北京大学数学学院期中试题

2024－2025 学年第一学期

考试科目 高等代数　　考试时间 2024 年 11 月 7 日

一． (12 分) 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

解：原式 $=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 0 & x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1+\cdots+x_ny_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

二． (15 分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 R^{n} 中的两个线性无关组.

证明：向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关 当且仅当

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}.$$

证: 1) 充分性. 设 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}$, 欲证明

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

设有线性组合

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+\ l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s=0\,.$$

我们下面证明系数$k_1,\cdots,k_r\,,l_1,\cdots,l_s$都必须为$0$.

记 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=(-l_1)\beta_1+\cdots+(-l_s)\beta_s$. 容易看出

$$\alpha\in\langle\,\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,\rangle\cap\langle\,\beta_1,\cdots,\beta_s\,\rangle=\{\,0\,\}.$$

故$\alpha=0$. 于是有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0\,,\ l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s=0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的无关性与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$的无关性推出 $k_1,\cdots,k_r\,,l_1,\cdots,l_s$ 都等于0.

由此推出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

2) 必要性. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 证明

$$\langle\,\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,\rangle\cap\langle\,\beta_1,\cdots,\beta_s\,\rangle=\{\,0\,\}.$$

任意 $\alpha\in\langle\,\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,\rangle\cap\langle\,\beta_1,\cdots,\beta_s\,\rangle$都可写成两种组合的形式

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s\,,\ k_i\,,l_j\in\mathrm{R}\,.$$

于是有线性组合

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+(-l_1)\beta_1+\cdots+(-l_s)\beta_s=0\,.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关可推出 $k_i=l_j=0\,,\forall\,i\,,j$.

故必有 $\alpha=0$. 于是 $\langle\,\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,\rangle\cap\langle\,\beta_1,\cdots,\beta_s\,\rangle=\{\,0\,\}$.

三. (15 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} b_n & x & 0 & \cdots & 0\\ b_{n-1} & -1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0\\ b_2 & \vdots & \ddots & \ddots & x\\ x+b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{bmatrix}$.

1) 将 A 写成一个上三角矩阵与一个下三角矩阵的乘积;

2) 求 A 的行列式.

解:

1) A =

$$\begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & -x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ x^2 + b_1x + b_2 & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ x + b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2) $|\mathrm{A}| = (-1)^{n-1}(x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$.

四. (12 分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathrm{R^n}$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 证明: 存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_1 + k\beta_1,\cdots,\alpha_r + k\beta_r$ 线性无关.

证: 由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关知矩阵 $[\beta_1\cdots\beta_r]$ 有 r 阶非零子式. 不妨设 $[\beta_1\cdots\beta_r]$ 的前 r 行构成非零子式. 用 $\widetilde{\beta_i}$ (类似地, $\widetilde{\alpha_j}$) 表示 β_i $\left(类似地, \alpha_j\right)$的前 r 个分量构成的缩短向量. 则有

$$\left|\widetilde{\beta_1}\ \ \widetilde{\beta_2}\ \cdots\ \widetilde{\beta_r}\right| \neq 0\,.$$

矩阵 $[\alpha_1 + k\beta_1\ \cdots\ \alpha_r + k\beta_r]$ 的前 r 行构成的子式

$$\begin{aligned} f(k) &= \left|\widetilde{\alpha_1} + k\,\widetilde{\beta_1}\ \ \widetilde{\alpha_2} + k\,\widetilde{\beta_2}\cdots\ \ \widetilde{\alpha_r} + k\,\widetilde{\beta_r}\right| \\ &= \left|\widetilde{\alpha_1}\ \ \widetilde{\alpha_2} + k\,\widetilde{\beta_2}\ \cdots\ \ \widetilde{\alpha_r} + k\,\widetilde{\beta_r}\right| \\ &\qquad + k\left|\widetilde{\beta_1}\ \ \widetilde{\alpha_2} + k\,\widetilde{\beta_2}\cdots\ \ \widetilde{\alpha_r} + k\,\widetilde{\beta_r}\right| \\ &= \cdots = \left|\widetilde{\beta_1}\ \ \widetilde{\beta_2}\ \cdots\ \widetilde{\beta_r}\right| k^r + \cdots + \left|\widetilde{\alpha_1}\ \ \widetilde{\alpha_2}\ \cdots\ \widetilde{\alpha_r}\right| \end{aligned}$$

按一列列拆开后是k的$r \geq 1$次多项式, 在R上至多只有 r个不同的根. 故只要k取以上r个根以外的值(有无穷多种取法), 都可保证

$$\left| \widetilde{\alpha_1} + k\, \widetilde{\beta_1} \ \ \widetilde{\alpha_2} + k\, \widetilde{\beta_2} \cdots \ \ \widetilde{\alpha_r} + k\, \widetilde{\beta_r} \right| \neq 0 .$$

此时$\alpha_1 + k\,\beta_1, \cdots, \alpha_r + k\,\beta_r$都线性无关.

五. (24分) 已知矩阵$A = [\,\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_5\,]$与$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$的行向量组等价, 且 $\alpha_2 = [\,2 \quad 1 \quad 2 \quad 1\,]^T$, $\alpha_5 = [\,7 \quad 3 \quad 7 \quad 3\,]^T$. 又知方程组 $AX = \beta$ 的一个解为 $X = [\,1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1\,]^T$, 这里设 $\beta = [\,7 \quad 5 \quad 7 \quad 4\,]^T$.

