# 北京大学数学科学学院期中试题

**2016-2017学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班）　考试时间: 2016年11月24日**

**姓　　名: ____________　学　　号: ____________**

**本试题共7道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

一. (16分) 考虑$\mathbb{Q}^4$中的向量

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \qquad \alpha_2 = (1,2,3,4), \qquad \alpha_3 = (1,4,9,16),$$
$$\beta_1 = (-1,-1,1,9), \qquad \beta_2 = (-4,-5,-4,1).$$

求集合

$$\{c \in \mathbb{Q} \mid \beta_1 + c\beta_2 \in \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\}.$$

二. (16分) 考虑$\mathbb{R}^3$中的向量$\alpha = (1,1,0)$, $\beta = (0,1,1)$. 求集合

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^3 \mid 存在不可逆矩阵A \in \mathbb{R}^{3\times 3}使得\alpha A = \beta, \beta A = \gamma, \gamma A = \alpha\}.$$

三. (16分) 证明对于$\mathbb{C}^9$的子空间$V$, 以下两个论断等价:
(1) $\dim V \geq 5$,
(2) 对$\mathbb{C}^9$的任意5维子空间$W$有$V \cap W \neq \{0\}$.

四. (16分) 设$V$是域$F$上的有限维线性空间, $\dim V = n \geq 1$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$V$的有序基. 对于线性函数$f_1, \ldots, f_n \in V^*$, 考虑矩阵$A \in F^{n\times n}$, 其$(i,j)$-元为$f_i(\alpha_j)$ $(1 \leq i,j \leq n)$. 证明$\{f_1, \ldots, f_n\}$是$V^*$的基的充分必要条件是$A$可逆.

五. (16分) 设$V$是域$F$上的10维线性空间, $U \in \mathrm{L}(V)$. 考虑$\mathrm{L}(V)$的子集

$$M = \{T \in \mathrm{L}(V) \mid TU = 0\}.$$

(1) 验证$M$是$\mathrm{L}(V)$的子空间.
(2) 假设存在$V$的有序基$\mathcal{B}$使得$[U]_{\mathcal{B}}$的$(i,j)$-元为$(i_F - j_F)^2$ $(1 \leq i,j \leq 10)$. 求$\dim M$.

六. (10分) 设$V$为由所有从有限域$\mathbb{F}_5$到有限域$\mathbb{F}_3$的映射构成的$\mathbb{F}_3$-线性空间, 其中的向量加法和纯量乘法定义为:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \qquad \forall f, g \in V, x \in \mathbb{F}_5, c \in \mathbb{F}_3.$$

求$V$的1维子空间的个数.

七. (10分) 求最小的正整数$k$, 满足对任意$A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$, 如果$A^4 = 0$, 则存在$B \in \mathbb{R}^{9\times k}$和$C \in \mathbb{R}^{k\times 9}$使得$A = BC$.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2016-2017学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班）　考试时间: 2017年1月5日**

**姓　　名: ____________　学　　号: ____________**

**本试题共7道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

一. (8分) 在$\mathbb{R}$内求行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

二. (20分) (1) 设M和N是多项式代数$\mathbb{Q}[x]$的理想. 证明$\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$也是$\mathbb{Q}[x]$的理想.
(2) 考虑$\mathbb{Q}[x]$的理想

$$\mathrm{M}_k = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) = f(k+1) = 0\}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

求理想$(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) + (\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{M}_3)$的首项系数是1的生成元.

三. (16分) 设$V$为所有从有限域$\mathbb{F}_7$到$\mathbb{R}$的映射构成的实线性空间. 定义$T \in L(V)$为

$$T(f)(x) = 2f(x) - f(x+1), \qquad \forall f \in V, x \in \mathbb{F}_7.$$

求$\det(T)$.

四. (16分) 设$V$是域$F$上的有限维线性空间, $W$是$V$的子空间, $T \in L(V)$. 证明$T(W) \subset W$的充分必要条件是$T^t(W^0) \subset W^0$.

五. (16分) 设$V$是域$F$上的有限维线性空间, $r$是正整数. 证明对于$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$和$f_1, \dots, f_r \in V^*$, 以下两个论断等价:

(1) 存在非零向量$\beta \in V$使得$\sum_{i=1}^{r} f_i(\beta)\alpha_i = 0$.

(2) 存在非零函数$g \in V^*$使得$\sum_{i=1}^{r} g(\alpha_i) f_i = 0$.

