2023数分(II)实验班期中

感谢潘冲冲学长对寻找题目的帮助

1. (10分)计算函数$\sin(x^2)$在$[0,\pi]$上的全变差.

2. (10分)定义在实轴上的可测实值函数f满足$f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$对任意实数x和正整数n成立，证明存在常数C使得$f(x) = C, a.e.$.

3. (10分)是否存在一个$[0,1]$上的函数使得其在有理点处不可导，在无理点处可导？若存在，请给出构造；若不存在，请给出证明.

4. (10分)在$\mathbb{R}^d$中，记$B_r(x)$为以x为中心半径为r的球，对于可积函数f，定义函数

$$H(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)| \mathrm{d}y.$$

证明$H(f)(x)$与Hardy-Littlewood极大函数等价，即是存在常数C使得

$$C^-1 H(f)(x) \leq \mathcal{M}(f)(x) \leq C H(f)(x), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

5. (10分)假设f是$[-1,1]$上的可积函数，满足对任意非负整数n有

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

证明f是$[-1,1]$上的几乎处处奇函数，也即是$f(x)=-f(-x)$对$a.e.x\in[-1,1]$成立.

6. (10分)假设f是$\mathbb{R}$上的单调增函数，满足

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0, \lim_{x\to\infty} f(x)=1, \int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x=1.$$

证明f在任何闭区间$[a,b]$上是绝对连续函数.

7. (10分)如果实轴上的可积函数列f_k依测度收敛到f，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_k| = \int_{\mathbb{R}} f.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_k - f| = 0.$$

8. (10分)假设f为$\mathbb{R}^d$中的可测函数，集合

$$\Gamma := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{R}^d\}$$

为f在$\mathbb{R}^{d+1}$中的图.

(a) (5分)证明Γ作为$\mathbb{R}^{d+1}$中的集合为零测集；

(b) (5分)证明对几乎所有的$y \in \mathbb{R}$，原像集$f^{-1}(y)$为$\mathbb{R}^d$中的零测集.

9. (10分)假设$\mathbb{R}^3$中的可测函数ρ可积并且一致有界，证明函数

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y$$

是$\mathbb{R}^3$中的Lipschitz函数，即是存在常数M使得

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}^3$$

10. (10分)给定$\mathbb{R}$中的可测集E，证明对几乎处处的$x\ inE$有

$$\int_{|y|\leq 1} \frac{d(x+y,E)}{|y|^2}\mathrm{d}y < \infty.$$

这里$d(x,E)=\inf_{y\in E}|x-y|$表示$x$到集合$E$的距离.