北京大学数学科学学院期末试题

2015-2016学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班） 考试时间: 2016年6月23日

姓 名: ____________ 学 号: ____________

本试题共7道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

一. (20分) 考虑实矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求正定对称实矩阵B满足$B^2 = A$.

(2) 求对角元为正数的上三角实矩阵C满足$C^t C = A$.

二. (16分) 设A, B是$n \times n$实矩阵. 假设存在$n \times n$可逆实矩阵P满足$A = PBP^{-1}$, $A^t = PB^tP^{-1}$. 证明A与B正交相似.

三. (16分) 设V是有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 假设V中任意T-不变子空间的正交补也是T-不变子空间. 证明T是正规变换.

四. (16分) 设f是有限维实线性空间V上的非退化对称双线性函数, V的子空间W_1, W_2满足$f|_{W_1}$正定, $f|_{W_2}$负定. 证明存在V的子空间$V_1 \supset W_1, V_2 \supset W_2$满足$f|_{V_1}$正定, $f|_{V_2}$负定, 并且$V = V_1 \oplus V_2$.

五. (20分) 设V是任意域F上的有限维线性空间, f是V上的交错双线性函数.

(1) 证明存在V的子空间V_1, V_2满足$f|_{V_1} = 0$, $f|_{V_2} = 0$, 并且$V = V_1 \oplus V_2$.

(2) 假设f非退化, V的子空间V_1和V_2满足(1)的要求. 证明$\dim V_1 = \dim V_2$.

六. (6分) 证明任意3×3复矩阵酉相似于形如$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$的矩阵.

七. (6分) 设V是有限维复内积空间, $S, T \in L(V)$正规. 证明ST正规的充要条件是TS正规.

北京大学数学科学学院期末试题

2016-2017学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班） **考试时间: 2017年6月15日**

姓　　名: ________________ **学　　号: ________________**

本试题共6道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

一. (20分) 考虑实矩阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵P和对角元为正数的上三角矩阵B满足$A = PB$.

(2) 求正交矩阵Q和正定对称矩阵C满足$A = QC$.

二. (20分) 设V是有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 证明:

(1) 如果$T + T^*$正定, 则T可逆;

(2) 如果$T + T^*$半正定, 则$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

三. (30分) 考虑实线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$上的对称双线性函数$f(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$. 对下列三个条件, 分别求满足该条件的子空间$W \subset \mathbb{R}^{n\times n}$的维数的最大值.

(1) $f|_W$正定;

(2) $f|_W$负定;

(3) $f|_W = 0$.

四. (12分) 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 假设$A^{n+1}$相似于正交矩阵. 证明$A^n$相似于正交矩阵.

五. (12分) 设V是n维实线性空间$(n \geq 3)$, f是V上的双线性函数. 证明存在V 的有序基$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$满足

$$i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i - j \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\alpha_i, \alpha_j) = 0.$$

六. (6分) 设$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正定Hermite矩阵. 假设$ABC$是Hermite矩阵. 证明$ABC$正定.

北京大学数学科学学院期末试题

2017-2018学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班） **考试时间: 2018年6月28日**

姓　　名: ____________ **学　　号: ____________**

本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

一. (30分) 考虑实矩阵和实向量

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

设$V \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$为包含$\alpha$的二维$L_A$-不变子空间. $\mathbb{R}^{3\times 1}$上的标准内积限制在V上, 使V成为内积空间. 设$T \in L(V)$为L_A限制在V上得到的线性变换. 求$T^*\alpha$.

二. (20分) 设V为有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 证明存在V上的酉变换U, 使得$UT + TU$为正规变换.

三. (20分) 设域F的特征不等于2, V是有限维F-线性空间, f是V上的非零对称双线性函数. 证明存在子空间$W \subset V$, 使得$\dim W = \operatorname{rank}(f)$并且$f|_W$非退化.

四. (20分) 设V是域F上的有限维线性空间, f是V上的非退化双线性函数, 子空间$W \subset V$满足$f|_W = 0$. 证明$\dim W \le \frac{1}{2}\dim V$.

