2022北京大学数学分析I实验班期末考试

1. （28分）计算积分

$$(1)\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x-1},\qquad (2)\int\frac{x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx,$$

$$(3)\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}\sin(3x)}{x}dx,\qquad (4)\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

2. （8分）对于非负正整数n, 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}dt.$$

3. （10分）假设f是$[0,2]$上的连续可微函数，满足$|f'|\leqslant 1$，$f(0)=f(2)=1$。证明 $1\leqslant\int_0^2 f(x)dx\leqslant 3$。

4. （10分）假设f是$[0,1]$上的连续单调增函数，满足$f(0)=0$, $f(1)=1$。如果g是f的反函数，证明

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=1.$$

5. （14分）求极限

$$(1)\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda(1-\cos\theta)}d\theta,\quad (2)\lim_{n\to\infty}n^2(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta d\theta-\frac{1}{2n}).$$

6. （10分）如果$\mathbb{R}^n$上的可测函数列f_k满足对任意$\epsilon>0$都有

$$\lim_{k,l\to\infty}m(\{x:|f_k(x)-f_l(x)|>\epsilon\})=0.$$

证明存在可测函数f使得f_k依测度收敛到f.

7. （10分）$\{x\}$表示实数x的小数部分, 在$[0,1]$上定义函数

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\{2^n x\}$$

判断曲线$(x,T(x))$, $0\leq x\leq 1$是否可求长并证明。

8. （10分）假设f在$[a,b]$上黎曼可积，记$F(x)=\int_a^x f(t)dt$。定义$g(x)=\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$。证明$g$在$[a,b]$上黎曼可积，并且$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.