# 北京大学数学学院2019年泛函分析考试试题

考试科目：泛函分析　　　　考试时间：2019年　4月　25日

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1. (15分) 设$M$是$R^n$中的有界闭集，映射$T: M \to M$满足:$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y), \forall x,y \in M, x \neq y$. （1）求证:$T$在$M$中存在唯一的不动点；（2）试举例说明条件“$M$是$R^n$中的有界闭集”不可去掉。

2. (10分) 举例说明存在集合有界但不完全有界。　　正定、齐次、三角

3. (10分) 设$X$是一个线性空间，函数$p: X \to [0,\infty)$满足：(1)$p(x) = 0 \iff x = 0$; (2) $p(\lambda x) = \boxed{|\lambda| p(x)}, \forall x \in X, \lambda \in K$. 求证：$p$是一个范数当且仅当$\{x \in X : p(x) \leq 1\}$是凸的。

4. (10分) 设$X$是$B^*$空间，$X_0$是$X$的线性子空间，若存在$c \in (0,1)$使得

$$\inf_{x \in X_0} \|y - x\| \leq c\|y\| \quad \forall y \in X.$$

$\|$

求证:$X_0$在$X$中稠密。

5. (10分)设$1 \leq p < \infty$.求证：$(\ell^p, \|\cdot\|)$是一个Hilbert空间当且仅当$p = 2$。

6. (15分) 设$C$是$B^*$空间$X$中的一个紧凸集, 映射$T: \boxed{C \to C}$连续, 求证: $T$在$C$上有一个不动点。

? 7. (15分)设$X$是$B^*$空间，$x_1, \cdots, x_n$为$X$中线性无关的组。求证：存在$\varepsilon > 0$使得若$y_1, \cdots, y_n \in X$满足$\|y_i\| < \varepsilon (i = 1, \cdots, n)$，则$x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n$在$X$中也线性无关。

8. (15分) 设$H$是一个Hilbert空间，$a(x,y)$是$H$上的共轭对称的双线性函数，存在$M > 0, \delta > 0$使得

$$\delta\|x\|^2 \leq a(x,x) \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

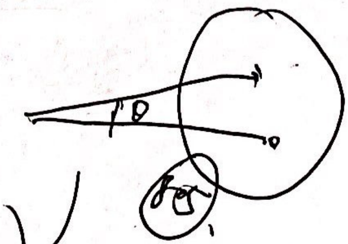
设$u_0 \in H$, $C$是$H$上的一个闭凸子集。求证：函数$x \mapsto a(x,x) - \mathrm{Re}(u_0, x)$ 在$C$上到达最小值，且最小值点$x_0$唯一还满足

$$\mathrm{Re}\left[2a(x_0, x - x_0) - (u_0, x - x_0)\right] \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

$\|x\| = \|x\|_{\ell^p}$ ?

$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$A = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$




$\lambda(x_1 + y_1, \lambda(x_2 + y_2))$