yj2 数分Ⅲ 期中 2015

数学作业纸

院系　　　　姓名　　　　学号　　　　第　　页

1. (20分)

(1) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 是否存在？若存在则求其值；不存在说明理由.

由 $|\sin(x^3+y^3)|\le|x^3+y^3|$，故上式 $\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|$

$=\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|$

$\le|x|+|y|$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$　也可极坐标 $\lim\limits_{r\to0}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0$

(2) $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ 当 $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ 时，$f(0,0,0)=0$. 讨论在 $(0,0,0)$ 处连续性.

取 $\{(\frac1k,\frac1k,\frac1k)\}$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\frac1k,\frac1k,\frac1k)=\frac13$

取 $\{(\frac1k,0,0)\}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\frac1k,0,0)=1$，不等

故在此处不连续

2. (20分)

(1) 设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 是由 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 确定，φ,ψ 连续可微且 $\varphi_x'\psi_y'\ne\varphi_y'\psi_x'$ 考虑 $w=f(x(u,v),u,v)$，f 连续可微. 求 $\frac{\partial w}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial v}$

$\frac{\partial w}{\partial u}=f_1'\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+f_2'$

$\frac{\partial w}{\partial v}=f_1'\frac{\partial x}{\partial v}+f_3'$

而 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial u}=1=\varphi_x'\frac{\partial x}{\partial u}+\varphi_y'\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial v}{\partial u}=0=\psi_x'\frac{\partial x}{\partial u}+\psi_y'\frac{\partial y}{\partial u}\end{cases}$

故由 Cramer $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\psi_y'}{\varphi_x'\psi_y'-\psi_x'\varphi_y'}$

故 $\frac{\partial w}{\partial u}=f_1'\cdot\frac{\psi_y'}{\varphi_x'\psi_y'-\psi_x'\varphi_y'}+f_2'$

同理有 $\frac{\partial w}{\partial v}=f_1'\cdot\frac{\psi_x'}{\psi_x'\varphi_y'-\varphi_x'\psi_y'}+f_3'$

(2) 设 $x,y>0$，a,b 非负实数，求 $z=x^ay^b$ 在条件 $ax+by=1$ 下的极大值 $M_{a,b}$，进一步求 $M_{a,b}$ 关于 a,b 极值

$f(x,y)=z=x^ay^b$ 在限制 $\varphi(x,y)=ax+by-1=0$

作 Lagrange 乘数 $F(x,y,\lambda)=x^ay^b+\lambda(ax+by-1)$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=ay^bx^{a-1}+\lambda a=0 & ①\\ \frac{\partial F}{\partial y}=bx^ay^{b-1}+\lambda b=0 & ②\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=ax+by-1=0 & ③\end{cases}$$

由①②有 $x^{a-1}y^b=x^ay^{b-1}$，即 $x=y$

故有唯一驻点 $(\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+b})$

由题意，此为极大值点，

$M_{a,b}=f(\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+b})=(\frac{1}{a+b})^{a+b}$

又由 $a,b>0$ 设 $a+b=t$，有 $M(t)=(\frac1t)^t$ $(t>0)$

有 $\lim\limits_{t\to+\infty}M(t)=0$.　$\ln M(t)=-t\ln t$

$(\ln M(t))'=\frac{M'(t)}{M(t)}=-\ln t-1$　$M'(t)=(\frac1t)^t(-\ln t-1)$

故 $t=\frac1e$ 时 $M'(t)=0$，$M(t)$ 取极大值

$M_{a,b\,max}=M(\frac1e)=e^{\frac1e}$，当且仅当 $a+b=\frac1e$ 取等

3.(20分)

(1) 证：球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交，即在交点处法向量垂直

设交于 (x_0, y_0, z_0)，易知球面的切平面法向量为 $\vec{n}_1(x_0, y_0, z_0)$

设 $G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$

$\frac{\partial G}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial G}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial G}{\partial z}=-2a^2z$

故法平面 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2a^2z_0(z-z_0)=0$

法向量 $\vec{n}_2(2x_0, 2y_0, -2a^2z_0)=(x_0, y_0, -a^2z_0)$

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=x_0^2+y_0^2-a^2z_0^2=0$. 得证

(2) 求曲线 $\Gamma: x=a\sin t \quad y=a\cos t, \ z=bt$ 上各点的切线 l 的方程。当切点沿 Γ 运动时，化所有切线 l 形成曲面为 Σ，求 Σ 上各点切平面方程.

