

北京大学
2024–2025 学年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132331 班号: 2 教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2024 年 10 月 29 日 10:10 — 12:00.
- 总分为 100 分.
- 课程和作业中的结论可以直接使用.
- 符号 ${}^t\mathbf{A}$ 代表矩阵 \mathbf{A} 的转置, \gcd 代表最大公因数.

1. (10 分) 设 p 为素数, 考虑有限域 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的多项式环 $\mathbb{F}_p[X]$.

- (i) 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 有 p 进制展开 $n = \sum_{k \geq 0} a_k p^k$, 其中 $a_k \in \{0, \dots, p-1\}$, 至多有限项非零; 回忆到这些 a_0, a_1, \dots 由 n 唯一确定. 证明 $\mathbb{F}_p[X]$ 中的等式

$$(X+1)^n = \prod_{k \geq 0} (X^{p^k} + 1)^{a_k}.$$

解答. 应用特征 p 时的性质 $(X+1)^{p^k a_k} = (X^{p^k} + 1)^{a_k}$, 对所有 k 相乘.

- (ii) 设 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 有 p 进制展开 $n = \sum_{k \geq 0} a_k p^k$, $m = \sum_{k \geq 0} b_k p^k$. 基于 (i) 证明二项式系数 $\binom{n}{m} := \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ (当 $n < m$ 时定义为 0) 满足同余式

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{k \geq 0} \binom{a_k}{b_k} \pmod{p}.$$

解答. 考虑 X^m 在 $\prod_k (X^{p^k} + 1)^{a_k} = \prod_k (\sum_{h_k=0}^{p^k-1} \binom{a_k}{h_k} X^{h_k p^k})$ 中的系数, 以及 m 的 p 进制展开的唯一性.

2. (20 分) 对于下列的 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \in \mathbb{Q}^3$, 求出一个极大线性无关子集.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

所以 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$ 等都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

3. (20 分) 在有理数域 \mathbb{Q} 上求下列矩阵的逆矩阵:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解答. 以消元法计算. 逆矩阵依序是 $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4. (10 分) 记 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, 记 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 为 \mathbb{C} 中包含 \mathbb{Q} , $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 的最小子环. 已知 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是 \mathbb{C} 的子域 (作业内容).

- (i) 以复数乘法让 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 成为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -向量空间. 证明 $1, \sqrt{5}$ 是此向量空间的一组基.
- (ii) 用复数乘法让 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 成为 \mathbb{Q} -向量空间. 证明 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ 是一组基.

提示. 可用课程中关于纯量限制与基的结论: 若 F 是域 E 的子域, B 是 E -向量空间 V 的基, C 是 E 作为 F -向量空间的基, 则 $\{cb : (b, c) \in B \times C\}$ 是 V 作为 F -向量空间的基.

解答. 首先须验证 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{5} + \mathbb{Q}\sqrt{10}$.

对于 (i), 观察到 1 和 $\sqrt{5}$ 生成 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ (作为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -向量空间), 故维数 ≤ 2 . 如果维数 $= 2$, 则 1 和 $\sqrt{5}$ 成基; 如果维数 $= 1$ 则 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 从而存在 $a, b \in \mathbb{Q}$ 使得 $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$, 但两边取平方易见此无可能.

对于 (ii), 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 以 $1, \sqrt{2}$ 为基和 (i) 的结论来推导.

5. (15 分) 设 $A \in M_{m \times n}(F)$, 其中 F 是域.

- (i) 证明 A 的秩 ≤ 1 当且仅当存在列向量 $b \in F^m$ 和 $c \in F^n$ 使得 $A = b \cdot {}^t c$ (仅作出本问得 8 分).
- (ii) 推而广之, 对于 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 证明 A 的秩 $\leq r$ 当且仅当存在 $B \in M_{m \times r}(F)$ 和 $C \in M_{r \times n}(F)$ 使得 $A = BC$.

解答. 对于 (ii), 将 A 分解成列向量 $(v_1 | \cdots | v_n)$, 将 B 分解成列向量 $(b_1 | \cdots | b_r)$, 并且记 $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$; 等式 $A = BC$ 等价于

$$v_i = \sum_{k=1}^r c_{ki} b_k$$

对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立; 当 A 给定, 存在这样的 B 和 C 因此等价于 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 可由 r 个元素生成. 代入秩的定义.

6. (10 分) 记 H 为所有函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 对函数的逐点加法和乘法构成的 \mathbb{R} -向量空间, 函数变元记为 x . 证明 H 的元素 $e^{1898x}, \dots, e^{2024x}$ 线性无关.

解答. 方法多种. 譬如假设有线性关系式 $\sum_{k=1898}^{2024} p_k e^{kx} = 0$, 则因为多项式 $\sum_k p_k X^k$ 若非零则根数有限, 而指数函数可以取无穷多个值, 故必有 $\forall k, p_k = 0$. 另一种方法则是考虑指数函数的增长速度, 逐步论证 $p_{2024} = 0, \dots, p_{1898} = 0$.

7. (15 分) 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 命 $\zeta = e^{2\pi i/n}$.

- (i) 定义 $f = \prod_{k=1}^n (1 + X^k)$, 展开后记为 $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$. 证明

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\zeta^j) = \sum_{j \geq 0} a_{jn}.$$

解答. 对 $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} a_k \zeta^{kj}$ 换序求和. 对所有 $k \geq 0$, 论证 $\sum_{j=1}^n \zeta^{kj}$ 在 $n \mid k$ 时为 n , 其它情形为 0.

- (ii) 对所有 $j \geq 1$, 命 $d = n/\gcd(j, n)$, 研究 $X^d - 1$ 的分解以推导

$$(1 + \zeta^j)(1 + \zeta^{2j}) \cdots (1 + \zeta^{dj}) = \begin{cases} 2, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶}, \end{cases}$$

$$f(\zeta^j) = \begin{cases} 2^{n/d}, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶}. \end{cases}$$

解答. 首先, d 的定义相当于说 ζ^j 是 d 次本原单位根. 对 $X^d - 1 = (X - \zeta^j) \cdots (X - \zeta^{dj})$ 代入 $X = -1$ 得到第一部分. 周期之故, $f(\zeta^j)$ 是以上乘积的 n/d 次幂, 故 $f(\zeta^j)$ 在 $2 \nmid d$ 时为 $2^{n/d}$, 在 $2 \mid d$ 时为 0.

- (iii) 对所有 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 定义 $\varphi(d)$ 为满足 $1 \leq h \leq d$ 并且和 d 互素的正整数 h 的个数. 在前两问的基础上证明

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 中元素和为 } 0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{ 的子集个数}) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ 奇}}} \varphi(d) 2^{n/d};$$

此处的子集容许为空集, 其元素和定义为 $0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

解答. 展开 f 可知 a_k 是 $\{1, \dots, n\}$ 中元素和为 k 的子集个数, 故 $\sum_{j \geq 0} a_{jn}$ 即欲证等式的左项. 根据 (i) 和 (ii), 这等于

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ 奇}}} C_d 2^{n/d},$$

其中 C_d 是使得 $\gcd(j, n) = n/d$ 的 $j \in \{1, \dots, n\}$ 的个数; 这般的 j 写作 $j = \frac{n}{d} \cdot j'$, 其中 $1 \leq j' \leq d$ 与 d 互素, 故 $C_d = \varphi(d)$.