几何学期中考试参考答案与评分标准

考试日期：2013 年 11 月 16 日。**考试时间**：2 小时。

题 1（25 分） 在平面 Σ 的一个单位正交标架下，给定仿射变换如下：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

请回答：这是不是等距变换？是不是保定向的？它有没有不动点？有没有不变直线？（若有的话请在坐标系中指出）。最后请指出它的具体类型，描述其特征量和造成的变换效果。

• 解：是等距变换（3 分），反定向（3 分），没有不动点（3 分），有唯一的不变直线 $x+2y=0$（6 分），具体类型为滑反射（4 分），其反射轴为 $x+2y=0$（3 分），滑动量为 $2\sqrt{5}$（或平移向量 $(4,-2)$ 也算对，3 分）。

具体求解过程略述如下：先由矩阵为正交阵，判定其为等距；由行列式等于 -1，判定其反定向。求解不动点可发现无解，所以由平面等距变换的分类结果，可立即判定这是一个滑反射。反射轴和滑动量可通过先求解特征值和特征向量，得特征值 1 及其特征方向 $(2,-1)$，特征值 -1 及其特征方向 $(1,2)$，再将平移向量 $(4,-2)$ 分解到这两个方向而得知结果。

题 2（20 分） （1）证明向量运算满足以下恒等式：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{d})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})=0.$$

（2）利用上述恒等式证明：球面三角形 ABC 中从两个顶点 A,B 分别向对边作一条“垂线”，则其交点 H 与 C 的连线垂直于 C 的对边。（这说明球面三角形也有“垂心”。）

• 证：对于第一问，用 Lagrange 恒等式展开各项即得。或用混合积性质，将左边各项改写为

$$((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}+((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}+((\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}.$$

由 Jaboci 恒等式立得结论。

至于第二问，可设球心为 O 点，$OA=\mathbf{a},OB=\mathbf{b},OC=\mathbf{c},OH=\mathbf{d}$。注意到大圆弧 $\overset{\frown}{AH}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 垂直当且仅当 OA,OH 张成的平面与 OB,OC 张成的平面垂直，这又等价于 $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{d})=0$。按此解释，则由第一问结论，两个这样的垂直关系自动导出第三个垂直关系，第二问自动得证。

题 3（15 分） $A_0,A_1,A_2,A_3,B_3,C_3,D_3,D_2,D_1,D_0,C_0,B_0$ 是平面凸四边形边界上顺序排列的 12 个点，其中 A_0,A_3,D_3,D_0 为四顶点，其它点分别是各边上的三等分点。已知其面积等于 2013。用线段 $A_1D_1,A_2D_2,B_0B_3,C_0C_3$ 连结对边上的三等分点，求它们在中间围成的四边形面积。

• 解：只需证明“所求四边形面积总是初始四边形 $A_0A_3D_3D_0$ 面积的 1/9”即可。关键需先注意到 $A_1D_1,A_2D_2,B_0B_3,C_0C_3$ 的交点 B_1,B_2,C_1,C_2 分别是这些线段的三等分点。根据条件，利用向量法或 Thales 定理可知 C_0D_1 平行且等于对角线 A_0D_3 的三分之一，A_1C_3 平行且等于对角线 A_0D_3 的三分之二，

立刻得知 C_1 是线段 A_1D_1, C_0C_3 的三等分点，其余类似。

此后，按类似方法可知所求区域对角线 B_1C_2, B_2C_1 分别平行且等于对角线 A_0D_3, A_3D_0 长度的三分之一，可知命题成立，故所求面积是 $2013/9 = 671/3$。用向量法的语言证明也类似。

对于第一段开头的命题，可先证明“四边形一组对边的各三等分点构成的小四边形，其面积恰为原四边形面积的 1/3”。用向量外积很容易证明这一引理。然后利用上述第一段观察并两次应用这一引理即得结论。

• 评分标准：*只有面积猜对，或列出了直线方程但来不及求交点，只给 1 分；得到了上述 B_1, B_2, C_1, C_2 为三等分点的结论，给 9 分；对此事实没证明，但能够给于此猜测求出面积，给 6 分。*

题 4 (10 分)　设有平面 Σ 上的正方形铺砌，对应于直角坐标系中横坐标或纵坐标为整数的点构成的子集 S。其中各直线交点均称为“顶点”或“格点”。它的一个“对称”定义为一个平面等距变换，将 S 仍然映为 S。试求将它的一个给定顶点 A 映到另一不同顶点 B 的不同对称的个数。

• 解：这种对称的个数为 8。取 A 及上方和右方相邻格点 A_1, A_2。由于所考察的“对称”是等距，这三点必然映到所指定的 B 点及其相邻四格点 B_1, B_2, B_3, B_4 中的两个，并构成等腰直角三角形。注意 A_1 有四种可能的像，之后 A_2 有两种可能的像，故总共有 $4 \times 2 = 8$ 种可能，并且每种可能都对应到一个等距变换，明显地仍然保持点集 S 不变。
另解：可考虑 A 映到 A 的对称的个数，明显等于一个正方形的全体对称个数 8。然后复合上任何一个将 A 映到 B 的保持 S 不变的等距变换 ϕ（例如从 A 到 B 的平移），则恰好对应到题意所求的那些“对称”，而且这是一个可逆的对应（反向对应为 ϕ^{-1}），可知所求对称数仍为 8。

