1. (1) 设$\Omega\subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$为优美子集. 为说明$\Omega$有限, 只需注意到:
   - 任意$A\in\Omega$在$\mathbb{C}$上可对角化: p_A为$x^{2022}-1$的因式, 从而无重根;
   - Ω只与$\mathbb{C}^{n\times n}$中有限多个相似等价类相交: 若$A\in\Omega$相似于$\mathrm{diag}(c_1,\dots,c_n)$, 则$c_i^{2022}=1$.
   - Ω与$\mathbb{C}^{n\times n}$中每个相似等价类至多交于两个元素: 设$A_1,A_2,A_3\in\Omega$在$\mathbb{C}$上相似, 则它们在$\mathbb{R}$上相似, 从而存在$i\neq j\in\{1,2,3\}$满足: 存在$P_0\in\mathbb{R}^{n\times n}$使$\det(P_0)>0$且$A_j=P_0^{-1}A_iP_0$. 设$P=\det(P_0)^{-\frac{1}{n}}P_0$. 则$P\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$且$A_j=P^{-1}A_iP$, 矛盾.

   (2) $k_2=2022$.
   - $k_2\leqslant 2022$: 设$\Omega\subset\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$为优美子集. 我们证明$|\Omega|\leqslant 2022$. 对$0\leqslant k\leqslant 1011$, 记$\mathrm{diag}(e^{\frac{k\pi i}{1011}},e^{-\frac{k\pi i}{1011}})$在$\mathbb{C}^{2\times 2}$中的相似等价类为$\mathcal{S}_k$. 由(1)有$\Omega=\bigcup_{k=0}^{1011}\Omega\cap\mathcal{S}_k$. 注意到$|\mathcal{S}_0|=|\mathcal{S}_{1011}|=1$. 所以
$$|\Omega|=\sum_{k=0}^{1011}|\Omega\cap\mathcal{S}_k|\leqslant 2+\sum_{k=1}^{1010}|\Omega\cap\mathcal{S}_k|\leqslant 2+2\cdot 1010=2022.$$
   - $k_2\geqslant 2022$: 对$0\leqslant k\leqslant 2021$, 记$A_k=\begin{pmatrix}\cos\frac{k}{1011}\pi & -\sin\frac{k}{1011}\pi\\ \sin\frac{k}{1011}\pi & \cos\frac{k}{1011}\pi\end{pmatrix}$. 我们验证$\{A_k:0\leqslant k\leqslant 2021\}$为$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$的优美子集. 显然$A_k^{2022}=I_2$. 假设该集合中有不同的$A_k,A_l$, 使得存在$P\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$满足$A_l=P^{-1}A_kP$. 则$\mathrm{tr}(A_k)=\mathrm{tr}(A_l)$, 从而$k+l=2022$. 不妨设$1\leqslant k\leqslant 1010$. 由$PA_l=A_kP$计算可知, P形如$\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}$. 从而$\det(P)\leqslant 0$, 矛盾.

   (3) $k_3=1012$.
   - $k_3\leqslant 1012$: 设$\Omega\subset\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$为优美子集. 我们证明$|\Omega|\leqslant 1012$. 首先证明: Ω中不同的矩阵A,B在$\mathbb{C}$上不相似. 否则, 它们在$\mathbb{R}$上相似, 从而存在可逆矩阵$P_0\in\mathbb{R}^{3\times 3}$使得$B=P_0^{-1}AP_0$. 设$P=\det(P_0)^{-\frac{1}{3}}P_0$. 则$P\in\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$且$B=P^{-1}AP$, 矛盾. 其次, 注意到: 如果$c\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$为$A\in\Omega$的特征值, 则$\bar{c}$也是$A$的特征值. 结合(1), 这推出$A$相似于形如
$$\mathrm{diag}(e^{\frac{k\pi i}{1011}},e^{-\frac{k\pi i}{1011}},1),\qquad 0\leqslant k\leqslant 1011$$
的对角矩阵. 这里共有1012个对角矩阵. 所以$|\Omega|\leqslant 1012$.
   - $k_3\geqslant 1012$: 集合$\{\mathrm{diag}(A_k,1):0\leqslant k\leqslant 1011\}$中的矩阵的2022次幂均为$I_3$且两两不相似, 从而为$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$的优美子集. □

2. 所求最大次数为11. 下面证明.
   - 最大次数$\geqslant 11$: 取$A=\sum_{i=1}^{10}E_{i+1,i}$. 则$p_A=x^{11}$.
   - 最大次数$\leqslant 11$: 设$A\in$题中的集合. 记$V=\mathbb{C}^{2022\times 1}$, $T=L_A$, $W=\ker(T)$. 由于$T_W=0$, 所以$p_{T_W}=x$. 由于p_A为$p_{T_W}p_{T_{V/W}}$的因式, 因此为$xf_{T_{V/W}}$的因式. 而$\deg f_{T_{V/W}}=\dim V/W=\mathrm{rank}(A)\leqslant 10$. 所以$\deg p_A\leqslant 11$. □

3. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 假设(1)成立但(2)不成立. 注意到$f_{T_{V/W}}=f_{T_Z}$. 设素多项式p为f_{T_W}和f_{T_Z}的公因式. 通过考虑T_W和T_Z的准素循环分解, 可知存在T-不变分解$W=W_0\oplus R\alpha$, $Z=Z_0\oplus R\beta$满足$p_\alpha=p^r$, $p_\beta=p^s$, $r,s\geqslant 1$. 取$\gamma=\beta+p^{r-1}\alpha$. 则
   - $R\alpha\cap R\gamma=\{0\}$: 设$\delta\in R\alpha\cap R\gamma$. 则存在$f,g\in R$满足$\delta=f\alpha=g\gamma=g\beta+gp^{r-1}\alpha$. 这推出$(f-gp^{r-1})\alpha=g\beta\in R\alpha\cap R\beta=\{0\}$. 从而$p^r|(f-gp^{r-1})$且$p^s|g$. 所以$p^r|f$. 因此$\delta=f\alpha=0$.
   - $R\alpha\oplus R\gamma=R\alpha\oplus R\beta$: "$\subset$"显然. "$\supset$": 只需注意到$\beta=\gamma-p^{r-1}\alpha\in R\alpha\oplus R\gamma$.

   取$Z'=Z_0\oplus R\gamma$. 则$V=W\oplus Z'$. 由于$\gamma\in Z'$但$\gamma\notin Z$, 所以$Z'\neq Z$, 与(1)中唯一性矛盾.

   "(2)$\Longrightarrow$(1)": 假设(2)成立. 则p_{T_W}与$p_{T_{V/W}}$互素.
   - 先证明$W=\mathrm{Ker}(p_{T_W}(T))$. "$\subset$"显然. "$\supset$": 设$\alpha\in\mathrm{Ker}(p_{T_W}(T))$. 则$p_{T_W}$零化$\alpha$, 从而零化$\alpha+W\in V/W$, 即$p_{\alpha+W}|p_{T_W}$. 另外还有$p_{\alpha+W}|p_{T_{V/W}}$. 所以$p_{\alpha+W}=1$. 这推出$\alpha+W$为$V/W$中的零元素, 即$\alpha\in W$.
   - 不变补空间的存在性: 记$Z=\mathrm{Ker}(p_{T_{V/W}}(T))$. 我们验证$V=W\oplus Z$.
     * $W\cap Z=\{0\}$: 设$\alpha\in W\cap Z$. 则$p_\alpha|p_{T_W}$且$p_\alpha|p_{T_{V/W}}$. 这推出$p_\alpha=1$. 所以$\alpha=0$.
     * $V=W+Z$: 设$\alpha\in V$. 取g,h使$gp_{T_W}+hp_{T_{V/W}}=1$. 则$\alpha=gp_{T_W}\alpha+hp_{T_{V/W}}\alpha$. 注意到$gp_{T_W}\alpha\in Z$, $hp_{T_{V/W}}\alpha\in W$. 所以$\alpha\in W+Z$.
   - 不变补空间的唯一性: 设$V=W\oplus Z'$为T-不变分解. 对$\gamma\in Z'$, 设$\gamma=\alpha+\beta$, 其中$\alpha\in W$, $\beta\in Z$. 则$p_{T_{V/W}}\gamma=p_{T_{V/W}}\alpha\in W\cap Z'=\{0\}$. 这推出$p_\alpha|p_{T_{V/W}}$. 又有$p_\alpha|p_{T_W}$. 所以$p_\alpha=1$. 因此$\alpha=0$. 这推出$Z'\subset Z$. 由$\dim Z'=\dim Z$即得$Z'=Z$. □

4. 断言成立. 证明: 记$V=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{x_1,\dots,x_6\}$. 只需证明$\dim V\geqslant 6$. 设$c\in\mathbb{C}$为相应的特征值. 则对每个$x_i$有$cx_i=\sum_{j=1}^6 A_{ij}x_j\in V$. 所以对任意$x\in V$有$cx\in V$. 取$x_0\in V\smallsetminus\{0\}$. 则$x_0,cx_0,\dots,c^5x_0\in V$. 由于$f_A(c)=0$并且$f_A$在$\mathbb{Q}$上不可约, 所以$1,c,\dots,c^5$在$\mathbb{Q}$上线性无关, 因此$x_0,cx_0,\dots,c^5x_0$在$\mathbb{Q}$上线性无关. 这推出$\dim V\geqslant\dim\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{x_0,cx_0,\dots,c^5x_0\}=6$. □