概率论期中考试 (2024 春)

一、(15 分) 连续掷一枚均匀硬币, 直到掷出两次正面为止. 在掷出至少两次反面的条件下,
(1) 计算掷出至少三次反面的条件概率; (2) 计算第一次掷出正面的条件概率.

二、(10 分) 从一副不含大、小王的扑克牌中抽取 5 张牌, 计算抽出的牌的不同的花色的数目大于不同的点数的数目的概率.

三、(15 分) 随机变量 X 有概率密度函数 $p(x) = \frac{c}{x} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$, $x > 0$.
(1) 计算 c 的值; (2) 计算 $\ln X$ 的分布; (3) 讨论 $(X,\ \ln X)$ 是否为连续型随机向量.

四、(10 分) 随机变量 $X,\ Y$ 有联合密度函数 $p(x,\ y) = xe^{-x(y+1)}$.
(1) 计算 XY 的分布; (2) 计算 $X + XY$ 的分布.

五、(15 分) 随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,\ 1)$, $X = x$ 时, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(x,\ 1)$.
(1) 计算 Y 的分布; (2) 计算 $P(XY \geqslant 0)$.

六、(10 分) 随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,\ 1)$, I 满足 $P(I = 1) = \frac{1}{2} = P(I = -1)$, $X,\ I$ 相互独立. 对随机变量 $Y = IX$,
(1) 计算 Y 的分布; (2) 讨论 I 与 Y 的独立性; (3) 讨论 X 与 Y 的独立性.

七、(10 分) 随机变量 X_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, X_2 服从参数为 λ_2 的指数分布, 二者相互独立, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. 构造与 X_1 同分布的随机变量 X_1', 与 X_2 同分布的随机变量 X_2', 使得几乎处处 $X_1' \leqslant X_2'$.

八、(10 分)X 是随机变量, 存在与 X 独立的随机变量 Y 使得 Y 与 $X + Y$ 均满足 Poisson 分布, 讨论 X 的所有可能分布.

九、(5 分)$X_1,\ \cdots,\ X_n$ 是独立同分布的, 分布函数为 $F(x)$. 考虑顺序统计量 $X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$, 与 X_i 独立同分布的随机变量 X, 对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 计算 $P(X_{(i)} < X < X_{(j)})$.