

北京大学  
2024–2025 学年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132331 班号: 2 教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2024 年 10 月 29 日 10:10 — 12:00.
  - 总分为 100 分.
  - 课程和作业中的结论可以直接使用.
  - 符号  ${}^t \mathbf{A}$  代表矩阵  $\mathbf{A}$  的转置,  $\gcd$  代表最大公因数.
- 

**1. (10 分)** 设  $p$  为素数, 考虑有限域  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  上的多项式环  $\mathbb{F}_p[X]$ .

(i) 设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  有  $p$  进制展开  $n = \sum_{k \geq 0} a_k p^k$ , 其中  $a_k \in \{0, \dots, p-1\}$ , 至多有限项非零; 回忆到这些  $a_0, a_1, \dots$  由  $n$  唯一确定. 证明  $\mathbb{F}_p[X]$  中的等式

$$(X+1)^n = \prod_{k \geq 0} (X^{p^k} + 1)^{a_k}.$$

解答. 应用特征  $p$  时的性质  $(X+1)^{p^k a_k} = (X^{p^k} + 1)^{a_k}$ , 对所有  $k$  相乘.

(ii) 设  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  有  $p$  进制展开  $n = \sum_{k \geq 0} a_k p^k$ ,  $m = \sum_{k \geq 0} b_k p^k$ . 基于 (i) 证明二项式系数  $\binom{n}{m} := \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$  (当  $n < m$  时定义为 0) 满足同余式

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{k \geq 0} \binom{a_k}{b_k} \pmod{p}.$$

解答. 考虑  $X^m$  在  $\prod_k (X^{p^k} + 1)^{a_k} = \prod_k (\sum_{h_k=0}^{p-1} \binom{a_k}{h_k} X^{h_k p^k})$  中的系数, 以及  $m$  的  $p$  进制展开的唯一性.

**2. (20 分)** 对于下列的  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \in \mathbb{Q}^3$ , 求出一个极大线性无关子集.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

所以  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$  等都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

3. (20 分) 在有理数域  $\mathbb{Q}$  上求下列矩阵的逆矩阵:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解答. 以消元法计算. 逆矩阵依序是  $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. (10 分) 记  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ , 记  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$  为  $\mathbb{C}$  中包含  $\mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2}$  和  $\sqrt{5}$  的最小子环. 已知  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  是  $\mathbb{C}$  的子域 (作业内容).

- (i) 以复数乘法让  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$  成为  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -向量空间. 证明  $1, \sqrt{5}$  是此向量空间的一组基.
- (ii) 用复数乘法让  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$  成为  $\mathbb{Q}$ -向量空间. 证明  $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$  是一组基.

提示. 可用课程中关于纯量限制与基的结论: 若  $F$  是域  $E$  的子域,  $B$  是  $E$ -向量空间  $V$  的基,  $C$  是  $E$  作为  $F$ -向量空间的基, 则  $\{cb : (b, c) \in B \times C\}$  是  $V$  作为  $F$ -向量空间的基.

解答. 首先须验证  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{5} + \mathbb{Q}\sqrt{10}$ .

对于 (i), 观察到  $1$  和  $\sqrt{5}$  生成  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$  (作为  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -向量空间), 故维数  $\leq 2$ . 如果维数 = 2, 则  $1$  和  $\sqrt{5}$  成基; 如果维数 = 1 则  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , 从而存在  $a, b \in \mathbb{Q}$  使得  $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$ , 但两边取平方易见此无可能.

对于 (ii), 用  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  以  $1, \sqrt{2}$  为基和 (i) 的结论来推导.

5. (15 分) 设  $A \in M_{m \times n}(F)$ , 其中  $F$  是域.

- (i) 证明  $A$  的秩  $\leq 1$  当且仅当存在列向量  $b \in F^m$  和  $c \in F^n$  使得  $A = b \cdot {}^t c$  (仅作出本问得 8 分).
- (ii) 推而广之, 对于  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , 证明  $A$  的秩  $\leq r$  当且仅当存在  $B \in M_{m \times r}(F)$  和  $C \in M_{r \times n}(F)$  使得  $A = BC$ .

