1. (1) 1013, (2) 3033. $\square$

2. 容易看出, (1)$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{0\}$, (2)$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T^2)\subset\operatorname{Ker}(T)$.

   "(1)$\Longrightarrow$(2)": 设 $\alpha\in\operatorname{Ker}(T^2)$, 则 $T\alpha\in\operatorname{Ker}(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{0\}$, 从而 $\alpha\in\operatorname{Ker}(T)$.
   "(2)$\Longrightarrow$(1)": 设 $\beta\in\operatorname{Ker}(T)\cap\operatorname{Im}(T)$, 则 $T\beta=0$, 并且存在 $\gamma\in V$ 使得 $\beta=T\gamma$. 此时有 $\gamma\in\operatorname{Ker}(T^2)\subset\operatorname{Ker}(T)$, 因此 $\beta=T\gamma=0$. $\square$

3. 取 V 的基 $\{B_1,\dots,B_{n^2-1}\}$ 和 W 的基 $\{C_1,\dots,C_{n^2-1}\}$. 将后者扩充为 $F^{n\times n}$ 的基 $\{C_1,\dots,C_{n^2}\}$. 对 $C\in F^{n\times n}$, 记 $f(C)$ 为 C 在有序基 $(C_1,\dots,C_{n^2})$ 下坐标的最后一个分量. 则 $C\in W\Longleftrightarrow f(C)=0$. 从而对 $A\in B$, 有

$$\begin{aligned}&AB\in W,\ \forall B\in V\\ \Longleftrightarrow\ &f(AB)=0,\ \forall B\in V\\ \Longleftrightarrow\ &f(AB_1)=\cdots=f(AB_{n^2-1})=0.\end{aligned}$$

   将最后的条件视为关于 A 的 n^2 个矩阵元的齐次线性方程组, 由于方程个数为 n^2-1, 所以方程组存在非零解, 即存在 $A\in F^{n\times n}\setminus\{0\}$ 使得条件成立. $\square$

4. k 的最小值为 4. 为证明结论, 需证明下面两个命题:

   (1) *存在 V 的 4 个 2 维子空间 $W_1,\dots,W_4$, 使得对 V 的任意 2 维子空间 M, 总有 $M=\bigcap_{i=1}^4(W_i+M)$;*

   (2) *对 V 的任意 3 个 2 维子空间 W_1,W_2,W_3, 存在 V 的 2 维子空间 M, 使得 $M\neq\bigcap_{i=1}^3(W_i+M)$.*

   (1) 的证明. 任取 V 的基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2024}\}$. 我们验证 $W_i=\operatorname{span}\{\alpha_{2i-1},\alpha_{2i}\}$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 满足要求. 设 $M\subset V$ 为 2 维子空间. 显然有 $M\subset\bigcap_{i=1}^4(W_i+M)$. 若两边不相等, 则 $d:=\dim\bigcap_{i=1}^4(W_i+M)\geqslant 3$. 这推出

$$8=\dim\sum_{i=1}^4 W_i\leqslant\dim\sum_{i=1}^4(W_i+M)\leqslant d+\sum_{i=1}^4(\dim(W_i+M)-d)\leqslant 3+4\cdot 1=7,$$

   矛盾.

   (2) 的证明. 取 $\beta_i\in W_i\setminus\{0\}$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$, 取 V 的 3 维子空间 L 使得 $L\supset\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, 并取 L 的 2 维子空间 M 使得 $M\cap\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\varnothing$, 则 $\operatorname{span}\{\beta_i\}+M=L$. 这推出

$$\bigcap_{i=1}^3(W_i+M)\supset\bigcap_{i=1}^3(\operatorname{span}\{\beta_i\}+M)=L\supsetneq M.$$

   $\square$