

一. 考虑实矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ .

(1) 求正交矩阵  $P$  和对角元为正数的上三角矩阵  $B$  满足  $A = PB$ .

(2) 求正交矩阵  $Q$  和正定对称矩阵  $C$  满足  $A = QC$ .

解.

$$P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

二. 设  $V$  是有限维复内积空间,  $T \in L(V)$ . 证明:

(1) 如果  $T + T^*$  正定, 则  $T$  可逆;

(2) 如果  $T + T^*$  半正定, 则  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*)$ .

证明. 注意到对任意  $\alpha \in \text{Ker}(T)$  有

$$\langle (T + T^*)\alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle + \langle T^*\alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle + \langle \alpha, T\alpha \rangle = 0.$$

如果  $T + T^*$  正定, 这推出  $\alpha = 0$ , 即在(1)的条件下有  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , 从而  $T$  可逆. 如果  $T + T^*$  半正定, 则上式推出  $(T + T^*)\alpha = 0$ , 从而  $T^*\alpha = 0$ , 即  $\alpha \in \text{Ker}(T^*)$ . 这说明在(2)的条件下有  $\text{Ker}(T) \subset \text{Ker}(T^*)$ . 用  $T^*$  替换  $T$ , 即得反向的包含关系.  $\square$

三. 考虑实线性空间  $\mathbb{R}^{n \times n}$  上的对称双线性函数  $f(A, B) = \text{tr}(AB)$ . 对下列三个条件, 分别求满足该条件的子空间  $W \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  的维数的最大值.

(1)  $f|_W$  正定;

(2)  $f|_W$  负定;

(3)  $f|_W = 0$ .

解. 答案为: (1)  $\frac{n(n+1)}{2}$ ; (2)  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; (3)  $\frac{n(n-1)}{2}$ . 下面证明. 设  $W_1$  和  $W_2$  分别为  $\mathbb{R}^{n \times n}$  中的对称和反对称矩阵构成的子空间. 则  $\dim W_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\dim W_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ . 注意到

•  $f|_{W_1}$  正定: 设  $A \in W_1 \setminus \{0\}$ , 则  $A$  相似于某个非零实对角矩阵  $D$ , 从而

$$f(A, A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) > 0.$$

•  $f|_{W_2}$  负定: 设  $A \in W_2 \setminus \{0\}$ , 则  $A$  (在  $\mathbb{C}$  上) 相似于某个非零纯虚对角矩阵  $D$ , 从而

$$f(A, A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) < 0.$$

若子空间  $W \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  的维数大于  $\frac{n(n+1)}{2}$ , 则  $W \cap W_2 \neq \{0\}$ , 从而  $f|_W$  不正定. 这说明(1)的答案为  $\frac{n(n+1)}{2}$ . 类似的推导说明(2)的答案为  $\frac{n(n-1)}{2}$ . 为了讨论(3), 记  $W_3$  为  $\mathbb{R}^{n \times n}$  中的严格上三角矩阵构成的子空间. 则  $\dim W_3 = \frac{n(n-1)}{2}$ , 并且  $f|_{W_3} = 0$ . 若子空间  $W \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  的维数大于  $\frac{n(n-1)}{2}$ , 则  $W \cap W_3 \neq \{0\}$ , 从而  $f|_W \neq 0$ . 因此(3)的答案为  $\frac{n(n-1)}{2}$ .  $\square$

四. 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 假设  $A^{n+1}$  相似于正交矩阵. 证明  $A^n$  相似于正交矩阵.

**证明.** 方法一. 不妨设  $A^{n+1}$  正交. 记  $B = \sum_{k=0}^n (A^k)^t A^k$ . 则  $A^t B A = B$ . 注意到  $B$  正定, 从而存在可逆矩阵  $P$  使得  $B = P^t P$ . 结合起来得  $(PAP^{-1})^t (PAP^{-1}) = I_n$ , 即  $PAP^{-1}$  正交, 因此  $PA^n P^{-1}$  正交.  $\square$

