北京大学数学学院期中试题

2021－2022 学年第一学期

考试科目 高等代数 考试时间 2021 年 12 月 28 日

姓 名 ____________ 学 号 ______________

一. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 且 $XA+I=A^T-X$, 求矩阵 X .

解: 移项, 得 $X(A+I)=A^T-I$,

作转置, 有 $(A^T+I)X^T=A-I$.

对 $[\ A^T+I \mid A-I\ ]$ 作行变换, 求 X^T

$$\begin{bmatrix}1&2&1&&-1&0&1\\0&1&0&&2&-1&0\\1&0&2&&1&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&&-1&0&1\\0&1&0&&2&-1&0\\0&-2&1&&2&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&&-5&2&1\\0&1&0&&2&-1&0\\0&0&1&&6&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&&-11&4&2\\0&1&0&&2&-1&0\\0&0&1&&6&-2&-1\end{bmatrix}$$

于是 $X^T=\begin{bmatrix}-11&4&2\\2&-1&0\\6&-2&-1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}-11&2&6\\4&-1&-2\\2&0&-1\end{bmatrix}$.

二. 设实矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&a\end{bmatrix}$. 求可逆实矩阵 C, 使得 C^TAC 是对角矩阵, 并讨论当 a 取何值时 A 正定, a 取何值时 A 的正负惯性指数为 $(2,1)$?

解：对以下矩阵作成对的行列变换(行变换只对上半部分作)

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&a\\1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&2&a\\1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&a\\1&-1&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&a-4\\1&-1&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&a-4\\1&-1&2\\&1&-2\\&&1\end{bmatrix}$$

令可逆矩阵 $C=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$，则有

$$C^{T}A\,C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&a-4\end{bmatrix}.$$

当 $a>4$ 时，A 正定；当 $a<4$ 时，A 的正负惯性指数

为 (2 , 1)

三.（12 分）设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3{x_1}^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$$

1) 将 f (X) 写成 $X^{T}AX$ 的形式, A 是实对称矩阵;

2) 求矩阵 A 的特征值与特征向量;

3) 求正交矩阵 P 及对角矩阵 D , 使得 $A=PDP^{T}$;

4) 作正交替换将 f (X) 化为标准型;

5) 求二次型 f (X) 在单位球面 $\|X\|=1$ 上取到的最大值,

并确定在何处取到.

解: 1) $f(x_1,x_2,x_3)=3{x_1}^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

$$=[\,x_1\;x_2\;x_3\,]\begin{bmatrix}3&-2&-2\\-2&0&-4\\-2&-4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\ X^TA\,X.$$

这里记 $X=[\,x_1\;x_2\;x_3\,]^T$, $A=\begin{bmatrix}3&-2&-2\\-2&0&-4\\-2&-4&0\end{bmatrix}$.

2) $|\,xI-A\,|=\begin{vmatrix}x-3&2&2\\2&x&4\\2&4&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-3&2&2\\2&x&4\\0&4-x&x-4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x-3&4&2\\2&x+4&4\\0&0&x-4\end{vmatrix}=(x-4)\begin{vmatrix}x-3&4\\2&x+4\end{vmatrix}$$

$$=(x-4)(x^2+x-20)=(x-4)^2(x+5).$$

故 A 的特征值为 λ = 4 (二重) 及 λ = - 5 .

对特征值 λ = 4 解齐次方程组 $(A-4I)X=0$:

$$A-4I=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\-2&-4&-4\\-2&-4&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

求得特征值 λ = 4 所属特征子空间的一组基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

类似地, 解齐次方程组 $(\,A+5I\,)X=0$, 求得特征值 λ = -5

所属特征子空间的基 $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

3) 将特征值 λ = 4 所属特征子空间的基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\ \text{正交化:}$$

令 $\quad \beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2\,, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

再单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

最后将特征值 $\lambda = -5$ 所属特征子空间的基 α_3 也单位化

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

由于来自不同特征子空间的基彼此正交, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 构成 R^3 的标准正交基,

$$\mathrm{P} = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3] = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

为正交矩阵. 令 $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, 我们有 $\mathrm{A} = \mathrm{PDP^T}$.

