

# 2017 春常微分方程期中考试

April 22, 2017

1. (30 分) 解下列微分方程:

(1)  $x^2 y' - \cos 2y = 1, \quad y(+\infty) = \frac{9\pi}{4};$

(2)  $y dx - x dy = 2x^3 \tan \frac{y}{x} dx;$

(3)  $y^2(y'^2 + 1) = 1.$

2. (10 分) 求方程  $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$  的周期解.

3. (20 分) 已知函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可导, 且

$$\int_1^{xy} f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt, \quad x, y > 0.$$

若  $f(1) = 3$ , 求  $f(x)$ .

4. (15 分) 证明方程

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$$

的每一条积分曲线都有两条水平渐近线.

5. (15 分) 是否存在连续可微函数  $f$ , 使得  $y = \sin x$  和  $y = x - \frac{x^3}{6}$  均为方程

$$y'' = f(x, y, y')$$

的解? 若存在, 试构造; 若不存在, 说明理由.

6. (10 分) 证明初值问题

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - y^3, \quad y(x_0) = y_0$$

的解在  $x_0 \leq x < +\infty$  上存在.