1) 写出矩阵$A = [\,\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_5\,]$ 及其行简化阶梯型矩阵J;

2) 求A行空间的一组基, 并确定当a, b取何值时, 向量 $[\,5 \ \ 3 \ \ 6 \ \ a \ \ b\,]$ 落在A的行空间里;

3) 求方程组$AX = \beta$ 的所有解;

4) 求所有矩阵 B, 使得 $A = [\,\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_5\,]\,B$.

解:

1) 矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$的简化阶梯型为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A = [\,\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_5\,]$ 是4×5矩阵, A的行向量组与矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$的行向量组等价, 故A的简化阶梯型为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由此还看出 A 的列向量间有关系

$$\alpha_3=2\alpha_2\,,\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2\,.$$

又由 $AX=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_5=\beta$ 解得

$$\alpha_1=\beta+\alpha_2-\alpha_5=[\,2\quad 3\quad 2\quad 2\,]^T.$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\\2&2&4&8&7\\2&1&2&5&3\end{bmatrix}.$$

2) A 简化阶梯型的非零行，即 $\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$ 的三个行向量构成 A 行空间(最好的)一组基.

若向量 $\gamma=[\,5\ \ 3\ \ 6\ \ a\ \ b\,]\in$ A 行空间，则 γ 在以上基底下的坐标必为 $[\,5\ \ 3\ \ b\,]^T$ (比较第 1, 2, 5 个分量)，即

$$\gamma=[\,5\ 3\ \ b\,]\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=[\,5\ \ 3\ \ 6\ \ 14\ \ b\,].$$

于是有 $a=14$，$b\in\mathrm{R}$ 可任意取值.

3) 由题设，$AX=\beta$ 的一个特解为 $X=[\,1\quad 1\quad -1\quad 0\quad 1\,]^T$.

导出组 $AX=0$ 的一组基础解系为 $\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$

故 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的一般解为 $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

4) 令 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，则有 $\mathbf{A}=[\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_5\,]\,\mathbf{B}$.

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关，B 唯一.

六. (10 分) 设 A_{ij} 是行列式 $\mathrm{D}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 中 (i,j)-元的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&x_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&x_n\\x_1&\cdots&x_n&y\end{vmatrix}=\mathrm{D}y-\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{A}_{ij}\,x_ix_j\,.$$

证: 将行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&x_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&x_n\\x_1&\cdots&x_n&y\end{vmatrix}$ 按最后一行展开，再按最后一列展开.

七. (12分) 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W， B 的列空间为 V. 证明:

$$\mathrm{B}\text{ 秩}=\mathrm{AB}\text{ 秩}\quad\text{当且仅当}\quad \mathrm{V}\cap\mathrm{W}=\{0\}\,.$$

证: 注意子空间的交还是线性子空间. 我们证明以下更强的结论:

$$\mathrm{B}\text{ 秩}=\mathrm{AB}\text{ 秩}\ +\dim(\mathrm{V}\cap\mathrm{W})\,.$$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是子空间 $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$ 的一组基. 将其扩充成 B 的列空间

V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_t$. 于是 B 的秩 $= r+t$.

我们只需证明:

$$AB \text{ 秩 } = t.$$

由于 B 的列向量组与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价，AB 的列向量组与向量组 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r,A\beta_1,\cdots,A\beta_t$ 也能相互表出对方. 又由于 $A\alpha_1=\cdots=A\alpha_r=0$，故 AB 的列组与 $A\beta_1,\cdots,A\beta_t$ 等价.

特别地，AB 秩 $=A\beta_1,\cdots,A\beta_t$ 的秩. 问题最后归结为证明:

$$A\beta_1,\cdots,A\beta_t \text{ 线性无关.}$$

设有系数 $k_1,\cdots,k_t$，使得

$$k_1A\beta_1+\cdots+k_tA\beta_t=0.$$

即

$$A(k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t)=0.$$

于是 $k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t\in A$ 的解空间 W. 另一方面，$\beta_1,\cdots,\beta_t\in V$，故 $k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t\in V\cap W$，可表示为 $V\cap W$ 基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的组合

$$k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r,\ l_j\in K.$$

于是有

$$l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r+(-k_1)\beta_1+\cdots+(-k_t)\beta_t=0.$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的无关性可推出 $k_1=\cdots=k_t=0$.

故 $A\beta_1,\cdots,A\beta_t$ 线性无关.

注：设 $\mathcal{A}: X\mapsto AX$ 与 $\mathcal{B}: Y\mapsto BY$ 分别是 R^n 到 R^m 与 R^s 到 R^n 的线性映射，则 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=A$ 的解空间 W，$\operatorname{Im}\mathcal{B}=B$ 的列空间为 V .

复合映射 $\mathcal{AB}: \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{BY}) = \mathbf{ABY}$ 的像空间 $\mathrm{Im}\,\mathcal{AB}$ 维数为 AB 秩.

构造 $\mathrm{Im}\,\mathcal{B}$ 到 $\mathrm{Im}\,\mathcal{AB}$ 的线性映射: $\boldsymbol{\sigma}: \mathbf{X} \mapsto \mathbf{AX}$. 容易看出,

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{Im}\,\mathcal{AB}, \quad \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{Im}\,\mathcal{B} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{V} \cap \mathbf{W}.$$

由线性映射基本定理, 我们有商空间与像空间的线性同构

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{B}/\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\sigma} \cong \mathrm{Im}\,\mathcal{AB}.$$

(此式反映三个空间: B 列空间 V, AB 列空间与 $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ 的关系)

特别地, 有

$$\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{B} = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{AB} + \dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}),$$

即
$$\text{B 秩} = \text{AB 秩} + \dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}).$$