期末考试——测度论（2020 年春季）

2020 年 6 月 17 日

答题须知. 考试时长 2.5 小时。请自主选择 6 月 17 日至 18 日的 2.5 小时连续时间进行考试。考试为闭卷，请勿使用任何书本、笔记等参考资料。请自主完成所有题目，不要与他人分享试题、解题方法。考试结束后，请分别上传每一道题目的解答，避免上传压缩文件。

1. (10 分) 定义 $X=\mathbb{R}^2$ 上的集合系 $\mathscr{K}=\{((a,b]\times(e,f])\cup((a,c]\times(d,e]):-\infty<a\le b\le c<\infty,-\infty<d\le e\le f<\infty\}$。

   (a) 举例说明 $\mathscr{K}$ 并不是一个 π 系。

   (b) 求 $l(\mathscr{K})$。

2. (15 分)

   (a) 请找到一个集合 X，X 上的一个半环 $\mathscr{Q}$ 以及可测空间 $(X,\sigma(\mathscr{Q}))$ 上的测度 μ 和 ν 使得 μ,ν 在 $\mathscr{Q}$ 上相等，在 $\mathscr{Q}$ 上是 σ-有限的，但在 $\sigma(\mathscr{Q})$ 上 $\mu\neq\nu$。

   (b) 假设 $\mathscr{E}$ 是 X 上的集合系，且 $\emptyset\in\mathscr{E}$。假设 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数，$\mu(\emptyset)=0$。写出由 μ 生成的外测度 τ 的定义域和表达式。

   (c) 假设 $\mathscr{S}$ 是 X 上的半环，$X\in\mathscr{S}$。μ 是 $\sigma(\mathscr{S})$ 上的测度。假设 $\mu|_{\mathscr{S}}$ 是有限的测度，τ 是由 μ 生成的外测度，τ' 是由 $\mu|_{\mathscr{S}}$ 生成的外测度，证明 $\tau=\tau'$。

3. (10 分) 假设有测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$。对 $A,B\in\mathscr{F}$，定义函数

   $$\omega(A,B)=\int_X |I_A-I_B|d\mu.$$

   如果我们不区分 $\mathscr{F}$ 中仅相差零测集的集合（即把 $\mathscr{F}$ 看成等价类的集合），证明 $(\mathscr{F},\omega)$ 是完备的距离空间。另假设 $f\in L^1(\mu)$，证明集合函数 $H(A)=\int_A f(x)d\mu$ 是 $(\mathscr{F},\omega)$ 上的连续映射。

4. (15 分) 已知 $f_1,...,f_n$ 是 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的一些可测函数。假设 $p_1,\dots,p_n,r\ge 1$，并且 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1/r$。证明：$\|f_1\cdots f_n\|_r\le\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}$。

5. (14 分) 假设 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上一致可积的随机变量，证明

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

6. (16 分) 假设 $C > 0$。对 $0 \leq x, y \leq 1$，我们定义

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y \frac{C}{1-u+v} dv du.$$

   (a) 找到 C 的值使得 $F(1,1) = 1$，并且证明 F 可以延拓到 $\mathbb{R}^2$ 上使得它是一个 2 元分布函数。

   (b) 把第一部分中的 F 的延拓记为 $\tilde{F}$。给定 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机向量 $(X, Y) \sim \tilde{F}$，求 Y 关于 X 的给定值的条件期望。

7. (10 分) 假设在 $(X, \mathscr{F})$ 上有 σ-有限的测度 μ，ν，并且 $\mu \ll \nu$。已知 μ 关于 ν 的 Radon-Nikodym 导数是 f。证明 $\nu \ll \mu + \nu$，并且求出 $d\nu/d(\mu+\nu)$。

8. (10 分) 假设 φ 和 μ 分别是可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的 σ-有限符号测度和 σ-有限的测度。假设 φ 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数是 f，并且 f 在每个 $x \in X$ 的函数值是已知的。请描述 μ 关于 φ 的 Lebesgue 分解。