六. (16分) 考虑$3 \times 3$复矩阵的集合

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid (A_{rs})^4 = 1, \forall r, s \in \{1, 2, 3\}\},$$

其中$A_{rs}$为$A$的$(r, s)$-元. 求集合$\mathbb{R} \cap \{\det(A) \mid A \in \mathcal{M}\}$.

七. (8分) 设整数$n > k > m > 0$, $V$是域$F$上的$n$维线性空间, $W$是$V$的$m$维子空间, $T \in L(V)$满足

$$\dim(T(W) + W) = k.$$

求$\dim(T^t(W^0) + W^0)$.

# 北京大学数学科学学院期中试题

**2016-2017学年第2学期**

**考试科目: 高等代数II（实验班）　　考试时间: 2017年4月25日**

**姓　　名: ________　　学　　号: ________**

**本试题共6道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

注: 下面$F$表示任意一个域, $n$表示任意正整数.

一. (32分) 在复数域上求下列矩阵的特征多项式、最小多项式、有理标准形和Jordan标准形.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

二. (15分) 设$V$是$n$维$F$-线性空间, $T \in L(V)$循环, $g \in F[x]$是$T$的特征多项式的因式. 证明

$$\dim \operatorname{Ker}(g(T)) = \deg g.$$

三. (15分) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的最小多项式为$x^n$, 正整数$k \le [\frac{n}{2}]$. 证明在$A^k$的Jordan标准形中, Jordan块的最小阶数为$[\frac{n}{k}]$.

四. (15分) 设$\operatorname{char} F = 0$, $A \in F^{n\times n}$的特征多项式为$(x-1)^n$. 证明对任意正整数$k$, $A^k$与$A$相似.

五. (15分) 设$V$是$n$维$F$-线性空间, $T, U \in L(V)$不可逆, 并且$TU$可对角化. 证明$(UT)^2$可对角化.

六. (8分) 设$V$是$n$维复线性空间, $T, U \in L(V)$满足$\operatorname{rank}(TU - UT) = 1$. 证明存在$V$的有序基$\mathcal{B}$使得$[T]_{\mathcal{B}}$和$[U]_{\mathcal{B}}$同时为上三角矩阵.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2016-2017学年第2学期**

**考试科目：高等代数II（实验班）** **考试时间：2017年6月15日**

**姓　　名：________** **学　　号：________**

**本试题共6道大题，满分100分，考试时间120分钟.**

一. (20分) 考虑实矩阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵$P$和对角元为正数的上三角矩阵$B$满足$A = PB$.

(2) 求正交矩阵$Q$和正定对称矩阵$C$满足$A = QC$.

二. (20分) 设$V$是有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 证明:

(1) 如果$T + T^*$正定, 则$T$可逆;

(2) 如果$T + T^*$半正定, 则$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

三. (30分) 考虑实线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$上的对称双线性函数$f(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$. 对下列三个条件, 分别求满足该条件的子空间$W \subset \mathbb{R}^{n\times n}$的维数的最大值.

(1) $f|_W$正定;

(2) $f|_W$负定;

(3) $f|_W = 0$.

四. (12分) 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 假设$A^{n+1}$相似于正交矩阵. 证明$A^n$相似于正交矩阵.

五. (12分) 设$V$是$n$维实线性空间$(n \geq 3)$, $f$是$V$上的双线性函数. 证明存在$V$ 的有序基$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$满足

$$i, j \in \{1, \dots, n\},\ i - j \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\alpha_i, \alpha_j) = 0.$$

六. (6分) 设$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正定Hermite矩阵. 假设$ABC$是Hermite矩阵. 证明$ABC$正定.

# 北京大学数学科学学院期中试题

**2017-2018学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班）  考试时间: 2017年11月9日**

**姓　　名: ____________________  学　　号: ____________________**

**本试题共6道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

注: 下面$F$表示任意一个域, $n$表示任意不小于2017的正整数.

一. (20分) 考虑$F^{k\times k}$的子集

$$S_k = \{A \in F^{k\times k} \mid A\text{的矩阵元均为0或1, }A\text{的每行和每列均有且只有一个矩阵元为1}\}.$$

分别对$k = 2$和$k = 3$求$S_k$生成的$F^{k\times k}$的子空间的维数.

二. (20分) 对$i \in \{1, 2, 3, 4\}$, 考虑$\mathbb{R}^4$中的向量

$$\alpha_i = (i^2, (i+1)^2, (i+2)^2, (i+3)^2),$$
$$\beta_i = (i^2, (i-1)^2, (i-2)^2, (i-3)^2).$$

是否存在线性映射$T \in L(\mathbb{R}^4)$, 使得$T(\alpha_i) = \beta_i$对任意$i \in \{1, 2, 3, 4\}$成立? 请说明理由.

