

- 一. 在有序基 $\mathcal{B}_1 = \{1, x-2019, (x-2019)^2, (x-2019)^3\}$ 和 $\mathcal{B}_2 = \{1, x-2020, (x-2020)^2, (x-2020)^3\}$ 下, T_1 和 T_2 的矩阵分别为

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -2019 & (-2019)^2 & (-2019)^3 \\ 1 & -2018 & (-2018)^2 & (-2018)^3 \\ 1 & -2017 & (-2017)^2 & (-2017)^3 \\ 1 & -2016 & (-2016)^2 & (-2016)^3 \end{pmatrix}, \quad [T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 5 & \\ & & & 16 \end{pmatrix}.$$

由Vandermonde行列式和对角矩阵行列式的表达式, 有

$$\det(T_1) = \det([T_1]_{\mathcal{B}_1}) = 1^3 \cdot 2^2 \cdot 3^1 = 12,$$

$$\det(T_2) = \det([T_2]_{\mathcal{B}_2}) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 16 = 160. \quad \square$$

- 二. (1) 取 f 的素因式 $p \in \mathbb{Q}[x]$ 满足 $p(z) = 0$, 则 p 与 g 互素, 从而存在 $q, h_1 \in \mathbb{Q}[x]$ 满足 $pq + gh_1 = 1$. 两边取 z 得 $g(z)h_1(z) = 1$.

(2) 考虑 \mathbb{Q} -线性空间 \mathbb{C} 的子空间 $V = \{h(z) \mid h \in \mathbb{Q}[x]\}$. 由 $f(z) = 0$ 得 $V = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$, 其中 $n = \deg(f)$. 因此 $\dim V \leq n$. 这推出 $1, g(z), \dots, g(z)^n \in V$ 线性相关, 即存在不全为零的 $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ 使 $\sum_{k=0}^n a_k g(z)^k = 0$. 取 $h_2 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. 则 $h_2 \neq 0$, 并且 $h_2(g(z)) = 0$. \square

- 三. 由(i)得 $W \cap E^0 = \{0\}$, 所以 $\dim W + \dim E^0 \leq \dim V$, 从而 $\dim W \leq \dim E$. 类似地, 由(ii)得 $W^0 \cap E = \{0\}$, 所以 $\dim W^0 + \dim E \leq \dim V^*$, 从而 $\dim E \leq \dim W$. 因此 $\dim W = \dim E$. \square

- 四. 设 $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 在 V 中的对偶(有序)基. 则 $\Lambda = \{\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$. 由 $T(\Lambda) \supset \Lambda$ 得 $\text{Im}(T) \supset \text{span}(\Lambda) = V$. 所以 T 可逆. 由 $T^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$ 可知 $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$ 的矩阵元均为整数. 所以 $\det(T^{-1}) = \det([T^{-1}]_{\mathcal{B}}) \in \mathbb{Z}$. 又由 $\det(T^{-1}) \neq 0$ 得 $|\det(T^{-1})| \geq 1$. 所以 $|\det(T)| \leq 1$. \square

- 五. 取 $f_1, \dots, f_m \in V^*$ 满足 $\text{Ker}(f_i) = W_i$, $f_i(\alpha_i) = 1$. 记 $E = \{f_1, \dots, f_m\}$. 则 $\text{span}(E) = V^*$. 下面先证明 $T^t(E) = E$. 任取 $f_i \in E$. 设指标 $j \in \{1, \dots, m\}$ 满足 $T(\alpha_i + W_i) \subset \alpha_j + W_j$. 则对任意 $\beta \in W_i$, 存在 $\gamma \in W_j$ 使 $T(\alpha_i + \beta) = \alpha_j + \gamma$, 从而

$$(T^t f_j - f_i)(\alpha_i + \beta) = f_j(T(\alpha_i + \beta)) - f_i(\alpha_i + \beta) = f_j(\alpha_j + \gamma) - 1 = 0.$$

这说明 $\alpha_i + W_i \subset \text{Ker}(T^t f_j - f_i)$. 注意到 $\text{span}(\alpha_i + W_i) = V$. 所以 $T^t f_j = f_i$. 这说明 $E \subset T^t(E)$. 而 E 有限, 所以 $T^t(E) = E$. 这也推出限制映射 $T^t|_E : E \rightarrow E$ 可逆. 由于从 E 到自身的映射只有有限多个, 所以存在正整数 $p > q$ 使 $(T^t|_E)^p = (T^t|_E)^q$. 这推出 $(T^t)^{p-q}|_E = (T^t|_E)^{p-q} = \text{id}_E$. 再由 $\text{span}(E) = V^*$ 得 $(T^t)^{p-q} = \text{id}_{V^*}$. 因此 $\det(T)^{p-q} = \det((T^t)^{p-q}) = 1$. 这推出 $\det(T) = \pm 1$. \square