4) 作正交替换: 令 $\mathrm{X} = \mathrm{PY} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3$,

带入 $\mathrm{f(X)}$, 得到标准型

$$\mathrm{f(X)} = \mathrm{X^T A\, X} = \mathrm{Y^T\, P^T A\, P\, Y} = \mathrm{Y^T D\, Y}$$

$$= 4{y_1}^2 + 4{y_2}^2 - 5{y_3}^2.$$

5) 由于 P 是正交矩阵, 满足 $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ 的向量 X, Y 有相同的长度 ($\|\mathrm{X}\|^2 = \mathrm{X^T X} = \mathrm{Y^T P^T P Y} = \mathrm{Y^T Y} = \|\mathrm{Y}\|^2$) .

故 ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ 当且仅当 ${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 = 1$.

此时有 $f(X)=4{y_1}^2+4{y_2}^2-5{y_3}^2$

$$=4({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)-9{y_3}^2\le 4\ .$$

等号成立当且仅当 $y_3=0$，即在特征值 4 的特征子空间 $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$与单位球面 ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1$ 的交集上 $f(X)$ 取到最大值 4 .

四．设 A,B,C,D 是 n 级实矩阵，AB^T,CD^T是对称矩阵且满足

$AD^T-BC^T=I_n$． 证明：$A^TD-C^TB=I_n$．

证： 以下分块矩阵可作分块乘法，得

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^T & -B^T\\ -C^T & A^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AD^T-BC^T & -AB^T+BA^T\\ CD^T-DC^T & -CB^T+DA^T\end{bmatrix}.$$

由于 AB^T,CD^T是对称矩阵，我们有

$$AB^T=BA^T,\ CD^T=DC^T.$$

再对 $AD^T-BC^T=I_n$ 求转置，得 $DA^T-CB^T=I_n$．故

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^T & -B^T\\ -C^T & A^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}=I_{2n}.$$

于是

$$\begin{bmatrix}D^T & -B^T\\ -C^T & A^T\end{bmatrix}\text{为方阵}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\text{的逆}.$$

由此得

$$\begin{bmatrix}D^T & -B^T\\ -C^T & A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}.$$

比较两边右下角的 n 级块，得

$$A^TD-C^TB=I_n.$$

五. 试用线性代数的理论解决以下问题：将 n 个人分配到

m 个小组，一人可分到多个小组，但要保证

1) 每个小组的人数都 ≥ 2;

2) 任意两小组之间有且仅有一名共同的成员.

若人数 $n > 1$ 给定，求小组数目 m 的最大值并说明理由.

解：小组数目 m 的最大值为 n .

每种 n 人 m组的分组方式对应一个 $n \times m$矩阵 $A = [a_{ij}]$,

$$\text{其中 } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个人被分到了第 } j \text{ 组;} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个人没被分到第 } j \text{ 组.} \end{cases}$$

矩阵 A 满足以下条件

1) A 的元素为 0 或 1 ;

2) A 的每一列至少有两个分量为 1;

3) A 的任意两列的内积为 1.

反之，满足上述条件的矩阵 A 都给出一种符合题目要求的分组方式.

通过简单归纳，不难发现小组数 m 的最大值 n 可以达到，以下 $n \times n$ 矩阵就给出一种分组方式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

下面证明小组数目 $m \leq n$. 若存在一种分组方式，使得小组数 $m > n$，考察这种分组方式对应的矩阵 A . 作为实矩阵，有

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\text{秩} = \mathbf{A}\text{秩} \le \mathbf{A}\text{行数} = n.$$

另一方面， $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a_{m-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_m \end{bmatrix}.$

这里第 i 个对角元 a_i 表示第 i 个小组的人数，故

$$a_i \ge 2\ ,\quad \forall\, 1 \le i \le m.$$

下面证明此条件足以使 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 可逆.

用 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 的第一行去减以下各行，得到爪形矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a_1 & a_2-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1-a_1 & 0 & & a_{m-1}-1 & 0 \\ 1-a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_m-1 \end{bmatrix}.$$

再用第 2 行的 $1/(a_2-1)$ 倍去减第一行，用第 3 行的

$1/(a_3-1)$倍去减第一行, $\cdots$,可将上述矩阵变成下三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-a_1 & a_2-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1-a_1 & 0 & & a_{m-1}-1 & 0 \\ 1-a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_m-1 \end{bmatrix},$$

其中

$$a = a_1 + \frac{a_1-1}{a_2-1} + \cdots + \frac{a_1-1}{a_m-1} \ne 0.$$

故下三角矩阵可逆，矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 也可逆. 由此推出

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\text{秩} = m \le n.\ \text{这与假设}\ \mathrm{m} > n\ \text{矛盾}.$$

综合以上讨论，小组数目 m 的最大值为 n .

