概率论期末考试 (2024 春)

本试卷满分为 105 分, 按照 min{卷面成绩, 100分} 计入总评.

一、(15 分) 随机变量 Y 服从参数为 λ 的指数分布. 用 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数,
随机变量 $X = Y - [Y]$, $Z = [Y]$.

(1) 计算 $P(X \leqslant x,\ Z = n)$, 这里 x 是一实数, n 是非负整数; (2) 计算 X 与 Z 的分布;

(3) 讨论 X 与 Z 的独立性.

二、(10 分) 随机变量 X_n 依分布收敛于 X, Y_n 依分布收敛于正常数 c, 证明随机变量 X_nY_n 依分布收敛于 cX.

三、(10 分) 证明: 随机变量 X 与自身是独立的, 当且仅当 X 是几乎处处常值的.

四、(10 分) 随机变量 X_n 独立同分布于参数为 1 的指数分布, 给定正实数 α, 证明

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 1,\ 0 < \alpha \leqslant 1 \\ 0,\ \alpha > 1 \end{cases}.$$

五、(20 分)$X = X_1,\ X_2,\ \cdots$ 是独立同分布的随机变量.

(1) 若 $\mu = EX > 0$, 证明对 $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \geqslant n^\alpha) = 1$;

(2) 若 $\mu = EX = 0$, $EX^2 < +\infty$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \geqslant n^\alpha)$.

六、(10 分) 某城市有 10000 名市民与两个剧院, 每个剧院有 x 个座位, 每个市民独立等可能地选取一个剧院看戏. 若希望“某个市民来到剧院后因为没有座位不得不放弃看戏”的概率不超过 0.01, 计算 x 的最小值. (参考数据: $\Phi(2.05) = 0.98$, $\Phi(2.17) = 0.985$, $\Phi(2.33) = 0.99$, $\Phi(2.58) = 0.995$, Φ 是标准正态函数.)

七、(15 分) 对随机变量 X, Y 定义 $d(X,\ Y) = E\dfrac{|X-Y|}{1+|X-Y|}$.

(1) 证明 d 定义了随机变量之间的一个距离, 或曰 d 满足正定性、对称性、三角不等式;

(2) 证明随机变量 X_n 依概率收敛于 X 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} d(X_n,\ X) = 0$.

八、(15 分)(1) 随机向量 $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ \cdots,\ Y_n)^T$ 服从正态分布, 对任意的 $k \neq j$, $E(Y_k \mid Y_j) = 0$, $E(Y_k^2 \mid Y_j) = 1$. 计算 $\boldsymbol{Y}$ 的密度函数.

(2) 随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2,\ X_3)^T$ 服从期望为 0 的正态分布, $E(X_1^2 \mid X_2) = X_3^2$.

计算 $E\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_2^2+X_3^2}$.