数学分析 (II) 期中考试

北京大学 2023-2024 学年春季学期*

共 8 题, 总分 100 分

本参考答案仅供进一步学习、查漏补缺之用.

1 (10 分)**.** 已知 $f(x) \in R[0,1]$, $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. 判断下列命题的正误并简要论证.

1. (5 分) $f(x)e^{g(x)} \in R[0,1]$.
2. (5 分) 对任意 $x \in (0,1)$, $\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = f(x)e^{g(x)}$.

解答.

1. 正确. 由 $f \in R[0,1]$ 可知 $g \in C[0,1]$, 于是 $e^{g(x)} \in C[0,1]$, 因此 $e^{g(x)} \in R[0,1]$. 由于 Riemann 可积函数的乘积还是 Riemann 可积的, 故 $f(x)e^{g(x)} \in R[0,1]$.
2. 错误. 比如取 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数. 由于 $f \geq 0$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, 可知 $g(x) \equiv 0$. 此时 $\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = 0$, 而 $f(x)e^{g(x)} = f(x) \not\equiv 0$.

2 (10 分)**.** 设 $a_n := \prod_{k=1}^n \frac{k-\arctan k}{k}$. 判断级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 的敛散性并证明.

解答. 计算 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)-\arctan(n+1)}$. 注意到

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\arctan(n+1)}{(n+1)-\arctan(n+1)} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

因此由 Raabe 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛.

3 (10 分)**.** 计算 $y = x^3$ ($x \in [0,1]$) 的图像绕 x 轴旋转一周形成的旋转曲面的面积.

解答. 记面积为 S, 令 $f(x) = x^3$. 利用现成的公式 (见 §7.6.7)

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{1+9x^4}\,d(x^4) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{27}\left(1+9y\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{y=0}^1 \\ &= \frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right). \end{aligned}$$

*考试时间: 2024 年 4 月 15 日 10:10 - 12:00.

4 (12 分)**.** 设

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{如果 } x \in [-1, 0), \\ \frac{1}{\sin x}, & \text{如果 } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

证明 p.v. $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ 收敛.

解答. 利用 Cauchy 主值积分以及 $f(x)$ 的定义, 需证明

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sin x}\, dx \text{ 收敛.}$$

对上式中第一个积分换元得

$$\int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sin x}\, dx = \int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\, dx = \int_{\delta}^{1} \frac{x - \sin x}{x \sin x}\, dx.$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 对任意 $x \in (0, 1]$,

$$|x - \sin x| \leq \frac{1}{6} |\cos \xi_x| |x|^3 \leq \frac{1}{6} |x|^3.$$

此处 $\xi_x \in [0, x]$. 因此对任意 $x \in (0, 1]$,

$$\left| \frac{x - \sin x}{x \sin x} \right| \leq \frac{1}{6} \frac{|x|^3}{|x| |\sin x|} \leq \frac{1}{6 \sin 1}.$$

所以对任意的 $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$,

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{x - \sin x}{x \sin x}\, dx \right| \leq \frac{|\delta_2 - \delta_1|}{6 \sin 1}.$$

因此

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{x - \sin x}{x \sin x}\, dx \text{ 收敛.}$$

这进而说明原题中的 Cauchy 主值积分收敛.

5 (12 分)**.** 已知序列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, 且 $a_n - a_{n+1} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 成立. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

思路. 一个自然的想法是将级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ 相邻的两项合并在一起, 然后使用 $a_n - a_{n+1}$ 的上界信息. 比如考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} a_{2n-1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$, 这样能说明部分和有有限的上界. 另一方面, $a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} a_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1})$, 这样就能说明部分和有有限的下界. 但光证明部分和序列有界不足以说明收敛, 还需证明当 n 充分大之后, 部分和 S_n 的振荡可以充分小. 这就启发我们不从 a_1 开始, 而是从一个较大的指标处开始进行上述的合并前后项并放缩的操作, 从而说明级数的 "尾部" 对部分和的影响是非常小的. 具体的证明可采用 Cauchy 准则.

解答. 我们将使用 Cauchy 准则来证明. 为了证明方便, 不妨先对于 $m < n$, 考虑控制

$$\sum_{k=2m+1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k.$$

注意这里指标的求和范围有一定的特殊性, 之后我们再处理一般情形. 一方面,

$$\sum_{k=2m+1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k = \sum_{l=m+1}^{n} a_{2l-1} - a_{2l} \le \sum_{l=m+1}^{n} \frac{1}{(2l-1)(2l)} \le \frac{1}{2m+1}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2m+1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k &= a_{2m+1} - a_{2n} - \sum_{l=m+1}^{n-1} a_{2l} - a_{2l+1} \\ &\ge -|a_{2m+1}| - |a_{2n}| - \sum_{l=m+1}^{n-1} \frac{1}{(2l)(2l+1)} \ge -2 \sup_{k \ge 2m+1} |a_k| - \frac{1}{2m+2}.\end{aligned}$$

