北京大学数学科学学院试题

考试科目：高等代数 II　任课教师：王福正

考试时间：2021 年 5 月 4 日 10:10—12:10

食用须知：本试卷由元培学院 2020 级同学王骏澎**靠记忆**整理，因此不能保证与原卷完全一致，但可以保证与原卷没有大的出入且所有题目可做。

第一题 (20 分)：

记函数 $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$ 张成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间为 V，函数 $f_1(x) = 1 + 2e^x + e^{2x}, f_2(x) = -1 + e^x + e^{2x} + e^{3x}, f_3(x) = 3e^x + 2e^{2x} + e^{3x}$ 张成的线性空间为 V_1，$g_1(x) = 2 - e^x + e^{3x}, g_2(x) = 1 - e^x + 3e^{2x} + 7e^{3x}$ 张成的线性空间为 V_2。分别求 $V, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ 和 V/V_1 的一个基。

第二题 (10 分)：

数域 F 上的一元多项式 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3ax + 8$，问 a 取何值时 $f(x)$ 有重根，并求出此时 $f(x)$ 的根。

第三题 (14 分)：

实系数六阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

其中 $b \neq 0$，求 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的不变因子，初等因子和 Jordan 标准形，和实数域 $\mathbb{R}$ 上的有理标准形。

第四题 (16 分)：

(1) 求一个复数域上的三次多项式，使其三个根分别为复数域上三次多项式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 的三个根的三次方。

(2) n 为正整数，求所有满足 $f(f(x)) = (f(x))^n$ 的多项式 $f(x)$。

第五题 (10 分)：

有理数域上的多项式 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)\cdots(x-t_n)+1$，其中 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 均为整数。证明：$f(x)$ 在有理数域上可约的充分必要条件是存在整系数多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=(g(x))^2$。

第六题 (14 分)：

数域 F 上的 n 维线性空间 V 的一个基为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$。令 $\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$，由 β 张成的线性空间记为 V_1，令 $V_2=\left\{\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\middle|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0\right\}$。证明：$V_2$ 是 V 的一个子空间，且 $V=V_1\oplus V_2$。

第七题 (8 分)：

在数域 F 上记 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的各次初等对称多项式分别为 $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$，$f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0$。证明：$n$ 元多项式 $f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ 为零多项式。

第八题 (8 分)：

$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),i=1,2,\ldots,s,s>1$ 是数域 F 上两两不同的一次齐次多项式。证明：至少存在一个 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$，使得 $f_i(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的值两两不同。