

杨诗武实变函数期末

2020年1月

1. 如果 $f(x) \in AC([a, b])$, 求证: $(f(x))^2 \in AC([a, b])$.
2. 求证 $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ 是 $[0, 3]$ 上的有界变差函数并求出全变差.
3. 忘了.

4. 设 $f \in L^2([0, 1])$. 令 $g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{3}{4}}} dt$ ($0 \leq x \leq 1$), 求证:

$$\|g(x)\|_{L^2} \leq 8\|f(x)\|_{L^2}.$$

5. 设 $f_i(x)$ 是一列在 $[0, 1]$ 上(关于 x) 单调递增的绝对连续函数, 而且 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ 收敛, 求证: $f(x)$ 也是 $[0, 1]$ 上的绝对连续函数.

6. 求证:

$$\text{card}(BV([a, b])) = \text{card}([a, b]).$$

7. 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上定义如下:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \{10^i x\},$$

其中 $\{b\}$ 表示 b 的小数部分. 求证: 曲线 $(x, f(x))$, $(0 \leq x \leq 1)$ 不可求长.

8. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(a) (3分) c 是常数, 求证: $|f(x) - c|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, 从而有

$$\lim_{\substack{x \in B \\ m(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{|m(B)|} \int_B |f(y) - c|^p dy = |f(x) - c|^p \quad a.e.$$

其中 B 是包含 x 的闭球.

(b) (7分) 求证:

$$\lim_{\substack{x \in B \\ m(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{|m(B)|} \int_B |f(y) - f(x)|^p dy = 0 \quad a.e.$$

9. 求出并证明 $L^1([0, 1])$ 的一组标准正交基.

10. 设 $p > 0$.

(a) (2分) 忘了, 是一个与下面无关的水题.

(b) (3分) 如果 $f \in L^p(E)$, 求证:

$$\int_E |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty m(\{y : f(y) > x\}) x^{p-1} dx$$

(c) (5分) 如果 $1 < p \leq \infty$, B 表示开球, 定义

$$M_p f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(B)} \int_B |f|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

求证: 存在一个只与 p 有关的常数 C_p , 使得

$$\|M_p f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}.$$