五. (10分) 设n为正整数, S为$\mathbb{C}^{n\times 1}$的有限子集, 满足$\operatorname{span} S = \mathbb{C}^{n\times 1}$. 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A\text{可逆, 并且对任意}\alpha \in S\text{有}A\alpha \in S\}.$$

证明存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得对任意$A \in \Omega$, PAP^{-1}均为酉矩阵.

北京大学数学科学学院期末试题

2019-2020学年第2学期

考试科目：高等代数II（实验班）　　**考试时间：**2020年9月15日

姓　　名：________________　　**学　　号：**________________

本试题共5道大题，满分100分，考试时间120分钟.

一. (20分) 考虑实矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 P 和对角元为正数的上三角矩阵 B 满足 $A = PB$.

(2) 求正交矩阵 Q 和正定对称矩阵 C 满足 $A = QC$.

二. (20分) 设整数 $n \geq 4$. 对 $k \in \{1, \ldots, n-3\}$, 定义 $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为

$$A_k = \sum_{j \in \{1,\ldots,n-2\} \setminus \{k,k+1\}} E_{j,j+2},$$

这里 $E_{j,j+2} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 $(j, j+2)$-元为 1, 其他矩阵元均为 0. 设 S 为 $\{A_1, \ldots, A_{n-3}\}$ 的子集, 其中的矩阵在复数域上两两不相似. 求 $|S|$ 的最大值.

三. (20分) 设 n 为正整数. 证明对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 下面两个陈述等价：

(i) A 为两个 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的正定对称矩阵的乘积.

(ii) A 在实数域上可对角化, 并且特征值均为正数.

四. (20分) 设 V 是有限维非零复线性空间, 并设 $D(V)$ 为 $L(V)$ 中所有可对角化的线性变换的集合. 对于 $f \in \mathbb{C}[x]$, 记

$$f(L(V)) = \{f(T) \mid T \in L(V)\}.$$

证明

$$\bigcap_{f \in \mathbb{C}[x], \deg(f) \geq 1} f(L(V)) = D(V).$$

五. (20分) 求所有正整数 n, 使得存在 $P \in \mathrm{SU}(n)$, 满足对任意 $A \in \mathrm{SU}(n)$, 总有 $PAP^{-1} = \overline{A}$. 这里 $\mathrm{SU}(n)$ 为所有行列式为 1 的 n 阶酉矩阵的集合, $\overline{A}$ 表示矩阵 A 的复共轭.

15–16(2)期末答案

一. $B=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0&\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$. $\square$

二. 由$A^t=PB^tP^{-1}$得$A=(P^t)^{-1}BP^t$. 因此$PBP^{-1}=(P^t)^{-1}BP^t$. 这推出P^tP与B可交换. 考虑P的极分解$P=UN$, 其中U正交, $N=\sqrt{P^tP}$. 容易看出N是P^tP的多项式, 所以也与B可交换. 因此$A=PBP^{-1}=(UN)B(N^{-1}U^{-1})=UBU^{-1}$. $\square$

三. 取T的特征向量$\alpha\in V\setminus\{0\}$. 则$W:=\alpha^\perp$是$T$-不变子空间. 容易看出, W的任意T_W-不变子空间Z在W中的正交补等于$Z\oplus\mathbb{C}\alpha$在V中的正交补, 所以也是T_W-不变子空间. 因此, 通过对$\dim V$做归纳, 可以假设T_W正规. 这就推出T正规. $\square$

四. 由惯性定理, 存在V的子空间Z_1,Z_2满足$f|_{Z_1}$正定, $f|_{Z_2}$负定, 并且$V=Z_1\oplus Z_2$. 设$V_i=W_i\oplus(Z_i\cap W_i^\perp)$, $i=1,2$. 则$f|_{V_1}$正定, $f|_{V_2}$负定. 这推出$V_1\cap V_2=\{0\}$. 另一方面,

$$\dim V_i=\dim W_i+\dim(Z_i\cap W_i^\perp)\geq\dim W_i+(\dim Z_i+\dim W_i^\perp-\dim V)=\dim Z_i.$$

所以

$$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2\geq\dim Z_1+\dim Z_2=\dim V.$$

因此$V=V_1\oplus V_2$. $\square$

五. (1) 取V的有序基$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$满足$[f]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},0,\ldots,0\right)$, 其中共有$m$个$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$. 容易验证

$$V_1=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_3,\ldots,\alpha_{2m-1}\},\qquad V_2=\operatorname{span}\{\alpha_2,\alpha_4,\ldots,\alpha_{2m},\alpha_{2m+1},\ldots,\alpha_n\}$$

满足要求.

