

概率论期中考试

出题人：任艳霞

考试时间：2015 年 04 月 24 日

1. (15 分) 一枚硬币抛三次，每次出现正面和反面的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，事件 A_1 表示三次中恰有一次出现正面，事件 A_2 表示三次中至少有一次出现正面.

(1) 按照古典概型写出样本空间，并用样本点描述 A_1 和 A_2 .

(2) 求 $\Pr(A_1)$ 和 $\Pr(A_2)$.

2. (15 分) 已知分布函数：

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

求 (1) $\Pr(X < 3)$; (2) $\Pr(X = \frac{1}{2})$; (3) $\Pr(\frac{1}{2} \leq X < 4)$.

3. (10 分) 设事件 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立，且有 $\Pr(A_i) = \frac{1}{1+i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. 求 $\Pr((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4))$.

4. (10 分) 罐中已有一个白球，并等可能地向罐中放入一个黑球或一个白球. 之后取出一个球发现是白球，问罐中剩下的球是白球的概率为多大.

5. (5 分) 设随机变量 X, Y 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

问 X, Y 是否独立? (可以直接回答独立或不独立，不用说明理由)

6. (10 分) 设 X, Y 相互独立，且均服从参数为 $\frac{1}{3}$ 的几何分布. 求 $\Pr(X \leq Y)$.

7. (20 分) 随机变量 Y 的密度函数为

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

随机变量 X 满足 $X = \sqrt{Y}$ ，求 X 的密度函数及 $\Pr(1 < x < 2)$.

(如有需要，请自行查正态分布表，考试时有提供数值)

8. (15 分) 掷一对骰子，直到点数和出现 5 或 7 才停止，求点数和为 5 先出现的概率.