综上,

$$\left| \sum_{k=2m+1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k \right| \le 2 \sup_{k \ge 2m+1} |a_k| + \frac{1}{2m+1}.$$

进而考虑一般的指标求和范围

$$\sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{k+1} a_k.$$

可以将它与

$$\sum_{k=m'+1}^{n'} (-1)^{k+1} a_k$$

进行比较, 这里 $m' := 2\lceil m/2 \rceil$, $n' := 2\lfloor n/2 \rfloor$. 它们至多可能相差在头尾的两项, 所以利用上面的估计得

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| \le 4 \sup_{k \ge m+1} |a_k| + \frac{1}{m+1}.$$

由于 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 当 $m \to +\infty$ 时, 上式右边趋向于 0. 因此由 Cauchy 准则, 级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

解答. 另一个略有技巧性的证法如下. 事实上, 它等价于前一种证法.

考虑 $b_n = a_n - \frac{1}{n}$. 由条件知 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 且对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$b_n - b_{n+1} = a_n - \frac{1}{n} - a_{n+1} + \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 0.$$

因此 $\{b_n\}$ 为单调递增且收敛到 0 的序列, 故 b_n 均为非正数. 因此由 Leibniz 判别法, 级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} b_n$ 收敛. 由于级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 也收敛, 故级数 $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

6 (14 分)**.** 证明: 对任意 $p>-1$, $\int_0^\infty x^p\sin(e^x)\,dx$ 收敛.

思路. 一方面我们需处理正无穷处的积分的收敛性; 另一方面, 如果 $p<0$, $x=0$ 为积分的瑕点, 故还需处理 $x=0$ 附近瑕积分的收敛性. 以下解答采用了统一的处理方式, 并不区分 p 是否为负数.

解答. 首先证明

$$\lim_{X\to+\infty}\int_1^X x^p\sin(e^x)\,dx \text{ 收敛.}$$

利用换元 $y=e^x$, 我们计算得

$$\int_1^X x^p\sin(e^x)\,dx=\int_1^X \frac{x^p}{e^x}\sin(e^x)\,d(e^x)=\int_e^{e^X}\frac{(\ln y)^p}{y}\sin y\,dy.$$

为了证明

$$\lim_{Y\to+\infty}\int_e^Y \frac{(\ln y)^p}{y}\sin y\,dy \text{ 收敛,} \tag{1}$$

我们使用 Dirichlet 判别法. 一方面对任意的 $Y\geq e$, $|\int_e^Y\sin y\,dy|\leq 2$. 另一方面, 令 $f(y)=\frac{(\ln y)^p}{y}$, 则 $f'(y)=\frac{(\ln y)^{p-1}}{y^2}(p-\ln y)$, 故当 $y\geq e^p$ 时 $f'(y)\leq 0$, 所以 $f(y)$ 在 $[e^p,+\infty)$ 上单调递减. 另外不难证明 $\lim_{y\to+\infty}f(y)=0$. 所以由 Dirichlet 判别法 (如果 $p\geq 0$, 则仅在 $[e^p,+\infty)$ 上使用), (1) 得证.

接下来证明, 当 $p>-1$ 时,

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^1 x^p\sin(e^x)\,dx \text{ 收敛.}$$

我们只需注意到 $|x^p\sin(e^x)|\leq x^p$ 以及 $\int_0^1 x^p\,dx$ 在 $p>-1$ 时收敛, 然后利用比较判别法即可证明此结论.

综上所述, 对任意的 $p>-1$, $\int_0^\infty x^p\sin(e^x)\,dx$ 收敛.

7 (16 分)**.** 已知 $a_n\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 且级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛.

1. (8 分) 如果进一步假设 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 绝对收敛, 请证明 $\sum_{n=1}^\infty \tan a_n$ 绝对收敛;
2. (8 分) 举例说明 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 条件收敛的情况下 $\sum_{n=1}^\infty \tan a_n$ 可能发散. 请给出必要的论证.

   提示. $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5)$.

解答. 1. 由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛, 我们知道 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$, 故存在 $N>0$ 使得当 $n\geq N$ 时, 都有 $|a_n|\leq 1$. 因此存在一个不依赖于 n 的常数 C 使得 $|\tan a_n|\leq C|a_n|$ 对任意 $n\geq N$ 成立. 由于 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 绝对收敛, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^\infty|\tan a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^\infty \tan a_n$ 绝对收敛.

2. 注意到在 $a_n\approx 0$ 时, 我们有 $\tan a_n = a_n+\frac{1}{3}a_n^3+O(a_n^5)$, 所以我们先考虑构造一个级数使得 $\sum_{n=1}^\infty a_n^3$ 发散.

