# 高等代数测试 1

(本次测试占总成绩 25%，卷面 27 分，超出 25 分者按照 25 分计，按照 1 : 1 计入总评成绩。)

$2021=43\cdot 47$

$x^{2021}=(x^{43})^{47}$

一、填空与判断(sòng fēn)题 (共 14 分，1~10 每题全对得 1 分，最后两题 2 分)

(请按要求在答题纸上用 12 行回答问题，标行号①❷③❹等，每题一行，不按照要求格式书写者计 0 分。)

1. 令 $K[x]$ 为一元多项式环， $f,g\in K[x]$ 且 $\deg f=5,\deg g=3$，求 $\deg(f-g)=$ _5_。
2. 设 $n$ 为正整数，$f(x)=x^{2021}$, $g(x)=x^{43}-1$，求带余除法 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式 _1_。
3. 多项式 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 若在 $\mathbb{C}[x]$ 中不可约，就一定在 $\mathbb{R}[x]$ 中不可约么？(请填写✓/✗) _✓_。
4. 本原多项式一定不可约么，两个本原多项式的乘积是否还是本原多项式呢？(请分别写✓/✗) _✗_，_✓_。
5. $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ 是整环么，是域么，是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间么？(请分别写✓/✗) _✓_，_✓_，_✓_。
6. 设 $p$ 为奇素数，判断 $x^p+px+1$ 是否实数域上的不可约多项式。(请填写✓/✗) 。 ✗

$f=x^p+a$

$f'=0$

7. 令 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，请把 $f$ 分解为两个三元对称多项式的乘积 ____。 $(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3)$

$e_1$ $\quad e_1^2-3e_2$

8. 把 $V=\mathbb{R}$ 看成为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间。 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ 为其子空间。计算 $\dim(\mathbb{Q}[\sqrt{2}]+\mathbb{Q}[\sqrt{3}])=$ _3_
9. 对于一般的域 $F$，其上的一元多项式 $f\in F[x]$ 没有重因子当且仅当 $f,f'$ 互素。对么？(请填写✓/✗)。✗
10. 令 $\mathbb{C}_n[x]$ 为次数不超过 $n$ 的一元多项式全体，令 $f_k(x)=(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)$ , $k=0,1,\cdots,n$ 。任给两两不同 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ，$(f_0,f_1,\cdots,f_n)$ 给出 $\mathbb{C}_n[x]$ 的一组基。对么？(请填写✓/✗)。✓
11. 令 $C_n[x]$ 为次数不超过 $n$ 的一元多项式全体，给定 $x_0,\cdots,x_k\in\mathbb{C}$，令 $A=\{f\in\mathbb{C}_n[x]:f(x_0)=0,f'(x_1)=0,\cdots,f^{(k)}(x_k)=0\}$ ，可以验证 $A$ 为子空间，计算 $\dim A=$ ___ 。

$\begin{cases} n-k & n\geq k \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

12. 给定域 $F$ ，$k\in F$ ，令 $A_k=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{pmatrix}$ 。则 $V_k=F[A_k]$ 作为 $F$ 上的线性空间的维数 $\dim V_k=$ ___ 。

$k-1$ $\quad k+2$

找出 $\{f\in F[x],\ f(A_k)=0\}$

$\chi(\lambda)=\det(\lambda-A_k)=(\lambda-k+1)^2(\lambda-k-2)$

简答题 (共 4 分，每题 2 分。)

(请按要求用两行简短解答问题，每行限定 **10** 个字以内，标行号①❷，不按照要求格式书写者计 0 分。)

char $F=3$

$k-1=k+2$

二、判断以下多项式在有理数域上是否可约，并写明你的判定方法。 $f(x)=x^4-5x+1$

（第一行写结论，第二行写判定法）

$\mathbb{Z}_2$上看

三、给出如下 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 在有理数域中有重因式的充要条件：

$1, A_k$ 线性无关

(1) $f(x)=x^4+ax^2+b$ ; $\quad b=0$ or $a^2=4b$

(2) $f(x)=x^4+cx+d$ . $\quad 27c^4=256d^3$

（每行写下对应的充要条件即可）

$\chi(A_k)=0$

计算题 (共 9 分，每题 3 分)

