期中试题参考答案

考试科目 高等代数I　考试时间 2018年11月14日

一.（25分）简答题 (填空题不必写过程).

1）叙述有限维线性空间的维数与基底的定义：

若线性空间V中有一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 且能线性表出V的所有向量, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一组基, 称V是n维线性空间.

2）已知向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ 中， $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_6$ 线性无关， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可被 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 表出, 但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能表出 α_4. 问 α_2 能否被 α_1,α_3 表出？ $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ 的秩是多少？ (写出所有可能并说明理由)

解:

1) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可被 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 表出， 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可被 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 表出， 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩 ≤ 3.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩 $=3$, 则有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩 $=$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 秩, 由此推出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 能表出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 这与题设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能表出 α_4 矛盾.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 秩 ≤ 2, 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 再由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_6$ 线性无关知 α_1,α_3 线性无关. 故 α_2 能被 α_1,α_3 表出.

2)　$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ 的秩可以是2, 也可以是3　(由于 α_3,α_6 线性无关, $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ 的秩至少是2).

$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$ 秩为 2 的例子:

$$[\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_6\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6$ 秩为 3 的例子:

$$[\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_6\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 则 $|A| =$ _7_; A 第 4 行的四个余子式

的和 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} =$ _5_;

将 A 写成 BC 的形式, 其中 B 是对角元都为 1 的下三角方阵, C 是上三角方阵, 则

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix};$$

4) 交换 4×8 矩阵 A 的第一, 第三行, 再将所得矩阵第一行的 k 倍加到第二行上去, 最后再交换第二，第三行. 这一过程如果用矩阵乘法实现, 只需在 A 的左边乘以矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

二.（15 分）计算 n 级行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+{x_1}^2 & a^2+{x_2}^2 & \cdots & a^2+{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+{x_1}^n & a^n+{x_2}^n & \cdots & a^n+{x_n}^n \end{vmatrix}$.

解: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ 0 & a^2+{x_1}^2 & a^2+{x_2}^2 & \cdots & a^2+{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^n+{x_1}^n & a^n+{x_2}^n & \cdots & a^n+{x_n}^n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -a^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix} - (x_1-a)\cdots(x_n-a)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$=(2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-a)\cdots(x_n-a))\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\ .$$

三.（20 分）已知 $A=[\,\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_5\,]$ 是一个 8×5 矩阵，A 的行向量组与矩阵

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ 的行向量组等价.

1) 求 A 的简化阶梯型矩阵 J；

2) 求 A 列向量组的一个极大无关组，用此极大无关组表出 A 的每个列向量；

3) 求 A 行空间的一组基，并判断当 a,b 取何值时，$\beta=[\,1\quad a\quad a+1\quad b\quad -b\,]$ 落在 A 的行空间里，写出此时 β 在行空间基底下的坐标；

4) 求齐次线性方程组 $AX=0$ 解空间的维数和一组基.；

5) 将 A 写成 BC 的形式，其中 B 是列满秩的矩阵，C 是行满秩的矩阵.

解: 1) A 的简化阶梯型矩阵 $J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in M_{8,5}(K)$；

2) 简化阶梯型 J 的主元在第 1, 2, 5 列，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 构成 A 列向量组的一个极大无关组，且由 J 列向量的表出关系可以看出

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2\ ,\ \alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2\ ;$$

3) 简化阶梯型 J 的三个非零行

$$\beta_1 = [\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0\ ]$$
$$\beta_2 = [\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0\ ]$$
$$\beta_3 = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ]$$

是 A 行空间的一组基 .

若向量 $\beta = [\,1 \quad a \quad a+1 \quad b \quad -b\,]$ 落在 A 的行空间里,

比较第 1, 2, 5 位置分量, 必有 $\beta = \beta_1 + a\,\beta_2 - b\,\beta_3$.

再比较第 3, 4 分量, 得

$$-1+2a = a+1\ ,\quad 1+3a = b\ .$$

由此解得 $a = 2$, $b = 7$.

反之, 当 $a = 2$, $b = 7$ 时, 确有 $\beta = \beta_1 + 2\,\beta_2 - 7\,\beta_3$.

此时 β 落在 A 行空间里, β 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标是 $[\,1 \quad 2 \quad -7\,]^T$.

4) $AX = 0$ 解的公式为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$, x_3, x_4 为自由变量.

通解为 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解空间一组基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5) $$A = [\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_5\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

四.（18 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ 依次是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

的列向量. 设 $U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$, $W = \langle \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle$ 是 R^4 的子空间.

1）求 $U+W$ 与 $U \cap W$ 的维数与基底 ;

2) 设 $\gamma=[\,1\,0\,0\,0\,]^{T}$. 判断集合 $(\gamma+W)\cap U$ 是否非空; 若非空, 将其写为 $\eta+V$ 的形式, 这里 $\eta\in R^4$, V 是 R^4 的子空间 (写出 η 及 V 的一组基).

解:

1) 对 A 作行变换, 化为简化阶梯形

$$A\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1&0&2\\0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

由此看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6$ 构成 $U+W$ 的基， $\dim(U+W)=4$;

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 构成 U 的基， $\dim U=3$;

$\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ 线性无关, 构成 W 的基， $\dim W=3$.

于是 $\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=2$.

由简化阶梯形可看出

$$\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\ ,\quad \alpha_7-\alpha_6=2\alpha_1+\alpha_4\ \in U\cap W,$$

且由 $\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ 线性无关知 $\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7-\alpha_6$ 线性无关 .

故 $\alpha_5,\alpha_7-\alpha_6$ 也线性无关, $\alpha_5,\alpha_7-\alpha_6$ 构成 $U\cap W$ 的一组基.

