# 数学模型 HW 4

Due Date: May 7, 交于助教办公室.

2019 年 4 月 15 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第76页， 3.5。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第76页， 3.6。

3. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < L, \\ \text{B.C.}: \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi'(L) = 0. \end{cases}$$

求出此问题的所有特征值$\lambda_n$和特征函数$\phi_n(x)$。

4. For regular Sturm-Liouville eigenvalue problems,

a. show that eigenfunctions belonging to different eigenvalues are orthogonal relative to the weight function $\sigma$. That is,

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma \, dx = 0, \quad \text{if} \quad \lambda_n \neq \lambda_m.$$

b. show that any eigenvalue can be related to its eigenfunction by the Rayleigh quotient:

$$\lambda = \frac{-p\phi\phi'|_a^b + \int_a^b \left[p(\phi')^2 - q\phi^2\right] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma \, dx}.$$

5. 请参考讲义5.4中薛定谔方程的求解思路，对于形如

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \Psi_n(x)$$

的解，写出系数的表达式

$$c_n(t) = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Psi_n(x) \, dx.$$

具体推导过程。并求$G(x,t,x')$，使得

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x') G(x,t,x') \, dx'.$$

6. a. 利用格林公式和格林函数的如下定义，

$$\begin{cases} \mathscr{L} G(x, x_s) = \delta(x - x_s), \quad a < x < b, \\ G(a, x_s) = 0, \quad G(b, x_s) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

证明格林函数是对称的，即

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1).$$

b. 考虑$u(x)$满足如下BVP

$$u''(x) = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(L) = b.$$

虽然BVP中的边值条件是非齐次的，但是我们仍然按照如下的方式定义格林函数

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} G(x, x_s) = \delta(x - x_s), \quad 0 < x < L, \\ G(0, x_s) = 0, \quad G(L, x_s) = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

请利用格林公式将BVP的解$u(x)$用格林函数表示出来。