复变函数 期中试题

2014.03－2014.06 学年第 1 学期

授课教师: ______________________ 考试时间: **2014-4-16,**

姓　　名: ______________________ 学　　号: ______________________

本试题共 7 道大题, 满分 100 分。

1. （20分）若函数$f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$在区域$\mathcal{D}$内全纯，且$u = v^2$,则$f(z)$ 在$\mathcal{D}$内为常数。

2. （10分）证明：函数$e^{(a+\sqrt{-1}b)z}$ (a, b 为实数且$a^2 + b^2 \neq 0$)在带状区域$-\frac{\pi}{2} < Imz < \frac{\pi}{2}$上单叶的充要条件是$a^2 + b^2 \leq 2|a|$.

3. （20分）求把直线$Rez = a$, $a \in \mathbf{R}$的左半平面变为单位圆内部，且把平面上一点z_0变为原点的分式线性变换。

4. (10分)设$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是收敛半径为R的幂级数，设$\{g_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} z^n\}$，是一列幂级数，满足对任意$m$, $|b_{mn}| \leq |a_n|$, 并且对任意n, $\lim_{m\to+\infty} b_{mn} = b_n$存在，证明幂级数$g_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} z^n$ 和幂级数$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径大于等于$R$,且对任意$0 < r < R$ $g_m(z)$在$D(0, r)$ 上一致收敛于$g(z)$.

5. (15 分)计算积分:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^3 - 1)(z + 4)^2}$$

6. (15 分) 设γ 为复平面$\mathbb{C}$ 中的简单闭曲线，其围成的有界区域面积为S, 试计算积分:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

7. (10 分)设T，S为Möbius 变换，且都不是恒同变换，证明$ST = TS$ 当且仅当T和S 有相同的不动点。