2015-2016 学年第一学期拓扑学期中考试

2015.11.11

1. 在集合 X 上定义余可数拓扑 τ_f.
   (1) 证明拓扑空间 (X, τ_f) 第一可数当且仅当 X 是可数集.
   (2) 证明拓扑空间 (X, τ_f) 第二可数当且仅当 X 是可数集.

2. 集合 X 上定义了两个紧致的 Hausdorff 空间 (X, τ_1),(X, τ_2). 若 τ_1 和 τ_2 可比较大小, 证明 $\tau_1 = \tau_2$.

3. 所有形如 $\left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{n^2}$ (其中 $n \in \mathbb{N}$) 的圆周之并, 赋予 $\mathbb{E}^2$ 的子空间拓扑, 得到拓扑空间 X.X 称为夏威夷耳环. 又对一维欧氏空间将所有整数点粘合得到粘合空间 $Y = \mathbb{E}/\mathbb{Z}$. 证明 X 和 Y 并不同胚.

4. 证明 Hausdorff 空间中任意多的紧致集之交仍为紧致集.

5. "拓扑学家的梳子" 定义为集合 $X = \big\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \big| x = 0 \text{或} y = 0 \text{或} x = 1/n, n \in \mathbb{N}\big\}$ 作为 $\mathbb{E}^2$ 的子空间拓扑. 证明 X 是道路连通的. 又设 O 为原点, 拓扑空间 $Y = X \backslash \{O\}$. 问 Y 是否是连通的? 是否是道路连通的?

6. 在环面上挖去一个圆盘的内部, 并粘合对径点得到什么空间? 试用分割和粘合的方法予以说明.

以下两题任选一题作答.

7. 设 X 是紧致的 Hausdorff 空间,$\mathscr{F}$ 是 X 的一族连通的闭子集, 满足 $\mathscr{F}$ 中任何有限个集合之交均为非空连通集. 证明 $\bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F$ 是非空连通集.

8. 设 X 是 Hausdorff 空间,f 是 X 到自身的连续映射. 证明 X 的不动点集 $\{x \in X | f(x) = x\}$ 是闭集. 证明 X 的图像 $G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ 是 $X \times X$ 的闭子集.