1. $A=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$ □

2. 首先, 对任意 $\alpha\in\mathrm{Ker}(T)$, 有 $\langle (T+T^*)\alpha,\alpha\rangle=\langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle\alpha,T\alpha\rangle=0$.

   (1) 若 $T+T^*$ 正定, 则上式推出 $\alpha=0$, 从而 $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$.

   (2) 若 $T+T^*$ 半正定, 则上式推出 $\|\sqrt{T+T^*}\alpha\|^2=\langle (T+T^*)\alpha,\alpha\rangle=0$, 从而 $(T+T^*)\alpha=0$. 这推出 $\alpha\in\mathrm{Ker}(T^*)$, 所以 $\mathrm{Ker}(T)\subset\mathrm{Ker}(T^*)$. 用 T^* 替换 T, 即得反向的包含关系. □

3. "(1)$\Longrightarrow$(2)". 设存在满足 (1) 的 X,Y. 则 $A^tA+Y^tY=YY^t+BB^t=I_n$.

   – $\|A\alpha\|\leqslant\|\alpha\|$: $\|A\alpha\|^2=\alpha^tA^tA\alpha=\alpha^t\alpha-\alpha^tY^tY\alpha=\|\alpha\|^2-\|Y\alpha\|^2\leqslant\|\alpha\|^2$.

   – 存在 $P,Q\in O(n)$ 使得 $A=PBQ$: 对 $Z\in\{A,B,Y\}$, 设 $Z=P_Z\sqrt{Z^tZ}$ 为极分解, 其中 $P_Z\in O(n)$, 则

   $$ZZ^t=(P_Z\sqrt{Z^tZ})(P_Z\sqrt{Z^tZ})^t=P_Z(Z^tZ)P_Z^{-1}.$$

   这推出

   $$A^tA=I_n-Y^tY=I_n-P_Y^{-1}(YY^t)P_Y=I_n-P_Y^{-1}(I_n-BB^t)P_Y=P_Y^{-1}(P_BB^tBP_B^{-1})P_Y=(BP_B^{-1}P_Y)^t(BP_B^{-1}P_Y).$$

   于是 $BP_B^{-1}P_Y$ 的极分解形如 $BP_B^{-1}P_Y=P'\sqrt{A^tA}$, 其中 $P'\in O(n)$. 这推出 $A=P_A\sqrt{A^tA}=P_AP'^{-1}BP_B^{-1}P_Y$. 取 $P=P_AP'^{-1}$, $Q=P_B^{-1}P_Y$ 即可.

   "(2)$\Longrightarrow$(1)". 设 A,B 满足 (2). 设 $A=RDS$ 为奇异值分解, 其中 $R,S\in O(n)$, D 非负对角. 由 $\|A\alpha\|\leqslant\|\alpha\|$ 可知 D 的对角元均 $\leqslant 1$. 于是存在对角矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $D^2+C^2=I_n$. 此时 $\begin{pmatrix}D&-C\\C&D\end{pmatrix}\in O(2n)$. 再由 $B=P^{-1}AQ^{-1}=P^{-1}RDSQ^{-1}$ 可知 $\begin{pmatrix}R&\\&P^{-1}R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D&-C\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S&\\&SQ^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&*\\ *&B\end{pmatrix}\in O(2n)$. □

4. 所有可能值为 $(1,2),(1,3)$. 下面证明.

   – q 在 $\mathrm{span}\{(1,\dots,1)\}$ 上正定: $q(1,\dots,1)=\sum_{i,j=1}^n\|\alpha_i-\alpha_j\|^2>0$. 这推出 $r_1\geqslant 1$.

   – q 在 $W:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n x_i=0\}$ 上半负定: 对 $(x_1,\dots,x_n)\in W$, 有

   $$\begin{aligned}q(x_1,\dots,x_n)&=\sum_{i,j=2}^n\|\alpha_i-\alpha_j\|^2x_ix_j+2\sum_{i=2}^n\|\alpha_i-\alpha_1\|^2x_1x_i\\&=\sum_{i,j=2}^n\|\alpha_i-\alpha_j\|^2x_ix_j-\sum_{i,j=2}^n(\|\alpha_i-\alpha_1\|^2+\|\alpha_j-\alpha_1\|^2)x_ix_j\\&=-2\sum_{i,j=2}^n\langle\alpha_i-\alpha_1,\alpha_j-\alpha_1\rangle x_ix_j=-2\left\|\sum_{i=2}^n x_i(\alpha_i-\alpha_1)\right\|^2=-2\left\|\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\right\|^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

   这推出 $r_1=1$.

   – 记 $W_0=\{(x_1,\dots,x_n)\in W\mid\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=0\}$, 则 $\dim W_0=n-3$. 取子空间 $W_1\subset W$ 使得 $W=W_0\oplus W_1$, 则 $\dim W_1=2$. 上面 $q|_W$ 的表达式推出 $q|_{W_0}=0$, $q|_{W_1}$ 负定. 由 $q|_{W_1}$ 负定即得 $r_2\geqslant 2$. 另一方面, 取 r_2 维负定子空间 $Z\subset\mathbb{R}^n$, 则 $Z\cap W_0=\{0\}$, 从而 $r_2\leqslant 3$.

   – $(1,2),(1,3)$ 均可取到:

     * 对于

     $$\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-2}=(0,0),\quad\alpha_{n-1}=(1,0),\quad\alpha_n=(0,1),$$

     通过写出 q 在标准基下的矩阵, 容易看出 $\mathrm{rank}(q)=3$, 所以 $r_2=2$.

     * 对于

     $$\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-3}=(0,0),\quad\alpha_{n-2}=(1,0),\quad\alpha_{n-1}=(2,0),\quad\alpha_n=(0,1),$$

     通过写出 q 在标准基下的矩阵, 容易看出 $\mathrm{rank}(q)=4$, 所以 $r_2=3$. □