设点 (x_0, y_0, z_0)，有 $\frac{\partial x}{\partial t}=a\cos t \quad \frac{\partial y}{\partial t}=-a\sin t$

$\frac{\partial z}{\partial t}=b$. 故切线方向 $\vec{m}(a\cos t_0, -a\sin t_0, b)$

切线 l: $\frac{x-a\sin t_0}{a\cos t_0}=\frac{y-a\cos t_0}{-a\sin t_0}=\frac{z-bt_0}{b}$ //

设 l 上点有参数 s. 则对 $\forall t$. 有曲面

$$\Sigma: \begin{cases} x=a\sin t+s\cdot a\cos t \\ y=a\cos t-s\cdot a\sin t \\ z=bt+sb \end{cases}$$

从而消去 t, s 得 t_0, s_0

设 $\Sigma: F(x,y,z)$

$x^2+y^2=a^2+s^2a^2, \quad s=\frac{z-bt}{b} \quad t=\frac{z-sb}{b}$

故 $x^2+y^2=a^2+\frac{a^2}{b^2}(z-bt)^2$

$=a^2+\frac{a^2}{b^2}(z-b\cdot\frac{z-sb}{b})^2$?

对 (t,s) 有 $\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}=abs_0\cos t_0 \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}=-abs_0\sin t_0$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}=-a^2s_0$, $s_0 t_0$ 由 Σ 方程给出

切平面 $abs_0\cos t_0 x-abs_0\sin t_0 y-a^2s_0z+a^2s_0bt_0=0$

4.(15分). 证：凸函数的极小值点具有全局性，即：设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是开区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上连续可微的凸函数。证：若 $P_0\in D$ 为 f 的极小值点，那么也是 f 在 D 上的最小值点

由凸函数，对 $\forall\vec{x}, \vec{y}\in D$. $\lambda\in[0,1]$ 有

$f(\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y})\le\lambda f(\vec{x})+(1-\lambda)f(\vec{y})$

对极小值点 $\vec{P}_0$. 在 $\vec{P}_0$ 邻域内 $\forall\vec{x}$ 有 $f(\vec{x})\ge f(\vec{P}_0)$

对 $\forall\vec{x}\in D$. 考虑 $\vec{x}$ 与 $\vec{P}_0$ 连线上点，即 $\lambda\in[0,1]$

$\vec{z}=\lambda\vec{P}_0+(1-\lambda)\vec{x}$.

有 $f(\vec{z})\le\lambda f(\vec{P}_0)+(1-\lambda)f(\vec{x})$

又由 P_0 极小值点，$\exists\delta_0>0$. 当 $\vec{y}\in B(\vec{P}_0,\delta_0)$

有 $f(\vec{P}_0)\le f(\vec{y})$.

取 $\vec{z}\in B(\vec{P}_0,\delta_0)$. 则 $f(\vec{z})\ge f(\vec{P}_0)$

故 $f(\vec{P}_0)\le\lambda f(\vec{P}_0)+(1-\lambda)f(\vec{x})$

故 $f(\vec{x})\ge f(\vec{P}_0)$ 对 $\forall\vec{x}\in D$ 成立，得证

数学作业纸

院系　　姓名　　学号　　第　页

5.(15分) 设 $z=f(x,y)$ 为有界闭区域D上连续函数，在D内部偏导存在，在边界上其值为0，在D内部满足 $z_x'+z_y'=f(z)$，f严格单调，$f(0)=0$，证：$z(x,y)\equiv 0\ ((x,y)\in D)$

由 $f(x,y)$ 在有界闭区域连续，知f在D内可取到 $f(x)_{min}=f(x_1,y_1)$　$f(x)_{max}=f(x_2,y_2)$

若 $(x_1,y_1).(x_2,y_2)\in\partial D$. 则 $f_{max}=f_{min}=0$

故 $f(x,y)\equiv 0$　若在 $D\setminus\partial D$ 且为0 同理

不妨设. 若有 $(x_2,y_2)\notin\partial D$. 且 $f(x_2,y_2)>0$

由连续性. $\exists\delta>0$, 当 $(x,y)\in B((x_2,y_2),\delta)$

$f(x,y)>0$, 且 (x_2,y_2) 为局部极大值

故有 $z_x'(x_2,y_2)=z_y'(x_2,y_2)=0=f(z_2)$

又由严格单调. 故 $z_2=0=f(x_2,y_2)$. 矛盾.

