一. 考虑$F^{k\times k}$的子集

$$S_k=\{A\in F^{k\times k}\mid A\text{的矩阵元均为0或1},\ A\text{的每行和每列均有且只有一个矩阵元为1}\}.$$

分别对$k=2$和$k=3$求S_k生成的$F^{k\times k}$的子空间的维数.

解. $\dim\operatorname{span}(S_2)=2$, $\dim\operatorname{span}(S_3)=5$. 下面证明.

记

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

则$S_2=\{A_1,A_2\}$. 容易看出S_2线性无关, 所以构成$\operatorname{span}(S_2)$的基. 因此$\dim\operatorname{span}(S_2)=2$.

记

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad B_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$B_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad B_5=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B_6=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

则$S_3=\{B_1,\ldots,B_6\}$. 容易看出$B_1+B_2+B_3=B_4+B_5+B_6$. 通过考察主对角线上的矩阵元, 容易验证$\{B_2,\ldots,B_6\}$线性无关, 从而构成$\operatorname{span}(S_3)$的基. 因此$\dim\operatorname{span}(S_3)=5$. □

二. 对$i\in\{1,2,3,4\}$, 考虑$\mathbb{R}^4$中的向量

$$\alpha_i=(i^2,(i+1)^2,(i+2)^2,(i+3)^2),$$
$$\beta_i=(i^2,(i-1)^2,(i-2)^2,(i-3)^2).$$

是否存在线性映射$T\in L(\mathbb{R}^4)$, 使得$T(\alpha_i)=\beta_i$对任意$i\in\{1,2,3,4\}$成立? 请说明理由.

解. 存在. 容易验证下面的事实:

(1) $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关;

(2) $\alpha_4=\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3$;

(3) $\beta_4=\beta_1-3\beta_2+3\beta_3$.

由(1), 可以取$T\in L(\mathbb{R}^4)$使得$T(\alpha_i)=\beta_i$对$i\in\{1,2,3\}$成立. (例如, 将$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$扩充为$\mathbb{R}^4$的基$\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 并任取$\beta_0\in\mathbb{R}^4$, 则存在唯一的$T\in L(\mathbb{R}^4)$满足$T(\alpha_i)=\beta_i, i=0,1,2,3$.) 由(2)和(3), 有

$$T(\alpha_4)=T(\alpha_1)-3T(\alpha_2)+3T(\alpha_3)=\beta_1-3\beta_2+3\beta_3=\beta_4.$$

因此T满足要求. □

三. 设V是F-线性空间, S_1,S_2,S_3是V的子集, $W_i=\operatorname{span}(S_i)$ $(i=1,2,3)$. 假设$S_1\cup S_2\cup S_3$线性无关. 证明

$$W_1\cap(W_2+W_3)=(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3).$$

证. "$\supset$": 由于左边既包含$W_1\cap W_2$又包含$W_1\cap W_3$, 所以包含它们的和.

"$\subset$": 设$\alpha\in W_1\cap(W_2+W_3)$. 我们需要证明$\alpha$包含在右边的集合中. 由于$\alpha\in W_1$, 所以可以设$\alpha=\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$, 其中$c_i\in F$, $\alpha_i\in S_1$. 另一方面, 由于$\alpha\in W_2+W_3$, 所以为$S_2\cup S_3$中向量的线性组合. 设$\alpha=\sum_{j=1}^{m+p}d_j\beta_j$, 其中$d_j\in F\setminus\{0\}$, $\beta_1,\ldots,\beta_m\in S_2$, $\beta_{m+1},\ldots,\beta_{m+p}\in S_3\setminus S_2$, 并且$\beta_1,\ldots,\beta_{m+p}$互不相同. 由于$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\cup\{\beta_1,\ldots,\beta_{m+p}\}$线性无关, 并且

$$\sum_{j=1}^{m+p}d_j\beta_j-\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i=0,$$

所以此式经"合并同类项"后每个β_j的系数为0. 由于β_j互不相同, 所以每个β_j必为某个α_i, 因此属于S_1. 这推出

$$\beta_1,\ldots,\beta_m\in S_1\cap S_2\subset W_1\cap W_2,\qquad \beta_{m+1},\ldots,\beta_{m+p}\in S_1\cap S_3\subset W_1\cap W_3.$$

因此

$$\alpha=\sum_{j=1}^m d_j\beta_j+\sum_{j=m+1}^{m+p}d_j\beta_j\in(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3).$$

□

四. 设V是由所有函数$f: F \to F$构成的F-线性空间, 其中的向量加法与纯量乘法定义为

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x), \qquad \forall\ f, g \in V, c, x \in F.$$

设$S = \{f_1, \ldots, f_n\}$是V的n元子集. 证明S线性无关的充分必要条件是存在$x_1, \ldots, x_n \in F$使得矩阵$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$可逆.

