几何学期中考试参考答案与评分标准

考试日期: 2009 年 11 月 13 日。**考试时间**: 2 小时。

题 1 (16 分） 请问直线

$$\ell : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的系数满足什么条件时才具有以下性质?(可以不说理由只写结果.)

(1) 经过原点;

(2) 与 x 轴平行但不重合;

(3) 和 y 轴相交于唯一的一点;

(4) 与 z 轴垂直 (不必相交).

• 解：(1)$D_1 = D_2 = 0$.

(当且仅当原点同时在两平面上,$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 代入两方程都成立.)

(2)$A_1 = A_2 = 0$, 且 D_1, D_2 不同时为 0.

(当且仅当两平面法向均与 x 轴垂直, 且原点不同时在两平面上.)

(3)$B_1D_2 - B_2D_1 = 0$, 且 B_1, B_2 不同时为 0.

(当且仅当将 $(0, y, 0)$ 代入两方程并联立后有唯一解.)

(4)$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

(当且仅当两平面法向量与 $(0, 0, 1)$ 构成的矩阵行列式为 0.)

• 评分标准：*每小题 4 分。只看结果，不给过程分。(2) (3) 若漏一个条件，各扣 2 分。*

题 2 (40 分） 设 $\mathbb{P}$ 为顶点在单位球面上的正八面体，它的六个顶点为 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$，$O$ 为其重心。以 $\{O; \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_5}\}$ 为单位正交标架建立右手坐标系。请用空间解析几何的方法来解答以下问题，每小题 8 分。

(1) 求三角形 $A_3A_4A_5$ 所在平面 Σ 的方程；

(2) 求直线 A_1A_6 与平面 Σ 之间的夹角；

(3) 求 A_1 到平面 Σ 的距离；

(4) 求直线 A_1A_5 与 A_2A_3 之间的夹角和距离；

(5) 求三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面与平面 Σ 之间的夹角。

• 解：(1) $x + y - z + 1 = 0$。(2) $\theta = 0$，即直线与平面平行。(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$。(4) 夹角为 $\pi/3$，距离为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$。(5) $\arccos\frac{1}{3}$。过程略。

• 评分标准：*每小题步骤正确答案错误酌情扣分，笔误扣 1 分，答案正确无步骤（公式）扣 4 分。*

题 3 (14 分） 已知 I 和 I' 都是平面右手直角坐标系，I' 的 x' 轴在 I 中的方程为 $3x - 4y + 5 = 0$，I 的原点在 I' 中的坐标为 $(2, 1)$。

(1) 求 I 到 I' 的点的坐标变换公式（即 (x, y) 依赖于 (x', y') 的表达式）。

(2) 求在 I 中方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆在 I' 中的方程。

• 解：可直接根据题意作出图形，并从中确认 e_1' 在 I 中的坐标为 $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$，$e_2'$ 在 I 中的坐标为 $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$，$O'$ 在 I 中的坐标为 $(1, 2)$。所以可以直接写出变换

公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

如果忘记了对应关系，也可以先写出

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

（相当于用待定系数法。）然后根据 $(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x', y') = (1, 2)$ 推出

$$2\cos\theta + \sin\theta + a = 0,$$
$$-2\sin\theta + \cos\theta + b = 0.$$

根据 $3x - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ 推出

$$3\cos\theta + 4\sin\theta = 0,$$
$$3a - 4b + 5 = 0.$$

联立解得 $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \sin\theta = \frac{3}{5}, a = 1, b = 2$。将以上 (x, y) 替换为 (x', y') 的表达式代入 $x^2+y^2 = 1$，得到在 I' 中对应的方程 ${x'}^2+{y'}^2-4x'-2y'+4 = 0$.（或直接由圆半径为 1，圆心在 I' 中坐标为 $(2, 1)$ 而推出。）

• 评分标准：*求坐标变换公式 10 分，圆的新方程 4 分。另外在最后公式中将 (x, y) 与 (x', y') 弄颠倒要扣 4 分。最后方程用变量 (x, y) 而非 (x', y') 写出者扣 1 分，常数项 4 错为 5 扣 1 分，只代入坐标变换公式不计算出最后答案扣 3 分。采用待定系数法求解出错或由图形推导出错的，基本全扣。*

题 4（10 分） 设 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ 为平面上四个向量，$A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示有序向量组 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 张成的平行四边形的有向面积。任选一种方法证明：

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b})A(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c})A(\mathbf{d}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{d})A(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

• 证：转化为书上的习题 46 页 14 题（注意符号是如何对应的）。之后可以用 Lagrange 恒等式，或转化为 Jacobi 恒等式。如果转化为三角恒等式，可以用积化和差，但更妙的办法是在证明 $\sin(A-B)\sin(C-D)+\sin(A-C)\sin(D-B)+\sin(A-D)\sin(B-C) = 0$ 时，将左边看作关于变量 A 的一元函数，应该为周期 2π 的正弦函数，但一个周期内又易于验证有三个零点 B, C, D，推出恒为 0。46 页 9 题当 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 共面时也有类似恒等式。

• 评分标准：*若缺乏必要的展开或化简，酌情扣 5-8 分。*

题 5（10 分） 设平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与双曲抛物面 $2z = x^2 - y^2$ 的交线为两条直线. 证明 $A^2 - B^2 - 2CD = 0$.

• 证：此平面必由两族直母线中的各一条张成。由此可推出其系数的表达式，验证以上式子成立即可。另一种方法是联立后消去 z，相当于看其交线在 xy 平面上的投影曲线，必须也为两相交直线，由学过的二次曲线类型判别法得结论。最后一种涉及稍微高级的知识，即此平面必为曲面在对应点的切平面，由二次曲面的切平面一般表达式，立即得到结论。

• 评分标准：*未注意说明消去 z 相当于看投影曲线，类型不变，则扣 2 分。*

题 6（10 分） (1) 证明：用一族平行平面（与 z 轴不平行）去截椭圆抛物面 $x^2+2y^2=z$，所得的截线是彼此相似的椭圆（即长短轴之比相等）。

(2) 证明：平面 $y+z=0$ 截此椭圆抛物面得圆周。

• 证：最好的办法是设想取坐标变换，使得平行平面族表达为 $z'=c$。此时曲面方程依然为二次，代入 $z'=c$ 得到平面曲线方程，易于看出其二次部分不变，故是相似的二次曲线。第二问有很多同学具体写出了转轴过程，更省事的办法是直接指出原交线同时满足 $0=x^2+2y^2-z=x^2+y^2+(-z)^2-z$，后者为球面方程，故交线同时也是球面与平面交线，必为圆周。

• 评分标准：两问各 5 分。未注意说明空间曲线与投影曲线关系的，扣 2 分。