北京大学数学学院期中试题

考试科目 高等代数Ⅰ　 考试时间 2017 年 11 月 8 日

一.　1）(10 分) 叙述向量空间 K^n 的线性子空间的维数和基底的定义：

若 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是 K^n 的子空间 V 中的一组向量，满足以下两条件

(1)　$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关；

(2)　$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 能线性表出子空间 V 的每个向量；

则称 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是子空间 V 的一组基， 称基底包含的向量个数 r 为子空间 V 的维数 (V 的不同基底包含的向量个数是一样的)。

2）(10 分) 已知向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的秩为 r，且部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的能线性表出 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$. 证明: $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关.

证：若部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性相关，则 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的秩 $<r$.

另一方面，部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 能线性表出 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$，故

$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的秩 ³ $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的秩 $=r$，矛盾!

故 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关.

二. (10 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

解：记此n阶行列式为D_n.

我们用数学归纳法证明 $D_n = 1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$.

显然，$D_1 = 1 + a^2$，此时命题成立；

以下假设公式对低于n阶的行列式都成立，考察n阶行列式的情况.

对D_n的第一列作代数余子式展开：

$$D_n = (1+a^2)D_{n-1} + (-1)a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2)D_{n-1} + (-1)\,a\,a\,D_{n-2}$$

$$= (1+a^2)(1+a^2+\dots+a^{2n-2}) + (-1)(a^2+a^4+\dots+a^{2n-2})$$

（归纳假设）

$$= 1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}.$$

故此公式对任意n阶行列式成立。

三.（16分）设列向量 $\alpha_k = [1 \quad k \quad k^2 \quad k^3]^T$，1£k£5.

1) 用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$能否线性表出$\alpha_4$？若可以，求所有表出系数；

2) 求向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_5$线性表出$\alpha_5$的所有表出方式.

解：1) 方阵 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (4-1)(4-2)(4-3)(3-1)(3-2)(2-1) \neq 0.$$

故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关. 特别地，$\alpha_4$不能被$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

2) 记 $A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$，$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$.

问题等价于求线性方程组 $AX = \alpha_5$ 的解集.

显然， X＝[0 0 0 0 1] 是此方程组的一个特解.

注意到 A 秩为 4，齐次方程组 AX＝0 解空间的维数为 5 － 4＝1 .

设 B 是在 A 的下方再加上一行得到的 5 级方阵 . 则 B 最后一行

5 个元素的代数余子式为

$$A_{51}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(5-2)(5-3)(5-2)(4-2)(4-3)(3-2)=12\ ;$$

$$A_{52}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&3^2&4^2&5^2\\1&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=-(5-1)(5-3)(5-4)(4-1)(4-3)(3-1)=-48\ ;$$

$$A_{53}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&5\\1&2^2&4^2&5^2\\1&2^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(5-1)(5-2)(5-4)(4-1)(4-2)(2-1)=72\ ;$$

$$A_{54}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&5\\1&2^2&3^2&5^2\\1&2^3&3^3&5^3\end{vmatrix}=-(5-1)(5-2)(5-3)(3-1)(3-2)(2-1)=-48\ ;$$

$$A_{55}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=(4-1)(4-2)(4-3)(3-1)(3-2)(2-1)=12\ ;$$

由于向量 $[A_{51}\cdots A_{55}]=12[1\ {-4}\ 6\ {-4}\ 1]$ 与 A 的行向量都正交， 故

$[1\ {-4}\ 6\ {-4}\ 1]^T$ 构成 AX＝0 解空间的基. 方程组 $AX=\alpha_5$ 的一般解为

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-4k\\6k\\-4k\\1+k\end{bmatrix},\quad \text{" } k\hat{\text{I}}K .$$

四．（30 分）已知矩阵 A 的列向量依次为$\alpha_1,\dots,\alpha_5$，且对 A 作若干次初等

行变换，可以得到矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&1&1&4&4\\0&1&-2&1&1\\2&0&2&1&2\\2&1&0&2&3\end{bmatrix}$.

1) 求 A 的行简化阶梯型矩阵 J；

2) 求 A 列向量组的一个极大无关组，并用此极大无关组表出 A 的每个列向量;

3) 求 A 行空间的一组基，并确定当 a, b 取何值时，向量

$$\beta=[1+a \quad a \quad a+b \quad b \quad 1+b]$$

落在 A 的行空间里，写出此时β在所求 A 行空间基底下的坐标;

4) 求齐次方程组 $AX=0$ 解空间的一组基；

5) 将 A 写成 EC 的形式，其中 E 是列满秩的矩阵，C 是行满秩的矩阵.

