几何学期末考试试题

日期：2012 年 1 月 6 日。**用时**：2 小时。 **本卷共七道大题，满分 100 分**

题 1（10 分） 设 Γ 是平面 Σ 上一个正五边形。回答以下问题并说明理由。

(i) 有多少平面 Σ 上非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ？

(ii) 有多少空间中非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ？

题 2（12 分） 在给定空间直角坐标系中，设直线 l 为平面 $y+2z=0$ 和 $y-2z=0$ 的交线，求 l 在平面 $\Sigma: x+y+z=0$ 上的投影直线的方程（任一形式均可）。此处投影为沿着垂直于 Σ 的方向作平行投影。

题 3（36 分） 设圆锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 与某个平面 $\Sigma: z=ax+by+c$ 截得双曲线。

(i) 参数 a,b,c 取哪些值，上述截线才为双曲线？请说明理由。(10 分)

(ii) 取 $b=0$，证明：Σ 的平行平面族所截双曲线彼此相似（等价于有相同的偏心率或长短轴之比），且 $c=0$ 时截得的两条直线恰为这一族双曲线的公共渐近方向。(10 分)

(iii) 取 $b=0$，证明：Σ 的平行平面族所截双曲线中心在一条空间直线上，且此直线的方向向量 v 与任一平行于平面 Σ 的向量 w 满足 $v^TAw=0$，其中 A 为对角矩阵 $diag(1,1,-1)$，v,w 均视为列向量。(10 分)

(iv) 若 $b\neq 0$，试问 (ii),(iii) 中的结论是否仍成立？若将圆锥面推广为一般的椭圆锥面呢？(6 分)

题 4（12 分） 证明：三角形 ABC 存在内切椭圆 Γ 且恰好相切于各边上给定三点 D,E,F 的充分必要条件是 AD,BE,CF 三线共点。(注：D 在 BC 上，E 在 CA 上，F 在 AB 上。)

题 5（14 分） 给定圆锥曲线 Γ，O 不在 Γ 上。过点 O 作直线交 Γ 于 A,B 两点。令 l 是 O 对 Γ 的极线。取 l 上一点 P 且不在直线 AB 上。连 PA,PB 分别交 Γ 于 C,D 两点。证明 O,C,D 三点共线。

题 6（8 分） 设 $\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$ 和 $\{\Sigma_1^*,\Sigma_2^*\}$ 为增广复平面 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上两对圆，每一对中两个圆周都是相交的。证明：存在 Möebius 变换 ϕ 将 $\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$ 分别映成 $\{\Sigma_1^*,\Sigma_2^*\}$ 当且仅当两对圆周交角相等。

题 7（8 分） 射影平面 $P(\Sigma)$ 上有两个四点组 $\{A,B,C,D\}$ 和 $\{A',B',C',D'\}$。其中 A,B,C 落在直线 l 上，D 在 l 外；A',B',C' 落在直线 l' 上，D' 在 l' 外。问：是否存在射影变换 $\phi: P(\Sigma)\to P(\Sigma)$ 将四点 $\{A,B,C,D\}$ 对应地映到四点 $\{A',B',C',D'\}$？如果存在，这样的变换 ϕ 是否唯一？证明你的结论。