一. (40分) 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A\text{中恰有两个非对角矩阵元为}1\text{, 其他矩阵元均为}0\}.$$

分别写出下面的集合 (不需要写过程):

(1) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f$是$\Omega$中某个矩阵的特征多项式$\}$.

(2) $\{p \in \mathbb{Q}[x] \mid p$是$\Omega$中某个矩阵的最小多项式$\}$.

(3) $\{J \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid J$是$\Omega$中某个矩阵的有理标准形$\}$.

(4) $\{R \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid R$是$\Omega$中某个矩阵的Jordan标准形$\}$.

解. (1) $\{x^3, x(x+1)(x-1)\}$. (2) $\{x^2, x^3, x(x+1)(x-1)\}$.

(3) $\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$. (4) $\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$.

一个分类方法: 若某个$A\epsilon_i$不是ϵ_j或0的形式, 则在相似意义下, 不妨设$A\epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_3$, 从而$A\epsilon_2 = A\epsilon_3 = 0$. 此时$A$相似于(4)中第一个矩阵. 假设每个$A\epsilon_i$均为$\epsilon_j$或0的形式. 注意到必有某个$A\epsilon_i = 0$. 在相似意义下, 不妨设$A\epsilon_1 = 0$. 则$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$均为$\epsilon_j$的形式. 若$A\epsilon_2 = A\epsilon_3 = \epsilon_1$, 则$A$相似于(4)中第一个矩阵. 若$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$恰有一个等于$\epsilon_1$, 在相似意义下不妨设$A\epsilon_2 = \epsilon_1$, 则$A\epsilon_3 = \epsilon_2$, 此时$A$相似于(4)中第二个矩阵. 若$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$都不等于$\epsilon_1$, 则$A\epsilon_2 = \epsilon_3$, $A\epsilon_3 = \epsilon_2$, 此时A相似于(4)中第三个矩阵. □

二. (10分) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^2可对角化. 证明A^3可对角化.

证明. 由于A^2可对角化, 所以$p_{A^2} = \prod_{c\in\sigma(A^2)}(x-c)$. 考虑集合

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{存在}c \in \sigma(A^2)\text{满足}\lambda^2 = c^3\},$$

并定义$g = \prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda)$. 容易看出$g(A^3) = 0$, 从而$p_{A^3} \mid g$. 这推出$p_{A^3}$为互不相同的首一一次式的乘积. 因此$A^3$可对角化. □

三. (20分) 设$A \in F^{n\times n}$是非零幂零矩阵, $g \in F[x]$. 证明下面两个陈述等价:

(1) $g(A)$与A相似.

(2) $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 由于$g(A)$与A相似, 所以也幂零, 因此$g(A)$特征值只能为0. 另一方面, 由于0是A的特征值, 所以$g(0)$是$g(A)$的特征值. 这就推出$g(0) = 0$. 如果还有$g'(0) = 0$, 则存在$h \in F[x]$满足$g(A) = A^2h(A)$. 设A的最小多项式为x^d. 由于$A \neq 0$, 所以$d \geq 2$, 因此$g(A)^{d-1} = A^{2d-2}h(A)^d = 0$, 即$x^{d-1}$为$g(A)$的零化多项式. 这与(1)矛盾.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 设A的有理标准形为$\mathrm{diag}(J_{d_1}(0), \ldots, J_{d_r}(0))$. 则$g(A)$相似于$\mathrm{diag}(g(J_{d_1}(0)), \ldots, g(J_{d_r}(0)))$. 只需证明$J_d(0)$与$g(J_d(0))$相似$(1 \leq d \leq n)$. $d = 1$时显然. 设$d \geq 2$. 由于$J_d(0)$的最小多项式为x^d, 所以只需证明$g(J_d(0))$的最小多项式也是x^d. 由$g(0) = 0$推出$g(J_d(0))$幂零, 并且存在$q \in F[x]$满足$g^{d-1} = g'(0)^{d-1}x^{d-1} + x^dq$. 所以$g(J_d(0))^{d-1} = g'(0)^{d-1}(J_d(0))^{d-1} \neq 0$. 因此$g(J_d(0))$的最小多项式为$x^d$. □

四. (20分) 设F是无限域, V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$. 证明下面两个陈述等价:

(1) V只有有限多个T-不变子空间.

(2) T是循环的.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 假设T不循环. 则对循环分解$V = \bigoplus_{i=1}^r R\alpha_i$有$r \geq 2$. 考虑不变子空间$W_t = R(\alpha_1 + t\alpha_2)$, $t \in F$. 我们验证当$s \neq t$时有$W_s \neq W_t$, 从而存在无穷多个不变子空间. 事实上, 如果$s \neq t$但$W_s = W_t$, 则$\alpha_1 + s\alpha_2 \in W_t$, 从而$(s-t)\alpha_2 \in W_t$, 进而$\alpha_2 \in W_t$. 这推出存在$f \in R$满足$f(\alpha_1 + t\alpha_2) = \alpha_2$, 即$f\alpha_1 = 0$, $tf\alpha_2 = \alpha_2$. 由$f\alpha_1 = 0$推出$p_1 = p_T|f$, 因此$f\alpha_2 = 0$, 矛盾.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 设$V = R\alpha$. 我们证明V的不变子空间一定形如$Rh\alpha$, 其中h为p_α的首一因式, 从而只有有限多个. 设$W \subset V$是不变子空间. 取$h = p_{\alpha+W}$. 则$Rh\alpha \subset W$. 另一方面, 设$g\alpha \in W$, 则$h|g$, 从而$g\alpha = (g/h)h\alpha \in Rh\alpha$. 因此$W \subset Rh\alpha$. 这就证明了$W = Rh\alpha$. □

五. (10分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$循环幂零. 求$L(V)$的子空间

$$M = \{U \in L(V) \mid T^2U = UT^2\}$$

的维数.

解. $\dim M = \begin{cases} 2n, & n\text{偶}; \\ 2n-1, & n\text{奇}. \end{cases}$

下面证明. $n=1$时显然. 设$n \geq 2$. 由于T^2幂零, 所以在T^2的循环分解中, 直和项的个数为

$$\dim \operatorname{Ker}(T^2) = \dim \operatorname{Ker}(J_n(0)^2) = 2.$$

另一方面, 由于$(T^2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$, 所以每个直和项的维数 $\leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. 这说明$T^2$的有理标准形为$\operatorname{diag}(J_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(0), J_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(0))$. 直接计算可得

$$\dim\{A \in F^{p \times q} \mid J_p(0)A = AJ_q(0)\} = \min\{p, q\}.$$

而

$$\begin{pmatrix} J_p(0) & \\ & J_q(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_p(0) & \\ & J_q(0) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} J_p(0)A & J_p(0)B \\ J_q(0)C & J_q(0)D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AJ_p(0) & BJ_q(0) \\ CJ_p(0) & DJ_q(0) \end{pmatrix}.$$

所以与$\operatorname{diag}(J_p(0), J_q(0))$可交换的$p+q$阶方阵构成的线性空间的维数为$p+q+2\min\{p,q\}$. 取$(p,q) = (\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$即可. □