2018 年春季概率论期中考试

教师：任艳霞

2018 年 4 月 26 日

1.（10 分）已知有 5 个红球，6 个蓝球和 8 个绿球，现无放回地任取 3 个球.

（1）构造该古典概型的样本空间；

（2）求三个球颜色相同的概率.

2.（10 分）一个袋子中有 7 个红球，13 个蓝球，现在不放回地取出两个球并丢掉，然后抽取第三个球，

（1）求第三个球是红色的概率；

（2）若已知第三个球是红色，求丢掉的两个球都是蓝色的概率.

3.（12 分）已知 X 的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x/4, & 0<x\leqslant 1\\ 1/2+(x-1)/4, & 1<x\leqslant 2\\ 11/12, & 2<x\leqslant 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

求：（1）P(X=3)；（2）P(1/2⩽X<3/2)；（3）P(X⩽2).

4.（12 分）已知 ξ 为连续型随机变量，问：

（1）ξ^2 是否为连续型随机变量，请说明理由；

（2）(ξ,ξ^2) 是否为连续型随机向量，请说明理由；

（3）若 η 也是连续型随机变量，并且 ξ 与 η 有相同的分布，是否有 $P(\xi=\eta)=1$，请说明理由.

5.（8 分）已知随机变量 X 有分布函数 $F(X)$，定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}X}, & F(X)\text{ 在此处可导}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若还有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，证明 X 是连续型随机变量。

（提示：直接利用单调函数 $F(x)$ 的性质：任意的 $a<b$，有 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant F(b)-F(a)$）

6.（15 分）已知随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问:

（1）$Y=y(y>0)$ 条件下 X 的条件密度;

（2）$P\left(X>1|\,Y=y\right)(y>0)$;

（3）$P(X>Y^2)$.

7.（25 分）已知随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，并且都满足参数为 1 的指数分布。

（1）求 $P\left(X_3>\max\left\{X_1,X_2\right\}\right)$;

（2）求 $P\left(X_3=\max\left\{X_1,X_2\right\}\right)$;

（3）令 $U=X_1+X_2,V=X_1+X_3,W=X_2+X_3$，求 U,V,W 的联合密度函数;

（4）U,V,W 是否相互独立，请说明理由;

（5）X_3 与 $\max\left\{X_1,X_2\right\}$ 是否相互独立，请说明理由.

8.（8 分）设 Z 是取正整数值的随机变量，在集合 $\{0,1,2,\cdots,Z-1\}$ 中等概率地取一个数为 ξ. 设随机变量 U 与 Z 独立，且 $U\sim\mathcal{U}(0,1)$，问 ξ 与 $[UZ]$ 是否同分布，请说明理由（注：$[x]$ 表示 x 的整数部分）.