

北京大学工学院2015级常微分方程期中试卷

(本试题共四道大题, 满分100分)

一 填空题 (26分)

- (1) 二阶方程 $x'' + a^2x = 0$ ($a > 0$) 满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 1$ 的解等价于方程组
) 满足初始条件()的解。

(2) 已知函数 $a(t), b(t), f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 函数 $2e^t + te^t, 7e^t + te^t, 5e^t + 2te^t$ 是方
 程

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad (1)$$

的解，则此方程对应的齐次方程的通解可以表示为(

方程(1)的通解可以表示为()。

- ### (3) 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -t^2x - ty + (\sin t)^2 \end{cases}$$

) 个, 其存在区间

满足初始条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ 的解有 ()

为()。

- (4) 已知二阶线性方程

$$x'' - tx' + t^2 x = 0 \quad (2)$$

$\varphi_1(t)$ 是方程(2)满足初始条件 $x(0) = \alpha, x'(0) = 0$ 的解, $\varphi_2(t)$ 是方程(2)满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = \beta$ 的解, 其中 α, β 是两个常数, 则由 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 构成的郎斯基行列式可表示为()。 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 线性无关的充要条件为()。

- (5) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(t)$ 不恒为零, $f(t+1) = f(t)$ 。则方程 $\frac{dx}{dt} + 2x =$
 $f(t)$ 的通解为 ()。上述方程有 () 个以 1 为
 周期的周期解。此方程以 1 为周期的周期解可表示为 ()。

二 (48分) 求解下列方程

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = x + y + 3.$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} - xy = y^2x^3.$$



$$(3) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

$$(4) yy'' - (y')^2 = 0.$$

- (三) (16分) (1) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = 0$ 的通解。
(2) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = e^t(t-1)^2$ 的通解。
(3) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = e^t(t-1)^2$ 满足初始条件 $x(0) = 0, x'(0) = 0$ 的解。

四 (10分) 已知 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个基本解组，其中 $p(t), q(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

- (1) 如果 $\varphi_1(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒不为零，证明函数 $\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加或者严格单调减少。
(2) 证明在 $\varphi_2(t)$ 的两个相邻零点之间存在且仅存在一个 $\varphi_1(t)$ 的零点。

