

数学分析期中考试 (回忆版)

授课教师: 王冠香

2024 年 4 月 15 日

Problem 1 (10') 计算:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) e^{\frac{k\pi}{n}}$$

Problem 2 (10') 讨论级数的敛散性与绝对收敛性:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^2 \arctan \sqrt{n}}{n^2 (n + (-1)^n)^p}$$

其中 $p \in \mathbb{R}$.

Problem 3 (7') 计算定积分:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

Problem 4 (8') $f(x)$ 以 T 为周期, 并且可积, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_n^{n+T} \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

Problem 5 (3'+5')

(1) 将级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 重排, 使其值为 $\ln 6$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, $c_n = \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}, d_n = \sum_{i=1}^n a_i b_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n b_i$. 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n a_i \sum_{j=n+2-i}^n b_j = 0$, 并且此时有 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

Problem 6 (50') 共 8 小题, 懒得打字了.

(7) $f(x), g(x) \in R[a, b], \forall b > a$, 且 $g(x) \geq 0, x \in [a, +\infty), m \leq f(x) \leq M$, 则 $\exists \mu \in [m, M]$ s.t.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

(8) $f(x) \in C[a, b], g(x) \in R[a, b], \forall b > a$, 且 $g(x) \geq 0, x \in [a, +\infty)$, 则 $\exists x_0 \in [a, +\infty)$, s.t.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx = f(x_0) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Problem 7 (7') 设 $f(x) \in BV[a, b] \cap C[a, b]$. 则对 $[a, b]$ 的任意分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 记 $\lambda_\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. 则有 $\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda_\Delta \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta)$.