北京大学数学科学学院
2023-2024 学年第二学期数学分析期中试题

请在答卷上填写院系、姓名与学号

1.（10+10=20 分）（1）计算 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx\ (a>0,b>0)$

（2）设函数序列 $f_n(x)$ 对于每个 x 单调递减，任取区间 $[a,b]$ 中的 x 有 $f_n(x)>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。若所有 $f_n(x)$ 可积求证或证伪 $f(x)$ 可积。

2. （15 分）叙述并证明定积分第二中值定理。

3.（15+5+5=25 分）（1）写出并简要证明极坐标下曲线 $r=r(\theta)\in C[\alpha,\beta]\ (0\leq\alpha<\beta\leq\frac{\pi}{2})$ 与射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围平面图形绕 y 轴（x 轴取为极轴）旋转一周所得立体的体积公式。

（2）设 $I_n=n\int_0^1x^{n-1}e^{x^2}dx$，$F=e^{\frac{n}{n+2}}$，比较并证明 I_n 与 F 的大小。

（3）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$。

4.（10+10=20 分）

（1）讨论 $\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)dx\ (p>0)$ 的敛散性。

（2）讨论 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ 的敛散性。

5. （10+10=20 分）

（1）证明：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

注意：不得使用多元微积分工具。

（2）计算

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{t}(e^x-x-1)}\,dx$$