北京大学数学科学学院期末试题

2023-2024 学年第 2 学期

考试科目: 高等代数 II（实验班）　考试时间: 2024 年 6 月 11 日

姓　　名: ____________　学　　号: ____________

本试题共 4 道大题, 满分 60 分, 考[illegible]间 120 分钟.

1. (10 分) 填空题（在答题纸上写出结果, 无需写过程）.

   (1) 设正定对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (2) 设对角元为正数的上三角矩阵 $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, 则 $B =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. (20 分) 设 V 为有限维复内积空间, $T \in L(V)$.

   (1) 假设 $T + T^*$ 正定. 证明 T 可逆.

   (2) 假设 $T + T^*$ 半正定. 证明 $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

3. (20 分) 设 n 为正整数. 证明: 对于 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 以下两个断言等价:

   (1) 存在 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \in O(2n)$;

   (2) 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 有 $\|A\alpha\| \leqslant \|\alpha\|$ (其中 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^t\alpha}$), 并且存在 $P, Q \in O(n)$ 使得 $A = PBQ$.

4. (10 分) 记 $n = 2024$. 设平面 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (允许重复) 满足 $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} = \mathbb{R}^2$. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_i - \alpha_j\|^2 x_i x_j,$$

   其中 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha\alpha^t}$. 将 q 的正、负惯性指数分别记为 r_1, r_2. 求数对 (r_1, r_2) 的所有可能值.