几何学期中考试试题及参考答案、评分标准

考试日期：2015 年 11 月 21 日. 考试时间：2 小时.

题 1（15 分） 给定单位球面（球心在原点，半径为 1）上相异三点 a, b, c，证明：

1. $v = a \times b + b \times c + c \times a$ 是一个非零向量；
2. 球面上过 a, b, c 三点的外接圆的圆心，其空间位置向量平行于上述 v.

• 证：1) 由于 a, b, c 为球面上相异三点，必定不共线，于是 $(a-b)\times(b-c)$ 为非零向量，展开即得. 2) 取上述 v 分别与 a, b, c 作内积得同一个混合积 $[a, b, c]$，又这三个向量等长，意味着夹角相等，即此向量单位化以后在球面上到其它三点距离相等.（另一个思路是取球面上此三点外接圆的"切锥"，则锥顶点 C 与球心 O 连线与球面相交的交点即为外接圆心 v^*，故只需求此锥顶点. 由于 CO 垂直于 a, b, c 三向量端点所在平面，所以可以用 $(a-b)\times(b-c)$ 得出，展开即得欲证结果.）

• 评分标准：*第 1 小题 5 分，第 2 小题 10 分.*

题 2（30 分）

1. 给定平面上一个右手系直角坐标系 I 和一个平面等距变换 f，它是一个滑反射，其反射轴在 I 中表示为直线方程 $y = x - 1$，点 $(-1,0)$ 映到 $(3,0)$. 试求这个变换 f 在 I 中的坐标表示.
2. 给定平面上一个平面等距变换 g，在右手系直角坐标系 I 中表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   请回答：这是不是等距变换？是不是保定向的？它有没有不动点？有没有不变直线？（若有的话请在坐标系中指出）. 最后请指出它的具体类型，描述其特征量（如旋转角、平移量或滑动量等）.

• 解：1. 这是一个滑反射，滑动量为 $2\sqrt{2}$. 具体表达式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. 这是一个等距变换，保定向，有唯一的不动点，无不变直线. 它实际上是一个绕 I 中坐标为 $(4,3)$ 点的旋转，逆时针转角为 $\arctan\frac{4}{3}$.

• 评分标准：*第 1 小题 15 分，其中过渡矩阵占 10 分，常向量部分占 5 分. 第 2 小题 15 分，每一问占 3 分；未答"无不变直线"者扣 1 分. 有同学把第 1 小题的变换误会成了"斜反射"，基本就没分了. 注意斜反射非等距，且反射轴上都是不动点，而滑反射是等距，无不动点.*

题 3（10 分） 设有平面 Σ 上的正三角形铺砌，对应于直角坐标系中三族平行直线构成的平面子集 S. 其中每一族直线都彼此平行，且相邻直线间距为 1；

不同族直线之间夹角为 60 度；直线交点均称为“顶点”或“格点”. 它的一个“对称”定义为一个平面等距变换，将 S 仍然映为 S. 试求将它的一个给定顶点 A 映到另一指定顶点 B 的不同对称的个数.

• 解：12 个. 由于一个等距变换把一个三角形映为另一个全等三角形，且由此对应唯一确定，所以只需取以 A 和相邻格点 A_1, A_2 构成的一个单位正三角形，看它映为以 B 为顶点的哪一个单位正三角形即可. B 的相邻格点有 6 个，每一个取定为 A_1 之像后，A_2 之像又有两种可能，故总共的可能性有 $6 * 2 = 12$ 种.

事实上，其中保定向的恰有 6 个，其中 1 个为平移，另外 5 个中，1 个是绕 AB 连线中点的 180 度旋转，4 个是绕其中垂线上其它 4 个不同点的旋转，转角分别是顺时针 60 度、120 度、240 度、300 度（不妨随便取 A, B 点位置后画图看看）. 反定向的 6 个，必定是反射或滑反射，其反射轴必定过 A, B 中点，同时为了保证经过反射后保持 S 不变，(滑) 反射轴必须且只需与 S 中三族直线的夹角是 30 度的整数倍即可，这样的（滑）反射轴有 6 条，对应的滑动量适当选取后总可以保证把 A 映到 B，则过 A 点的 S 中三条直线将映为过 B 点的 S 中三条直线，于是这个等距变换的确把 S 仍然映为 S.（也可以通过复合一个平移，转为考虑保持 A 点不动的对称个数，此时很明显有 1 个恒同、5 个旋转、6 个反射.）

• 评分标准：*不少同学仍然试图用穷举的方法来做，基本都遗漏了一些情形，一般都只能给 3 分. 关键是这种思路比较笨拙，且没有看到标准答案中的关键信息. 也有几个同学开头即设“仿射坐标系”，直接说明概念不清，扣 10 分. 注意等距变换在一个非正交的仿射坐标系中，对应的矩阵不是正交阵.*

题 4（10 分） 考虑欧氏空间中如下构造的凸多面体，它有 6 个顶点，其中 $ABCD$ 构成一个平面凸四边形，且 AC, BD 是一对对角线；E, F 分别在此平面两侧，各自与 $ABCD$ 连成四棱锥，而凸八面体 $ABCDEF$ 由这两个四棱锥拼合而成. 试证明：这个八面体是一个正八面体在仿射变换下的像，当且仅当三个四边形 $ABCD, AECF, BEDF$ 同时都是平行四边形.

