北京大学数学科学学院期末试题

2017 -2018 学年第 1 学期

考试科目 **高等代数 I**　　　　考试时间 **2018 年 1 月 2 日**

一. (25 分) 设线性变换 A 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&-1\\2&2&0\end{bmatrix}$.

1) 求 A 像空间的一组基；(5 分)

2) 求 A 核空间的一组基；(5 分)

3) 求 A 在基 β_2，β_3，$\beta_1+\beta_2$ 下的矩阵 B；(10 分)

4) 判断矩阵 A 能否对角化并说明理由. (5 分)

解: 1) 对矩阵 A 作行变换, 求得 A 的简化阶梯型

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&-1\\2&2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

由此知 A 的前两个列向量构成 A 列向量组的极大无关组, 故

$\beta_1+2\beta_2+2\beta_3$，$\beta_1+3\beta_2+2\beta_3$ 构成 A 像空间的一组基；

2) 由 A 的简化阶梯型求出 A 解空间的一组基：$[1\ -1\ -1]^T$.

故 A 核空间是 1 维子空间, 一组基为 $\beta_1-\beta_2-\beta_3$;

3) 由 $(\beta_2\quad\beta_3\quad\beta_1+\beta_2)=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 知基底

β_1,β_2,β_3 到基 $\beta_2,\beta_3,\beta_1+\beta_2$ 的过渡矩阵为 $U=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

对矩阵$[A\ I]$作行变换，计算U^{-1}：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \updownarrow & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \updownarrow & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \updownarrow & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \updownarrow & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & \updownarrow & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \updownarrow & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \updownarrow & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \updownarrow & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \updownarrow & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A 在基 β_2，β_3，$\beta_1+\beta_2$ 下的矩阵为

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

注：以下推导过程不需要.

若线性变换 A 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为 A，基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为 U，则有

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\cdots\alpha_n) &= A((\beta_1\cdots\beta_n)U) \\ &= (A(\beta_1\cdots\beta_n))U \quad \text{(线性组合的像等于像作线性组合)} \\ &= ((\beta_1\cdots\beta_n)A)U \quad (\text{A 在基 } \beta_1,\cdots,\beta_n \text{ 下的矩阵为 } A) \\ &= (\beta_1\cdots\beta_n)(AU) \quad \text{(结合律)} \\ &= (\alpha_1\cdots\alpha_n)U^{-1}(AU) \\ &= (\alpha_1\cdots\alpha_n)(U^{-1}AU) \quad \text{(结合律)} \end{aligned}$$

故 A 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $U^{-1}AU$.

4) 计算A的特征多项式

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x-3 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x-3 & 1 \\ 0 & -x+1 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -2 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)((x-1)(x-2)-2)=(x-1)(x^2-3x)$$

$$=(x-1)(x-3)x$$

得A的特征值 0,1,3．由于A是3级矩阵且在数域上有三个不同的特征值，故A 可对角化.

二.(20分) 已知实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) 确定矩阵 A,B 的正负惯性指数并判断它们是否合同； (8分)

2) 确定矩阵A,B,C,D的相似分类并说明理由. (12分)

解:1) 对 A作成对的行列变换，可将A化为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

由此看出 A 的正惯性指数为1，负惯性指数为 2.

对 B作成对的行列变换，可将B化为

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

故 B 的正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

由于 A , B 的正惯性指数不同, A , B 不合同.

2) 首先注意到 A , B 为实对称矩阵, 可在实数域上对角化.

C , D 的特征值为 3 , -1 (代数 2 重) , 但由于

$C + I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为 1， C 的特征值 -1 的特征子空间

的维数(几何重数) 也为 3 - 1 = 2． 故 C 也可对角化.

另一方面, 由于 $D + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的秩为 2， D 的特征值 -1

的几何重数为 1， D 不能对角化. 于是 D 与 A , B , C 都不相似.

又由 (1) 知, A 有一个正特征值, B 有两个正特征值(算代数重数),

故 A, B 不相似.

最后, 由 $A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 秩为 1 可看出 -1 是 A 的特征值, 且几何

重数为 2，故 A 的另一个特征值为 $\mathrm{tr}(A) - (-1) - (-1) = 3$.

A , C 都可对角化且有相同的特征值, 故 A , C 相似.

矩阵 A , B , C, D 的相似分类为 { A , C } , { B } , { D }.

三. (30 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$.

(1) 将 f 写成 $X^T A X$ 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征值与特征向量; (12 分)

(2) 求正交矩阵 P 及对角矩阵 D , 使得 $A = PDP^T$; 作正交替换将 f 化为

标准型; (12 分)

(3) 求二次型 $f(X) = X^T A X$ 在单位球面 $||X|| = 1$ 上能取到的最大值,

并确定在何处取到这个最大值.（6 分)

解: (1) $f=X^TAX=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 1\\ -2 & \lambda-3 & 2\\ 1 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 2+2\lambda\\ 1 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 5\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-5)=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故 A 的特征值为$\lambda=-1$ (代数二重) 及 $\lambda=5$.

对$\lambda=-1$ 解齐次方程组 $(A+I)X=0$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得通解 $x_1=-2x_2+x_3$, x_2、x_3为自由变量. 解的向量形式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_2+x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

于是$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 构成$\lambda=-1$ 特征子空间的一组基.

解齐次方程组 $(A-5I)X=0$, 求得$\lambda=5$ 的特征子空间的基$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$.

(2) 将$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 正交化:

令 $\beta_1=\alpha_1$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-2}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$$

再单位化:

$$\gamma_1=\frac{1}{||\beta_1||}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{1}{||\beta_2||}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$$

将$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 也单位化: $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$.

