18 秋 高峡 高等代数 1 高代 1 期末

北京大学数学学院期末试题

2018－2019 学年第一学期

考试科目 高等代数I　　考试时间 2019 年 1 月 8 日

姓　　名＿＿＿＿＿＿　　学　　号＿＿＿＿＿＿＿＿

一．(12 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$，集合 $S=\{AX\mid X\in M_3(\mathbb{R})\}$.

1) 叙述线性子空间的定义，证明 S 是矩阵空间 $M_3(\mathbb{R})$ 的子空间；

2) 求 S 的维数和一组基.

6　(α,0,0) (0,α,0) (0,0,α)
　(β,0,0) (0,β,0) (0,0,β)

二．(12 分) 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+t\,x_2{}^2+t^2\,x_3{}^2+2x_1x_2+2t\,x_2x_3\ .$$

1) 作变量替换 $X=CY$，将 f 化为标准型；　t=1，t≠1 2类.

2) t 取何值时，f 正定？　t 取何值时，f 的正惯性指数为 2？

t>2.　　t≤2且t≠0.

三．(24 分) 设实矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

1) 求 A 的特征值和特征子空间的基；

2) 求正交矩阵 P，对角矩阵 D，使得 $A=PDP^T$；

3) 求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 在单位球面 $\|X\|=1$ 上取到的最大值，并指出在何处取到.

四. (12 分) 已知 $A \in M_n(R)$可逆, $\alpha \in R^n$ 为列向量. 证明:

$$A - \alpha\alpha^T \text{ 可逆当且仅当 } \alpha^T A^{-1} \alpha \neq 1.$$

五. (18 分) 设实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) 确定 A, B, C, D 中哪些相似于对角矩阵;

2) 确定 A, B, C, D 的相似分类;

3) 确定矩阵 C, D 是否合同.

六. (12 分) 设 A 是向量空间 K^n 上的线性变换. 设 $0 \neq \alpha \in K^n$.

1) 证明: 存在正整数 $r \leq n$ 及系数 $k_1, \cdots, k_r \in K$,

使得 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{r-1}\alpha$ 线性无关, 但

$$A^r\alpha + k_1 A^{r-1}\alpha + \cdots + k_{r-1} A\alpha + k_r\alpha = 0 \ ;$$

2) 记多项式 $g(x) = x^r + k_1 x^{r-1} + \cdots + k_{r-1}x + k_r$.

证明: $g(x)$是 A 的特征多项式$f(x)$的一个因式.

七. (10 分) 设 $A, B \in M_n(R)$. 证明: 对于 n 级实矩阵 X

以下两命题等价

(1) X 是在所有 n 级实矩阵中使得 $AX - B$ 元素的平方和取最小值的矩阵;

(2) X 满足条件 $A^T A X = A^T B$.