北京大学数学科学学院期中试题

2007-2008　　学年第一学期

考试科目：	**实变函数**	**考试时间：**	**2007 年 11 月**
姓　　名：		**学　　号：**	

1. 证明：对于一个不可数集合 E，对于任意小的 a，存在长度不超过 a 的闭区间，使得该区间和 E 的交集不可数。

2. 有一列在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，收敛到 $f(x)$。证明：$\{x : f(x) < 0\}$ 是可数个闭集的并集。

3. 叙述可测集定义，并证明可测集的并集可测。

4. 书上 114 页 12 题

5. $f(x)$ 为 E 上的可测函数，证明：存在可测函数列，其中每个函数的绝对值小于等于 $f(x)$ 的绝对值，并且收敛到 $f(x)$。

6. 叙述依测度收敛的定义，并且举出依测度收敛却不处处收敛的例子。

7. 设一个连续函数列在 E 上依测度收敛到 0，证明：存在子列，使得任意小的 a，存在 E 中和 $m(E)$ 相差不超过 a 的可测集，使得这个子列的和函数在这个集合上收敛且连续。

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)

实变函数期末考试

命题: 刘和平、刘建民 录入: erliban@bdwm

时间: 2005年1月

一、判断下列命题是否正确. 若正确请给出证明, 若错误请给出反例(每小题10分).

1. 设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数列, $\lim\limits_{k\to\infty}=f(x), a.e.x\in E$, 则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

2. 设 $f_k(x)\in L(E)(k=1,2,\cdots)$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|dx<\infty,$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 且

$$\int_E\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

3. 设 $f\in L(\mathbb{R}), f_k(x)=f(x+\frac{1}{k}), k=1,2,\cdots$. 则 $f_k(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且 $f'(x)=0, a.e.x\in[a,b]$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数函数.

5. 设 $0<r<p<s\leq\infty, f\in L^r(E)\cap L^s(E)$. 则 $f\in L^p(E)$.

二、(20分) 设 $f_k(x), g_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上两个可测函数列, 且 $|f_k(x)|\leq g_k(x), x\in E$. 如果

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\qquad \lim_{k\to\infty} g_k(x)=g(x).$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx=\int_E g(x).$$

证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \int_E f(x) < \infty.$$

三、(15分) 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 如果

$$\int_a^b |f'(x)|dx = \bigvee_a^b (f).$$

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

四、(10分) 设 $f, g \in L^2(E), f_k, g_k \in L^2(E), k = 1, 2, \cdots$. 如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k - f\|_2 = 0, \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x), a.e. x \in E$, 并且 $\sup\limits_{1\le k<\infty}\|g_k\|_2 \le M < \infty$. 证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g_k(x)dx = \int_E f(x)g(x)dx.$$

五、(5分) 设闭集 $E \subset \mathbb{R}$. 令 $\delta(t) = \inf\{|t-x| : x \in E\}$ 是点 t 到 E 的距离. 设 $f \in L(\mathbb{R})$, 令

$$M_f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(t)f(t)}{|t-x|^2}dt.$$

求证: $M_f \in L(E)$.

实变函数论期末考试试题

数学学院 04 级

1. $E \in \mathcal{R}^d$ 是 Lebesgue 可积集，试证：对于几乎所有的 $\boldsymbol{x} \in E$，有

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{m(E \cap B(\boldsymbol{x}, \varepsilon))}{m(B(\boldsymbol{x}, \varepsilon))} = 1,$$

其中

$$B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < \varepsilon\},$$

而 $m(X)$ 表示 Lebesgue 可积集 X 的 Lebesgue 测度.

2. 设 $\mu, \nu, \delta, \pi, \rho, \omega$ 是 $\mathcal{R}$ 上的如下定义的 Radon 测度：对于任何 $f \in C_0$，

$$\mu(f) = \int_0^1 f \mathrm{d}x, \quad \nu(f) = \int_2^3 f \mathrm{d}x, \quad \delta(f) = f(0),$$

$$\pi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\mathrm{e}} f(n), \quad \rho(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d}x, \quad \omega(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f \mathrm{d}x.$$

试问：

(1) μ 与 ν 是否互为奇异?
(2) π 与 ρ 是否互为奇异?
(3) δ 与 ω 是否互为奇异?
(4) ρ 与 ω 是否互为奇异?
(5) δ 与 π 是否互为奇异?
(6) μ 是以 ν 为基的测度吗?
(7) μ 是以 ρ 为基的测度吗?
(8) ω 是以 ρ 为基的测度吗?
(9) δ 是以 π 为基的测度吗?
(10) μ 是以 ω 为基的测度吗?

3. 设 μ 是 $\mathcal{R}^d$ 上的 Radon 测度. f_n, $n = 1, 2, \cdots$ 是一串下半连续函数，$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$，且对于任何 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^d$，有

$$|f_n(\boldsymbol{x})| \leq h(\boldsymbol{x}),\ n = 1, 2, \cdots$$

其中，$h \in L^1_{|\mu|}$. 试证：

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{R}^d} f_n(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{R}^d} g(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu.$$

4. (1) 试述 Hardy 最大函数的定义；
(2) 试述 Hardy 最大定理；
(3) 试证 Hardy 最大定理.

