北京大学数学学院期末试题

2018—2019 学年第二学期

考试科目 高等代数II　　考试时间 2019 年 6 月 19 日

姓　　名　　　　　　　　　学　　号

一. (12 分) 设 $\mathcal{H}: A \mapsto A^T$ 是矩阵空间 $M_3(R)$ 到自身的映射.

1) 证明: $\mathcal{H}$ 是 $M_3(R)$ 上的线性变换;

2) 求 $\mathcal{H}$ 的特征值, 各个特征子空间的维数和基底;

3) 判断 $\mathcal{H}$ 能否对角化并说明理由.

二. (12 分) 设 V 是 n 维线性空间, 设 U, W 分别是 V 的 r 维与 s 维线性子空间. 记 $\Omega = \{\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V) \mid \mathcal{A}(U) \subseteq W\}$.

1) 证明集合 Ω 是线性空间 Hom(V) 的子空间.

2) 求线性子空间 Ω 的维数, 用 n, r, s 表示.

三. (12 分)

1) 叙述酉矩阵, Hermite 矩阵及正规矩阵的定义;

2) 试构造一个酉矩阵 U, 使其第一列为 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$.

四. (24 分) 设 A 是线性空间 V 上的线性变换，且 A 在基底

$\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&2&0\end{bmatrix}$.

1) 求 A 的特征多项式与最小多项式；

2) 将 V 分解为根子空间 W_1 与 W_2 的直和，并求各根子空间 W_i 的基以及限制变换 $A|W_i$ 在此基下的矩阵；

3) 对每个根子空间 W，求多项式 $h_W(x)$，使得 $h_W(A)$是沿另一根子空间向 W 所作的投影变换．

五 (24 分) 设实矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&0&0&-1\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$.

1) 求 B 的特征值，特征子空间的一组基及最小多项式；

2) 求可逆矩阵 U 及 Jordan 形矩阵 J，使得 $B=UJU^{-1}$.

六. (16 分) 判断对错. 正确的请给出证明，错误的请举出反例.

1) 若 A 是 n 级实矩阵，满足条件 $A^2=AA^T$，则一定有 $A=A^T$；

2) 在欧氏空间 R^4 中任给两个 2 维子空间 V_1, V_2，一定存在实对称矩阵 A，使得 $\{AX \mid X\in V_1\}=V_2$.