为了记号清晰, 记 $\alpha = \frac{1}{3}$. 考虑如下形式的序列 $\{a_n\}$:

$$1, -1,\ 2^{-\alpha}, -2^{-(\alpha+1)}, -2^{-(\alpha+1)},\ \cdots,\ k^{-\alpha}, \underbrace{-k^{-(\alpha+1)}, \cdots, -k^{-(\alpha+1)}}_{k\ 项},\ \cdots$$

也就是说, 定义

$$a_n := \begin{cases} k^{-\alpha}, & 如果\ n = \frac{k(k+1)}{2},\ k \in \mathbb{Z}_+, \\ -k^{-(\alpha+1)}, & 如果\ n \in (\frac{k(k+1)}{2}, \frac{(k+1)(k+2)}{2}),\ k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

定义部分和 $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. 利用序列 $\{a_n\}$ 中各项的符号, 我们不难证明,

$$S_n \begin{cases} = k^{-\alpha}, & 如果\ n = \frac{k(k+1)}{2},\ k \in \mathbb{Z}_+, \\ \in [0, k^{-\alpha}), & 如果\ n \in (\frac{k(k+1)}{2}, \frac{(k+1)(k+2)}{2}),\ k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

另一方面, 定义 $T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k^3$. 利用 $\alpha = \frac{1}{3}$ 以及 a_n 的符号, 我们可类似地可以证明

- 如果 $n = \frac{k(k+1)}{2}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, 则

$$T_n = \sum_{j=1}^{k} j^{-1} - \sum_{j=1}^{k-1} j^{-3}.$$

- 如果 $n \in (\frac{k(k+1)}{2}, \frac{(k+1)(k+2)}{2})$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, 则

$$\sum_{j=1}^{k} j^{-1} - \sum_{j=1}^{k} j^{-3} \le T_n < \sum_{j=1}^{k} j^{-1} - \sum_{j=1}^{k-1} j^{-3}.$$

由于 $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}$ 发散而 $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-3}$ 收敛, 我们得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

下面我们说明对这一序列 $\{a_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tan a_n$ 发散. 令 $b_n := \tan a_n - (a_n + \frac{1}{3}a_n^3)$. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开知, 存在一个不依赖于 n 的常数 C 使得 $|b_n| \le C|a_n|^5$. 定义 $R_n := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^5$, 则序列 $\{R_n\}$ 单调增, 且当 $n = \frac{k(k+1)}{2}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ 时,

$$R_n = \sum_{j=1}^{k} j^{-5\alpha} + j \cdot j^{-5(\alpha+1)} = \sum_{j=1}^{k} j^{-5/3} + j^{-17/3}.$$

故序列 $\{R_n\}$ 收敛, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散, 我们得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan a_n$ 发散.

8 (16 分). 设 $f_n(x) := \sqrt{1+x^n} - 1$.

1. (4 分) 证明存在唯一的 $\xi_n \in [0,1]$ 使得 $f_n(\xi_n) = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

2. (6 分) 证明 $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = 1$.

3. (6 分) 判断无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 的敛散性并证明.

提示. 在后两小题中, 可尝试推导积分的上下界来获得对 ξ_n 的估计.

解答. 1. 由于 f_n 在 $[0,1]$ 上连续, ξ_n 的存在性由积分第一中值定理保证. 由于 f_n 在 $[0,1]$ 上严格单调增, 故这样的 ξ_n 唯一.

2. 注意到, 对于 $x\in[0,1]$,

$$f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}+1}\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}x^n,\,\frac{1}{2}x^n\right]. \tag{2}$$

所以

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\le\int_0^1\frac{1}{2}x^n\,dx=\frac{1}{2(n+1)}, \tag{3}$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\ge\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}+1}x^n\,dx=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(n+1)}.$$

利用后一不等式得

$$\frac{1}{2}\xi_n^n\ge f_n(\xi_n)=\int_0^1 f_n(x)\,dx\ge\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(n+1)}.$$

再结合 $\xi_n\in[0,1]$ 得

$$0<\left(\frac{2}{(\sqrt{2}+1)(n+1)}\right)^{1/n}\le\xi_n\le 1.$$

令 $n\to+\infty$ 即得 $\lim_{n\to+\infty}\xi_n=1$.

3. 这一无穷乘积是发散的.

利用上面的 (2) 和 (3) 得,

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}\xi_n^n\le f_n(\xi_n)=\int_0^1 f_n(x)\,dx\le\frac{1}{2(n+1)}.$$

所以,

$$0<\xi_n\le\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2(n+1)}\right)^{1/n}=e^{\frac{1}{n}(\ln c-\ln(n+1))}.$$

此处 $c:=(\sqrt{2}+1)/2$. 不难证明当 n 充分大后 (比如 $n\ge 3$ 时), $\ln c-\ln(n+1)\le -1$, 故 $0<\xi_n\le e^{-1/n}$. 由于 $\sum_{n=3}^{\infty}-\frac{1}{n}$ 发散到 $-\infty$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty}\xi_n\to 0$, 即无穷乘积发散.