# 24-25 应随实验班期末 1.9

**一**、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动，$M_t := \max\limits_{0\leq s\leq t} B_s$，请问 $(M_t)_{t\geq 0}$ 是否是马氏过程.

**二**、将 $\mathbb{Z}^3$ 中所有相邻点（距离为 1）之间连一条边，然后删去 $\{(100m, 100n, 100k)|m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ 和所有它们连的边，请问这个图上的紧邻随机游走是否常返.

**三**、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动. 当 $0 \leq t \leq 1/2$ 时令 $X_t = B_t$，$t \geq 1/2$ 时 $X_t = B_{1/2} + 2(B_t - B_{1/2})$. 求 $\max\limits_{0\leq s\leq 1} X_s$ 的分布.

**四**、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是三维标准布朗运动，求证几乎必然有 $\lim\limits_{t\to\infty} |B_t| = \infty$.

**五**、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动，问 $B_t + t$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值点是否唯一.

**六**、设 $T$ 是一个 GW 树，子代分布为均值等于 2 的 Poisson 分布. 条件在该分支过程不灭绝上，问 $T$ 上的紧邻随机游走常返的概率.

**七**、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是二维标准布朗运动，起点为 $x$. 记 $\tau = \inf\{t : B_t \in \partial B(0, 1)\}$ 是单位圆的首达时. 求当 $|x| \to \infty$ 时 $B_\tau$ 的极限分布.

八、设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动，记

$$p_t = \mathbb{P}\{B_s \leq 1 + \sqrt{s}, \forall\ 0 \leq s \leq t\}$$

求证：$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{-\log p_t}{\log t} = \theta$ 存在且 $\theta \in (0, \infty)$（若假定了极限存在，证明了 $\theta \in (0, \infty)$ 可以获得一半分数）.

**一**、显然不是马氏过程，丁老师每年都会上课讲.

**二**、不常返，注意到这个新的图里有一个与 $100\mathbb{Z}^3$ 同构的子图：$100\mathbb{Z}^3+(1,1,1)$ 相邻两点（距离为 100）之间连了长度为 100 的边. 由 Nash-Williams Criterion 这个子图上有能量有限且流到无穷远的电流，所以原图也有，不常返.

**三**、布朗运动的"时空尺度"是 2 比 1，所以 $X_t$ 就是在 $1/2$ 之后速度变成四倍的布朗运动. 因此 $X$ 在 $[0,1]$ 上的最大值分布等于标准布朗运动在 $[0,5/2]$ 上的最大值分布（笨人在考场上写下"1/2+4*1/2=3"的惊人等式...），根据反射原理答案为正态分布 $\mathcal{N}(0,5/2)$ 的绝对值.

**四**、课上讲了，标准结论.

**五**、类似于课上证明，取有理点分段。只需证对任意 $t_0>0$ 有 $B_t+t$ 在 $[0,t_0]$ 上的最大值是连续型随机变量. 利用 Girsanov 变换可以直接算出 $B_t+t$ 首次抵达某个 $a\in\mathbb{R}$ 的首达时分布（见 Karatzas & Shreve Brownian Motion and Stochastic Calculus 第二版 P196）所以立刻得到是连续型.

**六**、对于每个点度数有限的无穷树 $\Gamma$，R.Lyons 在 1990 年证了两个结论；一个是 $p_c(\Gamma)=1/\mathrm{br}(\Gamma)$，另一个是 $\mathrm{br}(\Gamma)>1$ 时，$\Gamma$ 上的紧邻随机游走不常返. 其中 $p_c(\Gamma)$ 是指 $\Gamma$ 上的 Bernoulli 渗流的临界概率，Branching Number $\mathrm{br}(\Gamma)$ 的定义为:

$$\mathrm{br}(\Gamma)=\sup\{\lambda\geq 1:\inf_{\Pi\ \mathrm{cutset}}\sum_{v\in\Pi}\lambda^{-|v|}>0\}$$

其中 cutset 是指一个点割集，也就是每条从根到无穷远的路径都至少经过 $\Pi$ 里的某个点. 对于子代数目均值为 $m$ 的 GW 树，其上的 p-Bernoulli 渗流也可看成子代数目均值为 $pm$ 的 GW 树，从而不难证明 condition on 分支过程不灭绝，渗流临界概率应为 $1/m$. 应用 Lyons 的结论立刻得到 $m>1$ 时，condition on 分支过程不灭绝时，GW 树上的紧邻随机游走一定不常返.

**七**、注意到关于原点的反演是共形映射，保布朗运动轨迹. 因此从 x 出发的布朗运动第一次抵达单位圆的位置 $B_\tau$ 的分布，和和从 $x/|x|^2$ 出发的是一样的. 然后显然 $|x|\to 0$ 时 $B_\tau$ 的极限分布是均匀分布，于是然 $|x|\to\infty$ 时极限分布也是均匀分布. 这是笔者的邪门做法，布朗运动的共形不变性需要随机分析的工具才能证明... 不用随机分析的做法可以参考 Yuval Peres 和 Peter Mörters 写的 Brownian Motion 一书 P87 定理 3.46，那里证明了把单位圆换成别的闭集时，极限分布的存在性. 对于本题只要有极限分布则根据对称性其必须是均匀分布.

**八**、笔者不会. 相信后人的智慧 ×