三. (20分) 设$V$是$F$-线性空间, $S_1, S_2, S_3$是$V$的子集, $W_i = \operatorname{span}(S_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. 假设$S_1 \cup S_2 \cup S_3$线性无关. 证明

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

四. (20分) 设$V$是由所有函数$f : F \to F$构成的$F$-线性空间, 其中的向量加法与纯量乘法定义为

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \qquad \forall\ f, g \in V, c, x \in F.$$

设$S = \{f_1, \dots, f_n\}$是$V$的$n$元子集. 证明$S$线性无关的充分必要条件是存在$x_1, \dots, x_n \in F$使得矩阵$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$可逆.

五. (15分) 设$V$是$n$维$F$-线性空间, $T_1, T_2 \in L(V)$. 证明

$$|\dim \operatorname{Ker}(T_1T_2) - \dim \operatorname{Ker}(T_2T_1)| \le \frac{n}{2}.$$

六. (5分) 设$n$维$F$-线性空间$V$的$2n-2$个子空间$M_1, \dots, M_{n-1}, N_1, \dots, N_{n-1}$满足

$$\dim M_i = \dim N_i = i, \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

并且

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1}, \qquad N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_{n-1}.$$

证明存在$V$的基$S$, 使得这$2n-2$个子空间中的每一个均由$S$的某个子集生成.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2017-2018学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班） 考试时间: 2018年1月9日**

**姓　　名: ____________ 学　　号: ____________**

**本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

注: 下面$F$表示任意一个域, $n$表示任意正整数, $p$表示任意奇素数.

一. (20分) 设矩阵$A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$的矩阵元均为1或$-1$. 求$\det(A)$的最大可能值.

二. (20分) 设$V$为所有从有限域$\mathbb{F}_p$到自身的映射构成的$\mathbb{F}_p$-线性空间. 定义$T, U \in L(V)$为

$$\begin{cases} T(f)(t) = f(-t), \\ U(f)(t) = f(t+1) - f(t), \end{cases} \qquad \forall f \in V, t \in \mathbb{F}_p.$$

求$\det(T)$和$\det(U)$.

三. (20分) 设$V$是有限维$F$-线性空间, $W$是$V$的子空间, $T \in L(V)$满足$T(W) \subset W$. 定义$T_W \in L(W)$和$T_{V/W} \in L(V/W)$为

$$\begin{cases} T_W(\alpha) = T(\alpha), & \alpha \in W, \\ T_{V/W}(\alpha + W) = T(\alpha) + W, & \alpha \in V. \end{cases}$$

证明

$$\det(T) = \det(T_W)\det(T_{V/W}).$$

四. (30分) 设$A \in F^{n\times n}$, $V$和$W$是$F^n$的子空间. 证明下面两个陈述等价:

(1) 对任意$\alpha \in V \setminus \{0\}$, 存在$\beta \in W$使得$\alpha A \beta^t \neq 0$.

(2) 对任意$\gamma \in F^n$, 存在$\beta \in W$使得对任意$\alpha \in V$有$\alpha A \beta^t = \alpha\gamma^t$.

五. (10分) 设$F$是无限域. 证明对多项式代数$F[x]$的任意有限维子空间$V$, 存在$F[x]$的理想$M$满足

$$V \cap M = \{0\}, \qquad V + M = F[x].$$

# 北京大学数学科学学院期中试题

**2017-2018学年第2学期**

**考试科目: 高等代数II（实验班）　　考试时间: 2018年4月24日**

**姓　　名: ____________　　学　　号: ____________**

**本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

注: 下面$F$表示任意一个域, $n$表示任意正整数.

一. (40分) 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A\text{中恰有两个非对角矩阵元为}1\text{, 其他矩阵元均为}0\}.$$

分别写出下面的集合 (不需要写过程):

(1) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f$是$\Omega$中某个矩阵的特征多项式$\}$.

(2) $\{p \in \mathbb{Q}[x] \mid p$是$\Omega$中某个矩阵的最小多项式$\}$.

(3) $\{J \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid J$是$\Omega$中某个矩阵的有理标准形$\}$.

(4) $\{R \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid R$是$\Omega$中某个矩阵的Jordan标准形$\}$.

二. (10分) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^2$可对角化. 证明$A^3$可对角化.

三. (20分) 设$A \in F^{n\times n}$是非零幂零矩阵, $g \in F[x]$. 证明下面两个陈述等价:

(1) $g(A)$与$A$相似.

(2) $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$.