• 证：正八面体的仿射像明显有这三个四边形都是平行四边形，这是根据仿射变换保“点共面”及保“平行四边形”的性质. 反之，设 $ABCD, AECF$ 都是平行四边形，取线段 AC 的中点 O，则它明显是两个平行四边形的中心. 对于空间四面体 $ABDE$，根据空间仿射变换基本定理，存在一个空间仿射变换 ϕ 把它映成一个正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ 的三个顶点 A', B', D' 及其中心 O' 构成的四面体. 此时由于仿射变换保单比（或者说保中点），可知 C, F 相应的映为 C', F'，则原八面体是正八面体在 ϕ^{-1} 作用下的像.

• 评分标准：*此题大部分同学答得较好. 少数没说清在已知那几个是平行四边形之后，如何把此六面体映为正六面体，扣 3 分左右.*

题 5（15 分） 给定一个椭圆 Γ 及其内部一点 F，F 不同于 Γ 之中心 O. 试问：是否存在一个适当的仿射变换，将 γ 映为另一个椭圆 Γ'，而 F 点之像 F' 是 Γ' 的一个焦点？请对你的结论予以证明.

• 解：存在这样的仿射变换，可如下构造. 先取一个正压缩 ϕ_1，将 Γ 映为圆 Γ^*，$\phi(O) = O^*, \phi(F) = F^*$. 设 F^* 关于 O^* 的对称点为 F^{**}. 然后取 O^*F^* 的

一条垂线（垂足为 O^*），在上面取一点 P 到 F^* 的距离等于圆 Γ^* 的半径 r. 现在取另一个正压缩 ϕ_2，以 O^*F^* 为压缩轴，把圆 Γ^* 压缩成以 O^*F^* 为长轴方向、短轴端点为 P 的椭圆，由 $|PF^*|+|PF^{**}|=2r$ 为长轴之长，可知 F^*,F^{**} 是此椭圆的焦点，同时有 $\phi_2\circ\phi_1(F)=F^*$. 证毕.

• 评分标准：大部分都能答对，不必细说. 此题表述为"是否存在一个适当的仿射变换 ϕ，将 γ 映为 $\phi(\Gamma)$ 且 $\phi(F)$ 是 $\phi(\Gamma)$ 的一个焦点"更准确. 背后的要点是："焦点"不是仿射不变性质，在仿射变换下其像有很大自由度变化.

题 6（10 分） u,v,w 是绕过 O 点的某直线的 180 度旋转（各自的轴可能不同）. 证明：

1. $t=u\circ v\circ w$ 是一个"对合"（即 $t^2=id$）当且仅当 u,v,w 三者的旋转轴共面 Σ.
2. 若上述 $t=u\circ v\circ w$ 是对合，则 t 也是一个绕某轴的 180 度旋转，且此轴包含于上述平面 Σ.

• 证：$t=u\circ v\circ w$ 是一个保定向等距变换且有不动点（或者说因为其是三个绕 O 旋转的复合），故仍然是一个旋转. 它如果非恒等变换且是一个"对合"，则必定也是一个绕过 O 点某轴的 180 度旋转. 又有 $u\circ t=v\circ w$.
现在将 $v=v_2\circ v_1, w=w_2\circ w_1$ 各自分解为两个平面反射的复合，其中 $v_1=w_2$ 是关于 v,w 的轴线共同决定的平面 Σ 的反射，v_2,w_1 必定都是与之垂直的平面的反射（若 v,w 的轴线相同则 $v=w$, $t=u\circ v\circ w=u$，此时结论明显成立，可不必再考虑）. 复合结果可重新写为 $v\circ w=v_2\circ w_1$，其中反射平面 v_2,w_1 均与 Σ 垂直，故结果是一个旋转，转轴与 v,w 轴线张成的平面垂直. 对 $u\circ t$ 有同样的结论，复合结果是一个绕与 u,t 之轴垂直的轴的旋转. 上述两个旋转相等，说明旋转平面（过 O）重合，故四根轴必定共面. 这同时证明了两条结论.

• 评分标准：很多人没有说清后面的调整、重选平面的过程，酌情扣分.

题 7（10 分） 证明：若平面仿射变换 ϕ 有唯一不动点 O，则任一不变直线 l 都过此点 O.（所谓"不变直线"，即该直线 l 在变换下仍映为 l，不过上面的点可能会变动位置.）

• 证：反设存在一条不过 O 的不变直线 l. 限制在 l 上看，是一个保单比的自身到自身的映射，取仿射坐标系后可写为 $x\mapsto ax+b$，则 $a\neq 1$ 时必有不动点且不同于 O，与不动点的唯一性矛盾. 故 $a=1$. 这说明沿 l 方向是 ϕ 的一个不变方向（特征方向）且特征值为 1，于是过 O 的这个方向的直线 l' 上全是不动点，再次与不动点的唯一性矛盾. 证毕.

• 评分标准：由反证法只论证出有一族平行的不变直线，却说不清剩下的道理，特别是与不动点唯一性矛盾的关键，扣 4 分左右.