2017级数学学院等普通物理-力学考试

学号__________ 姓名__________ 院系__________

试卷总分：100分　　考试时间：2018/4/27　　答卷时间：1小时50

题号	一	二	三			总分
	(1-10)	(11-13)	14	15	16	
得分						

一、填空题（每空2分，共40分）

1. 假设0时刻静止的小球可从空间一固定点沿任意方位、任意倾角的光滑斜面滑下。设重力加速度为g，在t时刻小球下落的最大高度是 $\frac{1}{2}gt^2$ 。伽利略发现，在t时刻所有小球位于一个 球 面上。

2. 物体作平抛运动，忽略空气阻力。随着物体的下落，速度对时间的导数 不变 ，轨道的曲率半径 变大 。（填写不变、变大或变小）

3. 质点系质心的运动只与质点系所受的合 外 （填外、内）力有关，质点系的内力 可以 （填可以、不可以）改变质点系的总动能。

4. 如果质点的轨道方程为$\theta = \omega t$（ω为正的常量），$r = r_0 e^{\omega t}$，t为时间。在t时刻质点的径向速度v_r = $\omega r_0 e^{\omega t}$ ，径向加速度a_r = 0 。

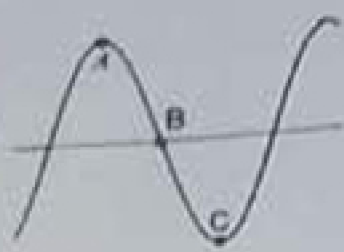
5. 弹球测质量：一个质量为m_0、初速大小为v_0的小球1，与另一个质量M未知、静止的小球2发生弹性碰撞。若碰后球1的速度反向、大小为初速的一半，则小球2的质量M = $3m_0$ ；若碰撞后球1的速度方向不变、大小为初速的三分之一，则M = $\frac{1}{2}m_0$ 。

6. 描述简谐振动有三个特征参量：振幅、初相和频率，振动的初始条件确定 振幅、初相 ，振动系统的固有参量确定 频率 。

7. 一个匀质圆盘的半径为R、质量为m，静止在水平光滑的地面上。若要保持圆盘在水平地面上做纯滚运动，所加水平外力的作用线（即过外力的作用点、沿外力的方向的直线）距离圆盘中心的距离 = $R/2$ ；作纯滚运动的圆盘中心的速率为v时，圆盘的动能 = $\frac{3}{4}mv^2$ 。

8. 一维受迫振动动力学微分方程$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = f_0 cos\omega t$的稳态解可以表述成$x = A\cos(\omega t + \varphi)$，其中振幅$A = f_0/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$，因此，当驱动力角频率ω = $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时，将发生位移共振。发生速度共振时，最大的速率v_{max} = $f_0/2\beta$ 。

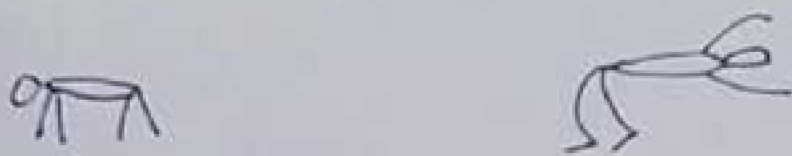
9. 某时刻的弦波如图示，此时图中用实线表示的弦段中，波动动能最大的部位在 B 处，波动势能最小的部位在 A、C 处（填A、B或C字母即可）。



10. 粘性流体在水平管道内作层流，流量满足泊肃叶公式，由泊肃叶公式可知，保持其它条件不变，管道两端的压强差是原来的2倍时，流量是原来的 2 倍；管道半径是原来的两倍时，流量是原来的 16 倍。