2）注意到 $\gamma=\alpha_1-\alpha_4\in U$. . 以下证明 $(\gamma+W)\cap U=\gamma+W\cap U$,

于是有 $\gamma\in(\gamma+W)\cap U$, 故 $(\gamma+W)\cap U$ 非空.

显然 $\gamma+W\cap U\subseteq\gamma+W$, 且 $\gamma+W\cap U\subseteq U$.

故 $\gamma+W\cap U\subseteq(\gamma+W)\cap U$.

反之, 若 $\alpha\in(\gamma+W)\cap U$, 即 $\alpha\in U$ 且存在 $\beta\in W$ 使得 $\alpha=\gamma+\beta$,

则 $\beta=\alpha-\gamma\in U$, 故 $\beta\in W\cap U$. 于是 $\alpha=\gamma+\beta\in\gamma+W\cap U$.

综上所述, 我们有 $(\gamma+W)\cap U=\gamma+W\cap U$.

五.（12 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&-1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}$ 的列向量.

1) 证明：$\alpha_i\alpha_j^T\ (1\le i\le 4\ ,1\le j\le 4)$ 是全体 4 级实矩阵构成的实线性空间

$M_4(R)$ 的一组基；

2) 求矩阵 $X=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\in M_4(R)$ 在以上基底下的坐标，即求矩阵

$C=[\,c_{ij}\,]$，使得

$$X=\sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\,\alpha_i\alpha_j^T.$$

解: 1) 注意到

$$\begin{aligned}4\varepsilon_1&=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\ ,\\4\varepsilon_2&=\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3\ ,\\4\varepsilon_3&=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_4\ ,\\4\varepsilon_4&=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_4\ ,\end{aligned}$$

(记 $B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\2&-2&0&0\\0&0&2&-2\end{bmatrix}$，则用矩阵乘法表示，有

$$AB=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&-1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\2&-2&0&0\\0&0&2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

类似地，还有

$$BA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\2&-2&0&0\\0&0&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&-1&0\\1&-1&0&1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}).$$

于是每个基础矩阵 $E_{ij}=\varepsilon_i\,\varepsilon_j^T$ 也都可以用 $\alpha_i\alpha_j^T\ (1\le i\le 4\ ,1\le j\le 4)$

表示，而这样的 $\alpha_i\alpha_j^T$ 共有 16 个，刚好等于 $M_4(R)$ 的维数.

故 $\alpha_i\alpha_j^T\ (1\le i\le 4\ ,1\le j\le 4)$ 构成矩阵空间 $M_4(R)$ 的一组基；

2) 注意到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\, \alpha_i \alpha_j^{T} \\
&= \sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\,(A\varepsilon_i)\,(A\varepsilon_j)^{T} \\
&= \sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\, A\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j^{T} A^{T} \\
&= A\left(\sum_{1\le i,j\le 4} c_{ij}\; E_{ij}\right)A^{T} \\
&= A\,C\,A^{T}
\end{aligned}
$$

左边乘 B ，右边乘 B^T ，得

$$
B\,X\,B^{T} = B\,A\,C\,A^{T}B^{T} = (B\,A\,)C\,(B\,A\,)^{T} = 16C.
$$

于是所求矩阵为

$$
C = \frac{1}{16}B\,X\,B^{T}
$$

$$
= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.
$$

六. (10 分) 设 A 是数域 K 上的 n 级方阵, 设 V_k 是 A^k 的列空间 ($k \ge 1$).

证明: 1) $V_k \supseteq V_{k+1}$， $\forall\, k \ge 1$ ；

2) $\dim V_1 - \dim V_2 \ge \dim V_2 - \dim V_3$.

证: 1) A^k 的列向量组能线性表出 $A^{k+1} = A^kA$ 的列向量组(表出系数是 A 对应列向量的分量), 故 A^k列空间 $\supseteq A^{k+1}$列空间.

2) 任取 V_3 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 将其扩充成 V_2的基

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s \ .$$

则 $\dim V_2 - \dim V_3 = s$.

每个 A^2列空间中的向量 β 都可写成 $\beta = A^2\delta$，其中 $\delta \in K^n$.

故存在$\gamma \in V_1$, 例如可取 $\gamma = A\delta$, 使得 $\beta = A\gamma$.

于是存在 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s \in V_1$，使得 $\beta_i = A\gamma_i, i = 1, \ldots, s$.

任取V_2的一组基 $\omega_1, \cdots, \omega_t$. 以下证明V_1中的向量组

$\omega_1, \cdots, \omega_t, \gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 线性无关，于是有

$$\dim V_1 - \dim V_2 \geq s = \dim V_2 - \dim V_3 \ .$$

若存在系数 $k_i, l_j \in K$，使得

$$l_1\omega_1 + \cdots + l_t\omega_t + k_1\gamma_1 + \cdots + k_s\gamma_s = 0 \ .$$

左乘 A，得

$$l_1A\omega_1 + \cdots + l_tA\omega_t + k_1\beta_1 + \cdots + k_s\beta_s = 0 \ .$$

由于 $l_1A\omega_1 + \cdots + l_tA\omega_t \in V_3$ ，故存在系数 $u_j \in K$，使得

$$l_1A\omega_1 + \cdots + l_tA\omega_t = u_1\alpha_1 + \cdots + u_r\alpha_r \ .$$

于是

$$u_1\alpha_1 + \cdots + u_r\alpha_r + k_1\beta_1 + \cdots + k_s\beta_s = 0.$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 是 V_2 的基, 我们有 $k_1 = \cdots = k_s = 0$.

再由 $l_1\omega_1 + \cdots + l_t\omega_t = 0$ 推得 $l_1 = \cdots = l_t = 0$.

故 $\omega_1, \cdots, \omega_t, \gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 线性无关.