北京大学数学学院期末考试试题

2013 - 2014 学年 第二学期

考试科目：数学分析　　考试时间：14 年 06 月 09 日

姓　名：________　　学　号：________

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (15') (1) 叙述函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上不一致收敛的定义； (2) 证明函数列 $f_n(x) = arctan(nx)(n = 1, 2, ...)$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛.

2. (10') 求极限 $\lim_{x\to 1-0} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}} dt$.

3. (12') 求 $f(x) = xe^{x^2+2x}$ 在 $x = -1$ 处的 Taylor 级数.

4. (12') 证明 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, (x \neq 0), f(0) = 0$ 在 $x = 0$ 处具有任意阶导数并求 $f^{(10)}(0)$ 和 $f^{(11)}(0)$.

5. (10') 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ 的和.

6. (15') 设 $f(x)$ 以 2π 为周期且 $f(x) = \pi + x, (x \in [-\pi, 0)); f(x) = \pi - x, (x \in [0, \pi))$. (1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数； (2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 的和函数； (3) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

7. (10') 求极限 $\lim_{\lambda\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{(\sin \lambda x)^2 dx}{x^2}$.

8. (10') 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 内一致收敛但不是绝对一致收敛. 证明：对该级数适当加上括号后可以得到一个函数项级数 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m(x)$, 使得它在 $(0, 1)$ 内绝对一致收敛。

9. (6') 设非多项式函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内每点处都能展成幂级数. 证明：存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得对任意的正整数 n 有 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.