(2) 考虑线性映射$\Phi:V_1\to V_2^*$, $\Phi(\alpha)(\beta)=f(\alpha,\beta)$. 由$f$非退化, $f|_{V_1}=0$和$V=V_1\oplus V_2$容易推出Φ是单映射. 所以$\dim V_1\leq\dim V_2^*=\dim V_2$. 类似地, 有$\dim V_2\leq\dim V_1$. 因此$\dim V_1=\dim V_2$. $\square$

六. 只需证明对任意$\mathbb{C}^{3\times1}$上的线性变换T, 存在$\mathbb{C}^{3\times1}$在标准内积下的有序标准正交基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$满足$\langle T\alpha_2,\alpha_1\rangle=\langle T\alpha_2,\alpha_3\rangle=\langle T\alpha_3,\alpha_2\rangle=0$. 取$T$的单位特征向量$\alpha_2$. 只需证明存在$W:=\alpha_2^\perp$的标准正交基$\{\alpha_1,\alpha_3\}$满足$T\alpha_3\in W$. 由于$\dim T^{-1}(W)\geq\dim W=2$, 所以$W\cap T^{-1}(W)\neq\{0\}$. 因此可取单位向量$\alpha_3\in W\cap T^{-1}(W)$. 再取单位向量$\alpha_1\in W$满足$\alpha_1\perp\alpha_3$即可. $\square$

七. 只需证明一个方向. 假设ST正规. 考虑S的极分解$S=UN$, 其中U酉, $N=\sqrt{S^*S}$. 由S正规容易推出U与N可交换. 我们验证T与N也可交换: 记$R=TS^*S-S^*ST$. 则

$$\begin{aligned}R^*R&=(S^*ST^*-T^*S^*S)(TS^*S-S^*ST)\\&=S^*ST^*TS^*S+T^*S^*SS^*ST-S^*S(T^*S^*ST)-(T^*S^*ST)S^*S\\&=S^*ST^*TS^*S+T^*S^*SS^*ST-S^*S(STT^*S^*)-(STT^*S^*)S^*S.\end{aligned}$$

再由S,T的正规性, 容易得到$\operatorname{tr}(R^*R)=0$. 因此$R=0$, 即$T$与$S^*S$可交换, 从而与$N$也可交换. 现在有$U^{-1}STU=NTU=TUN=TS$. 因此$TS$也正规. $\square$

16–17(2)期末答案

一. $P=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\sqrt{5}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

二. 注意到对任意$\alpha\in\mathrm{Ker}(T)$有

$$\langle (T+T^*)\alpha,\alpha\rangle=\langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle T^*\alpha,\alpha\rangle=\langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle \alpha,T\alpha\rangle=0.$$

如果$T+T^*$正定, 这推出$\alpha=0$, 即在(1)的条件下有$\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, 从而T可逆. 如果$T+T^*$半正定, 则上式推出$(T+T^*)\alpha=0$, 从而$T^*\alpha=0$, 即$\alpha\in\mathrm{Ker}(T^*)$. 这说明在(2)的条件下有$\mathrm{Ker}(T)\subset\mathrm{Ker}(T^*)$. 用$T^*$替换$T$, 即得反向的包含关系. □

三. 答案为: (1) $\frac{n(n+1)}{2}$; (2) $\frac{n(n-1)}{2}$; (3) $\frac{n(n-1)}{2}$. 下面证明. 设W_1和W_2分别为$\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的对称和反对称矩阵构成的子空间. 则$\dim W_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $\dim W_2=\frac{n(n-1)}{2}$. 注意到

- $f|_{W_1}$正定: 设$A\in W_1\smallsetminus\{0\}$, 则$A$相似于某个非零实对角矩阵$D$, 从而
$$f(A,A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(D^2)>0.$$
- $f|_{W_2}$负定: 设$A\in W_2\smallsetminus\{0\}$, 则$A$(在$\mathbb{C}$上)相似于某个非零纯虚对角矩阵$D$, 从而
$$f(A,A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(D^2)<0.$$

