

2018 年春季复变函数期末考试

教师：戴波

2018 年 6 月 29 日

1. (20 分) 求下列函数的 Laurent 级数:

$$(1) \frac{z^2}{z^2 + 3z + 2}, \quad 1 < |z| < 2 \quad (2) \sin \frac{z}{z+1}, \quad 0 < |z+1| < \infty$$

2. (20 分) 请找出函数 $\frac{1}{z^2-1} \cos \frac{\pi z}{z+1}$ 的全部孤立奇点, 并分析它们的奇点类型.

3. (15 分) 已知多项式函数 $f(z) = z^8 - 6z^5 - z + 2$

求以下范围的零点个数 (记重数): (1) $|z| < 1$; (2) $1 < |z| < 2$.

4. (15 分) 请求解下面的积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^2} dx \quad 0 < p < 1$$

5. (15 分) 考虑在单位圆盘 $D(0, 1)$ 上的解析函数 $f(z)$, $f(0) = 0$, 且对于所有的 $f(z)$, 它们均落在区域 $\operatorname{Re} z < A$ 上, 其中 A 是一个正数, 证明:

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in D(0, 1)$$

6. (15 分) 记区域 $L = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, $R = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

(1) 求 $\sqrt[4]{z}$ 在两个区域上的所有单值解析分支;

(2) 证明上述所有解析元素两两互为解析开拓.