2023 秋几何学期中考试简要参考答案及评分标准

郝天泽

考试时间：2023 年 11 月 18 日。考试时间：2 小时

题 1 (15 分) 空间中一个四棱锥，每个面的面积记为 A_i，每个面的外法向记为 n_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$。试用向量代数的方法，证明 $\sum_{i=0}^{4} A_i n_i = 0$，也即：其和为零向量，彼此抵消。

证明 假设四棱锥的锥顶点为 P，底面顶点分别依次为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4。不难看出 $\overrightarrow{PQ_i} \times \overrightarrow{PQ_{i+1}}$ 模长为表面 $\triangle PQ_iQ_{i+1}$ 面积的二倍，方向平行于对应表面的法向量，且指向要么全为内法向，要么全为外法向。同样的结论（包括与前文同样的指向）对于 $\overrightarrow{Q_2Q_1} \times \overrightarrow{Q_2Q_3}$ 和 $\overrightarrow{Q_4Q_3} \times \overrightarrow{Q_4Q_1}$ 成立。记 $\alpha_i = \overrightarrow{PQ_i}$，于是只需证明：

$$\alpha_1 \times \alpha_2 + \alpha_2 \times \alpha_3 + \alpha_3 \times \alpha_4 + \alpha_4 \times \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) \times (\alpha_1 - \alpha_4) = 0,$$

而这由于外积的反对称性是显然成立的。 □

注 本题目也可以通过将四棱锥分为两个三棱锥以及此结论对三棱锥成立推出（公共面关于两个三棱锥的外法向相抵消）。对于三棱锥的情况，向量计算变为

$$\alpha_1 \times \alpha_2 + \alpha_2 \times \alpha_3 + \alpha_3 \times \alpha_1 + +(\alpha_1 - \alpha_2) \times (\alpha_3 - \alpha_2) = 0,$$

变得更为简单。

评分标准 证明无误则满分；如果能用外积表达，但计算过程中出现疏漏，则得 *10* 分；如果完全不知道怎么处理面积数乘法向量，则不得分。

题 2 (15 分) 在平面直角坐标系 I 中（右手系），有一条二次曲线 Γ，方程为 $9x^2+4xy+6y^2+2x+16y+10=0$.

(1) 试求出它的长轴和短轴所在直线；

(2) 写出这条二次曲线在一个新直角坐标系（右手系 $O'x'y'$）中的标准方程，其中长轴在 x' 轴；

(3) 求出到新直角坐标系 I' 的坐标变换公式。

解 (1) 可以先求中心，为 $(\frac{1}{5},-\frac{7}{5})$；再求主方向，分别为 $(1,-2)$（对应特征值 5），$(2,1)$（对应特征值 10）。于是 Γ 的长轴所在直线为 $2x+y+1=0$，短轴所在直线为 $x-2y-3=0$；或先用转轴、移轴化成标准方程，再反解出长、短轴所在直线（相当于先做 (2)(3) 问），当然是得到相同的结果。(2)(3) 标准方程为 $5x'^2+10y'^2=1$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{5}, \\ y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'-\frac{7}{5}. \end{cases}$$

或写成

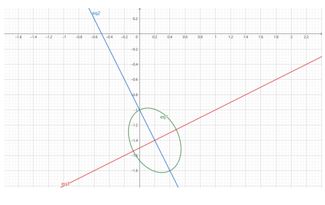
$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}, \\ y'=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

注 第 (3) 问还有另一种的答案，即

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{5}, \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'-\frac{7}{5}. \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y+\frac{3}{\sqrt{5}}, \\ y'=-\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$



评分标准 中心 *3* 分，主方向 *4* 分，长短轴直线方程得 *1* 分；标准方程 *2* 分；坐标变换公式 *5* 分。部分错误（如符号写反，长短轴写反，标准方程写反等等）酌情扣分。

题 3 (15 分) $\mathbb{Q}$ 是单叶双曲面，它在直角坐标系 $Oxyz$（相对于右手系幺正标架建立）下的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$。设 ℓ 是两平面 $x=1$ 和 $z=0$ 的交线。设 $\sigma(\theta)$ 是过直线 ℓ 的平面，它与平面 $z=0$ 的交角为 θ。
问：平面 $\sigma(\theta)$ 与 $\mathbb{Q}$ 何时有截线？截线存在时，分别是什么类型的曲线？写出当 θ 从 0 连续变到 $\pi/2$ 时，你的结论和理由。

