)$ 是圆。下证椭圆 $f(\Gamma_2)$ 一定是与 $f(\Gamma_1)$ 正交的圆。

法一：易知 $|f(O_2)f(A)|=|f(O_2)f(B)|$。注意到 $f(O_1)f(A)$, $f(O_2)f(A)$ 的方向是 $f(\Gamma_2)$ 的互相垂直的共轭方向，因此是一对主方向。同理 $f(O_1)f(B),f(O_2)f(B)$ 也是一对主方向。如果 $f(\Gamma_2)$ 不是圆，则可推出 $f(O_2)f(A)$, $f(O_2)f(B)$ 是 $f(\Gamma_2)$ 的长轴、短轴所在直线。再由 $|f(O_2)f(A)|=|f(O_2)f(B)|$ 推出 $f(\Gamma_2)$ 的长短轴相等，矛盾。于是 $f(\Gamma_2)$ 是圆。再由仿射变换保中心、保相切知 $f(\Gamma_2)$ 是与 $f(\Gamma_1)$ 正交的圆。

法二：首先，$f(O_1)$ 是 $f(\Gamma_1)$ 的圆心，$f(O_2)$ 是 $f(\Gamma_2)$ 的中心。以 $f(O_1)$ 为原点建立平面直角坐标系，且不妨设 $f(A)=(1,t)$, $f(B)=(1,-t)$。由 $f(O_2)f(A),f(O_2)f(B)$ 都与 $f(\Gamma_1)$ 相切，解得 $f(O_2)=(1+t^2,0)$。故可设 $f(\Gamma_2)$ 的方程为 $\dfrac{\left(x-(1+t^2)\right)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。由 $f(A)$ 在 $f(\Gamma_2)$ 上知 $\dfrac{t^4}{a^2}+\dfrac{t^4}{b^2}=1$。又 $f(\Gamma_2)$ 在 $f(A)$ 处切线方程为 $\dfrac{\left(1-(1+t^2)\right)}{a^2}\left(x-(1+t^2)\right)+\dfrac{t}{b^2}y=1$，再由切线过 $f(O_1)$ 算得 $\dfrac{t^2}{a^2}+\dfrac{t^4}{a^2}=1$。故 $a^2=b^2$，即 $f(\Gamma_2)$ 是圆。再由仿射变换保中心、保相切知 $f(\Gamma_2)$ 是与 $f(\Gamma_1)$ 正交的圆。

(2) 这样的射影变换可以不存在。

以下先给出这样的射影变换存在的一个充分必要条件。记 Γ_1 在 A,B 处的切线交于点 P，点 P 关于 Γ_2 的极线为 l_1；又记 Γ_2 在 A,B 处的切线交于点 Q，点 Q 关于 Γ_1 的极线为 l_2。断言: 存在射影变换 ϕ，使得 $\phi(\Gamma_1),\phi(\Gamma_2)$ 是一对正交的圆的充分必要条件是 l_1 与 l_2 重合，并且同时位于 Γ_1,Γ_2 的外部。

必要性：若存在射影变换 ϕ，使得 $\phi(\Gamma_1),\phi(\Gamma_2)$ 是一对正交的圆，则 $\phi(P)\phi(A),\phi(P)\phi(B)$ 均与 $\phi(\Gamma_1)$ 相切；$\phi(Q)\phi(A),\phi(Q)\phi(B)$ 均与 $\phi(\Gamma_2)$ 相切。再由 $\phi(\Gamma_1),\phi(\Gamma_2)$ 是一对正交的圆知 $\phi(P),\phi(Q)$ 分别是 $\phi(\Gamma_2),\phi(\Gamma_1)$ 的圆心。于是 $\phi(P)$ 关于 $\phi(\Gamma_2)$ 的极线与 $\phi(Q)$ 关于 $\phi(\Gamma_1)$ 的极线都是无穷远线。再由射影变换保配极关系、保内外部知 l_1 与 l_2 重合，并且同时位于 Γ_1,Γ_2 的外部。