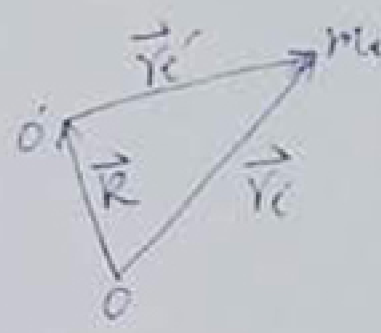
二、简答题（每题5分，共15分）

11. 试画出两种姿势，使人体的质心位于人体之外。



12. 质点系的总动量为零，试证质点系相对任一参考点的角动量都相同。

设点 $\vec{r_i}$、m_i、$\vec{v_i}$，任取两点 O 和 O'，如图



$$\sum \vec{r_i}' \times m_i\vec{v_i} = \sum(\vec{r_i} - \vec{R}) \times m_i\vec{v_i}$$
$$= \sum \vec{r_i} \times m_i\vec{v_i} - \vec{R} \times \sum m_i\vec{v_i}$$
$$= \sum \vec{r_i} \times m_i\vec{v_i}$$

13. 过阻尼振动的通解可表示为$x = A_1 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$，设$t=0$时刻过阻尼振子的位置为$x_0$，速度为$v_0$。若实际振动中只包含衰减较快的部分，试确定$x_0$与$v_0$须满足的条件。

由已知条件，方程的解为

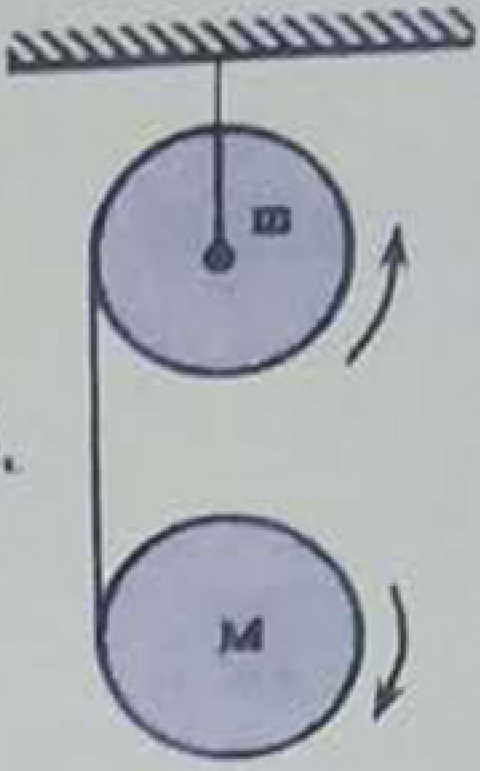
$$x = A_2 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

$t=0$ 时

$$x_0 = A_2$$
$$v_0 = -A_2(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})$$

因此，$v_0 = -x_0(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})$

三、计算题（每题15分，共45分）



14．两个质量分别为 m、和 M、半径同为 R 匀质实心滑轮，用不可伸长轻绳缠绕在滑轮的外侧，定滑轮可无摩擦的转动。将系统从静止释放，求下面滑轮的质心加速度。

解：设绳中张力为T，m和M的角加速度为β_1和β_2

M的质心加速度为a

上滑轮 $TR = I_1\beta_1 \quad I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ 3'

下滑轮 $Mg - T = Ma$ 3'

$TR = I_2\beta_2 \quad I_2 = \frac{1}{2}MR^2$ 3'

约束关系 $a = R(\beta_1 + \beta_2)$ 3'

解得 $a = \frac{M+m}{M+\frac{3}{2}m}g$ 3'

若 $a = \frac{20}{21}g$，$M = 9m$

15．　伦纳德-琼斯势

$$U(r) = \epsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

是最常用的描述双原子相互作用的势能函数，r是两个原子的间距。两个原子的质量都是m，一个原子相对另一个原子在平衡点附近做小振动，可看作简谐振动。求①平衡时两个原子的间距，②做小振动时等效的劲度系数 k，③简谐振动的频率ω。（提示：与弹簧的势能函数类比。）

解：①

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow r = r_0$$

②. 与弹簧的势能函数 $U = \frac{1}{2}kx^2$ 比较

$$k = \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{72\varepsilon}{r_0^2}$$