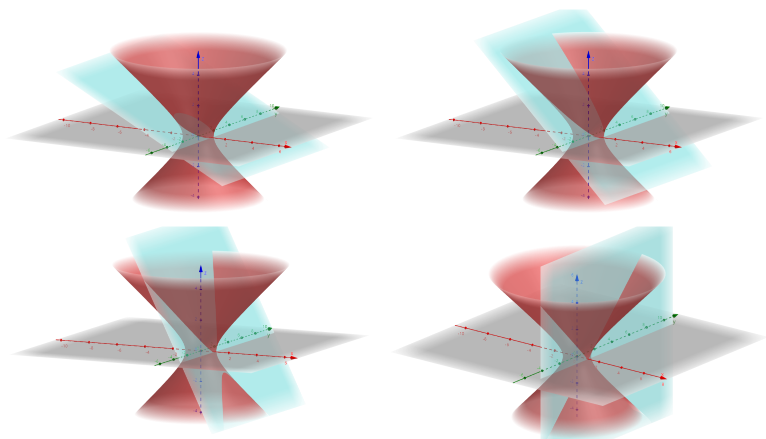
解 用投影法，计算投影曲线的代数不变量，再用仿射映射（平行投影）不改变二次曲线类型。计算过程略，答案为：

(a) 当 $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$，平面 $\sigma(\theta)$ 与 $\mathbb{Q}$ 的截线是椭圆；

(b) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$，平面 $\sigma(\theta)$ 与 $\mathbb{Q}$ 的截线是抛物线；

(c) 当 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$，平面 $\sigma(\theta)$ 与 $\mathbb{Q}$ 的截线是双曲线；

(d) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$，平面 $\sigma(\theta)$ 与 $\mathbb{Q}$ 的截线是两相交直线。 □



评分标准 写出对应平面方程 *1* 分，计算二次曲线不变量 *2* 分，说清截线投影 *2* 分，每种结果情况 *2* 分，分界点 *2* 分。用投影法，但是没有说明计算的是对应曲线的投影像且没强调仿射映射（平行投影）不改变二次曲线类型的，扣 *2* 分。算出截线后不利用二次曲线不变量，而是直接由基本形式或配方看出的，正确时不扣分。利用二次曲线不变量但只考虑 I_2 未考虑退化的，扣 *1* 分。

题 4 (15 分) 设 ϕ 是一个空间等距变换，反定向，有不动点。不依赖于课上讲过的分类结论，请独立推导证明，它是一个旋转反射（即：$\phi = f \circ g$ 是反射 f 与旋转 g 的复合，且 f 反射平面与 g 旋转轴垂直）。

证明 大课与习题课上至少讲了两种方法，以下给出概要：

- 几何法：这里可以按照标准的反定向空间等距变换分类结果的证明，说明 ϕ 可以分解为至多三个反射的复合，然后按照相邻的两个反射平面是否平行进行讨论，并最终因有不动点而排除掉滑反射的情况。我们这里给出另一个证明，说明只需讨论三个反射平面交于一点的情形。可以通过过不动点的反射构造另一个不动点，这说明反射和 ϕ 的复合是一个保定向的有两个不动点的空间等距变换，因而至多是两个反射的复合，因而是旋转，且转轴过这两个不动点。因此 ϕ 是三个过原不动点的反射的复合。

  对于三个有公共点的反射的复合，我们可以沿交线同时旋转前两者至后两者垂直，而后沿交线同时旋转后两者至前两者垂直，此时由于垂直的平面反射可交换，我们得知 $\phi = \Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3 = (\Sigma_1 \circ \Sigma_3) \circ \Sigma_2 = \Sigma_2 \circ (\Sigma_1 \circ \Sigma_3)$，由于此时 Σ_1, Σ_3 均仍过不动点且与 Σ_2 垂直，取 $f = \Sigma_2, g = \Sigma_1 \circ \Sigma_3$ 即满足条件。

- 矩阵法：先证明 ϕ 诱导的向量变换必有特征值 -1（一种证明方式是利用虚根成对以及行列式为 -1，特征根模长比为 1；另一种证明方式是若其诱导的向量变换在一组单位正交基下的变换矩阵为 A，$|I+A| = |A^TA+A| = |A^T+I||A| = -|I+A|$，故 $|I+A| = 0$）。设 v_3 是关于特征值 -1 的单位特征向量，O 为 ϕ 的不动点，将 v_3 扩充成右手系的单位正交标架 $\{O; v_1, v_2, v_3\}$，则在这组标架下，等距变换 ϕ 有变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2\times2} & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

