北京大学数学科学学院试题

考试科目：高等代数 I　任课教师：王福正

考试时间：2021 年 1 月 14 日 8:30—10:30

食用须知：本试卷由元培学院 2020 级同学王骏澎**靠记忆**整理，因此不能保证与原卷完全一致，但可以保证与原卷没有大的出入且所有题目可做。另外实际考试时间是 8:30—10:50，延了 20 分钟。

第一题 (18 分)：

设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, t$ 为实数，回答下列问题：

(1) A 与 B 何时相抵？何时合同？A 何时为正定矩阵？写出每种情况所对应的 t 的取值范围，并简要说明理由。(9 分)

(2) 将所有等价的二次型分为同一类，那么秩为 3 的三元实二次型可分为几类？对每一类写出一个最简单的作为代表。(5 分)

(3) 若一个 n 阶实对称矩阵的所有顺序主子式均为非负数，那么这个实对称矩阵是否一定是半正定矩阵？若是，给出证明；若不是，举出反例。(4 分)

第二题 (22 分)：

设三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

(1) 写出实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 A，并求三阶正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是对角矩阵。(10 分)

(2) 设矩阵 $B = tE - A$, 求实数 t 的取值范围使得 B 为正定矩阵。(6 分)

(3) 求三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 上的最大值和最小值。(6 分)

第三题 (20 分)：

设 A 是数域 F 上的三阶实矩阵，列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^3$ 线性无关，且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, 矩阵 B 满足 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$。

(1) 求出矩阵 B，并求出 A 的全部特征值。(6 分)

(2) 求数域 F 上的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。(8 分)

(3) 计算行列式 $\begin{vmatrix} B^{-1} & E \\ A & A \end{vmatrix}$。(6 分)

第四题 (10 分)：

设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & a_1a_3+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & a_2a_3+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ a_3a_1+1 & a_3a_2+1 & a_3^2+1 & \cdots & a_3a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & a_na_3+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{pmatrix}$$

满足 $n > 2$ 且 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 不全为 $0, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$，求 A 的全部特征值和所有非零特征值的特征子空间。

第五题 (14 分)：

(1) n 级实矩阵 A 满足 $A^2 = A$，证明 A 可对角化，且存在实对称矩阵 B 和正定矩阵 C 使得 $A = BC$。(10 分)

(2) 上一问中的 B 和 C 是不是唯一的？如果是，给出证明；如果不是，举出反例。(4 分)

第六题 (6 分)：

A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，证明

$$\operatorname{tr}((AB) \cdot (AB)^T) \leqslant c \cdot \operatorname{tr}(AA^T)$$

其中 c 是 BB^T 的特征值的最大值。

第七题 (10 分)：

(1) 对任意 n 级正定矩阵 A，证明存在正定矩阵 S 使得 $A = S^2$(此时称 S 是 A 的平方根，记作 $S = A^{\frac{1}{2}}$)。(4 分)

(2) 设 A, B 是正定矩阵，$A - B$ 是半正定矩阵，证明 $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}$ 也是半正定的。(6 分)