若子空间$W\subset\mathbb{R}^{n\times n}$的维数大于$\frac{n(n+1)}{2}$, 则$W\cap W_2\neq\{0\}$, 从而$f|_W$不正定. 这说明(1)的答案为$\frac{n(n+1)}{2}$. 类似的推导说明(2)的答案为$\frac{n(n-1)}{2}$. 为了讨论(3), 记$W_3$为$\mathbb{R}^{n\times n}$中的严格上三角矩阵构成的子空间. 则$\dim W_3=\frac{n(n-1)}{2}$, 并且$f|_{W_3}=0$. 若子空间$W\subset\mathbb{R}^{n\times n}$的维数大于$\frac{n(n-1)}{2}$, 则$W\cap W_1\neq\{0\}$, 从而$f|_W\neq 0$. 因此(3)的答案为$\frac{n(n-1)}{2}$. □

四. *方法一.* 不妨设A^{n+1}正交. 记$B=\sum_{k=0}^{n}(A^k)^tA^k$. 则$A^tBA=B$. 注意到$B$正定, 从而存在可逆矩阵$P$使得$B=P^tP$. 结合起来得$(PAP^{-1})^t(PAP^{-1})=I_n$, 即$PAP^{-1}$正交, 因此$PA^nP^{-1}$正交. □

方法二. 条件推出A可逆, 并且A^{n+1}在$\mathbb{C}$上可对角化. 通过考虑Jordan标准型, 可知A在$\mathbb{C}$上可对角化, 并且特征值均为模等于1的复数. 通过考虑A的特征多项式的实因式分解, 可知A相似于$\mathrm{diag}(I_p,-I_q,D_1,\dots,D_r)$, 其中$D_k=\mathrm{diag}(e^{i\theta_k},e^{-i\theta_k})$. 注意到$D_k$相似于$R_k:=\begin{bmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{bmatrix}$. 因此$A$在$\mathbb{C}$上相似于正交矩阵$\mathrm{diag}(I_p,-I_q,R_1,\dots,R_r)$, 从而在$\mathbb{R}$上也相似于该正交矩阵. □

五. *引理.* 设$T\in L(V)$. 则存在T的不变子空间序列$\{0\}=W_0\subset W_1\subset\cdots\subset W_k=V$满足$1\le\dim W_j/W_{j-1}\le 2$. □

引理的证明. 对$n=\dim V$归纳. 当$n\le 2$时显然. 设$n\ge 3$. 我们断言存在V的1维或2维T-不变子空间W. 取V的有序基$\mathcal{B}$, 并记$A=[T]_{\mathcal{B}}$. 视A为复矩阵, 它存在特征值和特征向量, 即存在$a,b\in\mathbb{R}$和不全为零的$X,Y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$满足$A(X+iY)=(a+ib)(X+iY)$, 也就是

$$AX=aX-bY,\qquad AY=bX+aY.$$

取$\alpha,\beta\in V$满足$[\alpha]_{\mathcal{B}}=X$, $[\beta]_{\mathcal{B}}=Y$. 则α,β不全为零, 并且

$$T\alpha=a\alpha-b\beta,\qquad T\beta=b\alpha+a\beta.$$

这推出$W:=\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}$是1维或2维$T$-不变子空间, 从而证明了断言. 对$T_{V/W}$应用归纳假设即得引理.

注意到引理推出: 如果V是n维实内积空间, $T\in L(V)$, 则存在有序标准正交基$\mathcal{B}$使得

$$i,j\in\{1,\dots,n\},\ i-j\ge 2\qquad\Longrightarrow\qquad [T]_{\mathcal{B}}\text{的}(i,j)\text{-元等于}0.$$

事实上, 取$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$使得$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{\dim W_j}\}$是$W_j$的基即满足要求. 这进一步推出: 任意$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$正交相似于某个当$i-j\ge 2$时$(i,j)$-元为0的矩阵, 从而合同于这样的矩阵. 对于原题, 约定f在有序基$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$下的矩阵的$(i,j)$-元为$f(\alpha_i,\alpha_j)$, 则$f$在所有有序基下的矩阵构成一个合同等价类, 因此存在有序基使f的矩阵的(i,j)-元当$i-j\ge 2$时等于0. □