  其中系数矩阵 $\begin{pmatrix} A_{2\times2} & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$ 是行列式为 -1 的正交矩阵。这推出 $\beta = 0$，左上角的 $A_{2\times2}$ 是 2 阶正交矩阵，且行列式为 1，故必为旋转对应矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。于是 $\begin{pmatrix} A_{2\times2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{2\times2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，即 ϕ 可表示为沿 xOy 平面的反射与绕 z 轴旋转的复合。 □

评分标准 运用几何法的，说明只需考虑三个反射的复合 *2* 分；知道可以将相交的两个反射平面同时旋转 *3* 分；说明可以转到一个平面和另两个垂直的标准情况 *7* 分；（只讨论了三个反射平面共点情形但是没有说清理由的酌情扣分;）最后的说明 *3* 分（完全没指出哪个是旋转哪个是反射的扣 *1* 分）。运用代数法的类比酌情扣分。

题 5 (24 分) 判断题。每道 *4* 分，作出正确判断得 *2* 分，简要说清理由得 *2* 分。以下的“空间”均指三维欧氏空间。

(1) 在有理平面 $\mathbb{Q}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{Q}\}$ 上，共线关系如普通欧氏意义，不过“直线”要求包含至少两个有理点。此时的“直线”缺少连续性，因此帕士公理在这个模型中并不成立。

(2) 欧氏几何中，三角形的三条中线共点，其证明用到了平行四边形的性质，而平行公理在球几何中不成立。因此，球面三角形的三条中线应该不会共点。

(3) 空间中给定一个平面及平面上的正六边形 H，则将 H 映到自身的空间仿射变换共有 *24* 个。

(4) 空间中没有不动点的反定向等距变换全体，其自由度是 $DOF = 6$。

(5) 椭圆 Γ 与椭圆 Γ' 总是有相同的共轭方向，当且仅当它们有相同的主轴方向。

(6) 给定抛物线 Γ 和上面两点 P, P'，存在一个平面仿射变换，将 Γ 保持不变，同时将 P 映到 P'。

解 (1) 错误。有理平面上直线至少过两个有理点，因此斜率与截距均为有理数，从而可知两条有理直线的交点一定是有理点。因此由 $\mathbb{R}^2$ 上的帕士公理成立可知 $\mathbb{Q}^2$ 上的帕士公理仍成立。

(2) 错误。球面上弧的中点和对应弦中点以及球心共线，因此球面三角形对应边的中线即为其欧氏眼光下的三角形中线与球心所在平面和球面的交线。（这里欧氏眼光下的三角形中线一定不过球心，否则原本三个顶点位于同一大圆上。）因此，由于欧氏眼光下的三角形三条中线共点，可知球面三角形三条中线共点，即为欧氏三角形重心与球心连线在球面上的交点。

(3) 错误。注意到题目要求为空间仿射变换。而对于每一个将 H 映到自身的平面仿射变换 f（显然存在，如恒同）以及任意的不平行于此平面的向量 v, v'，f 都可以延拓为一个空间仿射变换 $\hat{f}$，使得 $\hat{f}(v) = v'$。这说明这样的空间仿射变换有无穷多个。

(4) 错误。由分类结果知没有不动点的反定向空间等距变换为滑反射，由反射平面和滑动量两个要素组成。3 维欧氏空间中平面有 3 个自由度（法向 2 个 + 平移 1 个），而滑动量一定平行于反射平面，故有 2 个自由度，因此共 5 个自由度 $DOF = 5$。

(5) 错误。二次型 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 与二次型 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 对应椭圆主轴方向相同（均为 $(1,0),(0,1)$），但共轭方向不同（如 $(1,1)$ 对应特征方向分别为 $(2,-1),(3,-1)$，故二者不等价。（事实上，共轭方向相同说明二次型的左上二乘二矩阵差一个非零常数倍，而主轴方向相同仅说明二者可同时对角化，这明显不等价。）