(直接每行标行号①❷③，并给出一问答案，无需步骤。不按照要求格式书写者计 0 分)

$0=(A_k-k+1)(A_k-k-2)$

四、令 $V_{m,n}=K_m[x_1,\cdots,x_n]$ 为次数不超过 $m$ 的 $n$ 元多项式全体，

(1) 计算其作为 $K$ 上线性空间的维数； $\binom{n+m}{n}$. $=\sum_{k\leq m}\binom{n+k-1}{k}$

(2) 令 $W_n$ 为全体 $n$ 元对称多项式的集合， $W_{n;m}:=W_n\cap V_{m,n}$，求 $\dim W_{n;3}$ ; $1, e_1, e_1^2, e_2, e_1^3, e_1e_2, e_3$

(3) 考虑子空间 $V'_{m,n}:=K_m[x_1+x_2+\cdots+x_n]\subset V_{m,n}$， $W'_{n;m}:=W_n\cap V'_{m,n}$ ，求 $\dim W'_{n;m}$ 。 $m+1$

$\begin{cases} 4 & n=1 \\ 6 & n=2 \\ 7 & n\geq 3\end{cases}$

五、令 $f(x)=\cancel{x^{2021}-1}\in\mathbb{Q}[x]$， $f$ 可以唯一分解为 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约多项式的乘积，请问

(1) 次数为 1 的不可约因子有几个；

(2) 次数大于 1 小于 100 的不可约因子有几个；

(3) 总共有几个不可约因子。

六、考虑全体映射 $\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\}$ 构成的集合 $V$ ，其为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间。给定 $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_s)\in\mathbb{Q}^s$ ，我们考虑如下线性递归数列构成的集合

$$W(\vec{a})=\{f\in V:f(n)+a_1f(n-1)+\cdots+a_sf(n-s)=0\}\ 。$$

$n\geq s$

设 $a_k\neq 0,\ a_{k+1}=\cdots=a_s=0$

由于限定方程是线性的，不难验证对任意 $\vec{a}$ ，$W(\vec{a})$ 均为 $V$ 子空间。现在求

(1) 写下 $W(a_1,\cdots,a_s)$ 的维数公式； $=s$ $\quad k$

(2) 写下 $W(1,2,\cdots,2020,2021)\cap W(-2021,2022)$ 的一组基；

(3) 若 $\vec{a}=(0,1,2,0,2)\in\mathbb{Q}^5$ , 且 $f\in W(\vec{a})$ 满足初始条件 $(f(0),f(1),f(2),f(3),f(4))=(0,1,3,-1,0)$ ，求 $f(2021)$ 。

$f(n)+a_1f(n-1)+a_2f(n-2)=0$

(3) basis $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$

$f(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$

$= (x^3+2)(x^2+1)$

令 $g(x) = \prod (1+tx_i)$

$= \sum_{k=0}^{5} t^k \cdot e_k$

$\ln g(x) = \sum \ln(1+tx_i)$

$= \sum_{k,i} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x_i^k}{k} \cdot t^k$

$= \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot P_k \cdot t^k = \ln[(1+2 \cdot t^3)(1+t^2)]$

$= \sum \frac{(-1)^{j-1}}{j} (2t)^{3 \cdot j} + \sum_l \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot t^{2 \cdot l}$

$P_k = 2^{\frac{k}{3}} - (-1)^{\frac{k}{2}}$ 記 $\frac{k}{2}, \frac{k}{3} = 0$ 若非整数

$P_1 = 0, \quad P_2 = 1, \quad P_3 = 3, \quad P_4 = -1, \quad P_5 = 0.$

$f(k) = P_{k+1}$

$P_{n+k} \in W($

$k = 0, \dots, s$

$x_i^n \in W(\vec{a})$

$a_1 x_1^n + \dots + a_s x_s^n \in W(\vec{a})$

( ) x