几何学期末考试

考试日期: 2021 年1 月22 日。考试时间: 2小时。

题1（10分） 平面上某一仿射标架原点在O，过点O的四条相异直线l_i的方向向量为$(a_i, b_i), i = 1, 2, 3, 4$。将它们排列为$2 \times 4$矩阵$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. 试用这个矩阵的若干二阶子式来表达交比$(l_1, l_2, l_3, l_4)$，并给出推导过程。

题2（15分） 椭圆中心O和它上面两点A, B满足：OA, OB两向量构成一对共轭方向。试证明$|OA \times OB|$（表示OA, OB张成的有向面积的绝对值）和$|OA|^2 + |OB|^2$ 是这个椭圆的两个不变量（只与椭圆有关；与共轭方向的选取无关）。

题3（20分） (1) 证明：用一族平行平面（与z轴不平行，也不与xy平面平行）去截旋转抛物面$x^2 + y^2 = z$，所得的截线是彼此相似的椭圆（即长短轴之比相等）。

(2)证明：这族椭圆各自的中心落在同一条直线上，而且这条直线与旋转轴z轴平行。

题4（15分） 设$ABCD$是非退化圆锥曲线的一个内接四边形的四点。记M是A和C处切线的交点，N是B 和D 处切线的交点，P是边AB和CD的交点，Q是边AD和BC的交点。证明：M, N, P, Q 共线。

题5（25分） 判断命题正误。每道5分，判断正确得2分，简要说清理由得3分。

1）射影平面上的任何一个射影变换，必定有至少一个不动点。

2）射影平面上把一条双曲线映为自身的全体射影变换，有三个自由度。

3）任给一条非退化的二次曲线Γ，则关于Γ的配极对应，把共线四点对应为共点四线，而且保持交比不变。

4）平面上任给一个圆Γ_1和一条相离直线l_1，任给另一对圆Γ_2和相离直线l_2，总可以经过一次莫比乌斯变换ϕ，使得$\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ 和$\phi(l_1) = l_2$.

5）单位圆球表面被赤道分为北半球和南半球。则北半球内的任何一个圆向赤道平面作垂直投影（也就是沿竖直方向的平行投影），所得的像是一个圆或椭圆，包含在单位圆内，而且在椭圆情形，其短轴正好落在赤道这个单位圆的一条半径上。

题6（10分） （1）平面上两个椭圆Γ_1, Γ_2交于A, B相异两点，各自中心分别为O_1, O_2。若直线O_1A, O_1B均与Γ_2 相切，直线O_2A, O_2B均与Γ_1相切，求证：存在仿射变换f，使得$f(\Gamma_1), f(\Gamma_2)$是一对正交的圆。

（2）平面上两个椭圆Γ_1, Γ_2交于A, B相异两点，试问：是否一定存在射影变换ϕ，使得$\phi(\Gamma_1), \phi(\Gamma_1)$ 是一对正交的圆？如果你认为一定存在这样的射影变换，请给出证明；如果你认为这样的射影变换可以不存在，请举出反例，并且写出这样的射影变换存在的一个“充分必要条件”，并给出论证。

题7（5分） 我们在作业中已经知道，平面上居于一般位置的4条线，一定存在与它们同时相切的一个单参数族的椭圆。试证明：这族椭圆的中心共线！