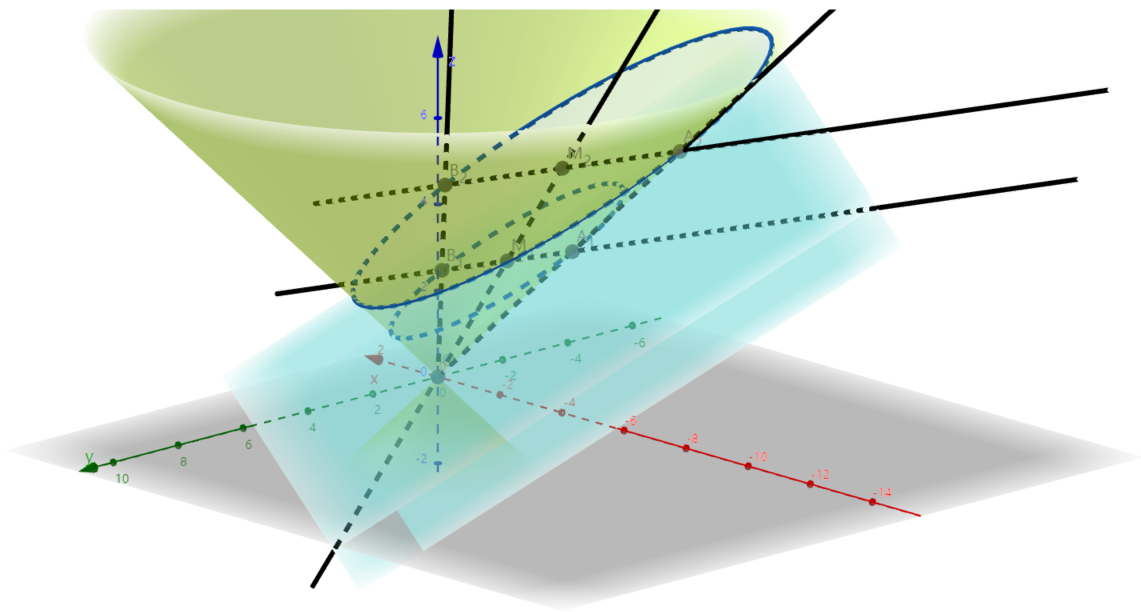
(6) 正确。考虑 PP' 方向对应的“共轭直径”l，由其定义可知任意平行于 PP' 的直线与抛物线的交弦中点在 l 上，由此可知以 l 为轴，PP' 所在方向为对称方向的“斜反射”保持 Γ 不变且将 P 映到 P'。不难验证这是一个平面仿射变换。 □

评分标准 每问判断结果 2 分，具体原因 2 分。具体情况酌情扣分。

题 6 (10 分) 设圆锥 C 与平面 π_1 和 π_2 分别相交，截线 γ_1, γ_2 为椭圆或双曲线，其中心对应记为 M_1, M_2，该两点与锥顶点 O 三点相异且共线。证明这两个平面 π_1, π_2 彼此平行。

证明 可用如下几何与计算两种方式：

- 几何法：首先，由于椭圆或双曲线的中心均不在曲线上，不难看出点 M_1, M_2 不在圆锥 C 上。此时对于任意一张过直线 OM_1M_2 的平面 Σ，记其与 π_i 交于直线 l_i。由于在平面 π_i 上，M_i 为截线 γ_i 的中心，故 M_i 为 l_i 交 γ_i 所得弦 A_iB_i 的中点。注意到 Σ 为过锥顶点且与圆锥有其他交点（如 A_i, B_i）的平面，故 Σ 与圆锥截线为两相交直线，因此不妨设 OA_1A_2, OB_1B_2 共线。那么在平面 Σ 上，由于 OM_1M_2 共线且 M_i 为 A_iB_i 的中点，故必有 $l_1 // l_2$。上述对任意一张过直线 OM_1M_2 的平面 Σ 均成立，这说明平面 π_1, π_2 彼此平行。(或者也可以用反证法，若不然则取交线上一点 P，考虑 P, O, M_1, M_2 所在平面为 Σ 即可同样得到矛盾。)



- 计算法：取基点为锥顶点的仿射标架 I，使得圆锥在此标架下为标准方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$。对于不过锥顶点的平面 $Ax + By + Cz + 1 = 0$，(当 $C \neq 0$ 即平面不

平行于 z 轴，) 截线在 xOy 平面投影的二次曲线对应二次型

$$\begin{pmatrix} A^2-C^2 & AB & A \\ AB & B^2-C^2 & B \\ A & B & 1 \end{pmatrix},$$

从而可解出对应原截线中心为 $(\frac{A}{C^2-A^2-B^2}, \frac{B}{C^2-A^2-B^2}, \frac{-C}{C^2-A^2-B^2})$。(当 $C=0$ 即平面平行于 z 轴，可向其他方向投影类似可知结果相同。)

