

2018 年春季概率论期末考试

教师：任艳霞

2018 年 6 月 18 日

1. (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率近似公式（用正态分布函数表示）。

2. (10 分) 设 X 是离散型随机变量， Y 是连续型随机变量，且对随机变量 X 满足 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$ ，并且随机变量 Y 有密度函数 $f(y)$ ，且 X 和 Y 独立。问： $X + Y$ 是不是连续型随机变量，如果是，请求出其密度函数；若不是，请给出理由。

3. (10 分) 设汽车保险索赔额是服从指数分布的随机变量。若在有扣除额 d (d 以下不赔付， d 以上扣除 d) 后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？

4. (15 分) 设 (X, Y) 是联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}$$

令 $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$

(1) 证明 X, Z 独立且服从 $N(0, 1)$ 分布；

(2) 求 $(|X|, |Z|)$ 的密度函数；

(3) 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。

5. (10 分) 假设一只蚕产的卵的个数 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个卵能成虫的概率为 p ，且每个卵之间成虫是相互独立的，并设一只蚕产的卵的成虫数为随机变量 η ，问

(1) 求 η 的数学期望；

(2) 求 $E(\xi|\eta)$ 。

6. (15 分) 设随机变量列 $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ 满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$$

(1) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 以 L^2 收敛（均方收敛）到 0；

(2) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 依概率收敛到 0；

(3) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 不几乎处处收敛到 0。

7. (10 分) 现设有股票价格模型如下: 假设当前时间的股票价格为 s , 则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us , 以概率 $1-p$ 下跌为 ds . 记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格.

(1) 请自己构造随机变量, 并用其来表示 W_n ;

(2) 证明存在常数 c , 使得 $\frac{1}{n} \log W_n$ 几乎处处收敛到, 这里 \log 是以 10 为底的对数;

(3) 给定 $u = 1.012, d = 0.990, p = 0.4$, 请给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似公式 (用正态分布函数表示).

($\log 1.012 = 0.005, \log 0.990 = -0.004, \log 1.3 = 1.14$)

8. (20 分) 称随机变量是对称分布的, 若

$$P(X < -x) = P(X > x), \quad \forall x \geq 0$$

(1) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 和 $-X$ 是同分布的;

(2) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\varphi(x)$ 是实值偶函数;

(3) 假设存在某个对称分布的随机变量 X 的特征函数为 $\phi(x) = e^{-\sqrt{|x|}}$, 证明 $E(X^2) = \infty$

(4) 设随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布, 且特征函数为 $\phi(x)$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 求实数列 $\{a_n\}$ 使得 $\frac{S_n}{a_n}$ 依分布收敛到一个非常值的随机变量, 并给出极限分布.