

几何期中考试 (包志强)

简单题

1. 设 A, B, C, D 是不共面的四点, 若 $AB \perp CD, AC \perp BD$, 证明: $AD \perp BC$.
2. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性无关 $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 线性无关
3. 设直线 $l_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}, l_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$, 求 l_1, l_2 的距离

中档题

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 D, E 是 AB 上的两点, 满足 $AD = DE = EB$, F 是 BC 的中点, 若 AF 交 CD 于 P , AF 交 CE 于 Q , 求简单比 $\frac{AP}{PQ}$.
5. 设直线 l_1, l_2 的一般方程为

$$l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

证明: l_1, l_2 异面 \Leftrightarrow

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

6. 求正八面体相邻两个面的二面角

7. 若 l_1, l_2 异面, π 不与 l_1, l_2 平行, 设所有与 l_1, l_2 相交, 且与 π 平行的直线构成曲面 S , 证明: S 是双曲抛物面.

8. 设 $\varphi_{uv}: \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = (x-u)^2 + \frac{(y-v)^2}{4} - 1$, 求 u, v 满足的条件, 使得 φ_{uv} 是双曲线.

难题

9. 求 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 $x=y=z$ 旋转得到的曲面的一般方程 $F(x, y, z) = 0$.

10. 设 S 为双曲抛物面 $x^2 - y^2 + 2z = 0$, A 是一个点集, 满足它包含坐标原点 O , 且 $P \in A$ 当且仅当任意方向向量平行于 OP 的直线与 S 有交点. 证明: $A \subseteq \{(x, y, z) | x^2 - y^2 = 0\}$