于是可知若中心与锥顶点共线，必有两平面对应法向 (A,B,C) 相平行，即两平面平行。 $\square$

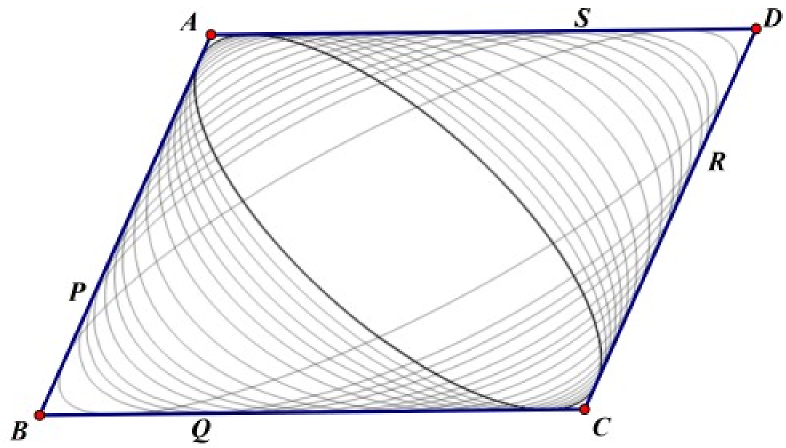
评分标准 利用计算法的，列出式子 *2* 分，算出中心以及后续说理 *8* 分。其他错误酌情扣分。利用几何法的同学基本上要么完全做完（*10* 分）要么没有太多有价值的中间过程（*0* 分），个例酌情给分。

题 7 (6 分) 设一对椭圆彼此相切，切点处的切线为 l。它们的另外两对公切线记为 AB, CD。已知 l 平分线段 AB，也平分 CD。请判断，这一对椭圆是否一定相差一个位似变换或平移？如果不是，请给出反例。如果是，请给出证明。

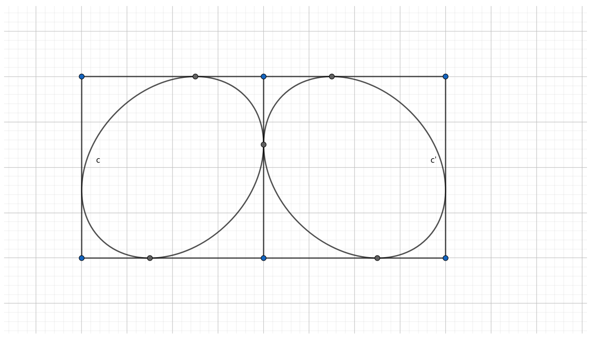
解 结果是否定的，因为可以通过如下引理构造反例：

引理 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 P, Q, R, S 分别是边 AB, BC, CD, DA 上的点，则平行四边形 $ABCD$ 存在内切椭圆，使得其在各边上的切点分别为 P, Q, R, S 的充要条件是

$$(A, B; P) = (C, B; Q) = (C, D; R) = (A, D; S).$$



由于仿射变换保平行，保单比，引理的证明只需对正方形考虑；或者更清楚地，只需对任意 $k \in (0, +\infty)$，证明圆外切平行四边形切点可有对应单比即可，这是明显的，证明留给读者。



确保了这一点之后，我们可以考虑如下的反例构造：任取 $k \in (0, +\infty)$，构造如引理所述的正方形 $ABCD$ 及其内切椭圆 Γ，然后将整个图形关于 AB 轴对称得到另一个

正方形及其内切椭圆 Γ'，此时 Γ 与 Γ' 切 AB 于同一点故也相切，且 AB 平分两个公切线段。通过各自的构造不难看出 Γ 与 Γ' 的主轴均在正方形对角线上，因此当 $k \neq 1$ 时，两椭圆长轴相互垂直，短轴相互垂直，特别的，均不平行，故不可能差一个位似或平移。因此结论是否定的。（事实上，此图形的仿射像均可作为反例。） $\square$

注 一个有趣的事实是，我们上面构造的反例都使得公切线（不过切点的两条）相互平行。事实上，如果加上这两条公切线不平行的条件，结果就变成了肯定的。证明可以通过将一个椭圆仿射变换成圆后，利用切线长相等以及平分线段的条件，得到另一个椭圆和其外切三角形形如尤书上 P.216 第 13 题的构型。此时由若干组对应的切线长相等以及尤书上习题的证明过程不难证明，公切线段长度相等，从而另一个椭圆也是圆。（此过程中用到了三角形给定三个切点后若存在内切椭圆切于对应切点，则唯一。这一命题的证明隐含在了当时这道习题的讲解中。）于是作为两个位似的圆的仿射像，原本的两个椭圆必定也位似（这是某次作业的选做题）。

评分标准 如果判断原命题为真，或认为不成立但没有给出反例构造，最多只能得 *4* 分。判断原命题错，并且给出了一对对称椭圆的构造，说明它们彼此不可能只差位似，可以得全部 *6* 分。

其中，若能给出正确、有效的仿射等价图形，其中一个椭圆化为圆，并转化为求证“给定三条切线和对应切点的椭圆的唯一性”，但不能证明这一点的，只能得 *2* 分。