北京大学数学科学学院期末试题

2018 -2019 学年第一学期

考试科目：实变函数　　　　考试时间：2019 年 1 月 16 日下午

姓　名:________________　　　学　号:________________

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1. (15分) 设 $f_k(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 满足

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) \le f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

证明：

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

2. (15分) 设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0\,(x \in E)$. 证明：

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{\frac{1}{k}}\,dx = m(E).$$

3. (15分) 设 $f_k(x)$ 是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛. 证明：级数的和函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

4. (15分) 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, $\Phi \in L^2(E)$, $|\varphi_k(x)| \le |\Phi(x)|$, a.e. $x \in E$. 证明：若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

5. (10分) 设 $f_k \in \mathrm{BV}([a,b])$, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(a)$ 收敛, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigvee\limits_a^b (f_k) < \infty$. 证明：级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 其和函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

6. (10分) 设 $f \in L^2([-1,1])$, 闭集 $E \subset [-1,1]$, $\delta(t) = \inf\{|t-x| : x \in E\}$ 是点 t 到 E 的距离. 令

$$F(x) = \int_{[-1,1]\setminus E} \frac{\delta^{\frac{1}{2}}(t) f(t)}{|t-x|}\,dt.$$

证明：$F \in L^2(E)$, 且

$$\|F\|_{L^2(E)} \le 2\,\|f\|_{L^2([-1,1])}.$$

7. (10分) 设 $f(x)$ 在任意有界闭区间上绝对连续, $f(x) = O(|x|^{-1-\alpha})$ $(|x| \to \infty, \alpha > 0)$, 且 $f'(x) \in L(\mathbb{R})$. 令

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(tx)\,dt.$$

证明:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x)|}{|x|}\,dx < \infty.$$

8. (10分) 设 $m(E) < \infty$, $0 < p < r < \infty$, $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 且

$$\int_E |f_k(x)|^r\,dx \le M < \infty.$$

证明:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p\,dx = 0.$$