解答. 对于 (ii), 将  $A$  分解成列向量  $(v_1 | \dots | v_n)$ , 将  $B$  分解成列向量  $(b_1 | \dots | b_r)$ , 并且记  $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$ ; 等式  $A = BC$  等价于

$$v_i = \sum_{k=1}^r c_{ki} b_k$$

对所有  $1 \leq i \leq n$  成立; 当  $A$  给定, 存在这样的  $B$  和  $C$  因此等价于  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  可由  $r$  个元素生成. 代入秩的定义.

6. (10 分) 记  $H$  为所有函数  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  对函数的逐点加法和乘法构成的  $\mathbb{R}$ -向量空间, 函数变元记为  $x$ . 证明  $H$  的元素  $e^{1898x}, \dots, e^{2024x}$  线性无关.

**解答.** 方法多种. 譬如假设有线性关系式  $\sum_{k=1898}^{2024} p_k e^{kx} = 0$ , 则因为多项式  $\sum_k p_k X^k$  若非零则根数有限, 而指数函数可以取无穷多个值, 故必有  $\forall k, p_k = 0$ . 另一种方法则是考虑指数函数的增长速度, 逐步论证  $p_{2024} = 0, \dots, p_{1898} = 0$ .

7. (15 分) 设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , 命  $\zeta = e^{2\pi i/n}$ .

(i) 定义  $f = \prod_{k=1}^n (1 + X^k)$ , 展开后记为  $\sum_{j \geq 0} a_j X^j$ . 证明

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\zeta^j) = \sum_{j \geq 0} a_{jn}.$$

**解答.** 对  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} a_k \zeta^{kj}$  换序求和. 对所有  $k \geq 0$ , 论证  $\sum_{j=1}^n \zeta^{kj}$  在  $n \mid k$  时为  $n$ , 其它情形为 0.

(ii) 对所有  $j \geq 1$ , 命  $d = n/\gcd(j, n)$ , 研究  $X^d - 1$  的分解以推导

$$(1 + \zeta^j)(1 + \zeta^{2j}) \cdots (1 + \zeta^{dj}) = \begin{cases} 2, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶,} \end{cases}$$

$$f(\zeta^j) = \begin{cases} 2^{n/d}, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶.} \end{cases}$$

**解答.** 首先,  $d$  的定义相当于说  $\zeta^j$  是  $d$  次本原单位根. 对  $X^d - 1 = (X - \zeta^j) \cdots (X - \zeta^{dj})$  代入  $X = -1$  得到第一部分. 周期之故,  $f(\zeta^j)$  是以上乘积的  $n/d$  次幂, 故  $f(\zeta^j)$  在  $2 \nmid d$  时为  $2^{n/d}$ , 在  $2 \mid d$  时为 0.

(iii) 对所有  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  定义  $\varphi(d)$  为满足  $1 \leq h \leq d$  并且和  $d$  互素的正整数  $h$  的个数. 在前两问的基础上证明

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 中元素和为 } 0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{ 的子集个数}) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ 奇}}} \varphi(d) 2^{n/d};$$

此处的子集容许为空集, 其元素和定义为  $0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ .

**解答.** 展开  $f$  可知  $a_k$  是  $\{1, \dots, n\}$  中元素和为  $k$  的子集个数, 故  $\sum_{j \geq 0} a_{jn}$  即欲证等式的左项. 根据 (i) 和 (ii), 这等于

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ 奇}}} C_d 2^{n/d},$$

其中  $C_d$  是使得  $\gcd(j, n) = n/d$  的  $j \in \{1, \dots, n\}$  的个数; 这般的  $j$  写作  $j = \frac{n}{d} \cdot j'$ , 其中  $1 \leq j' \leq d$  与  $d$  互素, 故  $C_d = \varphi(d)$ .