2023 秋季学期概率论期末试题

命题人：**任艳霞、章复熹**　**考试时间**：2024-1-11 8:30-10:30　**整理人**：**妙姐**

1.(10 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 独立且服从 $B(1, \frac{1}{2})$，$Y = X_1 + X_2 \cdots + X_{100}$. 试用标准正态分布函数 $\Phi(x)(x > 0)$ 估计 $P(48 \le Y \le 52)$.

2.(10 分) 设 X_1, X_2 独立且服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$，求 $\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ 的密度函数.

3.(10 分) 设在 n 次独立重复实验中每次的结果都为 $1, 2, \cdots, k$ 中的一个，且取到每种结果的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$. 记 N_i 为 n 次实验中'i' 出现的次数，$j \neq i$，求 $E(N_j \mid N_i > 0)$.

4.(15 分) 设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且服从参数为 1 的泊松分布，$W_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.
(1) 求 $Y_n = \sqrt{n}(W_n - 1)$ 的特征函数;
(2) 证明存在 Y 使得 $Y_n \xrightarrow{d} Y$，并指出 Y 服从什么分布.

5.(15 分) 设 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 都是二元正态分布的密度函数，且两个边缘的期望均为 0，方差均为 1，$f_1(x, y), f_2(x, y)$ 的两个边缘的相关系数分别为为 $\rho, -\rho$. 设 (X, Y) 的密度函数为 $\frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y))$.
(1) 证明 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$.
(2) 求 X, Y 的相关系数.
(3)X, Y 是否独立? 为什么?

6.(10 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，证明 $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$ 当且仅当 $E|X| < \infty$.

7.(10 分) 设 $X_n \xrightarrow{a.s} X$，且存在 $M > 0$ 使得 $EX^2 < M$ 和 $EX_n^2 < M, \forall n$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX$.

8.(10 分) 设 f 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数，求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} f(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

9.(10 分) 设事件 A, B 满足 $P(A) = a \in (0, 1), P(B) = b, P(AB) = p$，$X = \mathbf{1}_A, Y = \mathbf{1}_B$.
(1) 证明 X 的任意函数均可以在几乎处处的意义下表示成 $c_1\mathbf{1}_A + c_2\mathbf{1}_{A^c}$ 的形式，其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
(2) 在 X 的线性函数中找 Y 的最优预测 $\hat{Y}$，并计算 $E(Y - \hat{Y})^2$.