六. 记$D=ABC$, $A_1=\sqrt{B}A\sqrt{B}$, $C_1=\sqrt{B}C\sqrt{B}$, $D_1=\sqrt{B}D\sqrt{B}$. 则A_1,C_1,D_1是Hermite矩阵, A_1,C_1正定, 并且$D_1=A_1C_1$. 这推出$(\sqrt{A_1})^{-1}D_1(\sqrt{A_1})^{-1}=\sqrt{A_1}C_1(\sqrt{A_1})^{-1}$是Hermite矩阵并且特征值为正数, 从而正定. 这进一步推出D_1正定, 从而D正定. □

17–18(2)期末答案

一. 容易求得, 向量$\beta_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$分别为$L_A$关于特征值$1, 2, 3$的特征向量. 而$\mathbb{R}^{3\times 1}$的二维$L_A$-不变子空间必为某两个$\beta_i$生成的子空间. 由于$V$包含$\alpha$, 所以只能有

$$V = \operatorname{span}\{\beta_2, \beta_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\x\\y\end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

另一方面, 对任意$\beta \in V$有

$$\langle T^*\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, L_A\beta\rangle = \langle (L_A)^*\alpha, \beta\rangle.$$

所以$(L_A)^*\alpha - T^*\alpha \in V^\perp$. 因此$T^*\alpha$为$(L_A)^*\alpha$在$V$上的正交投影. 而$(L_A)^*\alpha = A^t\alpha = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$. 所以$T^*\alpha = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. □

二. 考虑极分解$T = QN$, 其中Q酉, N自伴. 取$U = Q^{-1}$. 则$UT = N$自伴. 另一方面, $TU = U^*UTU = U^*NU$也自伴. 因此$UT + TU$自伴, 从而正规. □

三. 取V的有序基$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$使得$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$. 经过对$\alpha_i$重新排序, 不妨设$c_i \neq 0 \iff i \le r$, 这里$r = \operatorname{rank}(f)$. 取$W = \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. 则$\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$为$W$的有序基, 并且$[f|_W]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_r)$可逆. 从而$f|_W$非退化. □

四. 考虑线性映射$L_f : V \to V^*, L_f(\alpha)(\beta) = f(\alpha, \beta)$. 则$L_f(W) \subset W^0$. 由于$f$非退化, 所以$L_f$可逆. 因此

$$\dim W = \dim L_f(W) \le \dim W^0 = \dim V - \dim W.$$

这推出$\dim W \le \frac{1}{2}\dim V$. □

五. 容易看出Ω为有限集. 考虑矩阵

$$C = \sum_{B\in\Omega} B^*B.$$

注意到对任意$A, B \in \Omega$总有$BA \in \Omega$. 所以对任意$A \in \Omega$有

$$A^*CA = \sum_{B\in\Omega} (BA)^*(BA) = \sum_{B\in\Omega} B^*B = C.$$

另一方面, 由于C为正定Hermite矩阵, 所以存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$使得$C = P^*P$. 结合起来有$A^*P^*PA = P^*P$, 即$PAP^{-1}$为酉矩阵. □

19–20(2)期末答案

一. $P=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\end{bmatrix}$, $B=\sqrt5\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}$. $\square$

二. $|S|$的最大值 $=\begin{cases}[\frac{n}{2}]-1, & n\not\equiv 2 \pmod 4,\\ [\frac{n}{2}]-2, & n\equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$ 先证明:

引理. 设$m\ge 2$. 则$N_m:=\sum_{j=1}^{m-2}E_{j,j+2}\in\mathbb{C}^{m\times m}$的Jordan标准型为$\operatorname{diag}\left(J_{[\frac{m}{2}]},J_{[\frac{m+1}{2}]}\right)$, 其中$J_r=J_r(0)$.

引理的证明. 在N_m的Jordan标准型中, Jordan块的个数为$\dim\operatorname{Ker}(N_m)=2$. 另一方面, 由于$N_m^{[\frac{m+1}{2}]}=0$, 所以每个Jordan块的阶数$\le[\frac{m+1}{2}]$. 结合起来即得引理的结论.

