一. (30分) 考虑实矩阵和实向量

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

设$V \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$为包含$\alpha$的二维$L_A$-不变子空间. $\mathbb{R}^{3\times 1}$上的标准内积限制在V上, 使V成为内积空间. 设$T \in L(V)$为L_A限制在V上得到的线性变换. 求$T^*\alpha$.

解. 容易求得, 向量$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$分别为$L_A$关于特征值$1, 2, 3$的特征向量. 而$\mathbb{R}^{3\times 1}$的二维$L_A$-不变子空间必为某两个$\beta_i$生成的子空间. 由于$V$包含$\alpha$, 所以只能有

$$V = \operatorname{span}\{\beta_2, \beta_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

另一方面, 对任意$\beta \in V$有

$$\langle T^*\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, L_A\beta\rangle = \langle (L_A)^*\alpha, \beta\rangle.$$

所以$(L_A)^*\alpha - T^*\alpha \in V^\perp$. 因此$T^*\alpha$为$(L_A)^*\alpha$在$V$上的正交投影. 而$(L_A)^*\alpha = A^t\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. 所以$T^*\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

二. (20分) 设V为有限维复内积空间, $T \in L(V)$. 证明存在V上的酉变换U, 使得$UT + TU$为正规变换.

证. 考虑极分解$T = QN$, 其中Q酉, N自伴. 取$U = Q^{-1}$. 则$UT = N$自伴. 另一方面, $TU = U^*UTU = U^*NU$也自伴. 因此$UT + TU$自伴, 从而正规. □

三. (20分) 设域F的特征不等于2, V是有限维F-线性空间, f是V上的非零对称双线性函数. 证明存在子空间$W \subset V$, 使得$\dim W = \operatorname{rank}(f)$并且$f|_W$非退化.

证. 取V的有序基$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$使得$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$. 经过对$\alpha_i$重新排序, 不妨设$c_i \neq 0 \iff i \leq r$, 这里$r = \operatorname{rank}(f)$. 取$W = \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. 则$\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$为$W$的有序基, 并且$[f|_W]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_r)$可逆. 从而$f|_W$非退化. □

四. (20分) 设V是域F上的有限维线性空间, f是V上的非退化双线性函数, 子空间$W \subset V$满足$f|_W = 0$. 证明$\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$.

证. 考虑线性映射$L_f : V \to V^*, L_f(\alpha)(\beta) = f(\alpha, \beta)$. 则$L_f(W) \subset W^0$. 由于$f$非退化, 所以$L_f$可逆. 因此

$$\dim W = \dim L_f(W) \leq \dim W^0 = \dim V - \dim W.$$

这推出$\dim W \leq \frac{1}{2}\dim V$. □

五. (10分) 设n为正整数, S为$\mathbb{C}^{n\times 1}$的有限子集, 满足$\operatorname{span} S = \mathbb{C}^{n\times 1}$. 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A\text{可逆, 并且对任意}\alpha \in S\text{有}A\alpha \in S\}.$$

证明存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得对任意$A \in \Omega$, PAP^{-1}均为酉矩阵.

证. 容易看出Ω为有限集. 考虑矩阵

$$C = \sum_{B\in\Omega} B^*B.$$

注意到对任意$A, B \in \Omega$总有$BA \in \Omega$. 所以对任意$A \in \Omega$有

$$A^*CA = \sum_{B\in\Omega} (BA)^*(BA) = \sum_{B\in\Omega} B^*B = C.$$

另一方面, 由于C为正定Hermite矩阵, 所以存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$使得$C = P^*P$. 结合起来有$A^*P^*PA = P^*P$, 即$PAP^{-1}$为酉矩阵. □