

北京大学数学科学学院期中试题

2012 - 2013 学年 第二学期

考试科目: 复变函数

考试时间: 13 年 05 月 05 日

姓 名:

学 号:

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (15 分) 判断下列命题的正确性 (不要说明理由)

- (1) 设 $f(z)$ 为有界区域 D 内的非常数解析函数, 则 $f(z)$ 在 D 内只有有限多个零点;
- (2) 设 $f(z)$ 为区域 D 内的非常数解析函数, 则 $\overline{f(z)}$ 在 D 内必不解析;
- (3) \sqrt{z} 在 C 内挖掉正虚轴的区域内必存在单值解析分支.

2. (10') 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在区域 D 解析并且对于 $\forall z \in D$ 成立 $u^2 + \sin^2 v = 1$. 证明 $f(z)$ 必为常数函数.

3. (15 分) 计算积分

- (1) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^5(z-2)^2};$
- (2) $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{\bar{z}};$
- (3) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{\bar{z}-3};$

4. (10 分) 求出 $\sqrt[3]{(z-1)^2(z-2)}$ 的支点并且给出它的一个存在单值分支的最大区域.

5. (10 分) 证明代数基本定理.

6. (10 分) 叙述并证明 Schwarz 引理.

7. (10 分) 求出上半平面到单位圆盘所有的分式线性变换.

8. (10 分) 设 $f(z)$ 是一个非常数整函数, 令 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, 证明 $M(r)$ 是 $(0, +\infty)$ 内的严格递增函数.

9. (10 分) 设 $f(z)$ 是一个超越整函数, 证明: 必存在复平面内的一条直线 Γ , 使得对于 $\forall z \in \Gamma$ 及任意的正整数 n 成立 $f^{(n)}(z) \neq 0$.