

北京大学 2022 年数学分析 I 实验班期中考试

1. (24 分) 计算极限并写出简要过程:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n + n^2},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x,$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - x), \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-x^{\frac{4}{3}}},$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan^2 x) - x^2}{x^4}.$$

2. (12 分) 求下列函数的导数:

$$(1) f(x) = x^{\sin x} + (\cos x)^x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad (2) f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$(3) f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \quad (4) f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

3. (10 分) 假设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 满足 $f(0) = f(1)$ 。证明对任意正整数 n , 存在 $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ 使得 $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ 。

4. (10 分) 假设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(0)f'(0) \geq 0$ 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。证明存在 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, 使得

$$f^{(n)}(x_n) = 0.$$

5. (10 分) 假设存在常数 C 使得对任意非负整数 n 都有 $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$ 。证明, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 有无穷 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. (10 分) 证明实轴 \mathbb{R} 不能分解成可数个长度大于 0 的不交闭区间的并。

7. (9 分) 假设定义在区间 (a, b) 上的函数 f 的左右导数处处存在, 证明 f 至多在可数个点处不可导。

8. (15 分) 考虑无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- 1) (5 分) 证明级数在 $x = 0$ 处绝对收敛, 在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上条件收敛;
- 2) (5 分) 记极限函数为 $S(x)$, 证明 $S(x)$ 是 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上的连续函数;
- 3) (5 分) 证明函数 $S(x)$ 在 0 处不连续。