北京大学数学学院期中试题

一.（16 分）

（1）叙述向量组线性相关, 线性无关, 向量组极大无关组的定义 ;

（2）已知向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 能线性表出 $\beta_1, \ldots, \beta_r$，且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的秩等于 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 的秩 . 证明: $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 也能线性表出 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

二.（16 分）计算 n 级行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 2+a_2b_1 & 2+a_2b_2 & \cdots & 2+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+a_nb_1 & n+a_nb_2 & \cdots & n+a_nb_n \end{vmatrix}$.

解：n = 1 时，$D = 1+a_1b_1$ ；n = 2 时，$D = (2a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$；

n>2 时，$D = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ (a_2-2a_1)b_1 & (a_2-2a_1)b_2 & \cdots & (a_2-2a_1)b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n-na_1)b_1 & (a_n-na_1)b_2 & \cdots & (a_n-na_1)b_n \end{vmatrix} = 0$.

三.（24 分）设矩阵 A 的列向量依次为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$. 已知齐次方程组 $AX = 0$ 解空间的一组基为 $[\,3\ 1\ 1\ 0\ 0\,]^T$, $[\,5\ 6\ 1\ 2\ -1\,]^T$.

1) 求 A 的简化阶梯型矩阵 J ;

2) 求 A 列向量组的一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量;

3) 求 A 行空间的一组基, 并判断当 a 取何值时,
$\beta = [\,1 \quad a \quad 0 \quad 3 \quad 2a-1\,]$ 落在 A 的行空间里, 写出此时 β 在基底下的坐标;

4) 将 A 写成 BC 的形式，B 是列满秩的矩阵，C 是行满秩的矩阵.

解： 1) 矩阵 A 的行空间与 A 的解空间在 R^5 中互为正交补，

即向量 [a_1 a_2 a_3 a_4 a_5] 在 A 的行空间中当且仅当

$$3a_1 + a_2 + a_3 = 0 \text{ 且 } 5a_1 + 6a_2 + a_3 + 2a_4 - a_5 = 0 .$$

解此方程组得行空间的一组基

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

得 $\begin{cases} a_3 = & -3a_1 - a_2 \\ a_5 = & 2a_1 + 5a_2 + 2a_4 \end{cases}$ a_1, a_2, a_4 为自由变量.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -3a_1 - a_2 \\ a_4 \\ 2a_1 + 5a_2 + 2a_4 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故 A 的简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$.

2) A 列向量组的一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，且

$$\alpha_3 = -3\alpha_1 - \alpha_2 , \ \alpha_5 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 ;$$

3) A 行空间的一组基为简化阶梯形的前 3 个行向量;

若 $\beta = [\,1 \quad a \quad 0 \quad 3 \quad 2a-1\,]$ 落在 A 的行空间里， 则 β 在

此基底下的坐标只能是 $[\,1 \quad a \quad 3\,]^T$，且有

$$-3 - a = 0 , \quad 2 + 5a + 6 = 2a - 1 .$$

此条件当且仅当 $a = -3$ 时成立.

故当且仅当 $a = -3$ 时 β 落在 A 的行空间里，此时 β 的坐标是

$[\,1 \quad -3 \quad 3\,]^T$.

4) $\mathbf{A}=[\,\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_4\,]\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

四.（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 记 $C(A)=\{X\in M_3(R)\mid AX=XA\}$.

1) 证明：集合 $C(A)$是线性空间 $M_3(R)$ 的子空间;

2) 求子空间 $C(A)$ 的维数和一组基 .

解:

2) $C(A)$ 的一组基为 I，A，A^2 （ $A^3=0$ ）。$\dim C(A)=3$.

五.（24 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 依次是 $A=\begin{bmatrix}6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 7 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 6 & 1 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

的列向量. 设 $U=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4>$, $W=<\beta_1,\beta_2,\beta_3>$ 是 R^4 的子空间.

1) 求 $U+W$ 与 $U\cap W$ 的维数与基底；

2) 设 $\gamma=[\,2\;3\;2\;2\,]^T$. 判断集合 $(\gamma+W)\cap U$ 是否非空;

若非空，将其写为 $\eta+V$ 的形式，这里 $\eta\in R^4$， V 是 R^4 的子空间 (写出 V 的一组基).

