2022年秋季学期应用随机过程实验班第一次期中考试试题。每题10分，满分共80分。

1,假设$(X_n)_{n\geq 0}$是N个顶点的完全图上的简单随机游动. 令T为首次遍访所有顶点的时间，即$T=\max_{i\in\{1,\dots,N\}}\sigma_i$ (其中$\sigma_i=\min\{t\geq 1: X_t=i\}$). 求$\mathbb{E}T$.

2, 把二维格点上除开x-轴上的所有水平边都删掉得到一个“梳子状”的图。这个图上的简单随机游动（即，每一步从当前位置的所有邻居中均匀随机的选择一个位置跳转过去）是否常返？是否正常返？证明你的结论.

3，考虑一个从无穷二叉树根结点出发的如下随机游动: 若当前状态是根结点，则跳转到随机均匀选取的子结点；否则，以3/4的概率跳转到父结点，以1/4的概率跳转到随机均匀选取的子结点（所以每个子结点的跳转概率为1/8）. 令τ为首次回到根结点的时间（注意$\tau\geq 1$）.

(a) 求$\mathbb{E}\tau$.

(b) 在给定根结点的第一个子结点在τ之前被访问10次的条件下，求τ的条件期望.

4，从数字0出发，每次抛一枚公平硬币，若硬币朝上则数字加1，若硬币朝下则数字除以2后取整. 证明该马氏链正常返.

5, 令 $\beta>0$, $n\geq 1$. 令$X_1,\dots,X_n$为取值为$\{-1,1\}$的随机变量，使得

$$\mathbb{P}(X_i=\sigma_i \text{ for } i=1,\dots,n)=\frac{1}{Z}e^{\beta\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1}}.$$

上式关于取值为正负1的任意数列$(\sigma_i)_i$成立；其中Z是一个正则化因子使得$\mathbb{P}$的总测度为1（Z跟$(\sigma_i)_i$无关）.

(a) 证明$X_1,\dots,X_n$为一马氏链.

(b) 计算其转移概率.

(c) 计算$\mathbb{E}(X_1X_n)$.

6, 令$\mathcal{M}=\{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n: a_ia_{i+1}=0\forall i=1,\dots,n-1\}$。考虑状态空间为$\mathcal{M}$的如下马氏链：在每一步随机的取一个坐标$i$，若其相邻的点（如果$i=1$或者$n$则只有一个相邻的点）取值均为0，则把$a_i$以二分之一概率更新为0且以二分之一概率更新为1；否则保持不动.

(a) 求该马氏链的平稳分布.

(b) 当时刻$t \to \infty$时，若已知其状态中一共有ℓ个1（设$\ell \leq n/3$），求状态取为$a_{2i} = 1, \forall i = 1, \ldots, \ell$（且此为所有取值为1的位置）的极限条件概率.

7, 令$k \geq 2$. 设有k个粒子独立的同时从原点出发做一维简单随机游动.当所有粒子在同一位置时，我们说这k个粒子相遇. 求这k个粒子相遇无穷次的概率.

8, 参数为1/2的几何随机变量X满足$\mathbb{P}(X = k) = 2^{-(k+1)}, \forall k = 0, 1, 2, \ldots$. 考虑一个子代分布为$X$的分支过程. 计算该分支过程在第$n$代仍未灭绝的概率.