高概 25 秋期末

葛颢

January 2025

1. 设 $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ 是一个一致可积的适应序列。定义

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}), \quad A_0 = 0$$

请证明：序列 $M_n = X_n - A_n$ 是一个关于 $\mathcal{F}_n$ 的鞅。

2. 叙述并证明满足 Lyapunov 条件的中心极限定理：

设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，$s_n^2 = \mathrm{Var}(S_n)$。若存在 $\delta > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^{2+\delta} = 0$$

则 $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n}$ 依分布收敛于标准正态分布 $N(0,1)$。

3. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$。若

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} Y$$

其中 Y 为一几乎处处有限的随机变量。

请证明：$\mathbb{E}|X_1| < \infty$ 且 $Y = \mathbb{E}X_1$ a.s.。

4. 设 $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ 是关于某滤波 $\mathcal{F}_n$ 的鞅差序列，定义 $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$（即 X_n 为鞅）。

若满足以下两个条件：

(1) $\mathbb{E}[\sup_{n\geq 1} \xi_n^+] < \infty$

(2) $\sup_{n\geq 1} X_n < \infty$ a.s.

请证明：X_n 几乎处处收敛，即 $\lim_{n\to\infty} X_n$ 存在且有限 a.s.。

5. 设 $\{X_n\}$ 独立同分布，$\mathbb{E}X_1 = 0, \mathbb{E}X_1^2 < \infty$。令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$。

(1) 证 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| > \sqrt{mn}\right) = O\left(\frac{1}{m}\right)$

(2) 证 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| > \sqrt{mn}\right) = o\left(\frac{1}{m}\right)$

6. 设 $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ 为反向下鞅。

（注：即满足 σ-代数流递减 $\mathcal{F}_n \supseteq \mathcal{F}_{n+1}$，且 $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}] \geq X_{n+1}$ a.s.。）

已知 $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ 且满足下有界条件 $\inf_n \mathbb{E}X_n > -\infty$。请证明：

(1) X_n 几乎处处收敛到有限随机变量，即 $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a.s. 且 $|X_\infty| < \infty$。

(2) X_n 在 L^1 中收敛，即 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X_\infty| = 0$。

7. 设 X_n 独立同分布且 $\mathbb{E}X_n = 0$, $\mathbb{E}X_n^2 = 1$, $\mathbb{E}X_n^4 < \infty$。

(1) 证明级数 a.s. 收敛：

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(S_n^2 - n) - (S_{n-1}^2 - (n-1))}{n \ln n} < \infty \quad \text{a.s.}$$

(2) 证明级数 a.s. 收敛：

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n^2 - n}{n^2 \ln n} < \infty \quad \text{a.s.}$$

(3) 定义事件 $A_n = \{X_n^2 \geq 2\ln n + \sum_{m=2}^{n} \frac{S_m^2}{m^2 \ln m}\}$，请证明：

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1$$