1. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. (2) $\pm 2\sqrt{-1}$. $\square$

2. (1) $\times$. (2) $\times$. 反例: (1) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

3. (1) 记 $R = F[x]$. 分三种情况.

   (i) 设 $q \nmid p_T$. 取 $f, g \in R$ 使 $fq^k + gp_T = 1$, 则 $f(T)q(T)^k = \mathrm{id}$, 于是 $q(T)^k$ 可逆, 因此待证等式两边均为 0.

   (ii) 设 $q \mid p_T$ 且 $k \leqslant v_q(p_T)$. 设 $V = R\alpha$. 则对 $f \in R$, 有

$$f\alpha \in \mathrm{Ker}(q(T)^k) \iff q^k f\alpha = 0 \iff (p_T/q^k) \mid f \iff f\alpha \in R(p_T/q^k)\alpha.$$

   所以 $\mathrm{Ker}(q(T)^k) = R(p_T/q^k)\alpha$, 从而 $\dim \mathrm{Ker}(q(T)^k) = \deg(p_{(p_T/q^k)\alpha}) = \deg(q^k) = k\deg(q)$.

   (iii) 设 $q \mid p_T$ 且 $k > v_q(p_T)$. 设 $V = \bigoplus_{i=1}^r W_i$ 为准素分解, 其中 $W_1 = \mathrm{Ker}(q(T)^{v_q(p_T)})$. 则 $\mathrm{Ker}(q(T)^k) = W_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^r \mathrm{Ker}(q(T_{W_i})^k)$. 由情况 (i), 当 $i \geqslant 2$ 时有 $\mathrm{Ker}(q(T_{W_i})^k) = \{0\}$. 所以 $\mathrm{Ker}(q(T)^k) = W_1$. 再由情况 (ii), 得 $\dim \mathrm{Ker}(q(T)^k) = \dim W_1 = v_q(p_T)\deg(q)$.

   (2) 只需证: 对任意素多项式 $q \in R$ 有 $v_q(f_T/p_T) \geqslant v_q(f_{T_W}/p_{T_W})$. 用反证法. 假设存在素多项式 $q \in R$ 使得 $v_q(f_T/p_T) < v_q(f_{T_W}/p_{T_W})$. 考虑 T 的循环分解 $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ 和 T_W 的循环分解 $W = \bigoplus_{j=1}^s W_j$. 记 $n = \dim V$. 当 $r+1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $s+1 \leqslant j \leqslant n$ 时, 约定 $V_i = W_j = \{0\}$. 由不变因子间的整除关系, 有 $v_q(p_{T_{V_1}}) \geqslant \cdots \geqslant v_q(p_{T_{V_n}})$, $v_q(p_{T_{W_1}}) \geqslant \cdots \geqslant v_q(p_{T_{W_n}})$. 由于 $v_q(f_T/p_T) = \sum_{i=2}^n v_q(p_{T_{V_i}})$, $v_q(f_{T_W}/p_{T_W}) = \sum_{i=2}^n v_q(p_{T_{W_i}})$, 所以存在 $2 \leqslant t \leqslant n$ 使得 $v_q(p_{T_{V_t}}) < v_q(p_{T_{W_t}}) =: k$. 由 (1),

$$\dim \mathrm{Ker}(q(T)^k) - \dim \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1}) = \deg(q)\sum_{i=1}^n (\min\{k, v_q(p_{T_{V_i}})\} - \min\{k-1, v_q(p_{T_{V_i}})\}) \leqslant \deg(q)(t-1),$$

$$\dim \mathrm{Ker}(q(T_W)^k) - \dim \mathrm{Ker}(q(T_W)^{k-1}) = \deg(q)\sum_{i=1}^n (\min\{k, v_q(p_{T_{W_i}})\} - \min\{k-1, v_q(p_{T_{W_i}})\}) \geqslant \deg(q)t.$$

   这推出

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{Ker}(q(T)^k) + \dim(W \cap \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1})) \\
<\ & \dim(W \cap \mathrm{Ker}(q(T)^k)) + \dim \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1}) \\
=\ & \dim[(W \cap \mathrm{Ker}(q(T)^k)) + \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1})] + \dim(W \cap \mathrm{Ker}(q(T)^k) \cap \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1})) \\
\leqslant\ & \dim \mathrm{Ker}(q(T)^k) + \dim(W \cap \mathrm{Ker}(q(T)^{k-1})),
\end{aligned}$$

   矛盾. $\square$

4. (1) 不存在. (2) 不存在. 下面证明.

   (1) 若 A, B 满足 (1), 则 $p_{AB} = x^3$, $p_{BA} = x^5$. 由 $p_{AB} = x^3$ 可知 $(BA)^4 = B(AB)^3A = 0$, 与 $p_{BA} = x^5$ 矛盾.

   (2) 设 A, B 满足 (2), $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. 则 $C^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$. 从而 C^2 有 Jordan 标准型

$$\mathrm{diag}(J_3(0), J_3(0), J_3(0), J_4(0), J_4(0), J_1(0)).$$

   这也推出 C^2 幂零, 从而 C 幂零. 设 C 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}(J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_r}(0))$, $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_r$. 设 $s = \#\{1 \leqslant i \leqslant r : n_i \geqslant 2\}$. 对 $i \leqslant s$, 记 $p_i = [\frac{n_i+1}{2}]$, $q_i = [\frac{n_i}{2}]$, 则 $J_{n_i}(0)^2$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}(J_{p_i}(0), J_{q_i}(0))$. 从而 C^2 有 Jordan 标准型

$$\mathrm{diag}(J_{p_1}(0), \ldots, J_{p_s}(0), J_{q_1}(0), \ldots, J_{q_s}(0), J_{n_{s+1}}(0), \ldots, J_{n_r}(0)).$$

   上面两个 C^2 的 Jordan 标准型只差一个 Jordan 块的重排, 这是不可能的. $\square$