则$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 构成 R^3 的标准正交基, $P=[\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

为正交矩阵, 且 $A=PDP^T=[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1^T\\\gamma_2^T\\\gamma_3^T\end{bmatrix}$.

做正交替换$X=PY$, 二次型 f 化为

$$f(X)=X^TAX=Y^TP^TAPY=Y^TDY=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2.$$

3) 由于 P 是正交矩阵, 我们有

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=X^TX=Y^TP^TPY=Y^TY=y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

故当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ 时,

$$f(X)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$$

$$=5(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-6(y_1^2+y_2^2)\le 5,$$

且等号成立当且仅当 $y_1=y_2=0$, 或等价地, $y_1=\pm 1$, 即 X 当落在 A 的

最大特征值$\lambda=5$的特征子空间与单位球面的交$X=\pm\gamma_3$时取到这个最大值.

四. (10 分) 设 A 是一个n级矩阵, $\alpha=[1\ldots1]^T$是n维列向量.

已知 $|A|=a$, $|A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$ 的值.

解: 设 $A=[a_{ij}]$. 注意到

$$f(x)=|A+x\,\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & \cdots & x+a_{1n} \\ x+a_{21} & x+a_{22} & \cdots & x+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+a_{n1} & x+a_{n2} & \cdots & x+a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & \cdots & x+a_{1n} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$$

展开后是x的线性函数, 且$f(0)=a$, $f(-1)=|A-\alpha\alpha^T|=b$,

故 $f(x)=a+(a-b)x$. 于是 $|A+2\alpha\alpha^T|=f(2)=3a-2b$.

五. (8 分) 设矩阵A的列数与矩阵 B 的行数都等于 n. 证明:

A秩 +B秩 =AB秩 +n 当且仅当 A的解空间 $\subseteq$B的列空间.

证: 注意到A的解空间与 B列空间的交集 W 是向量空间 K^n

的子空间, 且

$$\dim W \le A\text{解空间维数} = n-A\text{秩},$$

等号成立 当且仅当 A的解空间 =W, 即A解空间$\subseteq$B列空间.

将W的一组基$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ (写成列向量) 扩充成B列空间的基

$$\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t.$$

显然向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$与B的列组均能相互线性表出对方. 同理, $A[\alpha_1\dots\alpha_s\beta_1\dots\beta_t]$ 的列组与AB的列组等价. 故

$$AB\text{秩} = A[\alpha_1\dots\alpha_s\beta_1\dots\beta_t]\text{秩} = [A\beta_1\dots A\beta_t]\text{秩}.$$

以下证明 $[A\beta_1\dots A\beta_t]$的秩 $=t$，即$A\beta_1,\dots,A\beta_t$线性无关:

若有系数$k_i\in K$，使得 $k_1A\beta_1+\dots+k_tA\beta_t=0$，即

$$A(k_1\beta_1+\dots+k_t\beta_t)=0.$$

则 $k_1\beta_1+\dots+k_t\beta_t\in W$，于是存在 $l_j\in K$，使得

$$k_1\beta_1+\dots+k_t\beta_t=l_1\alpha_1+\dots+l_s\alpha_s.$$

由$\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$是B列空间的基知 $k_1=\dots=k_t=0$.

故$A\beta_1,\dots,A\beta_t$线性无关.

最后, 由 $[A\beta_1\dots A\beta_t]$ 秩 $=t$ 推得

$$AB\text{秩} = t = B\text{秩} - \dim W \ \geq B\text{秩} - (n - A\text{秩}) = A\text{秩} + B\text{秩} - n,$$

等号成立 当且仅当 A解空间 $\subseteq$B列空间.

六.（7分）设 F 是一数域, $A,B,P\in M_n(F)$，且满足 $P^3=0, P^2\neq 0$, $(A-B)P=P(A-B)$, $BP-PB=2(A-B)$. 求 F上的一个可逆矩阵Q，满足 $AQ=QB$.

解: 令 $C=A-B$, 则有 $CP=PC$, $BP-PB=2C$.

对$BP-PB=2C$分别右乘，左乘 P，得

$$BP^2-PBP=2CP \quad , \quad PBP-P^2B=2CP \qquad (1)$$

相加，得 $BP^2-P^2B=4CP$; (2)

类似地，对（1）式再右乘，左乘 P，得

$BP^3-PBP^2=2CP^2$，$PBP^2-P^2BP=2CP^2$，$P^2BP-P^3B=2CP^2$，

相加，得 $BP^3-P^3B=6CP^2$.

又由题设条件 $P^3=0$，得 $CP^2=0$. (3)

以下用待定系数法构造Q：

设 $Q=I+a_1P+a_2P^2$. 条件 $AQ=QB$ 等价于

$$A(I+a_1P+a_2P^2)=(I+a_1P+a_2P^2)B,$$

或 $C+a_1CP+a_1(BP-PB)+a_2CP^2+a_2(BP^2-P^2B)=0$.

将题设条件 $BP-PB=2C$ 及 (2) 带入，得

$$C+a_1CP+2a_1C+a_2CP^2+4a_2CP=0,$$

或 $C((1+2a_1)I+(a_1+4a_2)P+a_2P^2)=0$.

由(3)，欲使上式成立，只需令

$$1+2a_1=0,\quad a_1+4a_2=0.$$

即 $a_1=-1/2$，$a_2=1/8$，或 $Q=I-1/2P+1/8P^2$.

最后，容易验证我们构造的 Q 可逆且 $Q^{-1}=I+1/2P+1/8P^2$:

$$(I-1/2P+1/8P^2)(I+1/2P+1/8P^2)$$

$$=I-1/2P+1/2P-1/4P^2+1/8P^2+1/8P^2=I.$$