数学模型　期中考试（1）

Exam Date: April 8.　Time: 03:15 pm to 04:55 pm.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 化学反应模型。考虑可逆反应 (reversible transform)

$$A \xrightarrow{k_1} 2B \quad \text{and} \quad 2B \xrightarrow{k_2} A.$$

用 $A(t)$ $B(t)$ 分别表示物质A，B的浓度，它们满足初值条件

$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0, \quad M = 2A_0 + B_0.$$

（a）（10分）写出 $A(t), B(t)$ 满足的变化率模型，并求出该系统对应初值条件的（非零）平衡解 $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbb{R}^2$。

（b）（10分）写出系统在平衡解 $(\bar{A}, \bar{B})$ 处的近似线性方程对应的系数矩阵。尝试使用 p, q 判别法判断其稳定性。（如果是临界情况，就指出无法这个判别法判断。）

（c）（10分）定义

$$S(t) = A\left[\ln(k_1 A) - 1\right] + B\left[\ln\left(\sqrt{k_2} B\right) - 1\right],$$

通过计算证明 $S'(t) \le 0$.

数学模型　期中考试（1）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

2. 一阶波方程和特征线法。考虑一维的 traffic flow 方程

$$u_t + (1-u)u_x = 0.$$

如果已知

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ |x|, & |x| \le 1 \end{cases}$$

（a）（10分）证明该方程的特征线（在相交之前）是 $x-t$ 平面上的直线。

（b）（15分）当 $0 < t \le 1$ 时，在 $x-t$ 平面画出特征线的示意图，用特征线法求方程的解，并画出 $t=1$ 时 u 的图像。

（c）（10分）当 $t > 1$ 时，我们假设在特征线相交处形成激波，求激波的位置 $s(t)$，并求解方程。

数学模型　期中考试（1）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

3. 对于 $u(x), 0 \le x \le 1$，考虑如下的能量泛函

$$E = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u_x)^2 + W(u) \right) dx, \quad W(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}.$$

（a）（15分）如果额外要求 $u(0) = u(1) = 1$，用泛函导数的定义推导泛函 E 的极值点所满足的 Euler-Lagrange 方程（直接使用 Euler-Lagrange 方程不得分）。并求一个满足边值条件的解。

（b）（15分）考虑 $u(x,t)$ 满足如下方程（注意边值条件和（a）中的不同）

$$u_t = u_{xx} - W'(u), \quad 0 < x < 1, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

按照平衡率模型，指出此时的通量函数和源函数。对于固定的时刻，我们也可以定义如上的能量泛函，这时，能量泛函也可以看成是时间的一元函数，记为 $E(t)$。证明：

$$\frac{d}{dt}E(t) \le 0.$$

数学模型　期中考试（1）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

4. 考虑一个选择淘汰模型，$n(t,x)$ 代表某种密度函数，其中 $t \geq 0$, $a \leq x \leq b$，它满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n(t,x) = b(x)n(t,x) - \varrho(t)n(t,x), \\ \varrho(t) = \displaystyle\int_a^b n(t,x)dx, \\ n(t=0) = n^0(x) > 0 \text{ for } x \in [a,b]. \end{cases}$$

这里 $b(x)$ 是一个光滑的生长率函数，在 $[a,b]$ 上的最小值大于0，其最大值为 $\bar{\varrho}$, 且只在唯一的一点 $c \in (a,b)$ 取到。证明，当 $t \to +\infty$ 时，$\varrho(t) \to \bar{\varrho}$，若 $x \in [a,b]$ 且 $x \neq c$，则 $n(t,x) \to 0$。（5分）