北京大学数学科学学院期末试题（回忆版）

2008-2009　学年第一学期

考试科目： **实变函数**　　**考试时间：** **2009 年 1 月**

姓　　名：　　**学　　号：**

1. 举例

   (a) 广义 Riemann 可积，非 Lebesgue 可积。

   (b) 有界变差，非单调。

   (c) 连续，非绝对连续。

   (d) 几乎处处可微，不满足 N-L 公式。

   (e) 几乎处处收敛于 0，积分不趋于 0。

   (f) L^1 收敛，不几乎处处收敛。

   (g) 函数级数不可逐项积分的例子。

2. 证明在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschiz 条件的函数必定几乎处处可导。

3. E 是平面可测集，对 $a.e.x$ 有 $m^*(E_x) = 0$（截口），证明 $m(E) = 0$。

4. f_k 按 L^1 收敛于 f，$m(E_k) \to 0$，证明 f_k 在 E_k 上的积分趋向于 0。

5. f 在 $[a, b]$ 可积，证明对几乎所有的 x，对所有实数 a 都有 $|f(x) - a|$ 的不定积分在 x 处的导数等于它自己。

6. 在 L^p 中 $f_k \to f$ $g_k \in L^q$，几乎处处趋于 g，$|g_k|_q \leq M$，证明 $f_k * g_k$ 的积分趋于 $f * g$ 的积分

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)

2011-2012 学年实变函数期末考试

1. 设 f 为 E 上的可积函数, 证明:对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$,使得对任何 $e\subset E$，若 $m(e)<\delta$；那么

$$|\int_e f(x)dx|<\delta$$

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$，试证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\frac{d}{dx}f(x) \quad a.e \quad x\in[a,b]$$

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 为 E 上的非负可积函数列，满足 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 以及 $g_n(x)\geq|f_n(x)|$，若还有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx=\int_E g(x)dx$$

试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

4. 设 $f\in BV([0,a])$，试证明： $F\in BV([0,a])$，其中 F（x）定义为

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad F（0）=0$$

5. 设 $f\in L(\mathbb{R})$，证明： $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$

6. 设 g（x）为 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数，若 $\int_0^1 f(x)dx=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx=0$$

7. 设 $f\in L^2([-1,1])$，E 为 $[-1,1]$ 中的闭集，令 $\delta(t)=\inf\{|x-t|;x\in E\}$，证明：

$$F(x)=\int_{[-1,1]\setminus E}\frac{\delta(t)^{\frac{1}{2}}f(t)}{|x-t|}dt\in L^2(E)$$

8. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的有界可测函数，且有 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=0$，令

$$M_f(x)=\sup_{t>0}\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{t}{t^2+(x-y)^2}dy\right|$$

试证明： $M_f(x)\in L(\mathbb{R})$

一. 选择题(32分，每题4分)

(1) 设$E \subset \mathbb{R}$ 为可测集且$m(E) = 0$, 则E 为可数集. (A) 正确，(B) 不正确.

(2) 设I 为一指标集，$\forall \alpha \in I$, $f_\alpha(x)$ 为可测集E 上可测函数，则$f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ 为E 上可测函数. (A) 正确，(B) 不正确.

(3) 设$f(x)$ 为可测集E上函数且除了有限个点外，$f(x)$ 连续，则$f(x)$ 为可测函数. (A) 正确，(B) 不正确.

(4) $\mathbb{R}^n$ 中的开集既是F_σ集又是G_δ集. (A) 正确，(B) 不正确.

(5) 设$\{f_k(x)\}_1^\infty$ 为可测集E上可测函数列且$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ $a.e.$ E, 则$f_k(x)$依测度收敛于$f(x)$. (A) 正确，(B) 不正确.

(6) 设$E \subset \mathbb{R}$为无限集且只有有限个聚点，则E为可数集. (A) 正确，(B) 不正确.

(7) 设$E \subset [-1,1]$为可测集且$\forall x \in$ [illegible], $x \in E$ 或者$-x \in E$，则$m(E) \geq 1$. (A) 正确，(B) 不正确.
[-1,1].

(8) 设$A \subset E \subset B$，A, B 均为可测集且$m(A) = m(B) < \infty$，则E为可测集. (A) 正确，(B) 不正确.

二. (15分) 证明对任意$\epsilon > 0$存在$\mathbb{R}$中开集G使得G在$\mathbb{R}$中稠密且$m(G) < \epsilon$.

三. (15分)设$f_k(x)$ 为$\mathbb{R}$上的连续函数列且$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. 证明$\forall t \in \mathbb{R}$, 集合$\{x \in \mathbb{R} | f(x) > t\}$ 为Borel 集.

四. (15分) 设$E \subset \mathbb{R}$是可测集，$0 < m(E) < \infty$. 证明：$\forall 0 < a < m(E)$, 有有界闭集$F \subset E$使得$m(F) = a$.

五. (15分) 设$f(x)$为$[0,1]$上的取值于实数的可测函数。问

(1) 是否存在$c \in \mathbb{R}$使得

$$m\{x \in [0,1] | f(x) < c\} = \frac{1}{2}, m\{x \in [0,1] | f(x) \geq c\} = \frac{1}{2};$$

(2) 是否存在$c \in \mathbb{R}$使得

$$m\{x \in [0,1] | f(x) \leq c\} \geq \frac{1}{2}, m\{x \in [0,1] | f(x) \geq c\} \geq \frac{1}{2}.$$

六. (8分)设$A, B, A+B \subset \mathbb{R}^2$均为可测集，证明以下Brunn-Minkowski不等式：

$$m(A+B)^{\frac{1}{2}} \geq m(A)^{\frac{1}{2}} + m(B)^{\frac{1}{2}},$$

其中$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$.