1. 计算下列各行列式(28分，每小题7分）：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_2x_3x_4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_1x_3x_4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_1x_2x_4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_1x_2x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. （32分）设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) （12分） 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$的一个极大无关组;

(b) （10分） 证明: $\beta \in < \alpha_1, \cdots, \alpha_4, \alpha_5 >$

(c) （10分）求出方程组 $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i x_i = \beta$的解集。

3. （10分）

(a) (5分) 叙述克拉姆(Cramer) 法则,

(b) (5分）证明克拉姆法则。

4. （10分）设$s_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}, k = 1, 2, \cdots, n$. 证明

$$\begin{vmatrix} s_1 - a_{11} & \cdots & s_1 - a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ s_n - a_{n1} & \cdots & s_n - a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中n是正整数。

5. (10分） 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^m, \beta \in F^m$. 设$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = r$.设$\eta_1, \cdots, \eta_s$是方程组

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

的解 。证明$\dim_F(< \eta_1, \cdots, \eta_s >) \le \min\{s, n-r+1\}$.

6. (10分) 设$A \in M_n(F)$是n阶对称矩阵， 证明$r(A) = r$的充要条件是(1)存在r阶主子式非零， (2)所有的$r+1$阶主子式为0.