数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 3.　Time: 08:00 am to 09:40 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. (边值问题以及应用) 令 $\mathscr{L}u = -u''$。

a.（15分）考虑下面的两点边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}\phi - \phi = \lambda\phi, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{B.C.：} \quad \phi(0) = 0, & \phi'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

求出此问题的所有特征值 λ_n 和特征函数 $\phi_n(x)$。

b.（10分）考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u - u = \sin(x) + \beta, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{B.C.：} \quad u(0) = 0, & u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

这里，$\beta \in \mathbb{R}$是一个参数，讨论 β取值不同时，此问题的解的个数。

c.（10分）我们在引入格林函数的时候也介绍了 Dirac delta function $\delta(x)$，这种广义函数在众多科学问题中有应用。考虑如下问题，对于 $E > 0$，$\psi(x)$ 满足

$$\mathscr{L}\psi = (E - \delta(x))\psi.$$

我们设方程的解有如下的形式

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0 \\ Se^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

不妨设 $k > 0$，根据方程直接求出 k 的表达式。假设 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，根据 delta 函数的性质推导出 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 的另一个条件，并求出 S 和 R。

数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 3.　Time: 08:00 am to 09:40 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

2.（渐进分析初步）当 $\varepsilon \to 0$ 时，考虑如下抛射问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

以下，$c_1, c_2 \cdots$ 等都是 $O(1)$ 的常数。

a.（20分）如果 $\alpha = c_1$，$\beta = c_2\varepsilon$，令 $t^{\max}$ 为轨道达到最高点的时间，找到 $t^{\max}$ 的渐进表达式，精确到 $O(\varepsilon)$。(即误差是 $O(\varepsilon^2)$。)

b.（15分）如果 $\alpha = c_3/\varepsilon$，$\beta = c_4$，通过引入 $X(t) = x(t)\varepsilon$，求出 $X(t) \sim X_0(t) + \varepsilon X_1(t)$ 精确到 $O(\varepsilon)$ 的渐近展开解。

数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 3.　Time: 08:00 am to 09:40 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

3. (概率模型) a. （20分）考虑一所两年制的学校，一年级生在下一年，70% 会升到二年级，15% 留在一年级，15% 退学，二年级生在下一年，80% 会毕业，10% 留在二年级，10% 退学。用一个马氏链来描述此过程，写出转移概率矩阵。新生最终毕业的比例是多少？一个新生预期毕业或者退学要花多少年？（毕业或者退学是一个事件，是需要算一个预期时间。）

b.（10分）一个赌徒每轮游戏会有 $p \in (0,1)$ 的概率赢一块钱，也会有 $q = 1 - p$ 的概率输掉一块钱。如果赌徒输光了钱，或者赌资达到 $N \in \mathbb{N}$ 块钱，则赌徒将停止赌博。若赌徒在 n 轮游戏后的赌资为 X_n，建立一个马氏链模型，并写出转移概率矩阵。如果一个赌徒开始有 i 块钱（$0 < i < N$）那么，他的赌资（在输光前）达到了 N 块钱的概率是多少？如果 $N \to \infty$ 会怎么样？