6.(15分) 设 $f(x,y)$ 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 的二元函数，关于y连续，且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在，若 $f(x,y)$ 在P点和Q点有 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_P>0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_Q<0$ 证：一定有M点，使 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_M=0$；进一步是否有 $M\in\overline{PQ}$

(1)

若不存在M. 使 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_M=0$. 由 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在知f关于x连续

则对 $\forall y_0$ 固定，则 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x,y_0)}$ 恒 >0 或恒 <0 ①

// 设 $Y_1=\{y\mid \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x,y)}>0\}$　$Y_2=\{y\mid \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x,y)}<0\}$.

有 $Y_1\cup Y_2=\mathbb{R}$. 若可证 Y_1. Y_2 均为开集

则必有一者为 ϕ. 一者为 $\mathbb{R}$. 否则不开

进而与P处正. Q处负矛盾 //

// 下证 Y_1 为开集. Y_2 同理

取 $y_0\in Y_1$, 则 $f(x,y_0)$ 关于x单增.

对 $\forall x_1<x_2$. 有 $f(x_1,y_0)<f(x_2,y_0)$

取 $\varepsilon<\frac{f(x_2,y_0)-f(x_1,y_0)}{2}$.

由f关于y连续. $\exists\delta_0>0$. s.t.

$\forall y_1\in U(y_0,\delta)$ 时 $|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

且 $|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $f(x_2,y_1)-f(x_1,y_1)\geqslant f(x_2,y_0)-f(x_1-x_0)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}>0$

由一元中值定理. $\exists\xi\in(x_1,x_2)$.

$f_x'(\xi,y_1)=\frac{f(x_2,y_1)-f(x_1,y_1)}{x_2-x_1}>0$

由假设①知 $\forall x$. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\big|_{y=y_1}>0$

故 $y_1\in Y_1$. 即 $U(y_0,\delta_0)\subset Y_1$

Y_1 开集得证 // 故M点存在

// ① 若 $y_P=y_Q$. 由一元导数介值性知存在M

② 若 $y_P\neq y_Q$. 不妨设 $y_P<y_Q$

(i) $M_1(x_P,y_Q)$. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{M_1}\leq 0$. 同①

(ii) $M_2(x_Q,y_P)$. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{M_2}\geq 0$. 同①

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{M_1}>0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{M_2}<0$.

若不存在M. //

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{x}{5}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　对 $P(0,0)$ $Q(1,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}\big|_P=-\frac{1}{5}$

$f_x'(x,y)=\begin{cases}\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{1}{5}, & x.y\neq 0\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{5}, & x=0.y\neq 0\\ -\frac{1}{5}, & x.y=0\end{cases}$　$\frac{\partial f}{\partial x}\big|_Q=\frac{6}{25}-\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

但直线 $y=2x$ 上不存在 $\frac{2x(3x^2)}{25x^4}-\frac{1}{5}=0$ $(x=\frac{6}{5}>1)$

7.(15分). 给定边长为1等边△ABC. 在所有二等分

其面积的直线段中，求出最短l、最长L.

若允许折线，是否有一折线比l短. 无

在全部直线/二次曲线中求最短的

圆弧?

yj2 数分III 期中 2017

数学作业纸

院系 姓名 学号 第 页

1.(15分) 确定下列极限是否存在，存在则求值

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$$

不存在. 对 $k\in Z_+$. 取点列 $\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}$

有 $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{3}{k^2}}\right)^{\frac{2}{k}}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{2}{k}}=1$

再取 $\{(\frac{1}{k},0,0)\}$ $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{0}{\frac{1}{k^2}}\right)^{\frac{1}{k}}=0$

二者不等. 故极限不存在

2.(15分). 求在 $(1,-1,1)$ 处切线与法平面

$$\begin{cases}F(x,y,z)=3x^2y+y^2z+2=0\\ G(x,y,z)=2xz-x^2y-3=0\end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=6xy$ $\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2+2yz$ $\frac{\partial F}{\partial z}=y^2$

$\frac{\partial G}{\partial x}=2z-2xy$ $\frac{\partial G}{\partial y}=-x^2$ $\frac{\partial G}{\partial z}=2x$

