北京大学数学科学学院期中考试试题

2015-2016　学年第二学期

考试科目： 常微分方程　　**考试时间：** 2016 年 4 月25日

姓　　名： ________　　**学　　号：** ________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1. （30 分）计算下列各题

   (1) 求解初值问题：$y' = y^2 - 1, y(0) = 1$.

   (2) 求微分方程 $y' = \sqrt{1-y^2}$ 满足初值 $y(0) = 0$ 存在区间为整个数轴的解。

   (3) 求微分方程 ${y'}^2 - 2xy' + 2y = 0$ 的所有解。

2. （20 分）

   (1) 设 k 是给定常数，c 是变动的参数，求曲线族 $\Gamma_k(c) : y = 6kc + (x+3k+2c)^2$ 关于参数 c 变动时的包络 Γ_k.

   (2) 把（1）中的 k 看作参数，求曲线族 Γ_k 当 k 变动时的包络 Σ_1.

   (3) 设 c 是给定常数，k 是变动的参数，求曲线族 $\Gamma_c(k) : y = 6kc + (x+3k+2c)^2$ 关于参数 k 变动时的包络 Γ_c.

   (4) 把（3）中的 c 看作参数，求曲线族 Γ_c 当 c 变动时的包络 Σ_2.

3. （15 分）叙述并证明微分方程的 Picard 存在唯一性定理。

4. （15 分）试讨论微分方程

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = (x^2 + y^2 + 1)\sin y,\, y(x_0) = y_0$$

   解的存在性、唯一性、解的有界性以及解的存在区间。

5. （10 分）设 $y = \phi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的充分光滑函数，试给出一个以此函数为奇解的微分方程。

6. （10 分）设 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 均为定义在平面开区域 Ω 上的连续可微函数，且对任意的 $(x,y) \in \Omega$，有 $f(x,y) < F(x,y)$. 设微分方程 $y' = f(x,y)$ 和 $y' = F(x,y)$ 的同一初值问题 $y(x_0) = y_0$

的右行解分别为 $y = \varphi^+(x)$ 和 $y = \Phi^+(x)$, 其中 $(x_0, y_0) \in \Omega$。记 $d(x) = \Phi^+(x) - \varphi^+(x)$. 试讨论 $d(x)$ 在 $x \geq x_0$ 上的单调性。

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)