• 评分标准：*大量同学采用笨办法，硬求具体的变换有哪些。这里的麻烦在于，当 B 点取得不同时，不一定有“反射”对称，此外定出明确的旋转中心和滑反射轴也需要功夫，又容易有错觉。这样的做的同学，如果写得有条理，部分结果正确，一般给 2-5 分不等。*

题 5 (15 分)　设 ϕ 是一个空间等距变换，保定向，无不动点。证明它是一个螺旋运动（也即 $\phi = f \circ g$ 是一个平移 f 与一个旋转 g 的复合，且 f 平移方向与 g 的旋转轴平行）。

• 证：先证 ϕ 可以写成一个旋转再复合一个平移。为此，设 $\phi(p) = q \neq p$。取唯一的平移 $\hat{f}$ 满足 $\hat{f}(p) = q$，则 $\hat{g} = \hat{f}^{-1} \circ \phi$ 以 p 为不动点，又仍然是保定向的空间等距变换，故根据课上结论可知 $\hat{g}$ 是一个空间的绕轴旋转，于是 $\phi = \hat{f} \circ \hat{g}$。

如果 $\hat{g}$ 是恒同，结论已证。如果 $\hat{g}$ 是非平凡的旋转，以下再调整旋转和平移的取法。将平移 $\hat{f}$ 分解为两个平移的复合 $f \circ f'$，其中的 f 平移方向与 $\hat{g}$ 的转轴平行，f' 的平移方向与 $\hat{g}$ 的转轴垂直，并不妨设 $\hat{g}$ 转轴就是空间坐标系的 z 轴，易见 $g = f' \circ \hat{g}$ 保持每一点的 z 坐标不变，在 xy 平面上的作用效果是一个旋转复合一个平移。根据平面上保定向变换的性质（或分类），熟知这是绕 xy 平面上另一点的旋转，在全空间的作用效果是绕另一条与 z 轴平行直线的旋转。于是 $\phi = \hat{f} \circ \hat{g} = f \circ f' \circ \hat{g} = f \circ g$ 即为所求。

• 评分标准：*论证出第一步“分解为平移与旋转复合”，得 7 分；接下来将平*

移按与轴平行或垂直进行分解，占 *8* 分。或有用 *4* 个平面反射之复合再进行调整的思路，一般很难说清，得 *3-5* 分。

题 6 (10 分) 平面上一个凸六边形，满足其任一“主对角线”（连接对顶点）与不相邻的任一边平行。试问其是否仿射等价于“正六边形”？如果是，请给出论证。如果不是，请给出附加条件，保证其仿射等价于正六边形，并同样需要给出论证。

• 解：第一问答案“不是”（未必仿射等价），反例很容易构造，例如取一个正三角形，再把每一条边分别向两侧延伸同一个长度 a，得到的各顶点就构成满足要求的一个凸六边形，其对角线不共点，不可能仿射等价于正六边形。可取的附加条件不止一种，简单的如“三条对角线共点”即可。

• 评分标准：*给出上述答案但未写反例构造，给 8 分。既未写反例也未论证所给附加条件的充分性，则总共只给 5 分。*

题 7 (5 分) 平面 Σ 上任意给定一对椭圆 Γ, γ，其中 γ 完全包含于 Γ 内部，两者不交也不相切。已知有如下性质：γ 上任一点 p 处的切线被 Γ 截得的线段，恰好以 p 为中点。试证明：γ 的任一条切线在 Γ 内所截的不包含 γ 的弓形区域，其面积都是同一个常数值。

• 证：任取 γ 的一条“直径”（过其中心的一条线段），其两端点恰好是 Γ 的一对平行弦的中点，因此连线所得也恰好是 Γ 的一条“直径”。这说明 γ 的直径必为 Γ 的直径。取 γ 的两条直径交点，则也是 Γ 的两条直径交点，说明两者中心重合，记为 O。

注意这里所讨论的都是仿射不变性质，不妨设 Γ 是一个圆周（不然取仿射变换将其映为圆周即可）。则椭圆 γ 上任一点 p 与其中心 O 连线，都可看作圆 Γ 一条弦的中点与圆心连线，故垂直于此弦，相当于说 Op 始终与 γ 在 p 点切线垂直。连椭圆 γ 的焦点 F_1, F_2 与 p 点所得三角形的中线同时也是垂线，说明这是等腰三角形，这明显仅在 γ 是圆周时才成立。

于是原图形是（或仿射等价于）一对同心圆。对于同心圆，欲证结论是显然的，而这又是仿射不变性质，故原图形也成立相同结论。证毕。

• 评分标准：*上述论证中，证出中心重合得 2 分，证明可同时化为圆周得 2 分。以“显然”跳过论证者扣 2-3 分。*