解：1) 对 A 作行变换, 化为简化阶梯形

$$\begin{bmatrix}6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 7 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 6 & 1 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

由此看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1$ 构成 $U+W$ 的基， $\dim(U+W)=4$；

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 构成 U 的基， $\dim U = 3$；

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 构成 W 的基， $\dim W = 3$.

于是 $\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2$.

由简化阶梯形可看出

$$\beta_2 - 2\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 \ , \quad \beta_3 + 2\beta_1 = -\alpha_2 + \alpha_4 \ \in U\cap W,$$

且由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关知 β_1， $\beta_2 - 2\beta_1$， $\beta_3 + 2\beta_1$ 线性无关 .

故 $\beta_2 - 2\beta_1$， $\beta_3 + 2\beta_1$ 也线性无关，它们构成 $U\cap W$ 的一组基.

2）注意到 $U+W=R^4$， γ 可表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1$ 的线性组合:

$\gamma = \alpha_2 + \beta_1$. 以下证明 $(\gamma + W)\cap U = \alpha_2 + W\cap U$,

(这也说明 $(\gamma + W)\cap U$ 非空).

由 $\gamma + \beta = \alpha_2 + (\beta + \beta_1), \forall \beta \in W$，知 $\gamma + W = \alpha_2 + W$

故 $\quad (\gamma + W)\cap U = (\alpha_2 + W)\cap U$.

显然 $\alpha_2 + W\cap U \subseteq \alpha_2 + W$， 且 $\alpha_2 + W\cap U \subseteq U$.

故 $\quad \alpha_2 + W\cap U \subseteq (\alpha_2 + W)\cap U$.

若 $\alpha \in (\alpha_2 + W)\cap U$，即 $\alpha \in U$ 且 $\alpha = \alpha_2 + \beta, \beta \in W$.

则 $\beta = \alpha - \alpha_2 \in U$，故 $\beta \in W\cap U$. 于是 $\alpha \in \alpha_2 + W\cap U$.

综上所述，我们有 $(\gamma + W)\cap U = \alpha_2 + W\cap U$.

六.（8 分） 记 $M_n(R)$是由全体 n 级实矩阵构成的线性空间. 设 W 是 $M_n(R)$的线性子空间，且 $\dim W \geq n^2 - n + 1$. 证明: W 至少包含一个满秩的矩阵.

证: 对 W 的一组基 $A_1, \dots, A_r$ 作以下初等变换:

任取 A_1 的一个非零元素, 比如 (i, j)元, 用 A_1 的适当倍数去减其余 $r-1$ 个 A_k, 使得每个 A_k 的 (i, j)元都取 0. 这个选定的 (i, j)元称为 A_1 的主元; 再依次对 $A_2, \dots, A_r$ 重复以上操作: 选 A_s 的一个非零元作主元, 用 A_s 的适当倍数去减其余 $r-1$ 个 A_k, 使得每个 A_k 在该位置都取 0.

经过以上改造, 得到 W 的一组基 $A_1, \dots, A_r$, 每个 A_k 都对应一个主元位置, 在该位置 A_k 的元素不为零, 其它 $r-1$ 个矩阵取 0.

用适当的系数对 $A_1, \dots, A_r$ 作线性组合, 可使组合矩阵在这 r 个主元位置取任意指定的值.

以下用归纳法证明: 当一个 n 级矩阵有 $n^2 - n + 1$ 个位置的值可以任选时, 总有一种取法可使矩阵满秩 (不管其余 $n-1$ 个位置取什么值).

在 $n = 1$ 时, 命题成立;

假设命题对 $n-1$ 级的方阵成立, 考察 n 级方阵的情况.

由抽屉原则, 总有一行, 不妨设是第 i 行, 该行的 n 个元素都可任选. 再取一列, 不妨设是第 j 列, 使得此列中至少有一个元素不能任选. 在第 i 行中令 (i, j)元为 1, 其余 $n-1$ 个位置为 0.

由于在 (i, j)元的余子阵中至多有 $n-2$ 个位置的值不能任选 (其余位置可任选), 应用归纳假设, 存在子阵元素的选法, 使得 (i, j)元的余子式不等于零. 在此取法下, 有

$$n \text{ 级方阵的行列式} = (i, j)\text{元的代数余子式} \neq 0.$$

故 n 级方阵满秩.