$A=\begin{pmatrix}3x^2+2yz & y^2\\ -x^2 & 2x\end{pmatrix}\Big|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}=3$

$B=\begin{pmatrix}y^2 & 6xy\\ 2x & 2z-2xy\end{pmatrix}\Big|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}1&-6\\2&4\end{vmatrix}=16$

$C=\begin{pmatrix}6xy & 3x^2+2yz\\ 2z-2xy & -x^2\end{pmatrix}\Big|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}-6&1\\4&-1\end{vmatrix}=2$

故切线: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{16}=\frac{z-1}{2}$

法平面: $3(x-1)+16(y+1)+2(z-1)=0$

即 $3x+16y+2z+11=0$

3.(15分) 证: $x+x^2+y^2+(x^2+y^2)z^2+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域内唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处所有三阶偏导数

设为 $F(x,y,z)$. 有 $F(0,0,0)=0$

F, $F_z'(x,y,z)=2(x^2+y^2)z+\cos z$ 在 $U((0,0),\delta)\times U(0,\delta)$ 内连续, $F_z'(0,0,0)=1\neq0$

故唯一确定隐函数 $f(x,y)=z$

设 f 在 $(0,0)$ 处可 Taylor 展为 $f(x,y)=a_1x+a_2y+b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+c_1x^3+c_2x^2y+c_3xy^2+c_4y^3+o((x^3+y^3))$ $(\sqrt[3]{x^3+y^3}\to0)$

故 $F(x,y,f(x,y))=x+x^2+y^2+(x^2+y^2)(a_1x+a_2y)+a_1x+a_2y+b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+c_1x^3+c_2x^2y+c_3xy^2+c_4y^3-\frac{1}{6}(a_1^3x^3+a_2y^3+3a_1^2a_2x^2y+3a_1a_2^2xy^2)+o(f^3(x,y))$

$=(a_1+1)x+a_2y+(b_1+1)x^2+b_2xy+(b_3+1)y^2+(c_1-\frac{1}{6}a_1^3)x^3+(c_2-\frac{1}{2}a_1^2a_2)x^2y+(c_3-\frac{1}{2}a_1a_2^2)xy^2+(c_4-\frac{1}{6}a_2^3)y^3+o(\sqrt[3]{x^3+y^3})=0$

故 $a_1=-1$. $a_2=0$. $b_1=-1$. $b_2=0$. $b_3=-1$

$c_1=-\frac{1}{6}$ $c_2=0$ $c_3=0$ $c_4=0$

又由 $c_1=\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial f^3(x,y)}{\partial x^3}$. 有 $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}=-1$

同理有 $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial f^3(x,y)}{\partial y^3}=0$

4.(15分) 计算 $\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$, D 为由 $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=\rho$, $xy=2$, $xy=4$ 围成的闭区域

5.(10分). 设$\vec{x}$是n^2维向量$\vec{x}=(x_{11},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{nn})$

考虑,由下式定义的n^2元函数$f:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$.

$f(\vec{x})=\det(x_{ij})$. 即f为其变元的n阶行列式

计算$\vec{x}\cdot \mathrm{grad} f(\vec{x})$在$\vec{x}_0$处值,$\vec{x}_0$由下式给出:

$x_{kk}=k\ (k=1,2,\cdots,n)$, $x_{ij}=0\ (i\neq j)$

$\det(x_{ij})$. 对x_{ij}的偏导为其代数余子式

故$\mathrm{grad} f(\vec{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{11}},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{nn}}\right)$

$\vec{x}\cdot\mathrm{grad} f(\vec{x})=x_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{11}}+\cdots+x_{nn}\frac{\partial f}{\partial x_{nn}}$

又由$\left.\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right|_{\vec{x}_0}=0\ (i\neq j)$ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_{kk}}\right|_{\vec{x}_0}=\frac{n!}{k}\ (k=1,2,\cdots,n)$

故$\left.\vec{x}\cdot\mathrm{grad} f(\vec{x})\right|_{\vec{x}_0}=n\cdot n!$

6.(10分) 设在$[0,1]\times[0,1]$上$f(x,y)$定义

$$f(x,y)=\begin{cases}2^{2n}, & \frac{1}{2^n}\le x\le\frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^n}\le y\le\frac{1}{2^{n-1}}\\ -2^{2n+1}, & \frac{1}{2^{n+1}}\le x<\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^n}\le y<\frac{1}{2^{n-1}}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

计算$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$和$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$

7.(10分). 设$z=f(x,y)$在开区域$D\in\mathbb{R}^2$上连续.

