

数学模型 期中考试（1）参考答案

Exam Date: April 26. Time: 03:15 pm to 04:55 pm. (100 minutes)

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 变化率模型。（30分）

（a）

若 $a > 1$, 有三个不动点: 0, 稳定; $1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$, 不稳定; $1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$, 稳定.

若 $a = 1$, 有两个不动点: 0, 稳定; 1, 临界（不稳定，半稳定也可）.

若 $0 < a < 1$, 有一个不动点 0, 稳定.

（b）

我们记 $C_1 + C_k \xrightleftharpoons[b_{k+1}]{a_k} C_{k+1}$ 为第 k 个（可逆）反应。

我们设 J_k 是第 k 个反应中 C_{k+1} 净生成的速率，根据质量作用定律，有则根据质量作用定律，有

$$J_k = a_k C_1 C_k - b_{k+1} C_{k+1}. \quad (0.1)$$

根据质量守恒， $k \geq 2$ 时， J_k 也是在第 k 个反应中 C_k 和 C_1 消耗的速率，而 $k = 1$ 时反应是 $2C_1 \xrightleftharpoons[b_2]{a_1} C_2$ ， C_1 在这个可逆反应中消耗的速率为 $2J_1$ 。

对 $k \geq 2$ ， C_k 在第 k 个反应中消耗，在第 $k-1$ 个反应中生成，有

$$\frac{d}{dt} C_k = J_{k-1} - J_k, \quad k \geq 2. \quad (0.2)$$

对于 C_1 ，每个反应中都消耗 C_1 ，特别地注意生成 C_2 时消耗两个 C_1 ，有

$$\frac{d}{dt} C_1 = -J_1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_k. \quad (0.3)$$

（c）

只需形式地验证

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k C_k(t) \right) = 0. \quad (0.4)$$

形式地交换求和与求导的顺序，代入方程，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k C_k(t) \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{d}{dt} C_k = \frac{d}{dt} C_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{d}{dt} C_k \\ &= -J_1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_k + \sum_{k=2}^{\infty} k (J_{k-1} - J_k) \end{aligned}$$

整理各个 J_k 前的系数，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k C_k(t) \right) &= -J_1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) J_k - \sum_{k=2}^{\infty} k J_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1) - k) J_k = 0. \end{aligned}$$

2. 一阶波方程和特征线法。(20分)

(a) 两条特征线的方程分别为

$$X_1(t) = e^{-A_1^2} t + A_1, \quad X_2(t) = e^{-A_2^2} t + A_2.$$

如果特征线相交, 令 $X_1(t) = X_2(t)$ 可得

$$t = -\frac{A_1 - A_2}{e^{-A_1^2} - e^{-A_2^2}}.$$

代入特征线, 即得相交位置。

(b) 根据特征线方程易知, 如果特征线从 $A < 0$ 出发, 它不会和邻近的特征线相交。但是当特征线从 $A \geq 0$ 出发, 它有可能跟邻近的特征线相交。为了计算激波形成的时间, 经过推导 (参考作业三) 我们需要计算

$$t_* = \min_{x \geq 0} -\frac{1}{(e^{-x^2})'}.$$

直接计算可得, $t_* = \sqrt{e/2}$.

3. 泛函与优化。(20分)

(a) 直接变分得

$$(n(x))^{\frac{2}{3}} + V(x) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{n(x')}{|x - x'|} dx' - (n(x))^{\frac{1}{3}} = 0.$$

(b) 利用拉格朗日乘子法, 得

$$(n(x))^{\frac{2}{3}} + V(x) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{n(x')}{|x - x'|} dx' - (n(x))^{\frac{1}{3}} - \lambda = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(x) dx = N,$$

4. 守恒律模型。(30分)

(a) 见讲义。

(b) 直接计算得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}} (u_x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} u^2 V'' dx \leq \int_{\mathbb{R}} u^2 V'' dx.$$

再根据 $V'' \leq -\gamma$ 易得结论。

(c) 方程可以改写为

$$u_t - (e^{-V} (ue^V)_x)_x = 0.$$

不妨令 $m = ue^V$, 则有

$$(me^{-V})_t - (e^{-V} (m)_x)_x = 0.$$

整理得

$$m_t + V' m_x - m_{xx} = 0.$$

两边乘以 $H'(m)$, 整理得

$$H(m)_t + V' H(m)_x - H(m)_{xx} = -H''(m) m_x^2.$$

然后可以推出

$$[H(m)e^{-V}]_t - [e^{-V} H(m)_x]_x = -e^{-V} H''(m) m_x^2.$$

最后, 对 x 积分得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{-V(x)} H\left(\frac{u(x, t)}{e^{-V(x)}}\right) dx = - \int_{\mathbb{R}} e^{-V} H''(m) m_x^2 dx \leq 0.$$