数学模型 HW 1

Due Date: March 5, 交于助教办公室.

2019 年 2 月 18 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 考虑如下的变化率模型

$$\frac{dA}{dt} = -A + B, \quad \frac{dB}{dt} = A - B,$$
$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0.$$

I. 求 $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbb{R}^2$，使得模型中的变化率函数在 $(\bar{A}, \bar{B})$ 的取值为 0, 而且 $\bar{A} + \bar{B} = A_0 + B_0$.

II. 证明当 $x > 0$ 时，$\ln x + \frac{1}{x} - 1 > 0$，并用它来证明，$t \geq 0$时

$$A \ln\left(\frac{A}{\bar{A}}\right) + B \ln\left(\frac{B}{\bar{B}}\right) \geq 0.$$

III. 令 $G(t) = A(1 + \ln A) + B(1 + \ln B)$, 证明

$$\frac{dG}{dt} \leq 0.$$

2. 考虑一维空间的的 viscous Burgers' equation

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

I. 如果要把它写成守恒律（conservation law）的形式，通量函数是什么？

II. 考虑著名的Hopf-Cole Transformation

$$u(x,t) = -a \frac{\partial}{\partial x} \log \phi(x,t).$$

证明$a = 2\mu$时候，ϕ满足

$$\frac{1}{\phi}\phi_t - \mu \frac{1}{\phi}\phi_{xx} = g(t)$$

这里$g(t)$一个t的任意函数。

3. I. 对于一般的经典哈密顿量$\mathscr{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$（换句话说不再有 $\mathscr{H} = T + V$ 的假设，但关于 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 充分光滑），证明

$$\frac{d}{dt} f(t, \boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)) = 0.$$

II. 对于如下刘维尔方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} - \nabla V(\boldsymbol{q}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0,$$

如果f只在相空间的有界的区域内不为0，证明

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m}+V(\boldsymbol{q})\right)f(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{p}=0.$$

4. 对于空间一维的薛定谔方程，

I. 证明

$$\frac{d}{dt}\int|u(x,t)|^2dx=0.$$

为了简化证明，我们假设$u(x,t)$只在有界的空间区域内不为0.

II. 令 $\rho(x,t)=|u(x,t)|^2$，可以利用薛定谔方程推出一个守恒律的形式

$$\rho_t+(J)_x=0.$$

求 J 的表达式。