

## 2024 年几何学期中

1. 对任意向量  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , 证明混合积  $(\alpha \times \beta, \alpha \times \gamma, \alpha \times \delta) = 0$
2. 在一个空间仿射坐标系中, 直线  $l_1$  过点  $(0,0,1)$  和点  $(1,1,1)$ , 直线  $l_2$  过点  $(1,1,0)$  和点  $(1,2,3)$ 
  - (a). 求出过直线  $l_1$  且与直线  $l_2$  平行的平面的方程。
  - (b). 求出  $l_1$  和  $l_2$  的距离。
3. 在一个平面仿射坐标系中, 曲线  $\Gamma$  的方程为  $a(x^2 + y^2 - 1) + b(x - y^2) = 0$   
( $a, b$  不全为零)
  - (a). 判断  $\Gamma$  能否表示空集, 并说明理由。
  - (b). 当  $a$  和  $b$  满足什么关系时,  $\Gamma$  为两条相交直线?  $a$  和  $b$  满足什么关系时,  $\Gamma$  为两条平行直线?
4. 在平面直角坐标系中, 直线  $l$  过点  $(-2,0)$  和点  $(0,1)$ 
  - (a). 求出关于  $l$  的反射  $f(x, y)$
  - (b).  $g$  为关于  $y$  轴的反射, 证明  $g \circ f$  为旋转, 并求出旋转中心的坐标。
5. 在一个空间仿射坐标系中, 直线  $l_1$  为  $y$  轴, 直线  $l_2$  过点  $(0,0,1)$ , 一个方向向量为  $(1,1,0)$ 
  - (a). 求与直线  $l_1$  和直线  $l_2$  相交, 且与平面  $y = z$  平行的所有直线组成的曲面的方程。
  - (b). 用仿射变换将该曲面方程转化为标准形式并判断曲面类型。