

高代I期末考试题



四正君
大二数学系

已关注

赞同 96

▲ 你关注的 汪涵 赞同

分享

这是北京大学高等代数^[1]2023年期末考试题。

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) (10分) 求矩阵 $A^t A$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和特征向量。其中 A^t 是矩阵 A 的转置矩阵。

(b) (10分) 求正交矩阵 $U \in M_4(\mathbb{R})$ 和正交矩阵 $V \in M_3(\mathbb{R})$ 使得

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t.$$

2. (10分) 求非退化变元替换 $X = PY$ 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 化成标准型。

3. (10分) 设 $A \in M_{mn}(F), B \in M_{np}(F)$. 证明 $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$.

4. (15分) 设 $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ 是实对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 的特征值. 证明

(a)

$$\lambda_1(A) = \max_{\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0} \frac{\alpha^t A \alpha}{|\alpha|^2}, \quad \lambda_n(A) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0} \frac{\alpha^t A \alpha}{|\alpha|^2}$$

(b) 对任意的对称矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 实数 $a \in [0, 1]$, 都有

$$\lambda_1(aA + (1-a)B) \leq a\lambda_1(A) + (1-a)\lambda_1(B), \quad \lambda_n(aA + (1-a)B) \geq a\lambda_n(A) + (1-a)\lambda_n(B).$$

5. (10分) 设 A 是 n 级矩阵, 它的所有顺序主子式都不为 0, 证明存在下三角矩阵 B 使得 BA 是上三角矩阵。

6. (10分) 设 W 是 \mathbb{R}^n 的 r 维子空间, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 W 的一组基. 设 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in M_{nr}(\mathbb{R})$ 是列向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 相应的矩阵. 证明: 对 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 在 W 上的正交投影为 $A(A^t A)^{-1} A^t \alpha$. 其中 A^t 表示矩阵 A 的转置。

7. (a) (10分) 设 A 是 n 阶斜 (反) 对称矩阵, 证明 $\det(A) \geq 0$

(b) (10分) 设 A 是斜 (反) 对称矩阵, B 是 n 阶正定矩阵, 证明:

$$\det(B + A) \geq \det(A) + \det(B).$$

其中 $\det(A)$ 表示矩阵 A 的行列式。

8. (5分) 设 A 是 n 级复矩阵满足

$$\det(I + A^k) = 1, \quad k = 1, \dots, 2^n - 1.$$

证明: $A^n = 0$, 并举例说明要求的条件是不能减弱的。

1

知乎 @四正君

1-5题略。

6. 若 $\alpha \in W^\perp$, 则 $A^T \alpha = 0$, 因为 $(A^T \alpha, \alpha_i) = (\alpha, A \alpha_i) = (\alpha, \alpha_i) = 0$ 。

这只是验证，至于怎么推出这个只能说.....

7.(a)注意反对称阵的合同典范形式 $\text{diag}\{S, \cdots, S, 0\}$ 即证，其中 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(b)不妨设 $B = \lambda I$ ，其中 $\lambda > 0$ ，则只需证

$$\det(\lambda I - A) \geq \lambda^n + (-1)^n \det(A).$$

注意反对称阵也正规，因此有(a)中的相似典范形式，从而奇数阶主子式全为零，偶数阶主子式非负，因此特征多项式形如 $\lambda^n + S_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \det(A)$ ，即证。

8.复矩阵总能上三角化，只需证明对复数 λ_i 有

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i^k) = 1 \implies \lambda_i = 0.$$

注意 $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p}$ 恰好有 $2^n - 1$ 项，其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ 。

已知它们的 k 次幂和全为零，其中 $1 \leq k < 2^n$ ，由 **Newton** 公式即知它们全为零。

参考

1. ^ tqc教授

发布于 2024-01-02 11:38 · IP 属地北京

高等代数 期末考试 线性代数



欢迎参与讨论

19 条评论

默认 最新



2018

都属于学过就秒的题，不过我大二了🤔大一去做肯定做不动

01-02 · IP 属地湖北

回复 5



洁莹的风

这不是实验班的吧

02-02 · IP 属地江西

回复 喜欢



代号

不是，实验班的，你看不看得懂就完了

02-04 · IP 属地湖南

回复 喜欢



Formula-Twister

有一小问题，最后一题n个特征值中选p个应该是 C_n^p 项，而 $C_n^1 + \cdots + C_n^n$ 才是 $2^n - 1$ 个

01-17 · IP 属地海南

回复 喜欢



四正君

作者

既对多重指标求和，又对指标大小求和，结果就是你说的那样

01-17 · IP 属

● 回复 ● 1



...

● 回复 ● 喜欢



...

● 回复 ● 喜欢



...

● 回复 ● 喜欢



...

● 回复 ♥ 喜欢



...

● 回复 ● 喜欢

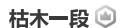


...



● 回复 ● 喜欢

● 回复 ● 喜欢



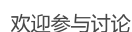
...

● 回复 ● 喜欢



...

● 回复 ♥ 喜欢

[点击查看全部评论 >](#)

推荐阅读

2020年高等代数(II)期中考试
 题目与解答

高代习题课讲义 (2021.5.13)

中考数学点
题

