

几何学期中考试

考试日期: 2022年11月6 日。考试时间: 2小时。

题1 (15分) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 是欧氏空间中任给的四个向量, 起点为 O 。证明它们的端点共面的充分必要条件是它们中任意取三个得到的混合积(体积)满足恒等式 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$.

题2 (15分) 设 \mathbb{P} 为顶点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ 落在单位球面上的正八面体, 其中 A_1A_3, A_2A_4, A_5A_6 是主对角线, O 为其重心。以 $\{O; \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_5}\}$ 为右手直角坐标系中 x, y, z 轴的正向单位向量。请用空间解析几何的方法来解答以下问题; 每一个距离或角度求出正确值, 得3分。

- (1) 求三角形 $A_3A_4A_5$ 所在平面 Σ 与 A_1 的距离;
- (2) 求直线 A_1A_6 与平面 Σ 之间的夹角;
- (3) 求直线 A_1A_5 与 A_2A_3 之间的夹角和距离;
- (4) 求三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面与平面 Σ 之间的夹角。

题3 (15分) 在平面直角坐标系 I 中(右手系), 有一条二次曲线 Γ , 方程为 $x^2 + xy + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$. (1) 试求出它的长轴和短轴所在直线; (2) 写出这条二次曲线在某个新直角坐标系(右手系)中的标准方程; (3) 求出到新直角坐标系 I' 的坐标变换公式。

题4 (15分) 设 $\phi = \Sigma_1 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_3$ 是三个平面反射复合而成的空间等距变换, 且三个平面交于一点 O 。证明: ϕ 是一个以 O 为不动点的“旋转反射” $r \circ \Sigma$, 其中 r 的旋转轴 l 过 O 点, 而反射平面 Σ 过 O 且垂直于 l .

题5 (24分) 判断题。每道6分, 作出正确判断得2分, 简要说清理由(或举出反例并描述清楚其构造)得4分。

- 1) 以给定空间异面直线 l_1, l_2 为不变直线的空间仿射变换有2个自由度。
- 2) 给定一个平行六面体, 则将它映到自身的反定向空间仿射变换共有24个。
- 3) 对球面三角形(不退化为三点共线), “外角大于内对角”仍成立。
- 4) 平面上一个旋转 r 与一个反射 l , 只要反射轴 l 不通过 r 的旋转中心, 则复合的结果 $l \circ r$ 一定是一个滑反射。

题6 (10分) 对于一个平面仿射变换 ϕ , 设其在一个么正标架下坐标表示是: $x' = y, y' = -x + y$.

- (1) 试求其变换矩阵的特征值, 并证明它有复的特征向量 $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, 其中 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是实向量。
- (2) 证明这个变换 ϕ 的作用下, 有一个椭圆 Γ 是“不变的”, 也就是 $\phi(\Gamma) = \Gamma$.
- (3) 证明 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是这个椭圆的共轭直径。

题7 (6分) 任给一对空间异面直线, 是否存在一个平面 Σ 和一个空间仿射变换 ϕ , 使得在 ϕ 的作用下, Σ 仍然映为自身, 而两直线互换? 如果不存在, 请证明; 如果存在这样的平面 Σ 和空间仿射变换 ϕ , 请找出其全部构造。