北京大学微分流形期中考试试卷

计算题 1 (10分). 考虑光滑映射$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$定义如下

$$(u,v,w)=F(x,y)=(x,y,xy)$$

给定点$p\in\mathbb{R}^2$, 写出切向量$F_{*,p}(\frac{\partial}{\partial x}|_p)$在基$\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial w}\}$的线性组合。

计算题 2 (10分). 考虑$\mathbb{R}^3$上的如下光滑切向量场

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Y=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}$$

求$[X,Y]$。

证明题 3 (15分). 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$为光滑映射。它的图像$S=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^3:x\in\mathbb{R}^2\}\subset\mathbb{R}^3$。证明$S$为$\mathbb{R}^3$是2维嵌入子流形。

证明题 4 (10分). 证明$Jacobi$恒等式: $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$,其中$X,Y,Z$为光滑流形$M$上的光滑切向量场。

证明题 5 (20分). 设M为一个n维光滑流形。余切丛$T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M$为$M$上所有的余切空间$T_p^*M$的非交并。请在$T^*M$赋予一个光滑结构使之成为一个可定向的$2n$维光滑流形。证明投影映射$\pi:T^*M\to M$为光滑的淹没映射。

证明题 6 (15分). 设U是光滑流形M上的开集。假设X为U上的光滑切向量场，即$X:U\to TM$是光滑映射。证明U中任意一点都存在一个邻域V和一个M上的光滑切向量场$\tilde{X}$使得

$$\tilde{X}|_V=X|_V$$

且$supp(\tilde{X})\subset U$

证明题 7 (15分). 已知n维光滑流形M的点$p\in M$处某邻域的n个实值光滑函数$y^1,y^2\cdots,y^n$。如果

$$(dy^1|_p,dy^2|_p,\cdots,dy^n|_p)$$

构成余切空间T_p^*M的一个基。那么存在p的一个邻域U使得$(U,\phi=(y^i|_U))$是一个与M的光滑结构兼容的坐标卡。

证明题 8 (25分). 一个向量空间V两组有序基称为等价的如果他们的过渡矩阵的行列式为正。一个有序基的等价类称为V的一个定向。

设M为一个连通的n维光滑流形。任意点$p\in M$,用O_p代表切空间T_pM的两个定向。令$\tilde{M}=\{(p,[e_i]):p\in M,[e_i]\in O_p\}$。定义投影$\pi:\tilde{M}\to M$: $\pi(p,[e_i])\to p$。任意给定M上的光滑结构$\{(U,\phi)\}$，定义$\tilde{U}=\{(p,[\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p]):p\in U\}$和$\tilde{\phi}=\phi(\pi):\tilde{U}\to\mathbb{R}^n$如下:

$$(p,[\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p])\mapsto\phi(p)$$

(1) 赋予$\tilde{M}$一个拓扑，并说明$\{(\tilde{U},\tilde{\phi})\}$给出了$\tilde{M}$的一个可定向的光滑结构。
(2) 证明$\pi:\tilde{M}\to M$是一个光滑的复叠映射: M的任意一点存在一个邻域V使得它的原像是两个开集U_1,U_2的非交并，且$\pi|_{U_i}:U_i\to V$是光滑同胚。
(3) 证明: M可定向当且仅当$\tilde{M}$不连通。