

数理逻辑 2016 年期末考试

January 9, 2017

1. (10 分) 叙述定义 : 悖论、完全性、递归、归纳公理、不完全性定理.
2. (5 分) 将下列古诗翻译为一阶语言 : 向晚意不适, 驱车登古原。夕阳无限好, 只是近黄昏。
3. (10 分) 证明推理形式 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n; \mathcal{A}$ 有效, 当且仅当 $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}$ 是重言式, 当且仅当 $\{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n\} \models \mathcal{A}$.
4. (10 分) 证明 $\{\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{D}), \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{E})\} \vdash_K \mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \leftrightarrow (\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}))$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 均为闭公式.
5. (10 分) 证明 $\vdash_K \forall x_i(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\forall x_i \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$.
6. (10 分) 求下列公式的子句范式 : $\forall x_1 \mathcal{A}(x_1, x_2) \rightarrow (\mathcal{B}(x_1) \rightarrow \sim \forall x_3 \mathcal{A}(x_1, x_3))$.
7. (15 分) 用一阶语言表达下面的推理 (要求写出推理的前提、结论和形式证明): 任意自然数, 如果能被 2 整除则是偶数, 如果不能被 2 整除则是奇数, 有些自然数不能被 2 整除, 所以有些自然数是奇数.
8. (15 分) 令 \mathcal{L} 为一阶语言, $\mathcal{A}(x_i)$ 中 x_i 自由出现, t 是在 $\mathcal{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由的项, $v(t) = v(x_i)$. 证明, 如果 v 满足 $\mathcal{A}(x_i)$, 那么 v 满足 $\mathcal{A}(t)$.
9. (10 分) 证明一阶逻辑 $K_{\mathcal{L}}$ 的完全性定理 (要求写出所引用的引理或定理的内容).
10. (5 分) 试给出 ZF 集论系统的公理.