证. "$\Longleftarrow$": 该矩阵可逆推出它的n个行向量线性无关, 从而S线性无关.
"$\Longrightarrow$": 对$n \geq 1$归纳. 当$n = 1$时, $\{f_1\}$线性无关说明$f_1 \neq 0$, 从而存在$x_1 \in F$使得$f_1(x_1) \neq 0$, 因此$f_1(x_1)$作为1×1矩阵可逆. 设$n \geq 2$, 并假设当把n替换为$n-1$时"$\Longrightarrow$"成立. 由于S线性无关, $S \setminus \{f_n\}$也线性无关. 由归纳假设, 存在$x_1, \ldots, x_{n-1} \in F$使矩阵$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix}$可逆. 考虑$F^{n-1}$中的向量$\alpha_i = (f_i(x_1), \ldots, f_i(x_{n-1}))$, $i = 1, \ldots, n$. 上述矩阵可逆说明$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$构成$F^{n-1}$的基. 因此存在唯一的$c_1, \ldots, c_{n-1} \in F$满足$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i$. 由于$S$线性无关, 我们有$f_n \neq \sum_{i=1}^{n-1} c_i f_i$, 从而存在$x_n \in F$使得$f_n(x_n) \neq \sum_{i=1}^{n-1} c_i f_i(x_n)$. 由此容易推出题中矩阵的$n$个行向量线性无关, 因此它可逆. □

五. 设V是n维F-线性空间, $T_1, T_2 \in L(V)$. 证明

$$|\dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) - \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1)| \leq \frac{n}{2}.$$

证. 不妨设$\dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) \geq \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1)$. 考虑$T_2$限制在$\mathrm{Ker}(T_1T_2)$上得到的线性映射

$$T_2|_{\mathrm{Ker}(T_1T_2)} : \mathrm{Ker}(T_1T_2) \to V.$$

容易看出, $\mathrm{Ker}(T_2|_{\mathrm{Ker}(T_1T_2)}) = \mathrm{Ker}(T_2)$, $\mathrm{Im}(T_2|_{\mathrm{Ker}(T_1T_2)}) \subset \mathrm{Ker}(T_1)$. 所以

$$\dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) = \dim \mathrm{Ker}(T_2|_{\mathrm{Ker}(T_1T_2)}) + \dim \mathrm{Im}(T_2|_{\mathrm{Ker}(T_1T_2)}) \leq \dim \mathrm{Ker}(T_2) + \dim \mathrm{Ker}(T_1). \tag{1}$$

另一方面, 由于$\mathrm{Im}(T_2) \supset \mathrm{Im}(T_2T_1)$, $\mathrm{Ker}(T_1) \subset \mathrm{Ker}(T_2T_1)$, 所以

$$\dim \mathrm{Ker}(T_2) = n - \dim \mathrm{Im}(T_2) \leq n - \dim \mathrm{Im}(T_2T_1) = \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1), \qquad \dim \mathrm{Ker}(T_1) \leq \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1).$$

代入(1)式, 得

$$\dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) \leq 2 \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1).$$

这推出

$$\dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) - \dim \mathrm{Ker}(T_2T_1) \leq \frac{1}{2} \dim \mathrm{Ker}(T_1T_2) \leq \frac{n}{2}.$$

□

六. 设n维F-线性空间V的$2n-2$个子空间$M_1, \ldots, M_{n-1}, N_1, \ldots, N_{n-1}$满足

$$\dim M_i = \dim N_i = i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

并且

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1}, \qquad N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_{n-1}.$$

证明存在V的基S, 使得这$2n-2$个子空间中的每一个均由S的某个子集生成.

证. 记$J_n = \{1, \ldots, n\}$, $M_0 = N_0 = \{0\}$, $M_n = N_n = V$. 对$i \in J_n$, 记$\sigma(i) \in J_n$为使得交集

$$(M_i \setminus M_{i-1}) \cap (N_{\sigma(i)} \setminus N_{\sigma(i)-1})$$

非空的最小指标, 并取该交集中的向量α_i. 由$\alpha_i \in M_i \setminus M_{i-1}$可知$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$为$V$的基, 并且$M_i = \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$.

为了说明每个N_ℓ也由S的某个子集生成, 先证明映射$\sigma : J_n \to J_n, i \mapsto \sigma(i)$可逆. 只需证明它是单映射. 假设存在$i, j \in J_n$, $i < j$, 满足$\sigma(i) = \sigma(j) = k$. 则

$$\alpha_i \in M_i \cap (N_k \setminus N_{k-1}), \qquad \alpha_j \in (M_j \setminus M_{j-1}) \cap N_k, \qquad (M_j \setminus M_{j-1}) \cap N_{k-1} = \varnothing.$$

我们断言, 存在$c \in F$使得$c\alpha_i + \alpha_j \in N_{k-1}$. 事实上, 取$N_{k-1}$的基$\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\}$, 并扩充为$N_k$的基$\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, 则$\alpha_i = \sum_{r=1}^k a_r \beta_r$, $\alpha_j = \sum_{r=1}^k b_r \beta_r$, 其中$a_r, b_r \in F$, $a_k \neq 0$. 取$c = -a_k^{-1} b_k$即满足要求. 另一方面, 由于$i < j$, 我们有$M_i \subset M_{j-1}$. 这推出$c\alpha_i + \alpha_j \in M_j \setminus M_{j-1}$. 结合起来即得$c\alpha_i + \alpha_j$落在集合$(M_j \setminus M_{j-1}) \cap N_{k-1}$之中, 与该集合为空集矛盾. 因此$\sigma$可逆. 由于$\alpha_i \in N_{\sigma(i)} \setminus N_{\sigma(i)-1}$, 所以对任意$\ell \in J_n$有$\alpha_{\sigma^{-1}(\ell)} \in N_\ell \setminus N_{\ell-1}$. 这推出$N_\ell = \mathrm{span}\{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(\ell)}\}$. □