# 2018-2019 学年第二学期北京大学数学科学学院
# 概率论（实验班）期末考试试题

1. (10 分) 设随机变量 $X$ 满足 $EX^2<\infty$，$Y=\min\{X,a\}$，求证：$DY\le DX$ .

2. (10 分) 设随机变量列 $\{\xi_n\}$ 独立同分布于 $N(0,1)$，$\eta_n=\dfrac{n\xi_{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}$，求证：$\eta_n\xrightarrow{L}N(0,1)$.

3. (10 分) 设随机变量列 $\{\xi_n\}$ 的方差一致有界，且当 $|i-j|\to\infty$ 时有 $\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)\to 0$，求证：对 $\{\xi_n\}$ 成立大数定律.

4. (10 分) 设随机变量 $X$ 满足 $E|X|\ge a,E|X|^2=1$，求证：$P(|X|\ge\lambda a)\ge(1-\lambda)^2a^2$ .

5. (10 分) 设随机变量列 $\{X_n\}$ 独立同分布于 $\mathrm{Exp}(1)$，求证：$P\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{\log n}=1\right)=1$ .

6. (10 分) 设随机变量列 $\{X_n\}$ 独立同分布，$E|X_1|=\infty$，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，求证：

(1) $P\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\{|X_n|\ge n\}\right)=1$；

(2) $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}\text{存在}\right)=0$ .

7. (20 分) 设 $\{f_n(t)\}$ 是特征函数列，正常数列 $\{c_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=1$ .

(1) 求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nf_n(t)$ 是特征函数；

(2) 求证：对 $\forall\alpha\in(0,2)$，$\mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$ 是特征函数.

8. (20 分) 设独立随机变量列$\{\xi_n\}$均服从指数分布.

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n < \infty$，则$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < \infty\right) = 1$；

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n = \infty$，则$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty\right) = 1$.