18秋 高峡 高等代数1 高代1 期中

北京大学数学学院期中试题

考试科目 高等代数 I　考试时间 2018 年 11 月 14 日

姓　　名________　学　　号________

一.（25 分）简答题（填空题不必写过程）.

1）叙述有限维线性空间的维数与基底的定义；

2）已知向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ 中，$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_6$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可被 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 表出，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能表出 α_4. 问 α_2 能否被 α_1,α_3 表出？ $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ 的秩是多少？(写出所有可能并说明理由)

3）设方阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&3&1\\0&0&1&4\end{bmatrix}$. 则 $|A|=$___；A 第 4 行的四个余子式的和是___；将 A 写成 BC 的形式，其中 B 是对角元都为 1 的下三角方阵，C 是上三角方阵，则 B = ___ , C = _____；

4）交换 4×8 矩阵 A 的第一，第三行，再将所得矩阵第一行的 k 倍加到第二行上去，最后再交换第二，第三行. 这一过程如果用矩阵乘法实现，只需在 A 的左边乘以矩阵 B = ___.

二.（15 分）计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n\\ a^2+{x_1}^2 & a^2+{x_2}^2 & \cdots & a^2+{x_n}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n+{x_1}^n & a^n+{x_2}^n & \cdots & a^n+{x_n}^n\end{vmatrix}$.

三.（20 分）已知 $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\alpha_5]$ 是一个 8×5 矩阵，A 的行向量组与矩阵

$$B=\begin{bmatrix}2&1&0&5&5\\0&1&2&3&0\\2&0&-2&2&3\\3&0&-3&3&4\end{bmatrix}$$

的行向量组等价.

1）求 A 的简化阶梯型矩阵 J；

2）求 A 列向量组的一个极大无关组，用此极大无关组表出 A 的每个列向量；

3) 求A行空间的一组基，并判断当 a,b 取何值时，$\beta=[1\quad a\quad a+1\quad b\quad -b]$ 落在A的行空间里，写出此时 β 在行空间基底下的坐标；

4) 求齐次线性方程组 $AX=0$ 解空间的维数和一组基.;

5) 将A写成BC的形式，其中B是列满秩的矩阵，C是行满秩的矩阵.

四.（18分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_7$ 依次是矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&0&6&2&-1&0&8\\0&1&1&0&1&0&0\\2&1&5&2&1&0&6\\2&0&4&2&0&2&8\end{bmatrix}$ 的列向量. 设 $U=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4>$, $W=<\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7>$ 是 R^4 的子空间.

1) 求 $U+W$ 与 $U\cap W$ 的维数与基底；

2) 设 $\gamma=[1\,0\,0\,0]^T$. 判断集合 $(\gamma+W)\cap U$ 是否非空；若非空，将其写为 $\eta+V$ 的形式，这里 $\eta\in R^4$，V是 R^4 的子空间（写出 η 及V的一组基）.

五.（12分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&-1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}$ 的列向量.

1) 证明：$\alpha_i\alpha_j^T\ (1\le i\le 4,\ 1\le j\le 4)$ 是全体4级实矩阵构成的实线性空间 $M_4(R)$ 的一组基；

2) 求矩阵 $X=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\in M_4(R)$ 在以上基底下的坐标，即求矩阵 $C=[c_{ij}]$，使得

$$X=\sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\,\alpha_i\alpha_j^T.$$

六.（10分）设A是数域K上的n级方阵，设 V_k 是 A^k 的列空间（$k\ge 1$）.

证明： 1) $V_k\supseteq V_{k+1}$，$\forall k\ge 1$；

2) $\dim V_1-\dim V_2\ge \dim V_2-\dim V_3$.