

2022几何(II)实验班期中

题源: Bilibili 离澈

1. 假设弧长参数曲线 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ 的曲率处处非零, 挠率不恒为零. 假设关于某个刚体运动(保向保距变换) $\sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 对于所有 $s \in \mathbb{R}$, 有 $\sigma(\gamma(s)) = \gamma(-s)$. 问: $\gamma(s)$ 的曲率函数 $\kappa(s)$ 和挠率函数 $\tau(s)$ 的奇偶性如何? 加以论证.

2. 考虑参数曲面片

$$\phi(s, t) = (s, t, e^{-(s^2+t^2)}), s, t \in \mathbb{R}$$

- (a) 求: ϕ 在 $(s, t) = (0, 0)$ 处的 Gauss 曲率;
- (b) 问: ϕ 的 Gauss 映射是不是满射? 加以论证.

3. 给定空间曲面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 和 $S_2: x^2 - 2y = 0$, 记 $c = S_1 \cap S_2$ 为它们的交线. 求: 点 $P(2, 2, 1)$ 处 c 关于 S_1 的法曲率.

4. 求证: 如果空间正则曲面 $S \subset \mathbb{E}^3$ 包含一条直线 $l \subset S$, 那么 S 在 l 上任意点的 Gauss 曲率都小于或等于 0.

5. 假设 Ω 是 \mathbb{E}^3 中的区域, 包含于单位球内部, 且边界 $S = \partial\Omega$ 是正则曲面. 求证: 存在 S 上某点, Gauss 曲率大于或等于 1.

6. 主轴长度 $a > b > c > 0$ 的椭球面, 是否一定存在脐点? 加以论证.