方法二. 条件推出  $A$  可逆, 并且  $A^{n+1}$  在  $\mathbb{C}$  上可对角化. 通过考虑 Jordan 标准型, 可知  $A$  在  $\mathbb{C}$  上可对角化, 并且特征值均为模等于 1 的复数. 通过考虑  $A$  的特征多项式的实因式分解, 可知  $A$  相似于  $\text{diag}(I_p, -I_q, D_1, \dots, D_r)$ , 其中  $D_k = \text{diag}(e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k})$ . 注意到  $D_k$  相似于  $R_k := \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$ . 因此  $A$  在  $\mathbb{C}$  上相似于正交矩阵  $\text{diag}(I_p, -I_q, R_1, \dots, R_r)$ , 从而在  $\mathbb{R}$  上也相似于该正交矩阵.  $\square$

五. 设  $V$  是  $n$  维实线性空间,  $f$  是  $V$  上的双线性函数. 证明存在  $V$  的有序基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  满足

$$i, j \in \{1, \dots, n\}, i - j \geq 2 \implies f(\alpha_i, \alpha_j) = 0.$$

**证明.** 引理. 设  $T \in L(V)$ . 则存在  $T$  的不变子空间序列  $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = V$  满足  $1 \leq \dim W_j / W_{j-1} \leq 2$ .  $\square$

引理的证明. 对  $n = \dim V$  归纳. 当  $n \leq 2$  时显然. 设  $n \geq 3$ . 我们断言存在  $V$  的 1 维或 2 维  $T$ -不变子空间  $W$ . 取  $V$  的有序基  $\mathcal{B}$ , 并记  $\bar{A} = [T]_{\mathcal{B}}$ . 视  $A$  为复矩阵, 它存在特征值和特征向量, 即存在  $a, b \in \mathbb{R}$  和不全为零的  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  满足  $A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$ , 也就是

$$AX = aX - bY, \quad AY = bX + aY.$$

取  $\alpha, \beta \in V$  满足  $[\alpha]_{\mathcal{B}} = X, [\beta]_{\mathcal{B}} = Y$ . 则  $\alpha, \beta$  不全为零, 并且

$$T\alpha = a\alpha - b\beta, \quad T\beta = b\alpha + a\beta.$$

这推出  $W := \text{span}\{\alpha, \beta\}$  是 1 维或 2 维  $T$ -不变子空间, 从而证明了断言. 对  $T_{V/W}$  应用归纳假设即得引理.

注意到引理推出: 如果  $V$  是  $n$  维实内积空间,  $T \in L(V)$ , 则存在有序标准正交基  $\mathcal{B}$  使得

$$i, j \in \{1, \dots, n\}, i - j \geq 2 \implies [T]_{\mathcal{B}} \text{ 的 } (i, j)-\text{元} \text{ 等于 } 0.$$

事实上, 取  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  使得  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\dim W_j}\}$  是  $W_j$  的基即满足要求. 这进一步推出: 任意  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  正交相似于某个当  $i - j \geq 2$  时  $(i, j)$ -元为 0 的矩阵, 从而合同于这样的矩阵. 对于原题, 约定  $f$  在有序基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  下的矩阵的  $(i, j)$ -元为  $f(\alpha_i, \alpha_j)$ , 则  $f$  在所有有序基下的矩阵构成一个合同等价类, 因此存在有序基使  $f$  的矩阵的  $(i, j)$ -元当  $i - j \geq 2$  时等于 0.  $\square$

六. 设  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是正定 Hermite 矩阵. 假设  $ABC$  是 Hermite 矩阵. 证明  $ABC$  正定.

**证明.** 记  $D = ABC$ ,  $A_1 = \sqrt{B}A\sqrt{B}$ ,  $C_1 = \sqrt{B}C\sqrt{B}$ ,  $D_1 = \sqrt{B}D\sqrt{B}$ . 则  $A_1, C_1, D_1$  是 Hermite 矩阵,  $A_1, C_1$  正定, 并且  $D_1 = A_1 C_1$ . 这推出  $(\sqrt{A_1})^{-1} D_1 (\sqrt{A_1})^{-1} = \sqrt{A_1} C_1 (\sqrt{A_1})^{-1}$  是 Hermite 矩阵并且特征值为正数, 从而正定. 这进一步推出  $D_1$  正定, 从而  $D$  正定.  $\square$