北京大学

2022 年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132321　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2022 年 10 月 27 日 08:00 — 09:50.
- 总分为 100 分.
- 符号 $1_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵, 0 或 $0_{m\times n}$ 代表零矩阵.

---

1. (20 分) 对于下列的 $v_1,\ldots,v_5\in\mathbb{Q}^4$, 求出一个极大线性无关子集.

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\ v_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_5\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$ 都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

2. (10 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上求下列矩阵的逆矩阵:

(a) $\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

解答. 以消元法计算. 逆矩阵依序是 $\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&7\\3&4&9\end{pmatrix}$ 和 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

3. (10 分) 设 F 为任意域, $A\in\mathrm{M}_{m\times n}(F)$, 证明矩阵方程 $AXA=A$ 总有解 $X\in\mathrm{M}_{n\times m}(F)$. **提示.** 将 A 左乘或右乘一个可逆矩阵不影响解的存在性.

解答. 化约到 $A=\begin{pmatrix}1_{r\times r}&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的情形, $r=\mathrm{rk}(A)$.

4. (10 分) 考虑域 F 上的分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 1_{n_1 \times n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_r 1_{n_r \times n_r}} \end{pmatrix}$$

留白部分为零, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F$ 两两相异, $n_i \geq 1$ 而 $n_1 + \cdots + n_r = n$. 确定所有满足

$$AB = BA$$

的 $n \times n$ 矩阵 B.

解答. 将 B 按照和 A 相同的规格分块, 则

$$AB = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_r B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right), \quad BA = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_r B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_1 B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right).$$

因此 $AB = BA$ 等价于 $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$. 由于 $i \neq j$ 蕴涵 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 此时 $B_{ij} = 0_{n_i \times n_j}$. 综上可见 $AB = BA$ 等价于 B 分块对角.

5. (20 分) 选定 $n \geq 1$. 考虑实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $n \times n$ 矩阵 $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. 如果 P 满足

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

则称之为 Markov 矩阵. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 维列向量 $X = (x_i)_{i=1}^n$ 满足 $x_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 则称 X 为概率向量.

(i) 证明 P 是 Markov 矩阵当且仅当

$$X \text{ 是概率向量} \implies PX \text{ 是概率向量}.$$

(ii) 证明如果 X 是概率向量, P 是 Markov 矩阵, 而且对所有 i, j 都有 $p_{ij} > 0$, 则 PX 是各个坐标皆 > 0 的概率向量.

(iii) 证明 Markov 矩阵的乘积仍然是 Markov 矩阵.

(iv) 设 P 是 Markov 矩阵. 证明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $PX = X$.
提示. 等价于证明 $P - 1_{n \times n}$ 不可逆.

解答. (i) 如果 P 是 Markov 矩阵而 X 是概率向量, 则 PX 的第 i 个坐标是 $\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq 0$, 这些坐标的和为 $\sum_i \sum_j p_{ij} x_j = \sum_j \left(\sum_i p_{ij}\right) x_j = \sum_j x_j = 1$. 反之设 P 映概率向量为概率向量, 则 P 的列向量 $Pe_1, \ldots, Pe_n$ 都是概率向量, 故 P 是 Markov 矩阵.

(ii) 从 (i) 知 PX 是概率向量, 而因为 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0, 故 PX 的第 i 个坐标 $\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j > 0$.

(iii) 可以直接计算, 或应用 (i) 的刻画.

(iv) 按 Markov 矩阵的定义, $(1 \cdots 1)P = (1 \cdots 1)$, 亦即 $(1 \cdots 1)\left(P - 1_{n \times n}\right)$ 是零行向量, 所以 $P - 1_{n \times n}$ 不可逆. 但这又说明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $(P - 1_{n \times n})X$ 为零列向量.

6. (15 分) 设 F 为有限域, 其元素个数记为 q. 请将以下问题的答案用 q 来表达.

(i) 确定有限集 $\left\{ \begin{array}{l|l} \text{向量组 } (v_1, \ldots, v_m) & \text{线性无关} \\ \in \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{m \text{ 份}} & \end{array} \right\}$ 的元素个数, 其中 $1 \leq m \leq n$.

(ii) 确定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵的个数.

(iii) 确定 F^n 有几个 m 维子空间, 其中 $1 \leq m \leq n$.

如果答案涉及连乘积或商, 不必展开或化简.

解答. (i) 对于 v_1 有 $q^n - 1$ 种选法 (排除零向量), 对于 v_2 有 $q^n - q$ 种选法 (排除 v_1 的倍数), 对于 v_3 有 $q^n - q^2$ 种选法 (排除 v_1, v_2 的线性组合), 依此类推可得 $\prod_{k=0}^{m-1}(q^n - q^k)$.

(ii) 给定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵相当于给定线性无关的 $v_1, \ldots, v_n \in F^n$, 因此个数是 $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$.

(iii) 任何 m 维子空间都有有序基 $w_1, \ldots, w_m \in F^n$, 而且有序基的个数由 (i) 确定 (另一种观点: 有序基和 $m \times m$ 可逆矩阵一样多, 因为 $(w_i)_{i=1}^m, (w'_i)_{i=1}^m$ 确定相同的子空间当且仅当它们通过一个 $m \times m$ 可逆矩阵来转换, 此矩阵的取法是唯一的). 简单的计数遂说明 m 维子空间的个数是

$$\frac{\text{线性无关的 } (w_i)_{i=1}^m \text{ 的个数}}{m \times m \text{ 可逆矩阵的个数}} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^n - q^k}{q^m - q^k} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^{n-k} - 1}{q^{m-k} - 1}.$$

当然, 上式还可以进一步简化或展开.

7. (15 分) 记 H 为所有函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对函数加法和乘法构成的 $\mathbb{R}$-向量空间, 变元记为 x. 证明 H 的元素 $(\sin x)^{1898}, \ldots, (\sin x)^{2022}$ 线性无关.

解答. 方法多种. 譬如假设有线性关系式 $\sum_{k=1898}^{2022} p_k (\sin x)^k$, 则因为多项式 $\sum_k p_k X^k$ 若非零则至多只有 124 个根, 而正弦函数可以取无穷多个值, 故必有 $\forall k,\ p_k = 0$.