③. 此为二体问题，约化质量 $\mu = \frac{m}{2}$

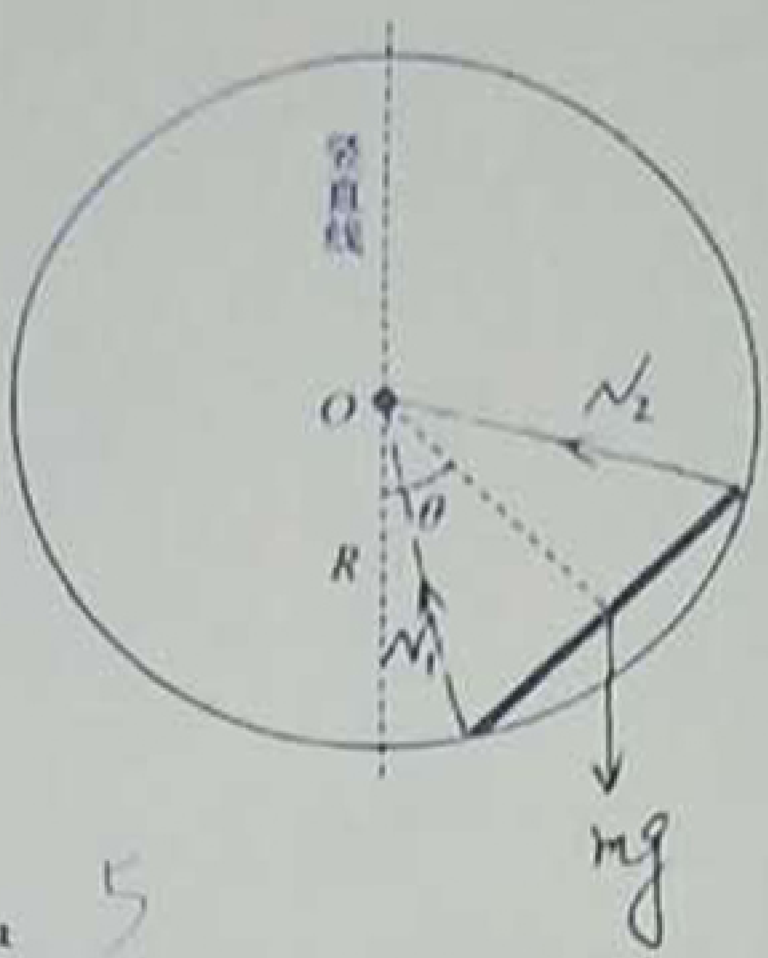
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{12}{r_0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$$

16. 如图所示，竖直平面内有一半径为 R 的光滑固定圆环，质量为 m、长 R 的匀质细杆质心经过圆环底部时角速度为 ω_0，细杆逆时针转动，重力加速度为 g。

1) 计算细杆相对经过圆心且垂直圆环平面的轴的转动惯量。

2) 若要求细杆质心通过圆环顶部，且两端始终不离开圆环，最小的角速度 ω_0 是多大？

（提示：要用到质心运动定理）



解：

1) $I_c = \frac{1}{12}mR^2 \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

杆相对圆心 $I = I_c + md^2 = \frac{5}{6}mR^2$ 5

2) 细杆受力如图，杆的机械能守恒，以杆中心最低点为重力势能零点。

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgd(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$ 2

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{6\sqrt{3}g}{5R}(1-\cos\theta)$$ 1

$$\beta = -\frac{3\sqrt{3}}{5}\frac{g}{R}\sin\theta$$ 2

质心运动

$$(N_1+N_2)\sin 60^\circ - mg\cos\theta = md\omega^2$$

$$(N_1-N_2)\cos 60^\circ - mg\sin\theta = md\beta$$

解得

$$N_1 = \frac{14}{15}\sqrt{3}mg\cos\theta + \frac{1}{2}mR\omega_0^2 - \frac{3\sqrt{3}}{5}mg + \frac{1}{10}mg\sin\theta$$ 1

$$N_2 = \frac{14}{15}\sqrt{3}mg\cos\theta + \frac{1}{2}mR\omega_0^2 - \frac{3\sqrt{3}}{5}mg - \frac{1}{10}mg\sin\theta$$ 1

两端始终不离圆环的条件：$N_1 \geq 0$，$N_2 \geq 0$

由此得 $$\omega_0^2 \geq \frac{6\sqrt{3}}{5}\frac{g}{R} + 2\sqrt{\left(\frac{14}{15}\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{100}}\,\frac{g}{R} = 5.3176\frac{g}{R}$$ 1

$$\omega_0 \geq 2.3060\sqrt{\frac{g}{R}}$$

@赛艇先生收集