$\vec{l}_1,\vec{l}_2$是两个给定不共线方向,若在D内每一点,

f沿$\vec{l}_1,\vec{l}_2$的方向导数均存在且为0. 问:这样的函数f是常数吗?是则证明,不是举反例

考虑$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)\in D$为不同点

由$\vec{l}_1,\vec{l}_2$不共线. 故可线性表出任意方向

即$\exists a,b\in\mathbb{R}$. s.t $\overrightarrow{P_1P_2}=a\vec{l}_1+b\vec{l}_2$

设$\overrightarrow{OP_1}+a\vec{l}_1=\overrightarrow{OP_0}$ 即P_1沿$a\vec{l}_1$移至$P_0(x_0,y_0)$

由$\forall$点,在$\vec{l}_1,\vec{l}_2$方向导数为0,由用Lagrange中值

有$f(x_0,y_0)-f(x_1,y_1)=\frac{\partial f(\vec{\xi}_1)}{\partial \vec{l}_1}(\overrightarrow{OP_0}-\overrightarrow{OP_1})=0$

同理有$f(x_0,y_0)=f(x_2,y_2)$. 故有

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$成立 即$f\equiv C$

8.(10分). 同2015年第5题

9.(5分) 设$z=f(x,y)$是定义在整个平面上的光滑函数. 对每个α,定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$,若对$\forall\alpha$. 有$\frac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ $\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$, 证:点$(0,0)$为$f(x,y)$极小值点.

$\frac{dg_\alpha(0)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\alpha=0$. $\forall\alpha$.

故$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$

而$\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha>0$

而$\det(Hf(0))=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(0)}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x\partial y}\right)^2$

又由上式. 取$\sin\alpha\neq0$时有

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$

即$\Delta=4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$成立且$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$

即$\det(Hf(0))>0$, $Hf(0)$正定,为极小值点,

10.(5分) 设$z=f(x,y)$为定义在整个平面上的光滑函数,对每个α,定义一元$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$

若对$\forall\alpha$, $g_\alpha(x)$在$x=0$处取到极小值. 问:$(0,0)$一定为$f(x,y)$极小值点吗?

不一定. $f(x,y)=x^2(x^2-y^4)$

有$y=\sqrt{x}\to$原点时可取到<原点的

但不引入向各方向

YJ2 数分III 期中 2019

数学作业纸

院系　　　　　姓名　　　　　学号　　　　　第　　页

1.(20分) 设 $D=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$，对 $\forall(x,y)\in D$，

$x=0.x_1x_2\cdots$，$y=0.y_1y_2\cdots$（当实数有两种表示时，如 $x=0.5$ 则记 $x=0.4999\cdots$）定义 $f(x,y)=0.x_1y_1x_2y_2\cdots$

(1) 问 D 内是否有函数极限存在的点 (x_0,y_0)？

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\in\mathbb{R}$

(2) 问 D 内是否有函数连续的点 (x_0,y_0)？即

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

(1) 存在 $x_0=0.111\cdots$　$y_0=0.111\cdots$

有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=0.1111\cdots$　由 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 可知

小数位均趋于1.

(2) 同(1). 有上式 $=f(x_0,y_0)$. 存在

注：(1) 如 $x_0=0.499\cdots$　$y_0=0.499\cdots$

则 (x_0,y_0) 附近 $\forall$ 小邻域可用 0.49 与 0.50 分别逼近，即邻域内有 $f(x,y)=0.4499\cdots$ 与 $f(x,y)=0.5500\cdots$，故极限不存在

(2) 找满足(1)但不满足(2)的点，(?)

2.(20分) 求曲面 $F(x,y,z)=0$ $G(x,y,z)=0$ 的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程

投影的切线 = 切线的投影

设交线上 (x_0,y_0,z_0)，则方向为 $\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$

故切线为 $$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{(x_0,y_0)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{(x_0,y_0)}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x_0,y_0)}}$$

在 xy 面上投影为 $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)=0$$

3.(20分) 设 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内二阶连续可微，且 $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=0$，$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}>0$，$\frac{\partial^2F(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$. 设 $y=y(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的函数，讨论在上述条件下 $y=y(x)$ 在 x_0 处极值性.

