1. $P=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & \\ & 4\end{pmatrix}$, $Q=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 或

$P=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & \\ & 1\end{pmatrix}$, $Q=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. □

2. $m=n-1=2020$. 为证明结论, 任意取定V的有序标准正交基$\mathcal{B}_0$.
   - 首先证明: 对任意$f\in A^2(V^*)$, 存在有序标准正交基$\mathcal{B}$, 使得$[f]_{\mathcal{B}}$中非零矩阵元的个数不超过$n-1$. 记$A=[f]_{\mathcal{B}_0}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 则$A$反对称, 从而正规, 因此正交相似于形如
   $$M=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}a_r & -b_r\\ b_r & a_r\end{pmatrix},c_1,\dots,c_s\right),\qquad 2r+s=n$$
   的矩阵. 而M也反对称. 所以$a_i=c_j=0$. 因此M中至多有$2r\leqslant n-1$个非零元. 另一方面, 由A与M正交相似可知, 存在有序标准正交基$\mathcal{B}$使$[f]_{\mathcal{B}}=M$.
   - 接下来证明: 存在$f_0\in A^2(V^*)$, 使得对任意$\mathcal{B}$, $[f_0]_B$中至少有$n-1$个非零元. 记M_0为在M中取$r=\frac{n-1}{2}$, $a_i=c_j=0$, $b_k=1$得到的矩阵, 并取f_0使$[f_0]_{\mathcal{B}_0}=M_0$. 则$\operatorname{rank}(f_0)=\operatorname{rank}(M_0)=n-1$. 所以对任意$\mathcal{B}$有$\operatorname{rank}[f_0]_{\mathcal{B}}=\operatorname{rank}(f)=n-1$. 因此$[f_0]_{\mathcal{B}}$中至少有$n-1$个非零元. □

3. 答案为所有正奇数.
   - 任意正奇数k满足题中的性质: 记$f=x^k+x\in\mathbb{R}[x]$. 只需证: 如果$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$对称并且$f(A)$对角, 则$A$对角. 进而只需证: 对任意对称矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 存在$g\in\mathbb{R}[x]$使$A=g(f(A))$. 由于$A$对称, 存在正交矩阵$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$和对角矩阵$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$使$A=QDQ^{-1}$. 由于$f$诱导的多项式函数$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为单映射, 所以可以取$g\in\mathbb{R}[x]$使得对$D$的任意对角元$c$总有$g(f(c))=c$. 这推出$g(f(D))=D$. 所以
   $$g(f(A))=g(f(QDQ^{-1}))=Qg(f(D))Q^{-1}=QDQ^{-1}=A.$$
   （注: 也可取对角矩阵D'使$f(A)=f(D')$, 然后利用谱分解证明$A=D'$.）
   - 任意正偶数k不满足题中的性质: 取$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$为所有矩阵元均为$-\frac{1}{n}$的（对称非对角）矩阵. 则$A^2=-A$, 从而$A^k=(-1)^{k-1}A=-A$, 因此$A^k+A=0$为对角矩阵. □

4. 将标准正交基$\{E_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$中的$n^2$个矩阵重新记为$E_1,\dots,E_{n^2}$. 设标准正交基$\{A_1,\dots,A_{n^2}\}$中的矩阵满足$A_i=\sum_{j=1}^{n^2}c_{ij}E_j$. 则$(i,j)$-元为$c_{ij}$的$n^2$阶方阵为正交矩阵. 计算得
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n^2}A_i^2&=\sum_{i=1}^{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n^2}c_{ij}E_j\right)^2=\sum_{i,j,k=1}^{n^2}c_{ij}c_{ik}E_jE_k=\sum_{j,k=1}^{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n^2}c_{ij}c_{ik}\right)E_jE_k\\&=\sum_{j,k=1}^{n^2}\delta_{jk}E_jE_k=\sum_{k=1}^{n^2}E_k^2=\sum_{i,j=1}^{n}E_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}^2=I_n.\end{aligned}$$
□

5. 我们归纳证明: 对任意$1\leqslant r\leqslant n$, $\sum_{k=1}^r f_k$的正惯性指数为1. 当$r=1$时, 结论显然. 设$r\geqslant 2$, 并且结论对$r-1$成立. 记$A_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$为$(i,j)$-元等于$a_{i,j,k}$的对称矩阵. 则$f_k(\alpha,\beta)=\alpha A_k\beta^t$. 设$\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\}$为$\mathbb{R}^n$的标准基. 由$a_{i,j,k}$的条件易得$\epsilon_iA_j=\epsilon_jA_i$. 所以
$$\epsilon_r(A_1+\cdots+A_{r-1})=(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{r-1})A_r.$$
这推出ϵ_r关于$f_1+\cdots+f_{r-1}$的正交补（记为W）等于$\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{r-1}$关于$f_r$的正交补. 由于$A_k$的矩阵元均为正数, 所以
$$(f_1+\cdots+f_{r-1})(\epsilon_r,\epsilon_r)>0,\qquad f_r(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{r-1},\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{r-1})>0.$$
这也推出$\dim W=n-1$. 再由$f_1+\cdots+f_{r-1}$和f_r的正惯性指数均为1, 可知$(f_1+\cdots+f_{r-1})|_W$和$f_r|_W$半负定. 所以$(f_1+\cdots+f_r)|_W$也半负定. 而$f_1+\cdots+f_r$不半负定. 所以它的正惯性指数只能为1. □