几何学期中考试

考试日期: 2019年11月16日。考试时间: 2小时。

题1 （10分） 证明：空间中起点相同的四向量a, b, c, d，其终点共面当且仅当$[a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] = 0$.（方括号表示混合积。）

题2（10分）在空间直角坐标系中，求经过z轴并且和平面$2x+y-\sqrt{5}z-1=0$的夹角为$60°$的平面的方程。

题3（20分） 设$\mathbb{Q}$是一个二次曲面，它在单位直角坐标系$Oxyz$下的方程为$x^2+y^2-z^2=1$。设ℓ是两平面$x=1$和$z=0$的交线。设$\sigma(\theta)$是过直线ℓ的平面，它与平面$z=0$的交角为θ。问：当θ从0连续变到$\pi/2$时，平面$\sigma(\theta)$与$\mathbb{Q}$ 的截线分别是什么类型的曲线？写出过程和理由。

题4 （15分） 设ϕ是一个空间等距变换，反定向，有不动点。证明它是一个旋转反射（也即$\phi = f \circ g$是一个反射f与一个旋转g的复合，且f反射平面与g的旋转轴垂直）。

题5 （15分） 试证明：同一平面上的两个滑反射，如果其滑动轴的方向不平行，则复合后的平面等距变换效果是一个旋转。

题6（24分） 判断题。每道6分，作出正确判断得2分，简要说清理由得4分。

1）三维欧氏空间中的八个点，构成立方体的八个顶点。考虑位置和大小不同，则这种立方体的自由度是6.

2）给定一个立方体，则保持它映到自身的反定向空间等距变换共有24个。

3）在椭球内部任取一点P，则一定存在一个过P点的平面，与椭球面交出一个椭圆，并且这个椭圆以P为中心。

4）给定平行四边形$A_1A_2A_3A_4$，在四边上各取分点B_1, B_2, B_3, B_4使得B_i落在A_iA_{i+1}上且单比(A_i, A_{i+1}, B_i)等于定值λ. 这里总是约定$A_{i+4} = A_i, B_{i+4} = B_i$，即下标是四周期循环对称的。类似地$B_1B_2B_3B_4$四边上各取分点$C_i$, 使得$C_i$落在$B_iB_{i+1}$上且单比$(B_{i+1}, B_i, C_i)$等于定值$\lambda$. 则存在一个此平面上的位似变换$\phi$（即有位似中心和适当的伸缩比），使得$A_1A_2A_3A_4$ 映为$C_4C_1C_2C_3$.

题7 （6分） 给定平面上一个凸六边形$ABCDEF$及内部一点O，使得：$OA \parallel EF \parallel CB, OC \parallel AB \parallel ED, OE \parallel AF \parallel CD$. 试问是否存在三个椭圆，分别内切于三个四边形$OABC, OCDE, OEFA$，且彼此相切？如果你认为不存在，请说明理由；如果存在，请给出你的构造思路，并说明是否唯一。