2024 WJJ test final 回忆版

FE enthusiast enthusiast

2025.01.10

Problem 1. 给定单叶双曲面 $9x^2+4y^2-z^2=36$.

(a) 求过点 $(0,5,8)$ 的两条直纹线的方向（用与它平行的向量表示）.

(b) 对两条同族的直纹线，求它们之间的距离的取值范围.

Problem 2. 一个 $\mathbb{R}P^2$ 的射影变换把四点

$$P_1=\left[(1,0,0)^T\right],\quad P_2=\left[(1,1,0)^T\right],\quad P_3=\left[(1,1,1)^T\right],\quad P_4=\left[(4,2,1)^T\right]$$

相应地变换到

$$Q_1=\left[(1,-1,-1)^T\right],\quad Q_2=\left[(0,1,-1)^T\right],\quad Q_3=\left[(0,0,1)^T\right],\quad Q_4=\left[(1,-2,1)^T\right].$$

求它在 $GL(3,\mathbb{R})$ 上的一个矩阵表示.

Problem 3. 已知过不同三点 z_1,z_2,z_3 的圆 C，求证：ω,ω^* 关于 C 对称当且仅当

$$(\omega,z_1;z_2,z_3)=\overline{(\omega^*,z_1;z_2,z_3)}.$$

Problem 4. 设 A 是度量空间 X 的闭子集. 证明任意连续函数 $f:A\to\mathbb{S}^2$ 可以连续延拓到 A 的一个开邻域.

Problem 5. 对每个 Mobius 变换，可以将其写为 $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$ 的形式. 记

$$\phi(T)=(a+d)^2.$$

求证：T 是椭圆的当且仅当 $\phi(T)\in[0,4)$.

注：T 是椭圆的指 T 在 $\mathbb{H}$ 上仅有一个不动点.

Problem 6. 拓扑空间 X 是一列圆 $(x-\frac{1}{n})^2+y^2=\frac{1}{n^2}\,(n\in\mathbb{N})$ 的并，赋予 $\mathbb{E}^2$ 的子空间拓扑.（X 也被称为*夏威夷耳环*）记 $Y=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，代表 $\mathbb{R}$ 把所有整点粘合在一起所得的商拓扑.

求证：X 与 Y 不同胚.

Problem 7. 如果一个群 $\Gamma\subset\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H})$ 满足对任意 $x\in\mathbb{H}$，$\{g(x):x\in\Gamma\}$ 均是 $\mathbb{H}$ 的离散子集，则称 Γ 是 *Fuchsian 群*.

(a) 求证：$\Gamma_q=\left\{\phi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}:a,b,c,d\in\mathbb{Z},q\mid b,q\mid c\right\}$ 是 *Fuchsian 群*.

(b) 给定 $k>0,k\neq 1$. 设 $f(z)=z+1$，$g(z)=kz$，问：f,g 生成的群 $\langle f,g\rangle$ 是否为 *Fuchsian 群*？