往年题答案

2018 春期末 1(1)

1. 错

$V=\mathbb{R}^2$, $A(x_1,x_2)\mapsto(x_2,0)$
$\ker A=\{(x_1,0)|x_1\in\mathbb{R}\}$
$\mathrm{Im}A=\ker A$

2018 春期末 1(2)

2. 正确

设欧氏空间 (V,φ)，对任意 $\alpha,\beta\in V$, $\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\beta,\alpha)$.

因为 A 有 n 个不同实特征值, 故 $\dim\ker A^n=0$. 如果 $\varphi=0$, 则 $\mathrm{Im}A=V$，命题成立。如果 $\varphi=1$, 则设 α_i 为 A 关于特征值 0 的特征向量（并且不计作数的条件下又有其它一个），扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，并设 α_i 为 A 的关于特征值 $\lambda_i(\lambda_i\neq 0)$ 的特征向量 $(i=2,3,\ldots,n)$.

任取 $\alpha\in V$, 设 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$, 则 $A\alpha=k_2\lambda_2\alpha_2+\cdots+k_n\lambda_n\alpha_n$, 故 $\mathrm{Im}A\subseteq\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$。又因 $\dim\mathrm{Im}A=n-1$, 故 $\mathrm{Im}A=\langle\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$. 从而 $V=\ker A\oplus\mathrm{Im}A$.

2018 春期末 1(3)(4)

3. 正确

设 $(\cdot,\cdot)$ 的度量矩阵为 G 且 A 是对称矩阵。

若 $A\alpha=\lambda\alpha$, $G\beta=\mu\beta$, 取 $\alpha=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$, $\beta=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$, 则 $(A\alpha,A\beta)^TG(A\alpha,A\beta)=(A\alpha)^TGA(A\alpha)=(A\alpha,A\beta)=\alpha^TG\alpha$.

所以 $A^TGA=G$, 所以 A 是正交变换。

4. 正确

考虑 $J_s(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, 取 $A=J_s(0)$, $B=J_s(0)^2$, $C=J_s(0)^3$, $D=J_s(0)^4$。

王福正 2018 春期末第 4 题

4. 设 D 为导数运算符,且 I 为恒等变换则 $D+I=D+I$。从而 $C_n[x]$ 有一个基 $D^n x^n, D^{n-1}x^{n-1}, \ldots, D^0 x^0$。使得 D 在此基下的矩阵为 $J_n(1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$。断言: 对任一 D-不变子空间 W, 如果 W 为次数最高的多项式为 $x^m(m=\infty$或$0\le m\le n)$, 则 $W=\langle 1,x,\cdots,x^n\rangle$。

因为 $W\subset C[x]\subset\langle x,\cdots,x^m\rangle$。另一方面, 设 W 的基为 $f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$, 则 $f(x)$ 是 $D^m\ne 0$。所以, 在上述矩阵 M, 使得 M 在三角矩阵 M, 使得此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x)\right)$, 这就是数学的标准。

王福正 2018 春期末第 5 题

5. 任意变换 f, 估计应改成 "任一线性函数 f", 否则 $\mathrm{Hom}(V)$ 和 V 的维数都不一样。

设 V 的标准基是 $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$。设 $f(\epsilon_i)=\lambda_i,\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, 只需取 $\delta=\lambda_1\epsilon_1+\cdots+\lambda_n\epsilon_n$。

$\alpha=k_1\epsilon_1+\cdots+k_n\epsilon_n$, 对于任意 $\alpha\in V$, 有 $f(\alpha)=k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n$。

$\langle\alpha,\delta\rangle=\lambda_1k_1+\cdots+\lambda_nk_n$, 对于任意 $k_1,\ldots,k_n$, 都成立。

因为 f 在 V 的一个基上作用唯一确定一个 f, 所以 f 和 δ 是一一对应关系。

王福正 2018 春期末第 6 题

$\alpha^4-3\alpha^2+6\alpha=0$。

所以 $\alpha=0$。

则 A 相似于 Jordan 形矩阵 $J_n(0)$。

此 Jordan 形矩阵的迹等于 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0$ (特征值之和)。所以 A 矩阵的迹, 进而确定变换 $\alpha=0$。

王福正 2018 春期末第 7 题

设 $A=P(\lambda)P^{-1}$,

$C'=PCP^{-1}$,

$C'=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix}$,

取 $B'=B$,

设 $B=(P^{-1})^TB'P^{-1}$。

王福正 2021 春期末所有题

1. × ✓ ✓ × ✓ ×

2. (1) $\le$ (2) $\le$ (3) $\le$ (4) $\le$,

3. 1. 0 2. $\frac{n}{2}$ 3. 2 4. $-\frac{d}{dx}(x^n+x)(x-1)$

5. $\{c\in I_n|c\in\mathbb{C}\}$ 6. 1; -3 7. $\lambda=0$ $\{p:p(\lambda_1)=\cdots=p(\lambda_n)=0\}$ $\lambda=1$ $\{p:p(\lambda_0)=0\}$