解：1) 由于 B 与 A 的简化阶梯型矩阵相同，故对 B 作行变换

$$\begin{bmatrix}3&1&1&4&4\\0&1&-2&1&1\\2&0&2&1&2\\2&1&0&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&-2&1&1\\0&0&0&-3&0\\0&1&-2&1&2\end{bmatrix}\to J=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得到 A 的简化阶梯型 J.

2) 简化阶梯型 J 的主元在第 1, 2, 4 列，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 构成 A 列向量组的一个极大无关组，且由 J 列向量的表出关系可以看出

$$\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2,\qquad \alpha_5=\alpha_1+\alpha_2;$$

3) 简化阶梯型 J 的三个非零行

$$\beta_1=[\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\ ],$$
$$\beta_2=[\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1\ ],$$
$$\beta_3=[\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\ ]$$

是 A 行空间的一组基.

若向量 $\beta=[1+a \quad a \quad a+b \quad b \quad 1+b]$ 落在 A 的行空间里，

比较第 1, 2, 4 位置分量，必有 $\beta=(1+a)\beta_1+a\beta_2+b\beta_3$.

再比较第 3, 5 分量, 得

$$(1+a)+a(-2)+b0=a+b,\quad (1+a)+a+b0=1+b.$$

由此解得 $a=1/4$， $b=1/2$.

反之, 当 $a=1/4$, $b=1/2$ 时, 确有 $\beta=(1+a)\beta_1+a\beta_2+b\beta_3$.

此时β落在 A 行空间里, β在基β_1,β_2,β_3下的坐标是 $[5/4\quad 1/4\quad 1/2]^T$.

4) $AX=0$ 解的公式为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3-x_5 \\ x_2 = 2x_3-x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases},\quad x_3, x_5 \text{ 为自由变量}.$$

$$\text{通解为}\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_3-x_5 \\ 2x_3-x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5) A 可写成

$$A=EC=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 E 是由 A 的主元列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$排成, E 列满秩;

C 是由 A 的简化阶梯型 J 的非零行排成, C 行满秩

五.（14 分）设$\alpha_1,\dots,\alpha_r$是R^m中一组线性无关的列向量, $\beta_1,\dots,\beta_s$是R^n中一组线性无关的列向量. 证明: 若有系数 $c_{ij}\in R, 1\le i\le r, 1\le j\le s$,

使得 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=0$, 则每个系数$c_{ij}$必须都取0.

证: 记 $\gamma_i=c_{i1}\beta_1+\dots+c_{is}\beta_s$, $1\le i\le r$. 于是

$$\alpha_1\gamma_1^T+\dots+\alpha_r\gamma_r^T=0.$$

若有某个系数 $c_{kl}\neq 0$, 则由$\beta_1,\dots,\beta_s$线性无关可推得 $\gamma_k\neq 0$.

不妨设γ_k的第 t 个分量不为零．记γ_i的第 t 个分量为$b_i, 1 \le i \le r$，

则 $b_1, \dots, b_r$ 不全为零．另一方面，矩阵 $\alpha_1\gamma_1^T + \dots + \alpha_r\gamma_r^T = 0$．

故其第 t 列为 0， 即 $b_1\alpha_1 + \dots + b_r\alpha_r = 0$．这与$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性无关

矛盾！

六．(10 分) 设ε是任意一个固定的正数. 证明: 任给一个 n 级矩阵 A，总存在

一个对角矩阵 D，其每个对角元要么为ε，要么为 $-\varepsilon$，使得 $|A + D| \ne 0$．

证: 对 A 的阶数 n 应用数学归纳法.

当 A 是 1 阶矩阵时， $A + \varepsilon$， $A - \varepsilon$ 总有一个非零. 命题成立.

以下假设命题对 n - 1 阶矩阵成立. 考察 n 级矩阵 $A = [a_{ij}]$的情况:

记 A_1 是划去 A 的第一行和第一列，剩下的元素排成的 n - 1 级子阵.

由归纳假设，存在 n - 1 级对角矩阵 D_1，其每个对角元为 ε 或 $-\varepsilon$，

使得 $|A_1 + D_1| \ne 0$．

记 n 级矩阵 $D(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$．将 $|A + D(x)|$ 按第一行作代数余子式

展开，得

$$|A + D(x)| = (x + a_{11})\,|A_1 + D_1| + c,$$

这里 c 是$A + D(x)$ 的第一行除 (1, 1) 元外其余元素 $a_{12}, \dots, a_{1n}$与

各自代数余子式的乘积之和，不含 x．由于$|A_1 + D_1| \ne 0$，总可取

$x = \varepsilon$ 或 $-\varepsilon$，使得 $|A + D(x)| \ne 0$．命题得证.