四. (20分) 设$F$是无限域, $V$是$n$维$F$-线性空间, $T \in L(V)$. 证明下面两个陈述等价:

(1) $V$只有有限多个$T$-不变子空间.

(2) $T$是循环的.

五. (10分) 设$V$是$n$维$F$-线性空间, $T \in L(V)$循环幂零. 求$L(V)$的子空间

$$M = \{U \in L(V) \mid T^2U = UT^2\}$$

的维数.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2017-2018学年第2学期**

**考试科目: 高等代数II（实验班）** **考试时间: 2018年6月28日**

**姓　名:** ________________ **学　号:** ________________

**本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

一. (30分) 考虑实矩阵和实向量

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

设$V \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$为包含$\alpha$的二维$L_A$-不变子空间. $\mathbb{R}^{3\times 1}$上的标准内积限制在$V$上, 使$V$成为内积空间. 设$T \in L(V)$为$L_A$限制在$V$上得到的线性变换. 求$T^*\alpha$.

二. (20分) 设$V$为有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 证明存在$V$上的酉变换$U$, 使得$UT + TU$为正规变换.

三. (20分) 设域$F$的特征不等于2, $V$是有限维$F$-线性空间, $f$是$V$上的非零对称双线性函数. 证明存在子空间$W \subset V$, 使得$\dim W = \operatorname{rank}(f)$并且$f|_W$非退化.

四. (20分) 设$V$是域$F$上的有限维线性空间, $f$是$V$上的非退化双线性函数, 子空间$W \subset V$满足$f|_W = 0$. 证明$\dim W \le \frac{1}{2}\dim V$.

五. (10分) 设$n$为正整数, $S$为$\mathbb{C}^{n\times 1}$的有限子集, 满足$\operatorname{span} S = \mathbb{C}^{n\times 1}$. 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A\text{可逆, 并且对任意}\alpha \in S\text{有}A\alpha \in S\}.$$

证明存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得对任意$A \in \Omega$, $PAP^{-1}$均为酉矩阵.

# 北京大学数学科学学院期中试题

**2019-2020学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班）　考试时间: 2019年11月7日**

**姓　　名: ____________　学　　号: ____________**

**本试题共6道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

注: 下面$F$表示任意域.

一. (20分) 设实矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 对正整数$n$, 考虑实线性空间$\mathbb{R}^{3\times 3}$的子空间

$$V_n = \operatorname{span}\{A^n, A^{n+1}\}.$$

(1) 求$\dim V_6$.
(2) 求$\dim(V_6 \cap V_8)$.

二. (20分) 设$B_1, B_2, B_3 \in F^{3\times 7}$. 假设存在$A_1, A_2, A_3 \in F^{7\times 3}$使得$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$可逆.
(1) 证明$B_1, B_2, B_3$作为线性空间$F^{3\times 7}$中的元素线性无关.
(2) 证明存在$C_1, C_2, C_3 \in F^{7\times 3}$使得$B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3$可逆.

三. (15分) 设$r$为正整数, $V$与$W$为有限维$F$-线性空间, 满足$\dim V \geq r \dim W$. 证明对任意$r$个从$V$到$W$的线性映射$T_1, \dots, T_r$, 存在$V$的子空间$M$同时满足下面的要求:
(i) $\dim M \geq \dim W$,
(ii) 对任意$\alpha \in M$, 总有$T_1(\alpha) = \cdots = T_r(\alpha)$.

四. (15分) 设$n$为正整数, $V$为$F^n$的子空间. 证明存在指标集$J \subset \{1, \dots, n\}$同时满足下面的要求:
(i) $|J| = \dim V$,
(ii) 对任意函数$f : J \to F$, 存在$(x_1, \dots, x_n) \in V$, 使得对任意$j \in J$, 总有$f(j) = x_j$.

五. (15分) 设$V$为$F$-线性空间. 对于$V$的三个子空间$M_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 如果

$$M_1 + M_2 = M_3, \qquad M_1 \cap M_2 = \{0\},$$

则称$M_1$与$M_2$在$M_3$中互补. 假设$V$的子空间$V_1, V_2, W_1, W_2, W$同时满足下面的条件:
(i) $V_1$与$V_2$在$V$中互补,
(ii) $W_1$与$W \cap V_1$在$V_1$中互补,
(iii) $W_2$与$(W + V_1) \cap V_2$在$V_2$中互补.
证明$W_1 + W_2$与$W$在$V$中互补.