现在求$|S|$的最大值. 记$d=[\frac{n}{2}]-1$. 注意到A_k与A_{n-2-k}相似, 所以可以在集合$\{A_1,\dots,A_d\}$中考虑问题. 由于$A_k=\operatorname{diag}(N_{k+1},N_{n-k-1})$, 所以由引理, A_k的Jordan标准型为$\operatorname{diag}\left(J_{[\frac{k+1}{2}]},J_{[\frac{k+2}{2}]},J_{[\frac{n-k-1}{2}]},J_{[\frac{n-k}{2}]}\right)$. 下面分两种情况.

(1) 当$n\not\equiv 2 \pmod 4$时, 对$1\le k\le d$总有$[\frac{k+2}{2}]\le[\frac{n-k-1}{2}]$. 所以$A_1,\dots,A_d$的Jordan标准型（在差Jordan块排列次序的意义下）互不相同, 从而$A_1,\dots,A_d$互不相似. 因此$|S|$的最大值为d.

(2) 当$n\equiv 2 \pmod 4$时, 类似可证$A_1,\dots,A_{d-1}$互不相似. 但A_{d-1}和A_d的Jordan标准型分别为$\operatorname{diag}\left(J_{\frac{n-2}{4}},J_{\frac{n-2}{4}},J_{\frac{n+2}{4}},J_{\frac{n+2}{4}}\right)$和$\operatorname{diag}\left(J_{\frac{n-2}{4}},J_{\frac{n+2}{4}},J_{\frac{n-2}{4}},J_{\frac{n+2}{4}}\right)$, 它们在差Jordan块排列次序的意义下相同. 所以A_{d-1}与A_d相似. 因此$|S|$的最大值为$d-1$. $\square$

三. “(i)$\Longrightarrow$(ii)”: 设$A=BC$, 其中B,C正定对称. 则存在$P\in GL_n(\mathbb{R})$使得$B=PP^t$. 从而$A=PP^tC=P(P^tCP)P^{-1}$. 而P^tCP正定对称, 从而相似于正对角矩阵. 因此A相似于正对角矩阵.
“(ii)$\Longrightarrow$(i)”: 设$A=QDQ^{-1}$, 其中$Q\in GL_n(\mathbb{R})$, D正对角. 则$A=(QDQ^t)(QQ^t)^{-1}$, 并且QDQ^t和$(QQ^t)^{-1}$正定对称. $\square$

四. “$\supset$”: 设$T\in D(V)$. 需要证明对任意次数≥ 1的$f\in\mathbb{C}[x]$, 存在$U\in L(V)$使得$f(U)=T$. 记$n=\dim V$, 并取V的有序基$\mathcal{B}$使$[T]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}(c_1,\dots,c_n)$. 对次数$\ge 1$的$f\in\mathbb{C}[x]$, 取$a_i\in\mathbb{C}$满足$f(a_i)=c_i$, 并取$U\in L(V)$满足$[U]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)$. 则$f(U)=T$.
“$\subset$”: 设$T\in\bigcap_{f\in\mathbb{C}[x],\deg(f)\ge1}f(L(V))$. 为证明$T$可对角化, 只需证明$T$的任意特征值的代数重数等于几何重数. 设$c\in\sigma(T)$. 由条件, 对于$f=x^n+c$, 存在$U\in L(V)$满足$f(U)=T$, 即$U^n+cI=T$. 通过考虑$U$的Jordan标准型, 可知存在$V$的有序基$\mathcal{B}'$使$[U]_{\mathcal{B}'}$为分块矩阵$\begin{pmatrix}N&*\\0&A\end{pmatrix}$, 其中$N$严格上三角, A可逆且上三角. 于是$[T]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}cI&*\\0&A^n+cI\end{pmatrix}$. 这就推出$c$作为$T$的特征值的代数重数等于几何重数. $\square$

五. 答案为$n=1,2$. $n=1$时显然. 当$n=2$时, 容易验证, 对任意$A\in\mathrm{SU}(2)$, 总有$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\overline{A}$. 当$n\ge3$时, $A_0:=e^{2\pi i/n}I_n\in\mathrm{SU}(n)$与$\overline{A_0}=e^{-2\pi i/n}I_n$不相似, 所以不存在满足条件的$P$. $\square$