有 $F(x_0,y_0)=F(x_0,y(x_0))=0$

且由 $F(x,y(x))=0$，求 x 导有 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$

代入 (x_0,y_0) 有 $\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=0$　即 $y'(x_0)=0$

再求导有 $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{2\partial^2F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0$

代入 (x_0,y_0) 有 $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0$

故 $\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0}>0$　即 $y''(x_0)>0$

故 x_0 处为 $y(x)$ 极小值点.

4.(20分) $f(x,y)$ 称为 s 次齐次函数，若对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ 有 $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^sf(x,y)$. $g(x,y)$ 称为 (m,n,s) 次拟齐次，若对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ 有 $g(\lambda^mx,\lambda^ny)=\lambda^sg(x,y)$

(1) 设 $f(x,y)$ 为 s 次齐次可微，证

$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=sf(x,y)$

在 $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^sf(x,y)$ 左右对 λ 求导，有

$xf'_x(\lambda x,\lambda y)+yf'_y(\lambda x,\lambda y)=s\lambda^{s-1}f(x,y)$

取 $\lambda=1$ 可得

(2) 设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 均 s 次齐次可微，则有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(x,y)}{xP(x,y)+yQ(x,y)}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(x,y)}{xP(x,y)+yQ(x,y)}\right)$$

左 $=\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}(xP+yQ)-P(x\frac{\partial P}{\partial y}+Q+y\frac{\partial Q}{\partial y})}{[xP(x,y)+yQ(x,y)]^2}=\dfrac{yQ\frac{\partial P}{\partial y}-PQ-yP\frac{\partial Q}{\partial y}}{(xP+yQ)^2}$

右同理 $=\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}(xP+yQ)-Q(P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x})}{(xP+yQ)^2}=\dfrac{xP\frac{\partial Q}{\partial x}-PQ-xQ\frac{\partial P}{\partial x}}{(xP+yQ)^2}$

往证 $yQ\frac{\partial P}{\partial y} - yP\frac{\partial Q}{\partial y} = xP\frac{\partial Q}{\partial x} - xQ\frac{\partial P}{\partial x}$

即 $Q\cdot(y\frac{\partial P}{\partial y}+x\frac{\partial P}{\partial x}) = P(y\frac{\partial Q}{\partial y}+x\frac{\partial Q}{\partial x})$.

由(1)有上式左 $= Q\cdot sP$ = 右 $= P\cdot sQ$ 成立

(3) 对 (m,n,s) 次拟齐次可微 $g(x,y)$，讨论出相应于(1)中关系.

$m\lambda^{m-1}x\, g_x'(\lambda^m x,\lambda^n y)+n\lambda^{n-1}y\, g_y'(\lambda^m x,\lambda^n y) = s\lambda^{s-1}g(x,y)$. 令 $\lambda=1$

即 $mx g_x'(x,y)+ny g_y'(x,y)=s g(x,y)$

(4) 设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 分别为 $(m,n,s+n)$ 和 $(m,n,s+m)$ 次拟齐次可微. 给出(2)中关系式

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(x,y)}{mxM(x,y)+nyN(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N(x,y)}{mxM(x,y)+nyN(x,y)}\right)$$

5. (10分) 讨论方向导数的介值性. 即设 $f(x,y)$ 在区域 $D\in\mathbb{R}^2$ 内可微, P_1, P_2 为 D 内两点, 若 $f(x,y)$ 在 P_i 沿方向 $\vec{l}_i$ 的方向导数为 d_i $(i=1,2)$. 对 $\forall d$, $d_1<d<d_2$, 是否一定存在一点 $P\in D$ 及某个方向 $\vec{l}$, 使 $f(x,y)$ 在 P 沿 $\vec{l}$ 的方向导数为 d

由 P_i 处方向导数为 $\nabla f(P_i)\cdot\vec{l}$. 设 $\vec{l}(\cos\theta,\sin\theta)$

即 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x'\cdot\cos\theta+f_y'\cdot\sin\theta\le\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}$

故在 θ 变化时. $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}$ 可取到 $[-\sqrt{f_x'^2+f_y'^2},\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}]$

故设 d_1, d_2 中绝对值较大者为 d_2

由上知在 P_2 点, 必存在 $\vec{l}$ 使 $\frac{\partial f(P_2)}{\partial \vec{l}}=d\in[-|d_2|,|d_2|]$

6. (10分) (1) 证明: 凸的开区域上的凸函数是连续函数

(2) 证明: 凸函数的局部极小值必为整体极小. 即: 如果 $f(\vec{x})$ 为开区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上凸函数, $P_0\in D$ 是 $f(\vec{x})$ 极小值, 则也是 $f(\vec{x})$ 在 D 上最小值

(1) 凸的开区域. 有 $\forall\vec{x}_1,\vec{x}_2\in D$. $t\in[0,1]$.

