

# 2018 年春季概率论期末考试

教师：任艳霞

2018 年 6 月 18 日

1. (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对  $n$  个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率近似公式（用正态分布函数表示）。

2. (10 分) 设  $X$  是离散型随机变量， $Y$  是连续型随机变量，且对随机变量  $X$  满足  $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$ ，并且随机变量  $Y$  有密度函数  $f(y)$ ，且  $X$  和  $Y$  独立。问： $X + Y$  是不是连续型随机变量，如果是，请求出其密度函数；若不是，请给出理由。

3. (10 分) 设汽车保险索赔额是服从指数分布的随机变量。若在有扣除额  $d$  ( $d$  以下不赔付， $d$  以上扣除  $d$ ) 后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？

4. (15 分) 设  $(X, Y)$  是联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}$$

令  $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$

- (1) 证明  $X, Z$  独立且服从  $N(0, 1)$  分布；
- (2) 求  $(|X|, |Z|)$  的密度函数；
- (3) 求  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。

5. (10 分) 假设一只蚕产的卵的个数  $\xi$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布，而每个卵能成虫的概率为  $p$ ，且每个卵之间成虫是相互独立的，并设一只蚕产的卵的成虫数为随机变量  $\eta$ ，问

- (1) 求  $\eta$  的数学期望；
- (2) 求  $E(\xi|\eta)$ 。

6. (15 分) 设随机变量列  $\{X_n\}_{n=2}^\infty$  满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}$$

- (1) 证明  $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$  以  $L^2$  收敛（均方收敛）到 0；
- (2) 证明  $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$  依概率收敛到 0；
- (3) 证明  $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$  不几乎处处收敛到 0。

7. (10 分) 现设有股票价格模型如下：假设当前时间的股票价格为  $s$ , 则一个单位时间后股票的价格以概率  $p$  上涨为  $us$ , 以概率  $1-p$  下跌为  $ds$ 。记  $W_n$  为  $n$  个单位时间后的股票价格。

- (1) 请自己构造随机变量, 并用其来表示  $W_n$ ;
- (2) 证明存在常数  $c$ , 使得  $\frac{1}{n} \log W_n$  几乎处处收敛到, 这里  $\log$  是以 10 为底的对数;
- (3) 给定  $u = 1.012, d = 0.990, p = 0.4$ , 请给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似公式 (用正态分布函数表示) .

$(\log 1.012 = 0.005, \log 0.990 = -0.004, \log 1.3 = 1.14)$

8. (20 分) 称随机变量是对称分布的, 若

$$P(X < -x) = P(X > x), \quad \forall x \geq 0$$

- (1) 证明  $X$  是对称分布的充要条件是  $X$  和  $-X$  是同分布的;
- (2) 证明  $X$  是对称分布的充要条件是  $X$  的特征函数  $\varphi(x)$  是实值偶函数;
- (3) 假设存在某个对称分布的随机变量  $X$  的特征函数为  $\phi(x) = e^{-\sqrt{|t|}}$ , 证明  $E(X^2) = \infty$
- (4) 设随机变量序列  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  独立同分布, 且特征函数为  $\phi(x)$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , 求实数列  $\{a_n\}$  使得  $\frac{S_n}{a_n}$  依分布收敛到一个非常值的随机变量, 并给出极限分布.