常微分方程期中考试

1. (30分)解下列微分方程

   (1) $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; 当$x \to +\infty$时, $y(x)$ 有界.

   (2) $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$, 当$x \to \pi/2$时仍为有界的解.

2. (10分) 设f在$[1, +\infty)$上连续, 且为正. 如果

$$\int_1^x f(t)dt \le (f(x))^3,$$

则$f(x) \ge \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)}$.

3. (20分) 设当$x > -1$时, 可微函数f满足

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt = 0,$$

且$f(0) = 1$. 证明: 当$x \ge 0$时, $e^{-x} \le f(x) \le 1$.

4. (20分) 假设函数$f(x, y)$在区域$0 \le x \le a$, $-\infty < y < +\infty$上连续. 记$\phi(x, \xi)$是满足初始条件$\phi(0, \xi) = \xi$的微分方程$y' = f(x, y)$的解. 进一步假设$\phi(x, \xi)$在区间$[0, \bar{x})$上存在, $\bar{x} < a$. 则下列三条结论之一成立:

   (i) $\lim_{x \to \bar{x}-0} \phi(x, \xi)$有限, 此时可以将解$y = \phi(x, \xi)$延拓至$x = \bar{x}$;

   (ii) $\lim_{x \to \bar{x}-0} \phi(x, \xi) = +\infty$;

   (iii) $\lim_{x \to \bar{x}-0} \phi(x, \xi) = -\infty$.

5. (20分) 考虑二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + g(x) = p(t),$$

其中$p(t)$是2π周期的连续函数, $g(x)$是连续可微函数. 假设该方程的解在$t \in [0, 2\pi]$上存在的. 考虑(x, x')平面上的变换$\Phi : (x(0), x'(0)) \mapsto (x(2\pi), x'(2\pi))$. 证明: 对于$(x, x')$平面上的有界区域$D$,

$$\mathrm{Area}(\Phi(D)) = e^{-2\pi c}\mathrm{Area}(D).$$