

北京大学数学科学学院期末考试试题

2015-2016 学年第一学期

考试科目: 抽象代数 考试时间: 2016 年 1 月 8 日
姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 7 道大题, 满分 100 分

1. (15 分) 设 H 是有限群 G 的一个非平凡子群。证明

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

2. (15 分) 设群 G 的阶为 $n = p^l m$, 其中 p 为素数且 $(p, m) = 1, l > 0$, 如果 $1 \leq k \leq l$, 那么 G 的任一 p^k 阶子群一定是某一 Sylow p -子群的子群。试证之。
3. (15 分) 试叙述代数形式的中国剩余定理, 并证明。
4. (10 分) 设 K 为 F 上的域扩张。证明: 如果 $u \in K$ 是 F 上的一个奇次代数元, 那么 u^2 也是 F 上的奇次代数元并且 $F(u) = F(u^2)$ 。
5. (25 分) n 是一个自然数。试分别估计具有 n 个元素且互不同构的群, 环, 域的个数的上界。简单论述你的理由。
6. (10 分) $C = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$ 是一个 n 维几何体。假设 G 是所有 C 到它自身的保距离线性变换构成的群。试分析确定这个群的阶。
7. (10 分) (本题二选一)
- (1) 简述论证 60° 角不能用直尺和圆规三等分的思路。
- (2) 简述 Galois 理论的基本思路。