$t\vec{x}_1+(1-t)\vec{x}_2\in D$.

且凸函数. 故 $tf(\vec{x}_1)+(1-t)f(\vec{x}_2)\ge f(t\vec{x}_1+(1-t)\vec{x}_2)$

故对 $\forall\vec{x},\vec{y}\in D$. 当 $\vec{y}\to\vec{x}$ 时. $t\in[0,1]$

$f(t\vec{x}+(1-t)\vec{y})\le tf(\vec{x})+(1-t)f(\vec{y})$

由 $\vec{y}\to\vec{x}$. 有 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\to\vec{x}$. 故取 $\varliminf_{\vec{y}\to\vec{x}}$ 有

$f(\vec{x})\le tf(\vec{x})+(1-t)\varliminf_{\vec{y}\to\vec{x}}f(\vec{y})$

即 $f(\vec{x})\le\varliminf_{\vec{y}\to\vec{x}}f(\vec{y})$

同时. $f(\vec{y})=f(\vec{y}-\vec{x}+\vec{x})\le f(\vec{y}-\vec{x})+f(\vec{x})$

对一元. $x,y,z\in(a,b)$. $x<y<z$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

故 $\forall x_0, x\in(a,b)$. $\delta\in\mathbb{R}_+$. 当 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subseteq(a,b)$

且 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\left|\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{(x_0+\delta)-x_0}\right|+\left|\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{x-(x_0-\delta)}\right|$$

记右为 k. 则 $0<|x-x_0|<\frac{\delta}{k}$ 有 $|f(x)-f(x_0)|<\delta$

对 $\mathbb{R}^n$. 记 $\vec{x}_0=(a_1,\cdots,a_n)$ $\vec{x}=(b_1\cdots b_n)$.

构造 $u_i(t)=f(b_1,\cdots b_{i-1},a_i+t,\cdots a_n)$ $i=1\cdots n$

均为一元凸且连续. 对 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, $\exists\delta\in\mathbb{R}_+$

(2) 同2015年第4题. $|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta$ 时 $|b_i-a_i|<\delta$. 且

$$|f(x)-f(x_0)|\le\sum_{i=1}^n|u_i(b_i-a_i)-u_i(0)|<n\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

yj2 数分III 期中 2021

数学作业纸

院系 姓名 学号 第 页

1.(15分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

讨论 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 的连续性

$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$

$=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ ((x,y)\neq(0,0))$

取 $\{(0,\frac{1}{k})\}$ 有 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_x(0,\frac{1}{k})=0$

取 $\{(\frac{1}{k},0)\}$ 有 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_x(\frac{1}{k},0)=\lim\limits_{k\to+\infty}(\frac{2}{k}\sin k-\cos k)$

不相等. 故 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续. 在 $\mathbb{R}^2/(0,0)$ 上连续. 且由对称有 $f_y(x,y)$ 同理

2.(15分) 同2017年第3题

3.(10分). 三个集合中选两个, 证明同胚

(1) 挖一点平面 $X_1:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

(2) 圆柱面 $X_2:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\}$

(3) 单叶双曲面 $X_3:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2-z^2=1\}$

4.(10分) 求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=\underbrace{(x-1)^3-y^2}_{\Downarrow\ x\geq 1}=0$ 下最小值

由 Lagrange 乘数法. 设 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+3\lambda(x-1)^2=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda y=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=(x-1)^3-y^3=0\end{cases}$ 可得 $\lambda=1$ 或 $y=0$

$\lambda=1$ 时 $3x^2-4x+3=0$ 无解

故 $y=0$. $x=1$.

故 $f(x,y)_{min}=f(1,0)=1$ 不可微点,

5.(10分) 同2015年第3题(2)

6.(20分) 同胚

7.(10分) 同2015年第6题

8.(10分). 同2017年第10题