2022年度数值线性代数期末考试试题(开卷)

考试时间: 2022年12月7日上午10:00–12:00.
本试题10道大题, 满分100分, 每题10分.

1. 已知$A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$的行向量为$\alpha_1 = [1,4,7,5]$, $\alpha_2 = [2,0,8,6]$, $\alpha_3 = [3,6,1,9]$, $\alpha_4 = [2,4,0,2]$, 求其列主元LU分解.

2. 设$A = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 24 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 29 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 21 \end{bmatrix}$, 以$u_0 = [\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}]^T$为初始值, 用幂法迭代3步, 求近似特征值和真解的相对误差.

3. 设方程组$Ax = b$的右端项为$b = [-1,4,7,9,-6,10]^T$, 系数矩阵A的行向量为$\alpha_1 = [9,-3,-4,-2,0,-2]$, $\alpha_2 = [-6,10,0,-3,1,-2]$, $\alpha_3 = [0,-4,12,-2,-6,-1]$, $\alpha_4 = [-2,-2,-4,15,5,3]$, $\alpha_5 = [-1,-1,-2,-3,20,0]$, $\alpha_6 = [5,2,2,3,1,30]$. 请分析求解此方程组的Gauss-Seidel迭代法的收敛性.

4. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵$Q$和对角元为正的上三角矩阵$R$使得$A = QR$. 请问求解特征值问题的QR方法是否收敛并说明原因.

5. 已知单位向量$w_k \in \mathbb{R}^{n-k+1}$, 定义$n-k+1$阶正交矩阵$\tilde{H}_k = I_{n-k+1} - 2w_k w_k^T$和$n$阶正交矩阵$H_k = \mathrm{diag}(I_{k-1}, \tilde{H}_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 请分析计算正交矩阵$Q = H_1 \cdots H_n$的计算复杂度(加减乘除的次数).

6. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$是一个非奇异矩阵, $P \in \mathbb{R}^{n\times m}$是一个列满秩的矩阵, 其中$n > m$, 令$A_c = P^T A P$. (1) 若$A$是对称正定的，证明$A_c$也是对称正定的. (2) 若$A$不是对称正定的, 则$A_c$是非奇异的吗？若是, 请证明; 若不是, 请给一个反例.

7. 假定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的特征值满足:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

前p个特征值相应的特征向量为$v_1,\cdots,v_p$. 给定p个线性无关的初始向量$X_0=[x_1,\cdots,x_p]$, 令$k=1$, 近似求解特征值问题的子空间迭代方法:

(1) 作分解$\mathbf{X}_{k-1}=\hat{Q}_kR_k$, 其中$\hat{Q}_k$是$p$个两两正交的单位列向量组成的$n\times p$矩阵, $R_k\in\mathbb{R}^{p\times p}$ 是对角元为正的上三角矩阵;

(2) $\mathbf{X}_k=A\hat{Q}_k$, k=k+1, 回到(1).

设Q_k的列向量张成的子空间为V_k, 证明

$$\lim_{k\to\infty}\max_{v\in V,\|v\|_2=1}\min_{s_k\in V_k}\|v-s_k\|_2=0,$$

其中$V=\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_p\}$.

8. 若$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$是对角元均大于零的非奇异对称矩阵, 证明求解线性代数方程组$Ax=b$的Gauss–Seidel迭代矩阵M的谱半径$\rho(M)<1$当且仅当A正定.

9. 已知$A=\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}$, 对任意向量$r\in\mathbb{R}^4$, 令

$$z:=M^{-1}r:=(D-L)^{-1}r+(D-U)^{-1}(r-A(D-L)^{-1}r),$$

其中D是矩阵A的对角部分, L为下三角部分的负, U为上三角部分的负. 在求解$Ax=b$的预条件共轭梯度法中, 已知在近似解x_k处的负梯度方向$r_k=b-Ax_k$, 令$z_k=M^{-1}r_k$. 对上预条件共轭梯度法产生的近似解x_k, $k=1,2$, 请估计如下$\|\cdot\|_A$范数下的误差比值

$$\|x-x_k\|_A/\|x-x_0\|_A,$$

其中x是线性方程组的真解, x_0是初始值(不能直接套书上定理结论).

10. 设矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$对称正定, L是单位下三角矩阵, D是对角矩阵, 且$A=LDL^T$. 令$B=QDQ^T$, 其中Q为正交矩阵. 对求解线性代数方程组$Ax=f$和$By=g$的最速下降法(分别以x_0和y_0为初始值), 请求最小正常数ρ_A和ρ_B所使得

$$\|x-x_k\|_A\le\rho_A^k\|x-x_0\|_A \text{ 和 } \|y-y_k\|_B\le\rho_B^k\|y-y_0\|_B,$$

并比较ρ_A和ρ_B的大小, 其中x和y为上述方程组的真解, x_k和y_k为第k步的近似解.