

北京大学信息科学技术学院期中考试试题

科目: 高等代数 (I) 日期: 2019 年 11 月 12 日 共 5 道题, 满分 100 分

1. 计算题

(1)(5 分) 求排列 P 的逆序数 $P = 4\ 8\ 2\ 1\ 7\ 3\ 5\ 9\ 6$;

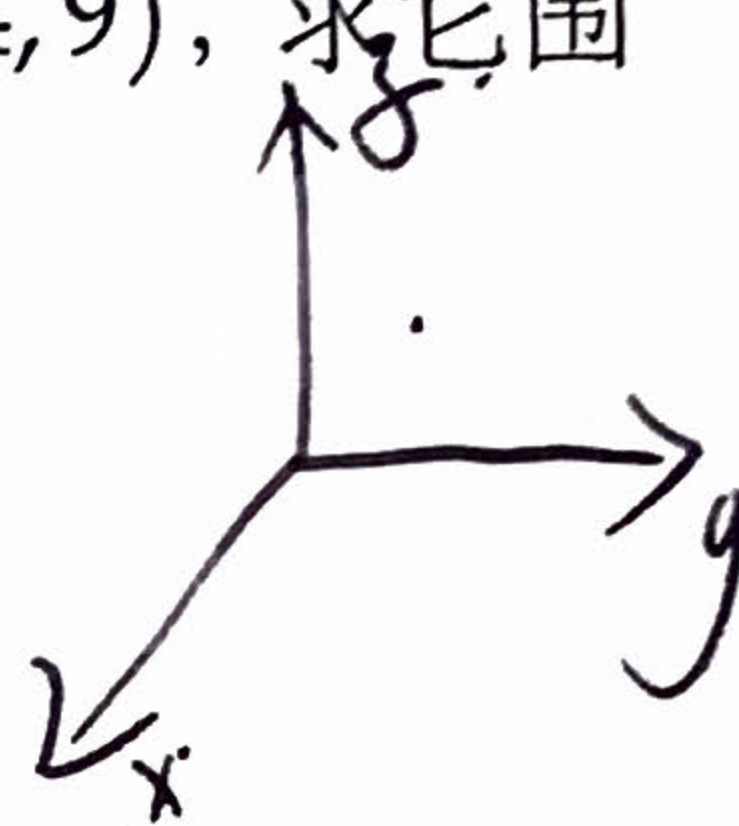
(2)(5 分) 假设 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 & j_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

求 7 阶行列式 $|(a_{ij})_7|$ 中, $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_7 j_7}$ 所带的符号.

2. (15 分) 给定 \mathbb{R}^3 中的四个点 $P_0(0,0,0), P_1(1,1,1), P_2(-1,2,3), P_3(1,4,9)$, 求它围起来的四面体的体积.

3. (15 分) 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 y_1 & 1+x_1 y_2 & \cdots & 1+x_1 y_n \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \cdots & 1+x_2 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \cdots & 1+x_n y_n \end{vmatrix}.$$



4. 假设 α 是多项式 $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ 的某个复数根.

(1)(6 分) 证明 $f(x)$ 是有理数域 \mathbb{Q} 上的不可约多项式;

(2)(9 分) 求有理数 a_3, a_2, a_1, a_0 , 使得

$$(4\alpha^2 + 3\alpha + 1)(a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0) = 1.$$

5. (20 分) 把 3 元对称多项式 $f(x) = (x_1 + x_2)^2 x_3 + (x_2 + x_3)^2 x_1 + (x_3 + x_1)^2 x_2$ 化为初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的多项式.

6. (25 分) 设 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^3 + x^2 - 6$. 求一个次数小于 5 的多项式 $h(x)$, 它除以 $f(x)$ 的余式是 $x - 2$, 它除以 $g(x)$ 的余式是 $3x^2 + x$. 并证明这种 $h(x)$ 在次数小于 5 的限制下是唯一确定的.