几何学期中试卷
2017年10月8日

每题10分，满分100分。

▽基本概念题:

(1)证明任意四面体$ABCD$三对对棱(即线段$\overline{AB}$与$\overline{CD}$,$\overline{AC}$与$\overline{BD}$,$\overline{AD}$与$\overline{BC}$)的中点的连线交于同一点。

(2)求经过直线$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ 并且平行于向量$\vec{u}$=(1,-1,-1)的平面。

(3)取定右手直角标系,在平面$\pi_1: x+y+z=1$和平$\pi_2: x-y=1$里各求一条经过点P=(1,0,0)的直线,使得它们的夹角等于π_1,π_2的二面角。

▽一般计算和证明题:

(4)证明三角形三条高线一定交于一点。

(5)设O,A,B,C是不共面的四点，记三个二面角为$\alpha=(AOB,AOC),\beta=(AOB,BOC),\gamma=(AOC,BOC)$,证明

$$\left|\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\angle BOC)}\right| = \left|\frac{\sin(\beta)}{\sin(\angle AOC)}\right| = \left|\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\angle AOB)}\right|$$

(6)取定右手直角坐标系,给定两条直线

$$l_1: \begin{cases} 2x-y+z+2=0, \\ x+2y+4z-4=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x+2y-1=0, \\ y-x+2=0 \end{cases}$$

求它们的公垂线方程.

(7)证明直纹面$x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$上没有平于平面$x+y+z=1$的直母线。

(8)设有两个平面仿射坐标系χ,χ'，并且χ'的x'轴在χ里的方程是$x+y+1=0$,χ'的y'轴在χ里的方程是$x-y-2=0$, χ'里坐标为(1,1)的点P在χ里的坐标是(4,5)。求χ里的双曲线$x^2-y^2+1=0$在χ'里的一般方程。

▽综合应用题:

(9)设已知$|OA|=2,|OB|=3,|OC|=4,|AB|=2,|BC|=3,|AC|=4$,求混合积$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$。

注意:你的答案不能包含根号下面套根号的复杂表达式,否则扣5分。

(10)设A是所有和抛物线$\alpha: \begin{cases} x^2=2y, \\ z=0 \end{cases}$ 及直线$l: x=y-1=z$都有交点并且平行于平面$\pi: x+2y+3z=0$的直线的并集,写出A的方程。要求这个方程必须具有$f(x,y,z)=0$的形式,其中f是一个x,y,z的多项式.

注意:可以不用整理化简得到的多项式,只要它确实是个多项式就行。