

北京大学数学科学学院期中试题

2018 - 2019 学年第 1 学期

考试科目: 实变函数

考试时间: 2018 年 11 月 21 日 下午

姓 名 _____

学 号: _____

本试题共 8 道题, 满分 100 分

1. (10分) 设 E 是 \mathbb{R}^3 中的点集, 且 E 中任意两点的距离是有理数, 证明: E 是可数集.
2. (10分) 证明: $\frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.
3. (10分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是不可数集, 证明: 存在 $x_0 \in E$, 使得任给 $\delta > 0$,
 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 是不可数集.
4. (15分) 设 $X = \{E_\alpha\}$ 是 \mathbb{R} 中互不相交的正测度集形成的集族, 证明: X 是可数集.
5. (15分) 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且存在 $0 < q < 1$, 使得对任一区间 (a, b) , 存区间列 I_k , 满足
$$(E \cap (a, b)) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < q(b - a).$$

证明: $m(E) = 0$.

6. (10分) 设 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a, b]$ 上的实值可测函数. 证明:
 $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

7. (15分) 设 $f_k(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数列, $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的实值函数, 且任给 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(\{x \in [a, b] : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

证明: $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

8. (15分) 设 $f_k(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的可测函数, 满足:

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{x} \quad \text{与} \quad f_k(x) \rightarrow f(x), \quad \text{a.e. } x \in (0, +\infty).$$

证明: $f_k(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上依测度收敛于 $f(x)$.