19 春 高代 2 王福正 期中

高等代数期中考试试题 (2019年4月)

姓名：　　　学号

（本试卷共九道大题，满分100分）。

一、（每题6分，共12分）回答下列问题（均需说明你的判断依据）

1) 是否存在不全为零的实系数多项式$f(x),g(x),h(x)$满足$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$？又是否存在不全为零的满足此式的复系数多项式？

2)如果$(x-1)|f(x^n)$，是否必有$(x^n-1)|f(x^n)$？

二、（10分）设有理系数多项式$f(x)=6x^4+3x^3+ax^2+bx-1$，$g(x)=x^4-2ax^3+\frac{3}{4}x^2-5bx-4$，其中$a,b$是整数，求使$f(x),g(x)$有公共有理根的$a,b$，并求出相应的根。

三、（共14分）下列多项式在有理数域Q上如果可约，给出其不可约分解，如果不可约，给出证明

1)（8分）$f(x)=x^p+px^r+1\in\mathbb{Q}[x]$，其中$p$是一个素数，$0\le r\le p$；

2)（6分）$f(x,y)=2x^2+xy-y^2+5x+2y+3$。

四、（12分）设$F[\lambda]$中的多项式$f(\lambda),g(\lambda)$都与$\phi(\lambda),\psi(\lambda)$互素，证明$\lambda$-矩阵
$\begin{pmatrix} f(\lambda)\phi(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda)\psi(\lambda)\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} g(\lambda)\phi(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda)\psi(\lambda)\end{pmatrix}$等价。

五、（10分）设α,β,γ是方程$x^3+px+q=0$的三个根，求行列式$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$。

六、（共20分）设数域F上的5维向量空间V的一组基是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，记$U_1=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$U_2=\cancel{L(\gamma_1,\gamma_2)}$，其中
$L(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3+2\alpha_4+3\alpha_5\\ \beta_2=\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+4\alpha_4+2\alpha_5\\ \beta_3=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_4+9\alpha_5;\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma_1=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4+\alpha_5\\ \gamma_2=\alpha_1+5\alpha_2-6\alpha_3+6\alpha_4+3\alpha_5\\ \gamma_3=2\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5\end{cases}$$

试分别求子空间$U_1+U_2,U_1\cap U_2$及商空间$V/(U_1+U_2)$的一组基。

七，（10分）求复数域上满足$f(x^2)=f(x)f(x+1)$的非常数多项式$f(x)$。

八，（8分）设A是数域F上的n阶方阵，而J是F上的系数全为1的n阶方阵，证明如果存在F中无限多个元素t使得$A+tJ$是幂零矩阵，则A必是幂零矩阵。

九，（4分）将n阶方阵$X=(x_{ij})$中的n^2个元素x_{ij}看成是n^2个未定元，则行列式$|X|$是这n^2个未定元的n次齐次多项式$f(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$，证明$f(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$是不可约的。