六． 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 $\mathbf{n}$ 级实矩阵，满足条件 $\mathbf{AA^T = BB^T}$. 证明：

存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{A = BQ}$.

证：由于 $\mathbf{AA^T}$ 是实对称矩阵，且半正定（对 $\forall \mathbf{X} \in \mathbf{R^n}$，有

$\mathbf{X^TA\,A^TX} = \left\| \mathbf{A^TX} \right\|^2 \geq \mathbf{0}$)， 故存在正交矩阵 $\mathbf{U}$，使得

$$\mathbf{AA^T = BB^T = U}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}\mathbf{U^T},$$ 其中

$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$.

设矩阵 $\mathbf{A^TU}$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，由

$$(\mathbf{A^TU})^T(\mathbf{A^TU}) = \mathbf{U^TAA^TU} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_n$ 的欧氏长度依次为 $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \cdots, 0$，且两两正交. 令

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1, \cdots, \beta_r = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\alpha_r,$$

再将单位正交向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 扩充成 $\mathbf{R^n}$ 的标准正交基（先扩充成一组基，再 Schmidt 正交化，单位化得到标准正交基）

$$\beta_1, \cdots, \beta_r, \cdots, \beta_n.$$

我们有

$$\mathbf{A^T U} = [\,\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \boldsymbol{\alpha}_r\ \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\,]$$

$$= [\ \boldsymbol{\beta}_1 \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n\,] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & \\ & & & \mathbf{0} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$=\ \mathbf{PD}\ ,$$

这里 $\mathbf{P} = [\,\boldsymbol{\beta}_1 \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n\,]$ 是正交矩阵,

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \cdots, 0\}.$$

类似地, 由于 $\mathbf{BB^T} = \mathbf{AA^T}$, 我们也可找到正交矩阵 $\mathbf{N}$, 使得

$\mathbf{B^T U} = \mathbf{ND}$. 于是有 $\mathbf{P^T A^T U} = \mathbf{D} = \mathbf{N^T B^T U}$.

两边右乘 $\mathbf{U^T}$, 再作转置, 得 $\mathbf{AP} = \mathbf{BN}$. 令正交矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{N\,P^T}$,

则有 $\mathbf{A} = \mathbf{BQ}$.

七. 设 $\mathcal{A}: \mathbf{X} \mapsto \mathbf{AX}$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

问是否存在一对正交的向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^3$, 其中 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$, 使得

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta} + k\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} + (k+1)\boldsymbol{\alpha}\ ,\quad \forall\, k \in \mathbf{R}\,.$$

若存在, 请给出所有满足上述条件的二元组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$; 若不存在, 请给出证明.

解: 满足上述条件的二元组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 存在.

将 $k = 0, 1$ 分别代入到上述条件中, 得

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha},\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha}\,.$$

相减，得 $\mathscr{A}(\alpha)=\alpha$．故$\alpha$是属于特征值 1 的一个单位特征向量，

β 是满足 $(A-I)\beta=\alpha$ 的一个与α 正交的向量.

解齐次方程组 $(A-I)X=0$,

$$A-I=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可求得特征值$\lambda=1$ 所属特征子空间 V_1的一组基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

那么，对特征子空间 V_1中的哪些单位向量α，方程组

$(A-I)X=\alpha$ 有解呢?

上述方程有解当且仅当 α在 $A-I$ 的列空间中，即 $\alpha\in\langle\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\rangle$.

故满足题目要求的单位向量 α只有两种可能

$$\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

它们都在特征值$\lambda=1$ 所属特征子空间 V_1中.

对于第一种情况 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，方程组 $(A-I)X=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

有一个特解 $X=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，加上其导出组 $(A-I)X=0$ 的解

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 得到解集合

$$X=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\\frac{1}{\sqrt{6}}+2k_1\\k_2\end{bmatrix},k_1,k_1\in R.$$

再由 $(X,\alpha)=k_1+\frac{2}{\sqrt{6}}+4k_1+k_2=0$ 解得

$$\boldsymbol{k_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} - 5k_1}.$$

故符合题目要求的一族解为

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix}k\\ \frac{1}{\sqrt{6}} + 2k\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} - 5k\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}, \forall\, k \in \mathrm{R}}.$$

将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 改号，得到题目的另一族解

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}, \forall\, k \in \mathrm{R}}.$$