充分性：若 l_1 与 l_2 重合，并且同时位于 Γ_1,Γ_2 的外部，则取射影变换将这条直线映为无穷远线。此时 Γ_1,Γ_2 必被映为椭圆，且由射影变换保配极关系知 P,Q 分别被映为 Γ_2,Γ_1 的中心。再用第 (1) 问的结论知可再作用仿射变换将其映为一对正交的圆。

由此充分必要条件便不难构造反例。例如可取 Γ_1,Γ_2 使得点 P 在 Γ_2 外部，则此时 l_1 不在 Γ_2 的外部；再例如，在平面直角坐标系中，取

$$\Gamma_1: x^2+y^2=2,\quad \Gamma_2: \frac{9999}{10000}(x-2)^2+\frac{1}{10000}y^2=1.$$

则可求得 Γ_1,Γ_2 的两个交点分别是 $(1,\pm1)$，进而求得 $P=(2,0),Q=\left(\dfrac{9998}{9999},0\right)$。于是 l_1 是无穷远线，但 l_2 不是无穷远线，即 l_1 与 l_2 不重合。

评分标准 (1) 问作仿射变换 2 分，论证 3 分；(2) 问答案 1 分，反例 1 分，充要条件 3 分。

(1) 问用法一者，不出现“共轭方向”扣 2 分。(2) 问充要条件中没写“极线在外部”者，扣 1 分。(2) 问用内切于两点的两个椭圆举例者，不扣分（但这属于钻空子行为）。

注 思考：关于两个圆锥曲线 Γ_1, Γ_2 的配极对应，分别记为 f_1, f_2，则“f_1, f_2 可交换”是否是一个合乎需要的充分必要条件？

题 7（5 分） 我们在作业中已经知道，平面上居于一般位置的 4 条线，一定存在与它们同时相切的一个单参数族的椭圆。试证明：这族椭圆的中心共线！

证明 法一：由牛顿线定理知对圆外切四边形，圆心在对角线中点所在直线上（要证）。由仿射变换保相切、保中点、保中心知这个结论对椭圆仍成立，从而直接找到了中心所共直线。

法二：取射影变换将一般位置四线变为 $x = \pm 1, y = \pm 1$。由作业中结论知这组椭圆位于四点 $(\pm 1, \pm 1)$ 构成的正方形内部。设无穷远直线的像为 $l : ax + by = 1$，则椭圆中心的像为定直线 l 的极点。以下只需证明这些极点共线。设椭圆在直线 $y = 1$ 上的切点为 $(-k, 1)(k \in (-1, 1))$。此时可求得椭圆方程为 $x^2 + 2kxy + y^2 = 1 - k^2$，于是平面上点 (x_0, y_0) 对应的极线为 $(x_0 + ky_0)x + (kx_0 + y_0)y = 1 - k^2$。令

$$\frac{x_0 + ky_0}{1 - k^2} = a, \quad \frac{kx_0 + y_0}{1 - k^2} = b,$$

解得 $x_0 = a - bk, y_0 = b - ak$，故点 $(a - bk, b - ak)$ 的极线为 l。再由配极对应知 l 的极点即为 $(a - bk, b - ak)$，均位于直线 $ax - by = a^2 - b^2$ 上。（当 l 为无穷远线时，求得这族椭圆的中心均为 $(0, 0)$，此时结论也成立）

法三（提示）：与法二类似，可以通过对偶与射影变换，归结为命题：过 $(\pm 1, \pm 1)$ 四点的二次曲线族 $\alpha(x^2 - 1) + \beta(y^2 - 1) = 0$，定点 (a, b) 的极线（在 α, β 变化时）均通过定点。过程略。

注 1 注意中心本身不是射影不变量，但可将椭圆中心“翻译”为无穷远直线的极点，便可将其转化为射影不变量。

注 2 法二、法三中的计算明显也适用于双曲线情形。