六. (15分) 考虑$\mathbb{R}^2$的子集

$$L_k = \{(m + \tfrac{k}{5}, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad k = 1, 2.$$

是否存在同时满足下面两个条件的可逆矩阵$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?
(i) 对任意$\alpha \in L_1$, 总有$\alpha A \in L_2$,
(ii) 对任意$\beta \in L_2$, 总有$\beta A^{-1} \in L_1$.
请说明理由.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2019-2020学年第1学期**

**考试科目: 高等代数I（实验班）　考试时间: 2020年1月7日**

**姓　　名: ____________________　学　　号: ____________________**

**本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.**

一. (30分) 考虑实线性空间

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 3\}.$$

定义 $T_1, T_2 \in L(V)$ 为

$$T_1(f) = \sum_{k=0}^{3} f(k)(x-2019)^k, \qquad T_2(f) = \sum_{k=0}^{3} (D^k f)(x-2020)^k.$$

求 $\det(T_1)$ 和 $\det(T_2)$.

二. (30分) 设 $f, g \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ 和 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $f(z) = 0, g(z) \neq 0$.

(1) 证明存在 $h_1 \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $h_1(z) = g(z)^{-1}$.

(2) 证明存在 $h_2 \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ 使得 $h_2(g(z)) = 0$.

三. (15分) 设 $V$ 为域 $F$ 上的有限维线性空间. 假设 $V$ 的子空间 $W$ 和 $V^*$ 的子空间 $E$ 满足下面的条件:

(i) 对任意 $\alpha \in W \setminus \{0\}$, 存在 $f \in E$ 使得 $f(\alpha) \neq 0$,

(ii) 对任意 $g \in E \setminus \{0\}$, 存在 $\beta \in W$ 使得 $g(\beta) \neq 0$.

证明 $\dim W = \dim E$.

四. (15分) 设 $V$ 为有限维复线性空间, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ 为 $V^*$ 的基, 并考虑 $V$ 的子集

$$\Lambda = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

设 $T \in L(V)$ 满足 $T(\Lambda) \supset \Lambda$. 证明 $|\det(T)| \leq 1$.

五. (10分) 设 $V$ 为有限维实线性空间, $W_1, \ldots, W_m \subset V$ 为子空间, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V$. 假设

$$\dim W_i = \dim V - 1, \qquad \bigcap_{i=1}^{m} W_i = \{0\}, \qquad \alpha_i \notin W_i.$$

设 $T \in L(V)$ 满足如下条件: 对任意 $i \in \{1, \ldots, m\}$, 存在 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 使得

$$T(\alpha_i + W_i) \subset \alpha_j + W_j.$$

证明 $\det(T) = \pm 1$.

# 北京大学数学科学学院期末试题

**2019-2020学年第2学期**

**考试科目：高等代数II（实验班）** **考试时间：2020年9月15日**

**姓　　名：____________** **学　　号：____________**

**本试题共5道大题，满分100分，考试时间120分钟.**

一. (20分) 考虑实矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $P$ 和对角元为正数的上三角矩阵 $B$ 满足 $A = PB$.

(2) 求正交矩阵 $Q$ 和正定对称矩阵 $C$ 满足 $A = QC$.

二. (20分) 设整数 $n \geq 4$. 对 $k \in \{1, \ldots, n-3\}$, 定义 $A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为

$$A_k = \sum_{j \in \{1, \ldots, n-2\} \setminus \{k, k+1\}} E_{j,j+2},$$

这里 $E_{j,j+2} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的 $(j, j+2)$-元为 1, 其他矩阵元均为 0. 设 $S$ 为 $\{A_1, \ldots, A_{n-3}\}$ 的子集, 其中的矩阵在复数域上两两不相似. 求 $|S|$ 的最大值.

三. (20分) 设 $n$ 为正整数. 证明对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 下面两个陈述等价：

(i) $A$ 为两个 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正定对称矩阵的乘积.

(ii) $A$ 在实数域上可对角化, 并且特征值均为正数.

四. (20分) 设 $V$ 是有限维非零复线性空间, 并设 $D(V)$ 为 $L(V)$ 中所有可对角化的线性变换的集合. 对于 $f \in \mathbb{C}[x]$, 记

$$f(L(V)) = \{f(T) \mid T \in L(V)\}.$$

证明

$$\bigcap_{f \in \mathbb{C}[x], \deg(f) \geq 1} f(L(V)) = D(V).$$

五. (20分) 求所有正整数 $n$, 使得存在 $P \in \mathrm{SU}(n)$, 满足对任意 $A \in \mathrm{SU}(n)$, 总有 $PAP^{-1} = \overline{A}$. 这里 $\mathrm{SU}(n)$ 为所有行列式为 1 的 $n$ 阶酉矩阵的集合, $\overline{A}$ 表示矩阵 $A$ 的复共轭.