1. 略

2. （1）设 Q(x_1, y_1, z_1)为 S 上一点，则 PQ 的参数方程为

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t((x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0))$$

将其代入 S 的方程，得到关于参数 t 的二次方程，其判别式为 0 等价于

$$(x_1, y_1, z_1)(x_0, y_0, -z_0)^T = -1$$

从而切点落在方程为

$$(x, y, z)(x_0, y_0, -z_0)^T = -1$$

的平面π上。

（2）不妨假设$y_0 \neq 0$. 将切点投影到 xz 平面上，那么投影像满足方程组

$$x^2 - z^2 + \left(\frac{x_0 x - z_0 z + 1}{y_0}\right)^2 = -1$$

计算其不变量$I_2 = \frac{(z_0^2 - x_0^2 - y_0^2)}{y_0^2} < 0$，且常数项非零即知投影像为双曲线。

又平行投影不改变二次曲线类型，因此原曲线也为双曲线。

3. 作射影变换使 E，F 不动，而四边形 EGFH 被映为一个正方形。此时，M 的像为正方形对角线的交点，仍是 EF 中点，因此 M 为不动点（从而该变换在直线 EF 上的限制是恒同变换）。此时由中心对称性，显然有 L,R 的射影像被 M 平分。因此 M 平分 LR。

4. （1）容易验证每一个反演（反射）都是分式线性变换的共轭，因此其复合是复系数分式线性变换或其共轭。

   现设$f(z)=(az+b)/(cz+d)$是一个保实轴的复系数分式线性变换，那么分别代入$f(0),f(1),f(\infty)\in R\cup\{\infty\}$,有$\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{a+b}{c+d}\in R\cup\{\infty\}$。又$ad\neq bc$,故知$a,b,c,d$任意二者之比$\in R\cup\{\infty\}$。从而可将$f$写为实系数的。对于$f$是分式线性变换之共轭的情况可做类似讨论。

   （2）设f为一个符合题意的莫比乌斯变换，若∞不是f的不动点，设$f(\infty)=P$，考虑以 P 为反演中心的反演变换 p，可选取适当的反演幂使得$f\circ p$为平移或反射。之后显然。

   若∞是f的不动点，则f要么是平移（此时显然），要么还有另一不动点 Q。考虑以 Q 为反演中心作两次反演q_1,q_2，可选取适当的值作为两次反演幂之比，使得$q_1\circ q_2\circ f$为恒同或反射。之后显然。

5.（1）正确

保定向的空间等距变换要么有不动点，要么为平移或螺旋运动（这两种情况显然都可以取到距离最小值）

（2）正确

作射影变换将 L 变为无穷远直线，那么三对对应边平行，因此两个四边形关于 O 位似。

（3）正确

以地面为参考系，太阳的轨迹为一个圆，并且与杆顶不共面。从而地面上杆顶的投影是一条非退化二次曲线，并且会向两个不同方向的无穷远处延伸，从而是双曲线。

（4）错误（若认为射影三角形需要封闭）/正确（若认为射影三角形不需要封闭）

对于射影三角形及其截线，可以通过射影变换变成欧氏三角形及其截线，同时不改变交点个数。/可以将一个欧氏三角形的一条边替换为它在所在直线上的补，此时显然帕士公理不成立。

（5）错误

我们可以以 A，B 的切点为中心作反演，于是只需考虑 A，B 为一对平行直线的情况。此时可令 A'分别与 B 的像和 C 的像相切于不同两点，且 A'的大小为 C 的一半；令 B'分别与 A 的像和 C 的像相切于不同两点，且 B'与 A'在 C 同侧，的大小为 C 的一半；C'为 C 关于 A'，B'，连心线的反射像。那么 A'，B'，C'符合题意，而且在 C 的两侧各有一组，从而不唯一。

（6）错误

Mobius 变换群：设 f 是 Q 到自身的 mobius 变换。由保角性和保边界性，原点 O 的像是自身或∞。若 O 的像是自身，则∞的像也是自身。如果 x 轴的像是自身，那么 f 可复合一关于 O 的位似，使复合后有三个不动点（从而这种情况下 f 的自由度为 1）。如果 x 轴的像是 y 轴，可将 f 复合关于直线 x=y 的反射，化为前一种情况。如果 O 的像是∞，可将 f 复合关于单位圆周的反演，化为前两种情况。故总自由度为 1。

射影变换群：由于射影变换保直线，保边界，知 O，x 轴方向的无穷远点和 y 方向的无穷远点必定不会被映到其它点。当这三个点的像确定之后，（1,1）的像可以在 Q 中任取，因此自由度为 2。

6. 不难验证，对于中心为 O 的椭圆以及其上两点 A,B，若向量 OA,OB 共轭，则 $|OA \times OB|, |OA|^2 + |OB|^2$都是与共轭方向选取无关的不变量。

因此，若以椭球面上另两点 A’,B’替换 A,B，并使向量 OA’,OB’,OC 两两共轭，则

$$|OA \times OB \cdot OC| = |OA' \times OB' \cdot OC|$$
$$|OA'|^2 + |OB'|^2 + |OC|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2$$

故可将 A 调整至三个坐标平面之一内，接着将 B 调整至三条坐标轴之一内，再将 A,C 也调整至坐标轴上，而不改变$|OA \times OB \cdot OC|$和$|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2$。故其为与共轭方向选取无关的不变量。

另一种做法：

作仿射变换$(x, y, z) \to (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$，则椭球变为单位球面，且 A，B，C 的像 A'，B'，C'满足向量 OA'，OB'，OC'关于单位球面两两共轭，因此构成一组单位正交基。

考虑设$J = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OA' \\ OB' \\ OC' \end{pmatrix}$，则 J 为正交矩阵，故

$$|OA \times OB \cdot OC| = abc|OA' \times OB' \cdot OC'| = abc|J| = abc$$

以及

$$\begin{aligned} &|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 \\ &= a^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + c^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

均为定值。

7. 是

首先可不妨设Γ是一个圆，A,B 是其内部两点。设弦 AB 与圆交与 C,D，且顺序为 C,A,B,D.

现考虑线段 AB 内的点 P，令$f(P)=(C,P;A,D)-(D,P;B,C)$,则 P 靠近 A 时$f(p)\to-\infty$,P 靠近 B 时$f(p)\to+\infty$，因此存在 P 使$f(p)=0$

作射影变换使Γ不变，而 P 映为Γ的圆心，则由$(C,P;A,D)=(D,P;B,C)$知 A,B 关于 P 对称，因此Γ,A,B 射影等价于圆及一对关于圆心对称的圆内点，从而射影等价于一条椭圆及其一对焦点。