集合论与图论 2017 年期末考试

June 20, 2017

1.（10 分）叙述并证明 Schroder-Bernstein 定理.

2.（10 分）设无向图 $Q_1 = (\{0,1\}, \{(0,1)\})$，令 $Q_n = Q_1 \times Q_{n-1}$ $(n > 1)$.

(a) Q_n 是否是欧拉图？说明理由；

(b) Q_n 是否是哈密顿图？说明理由.

3.（10 分）设 $G = (V_1, V_2, E)$ 是二部图，V_1 中的顶点度数均为 $s > 0$，V_2 中的顶点度数均为 t. 若 $|V_1| \le |V_2|$，证明 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

4.（10 分）设 T 是树，证明 T 至少有 $\Delta(T)$ 片叶子.

5.（10 分）证明色多项式 $f(G,k)$ 的前两项为 $k^n - mk^{n-1}$，n, m 分别为 G 的阶数和边数.

6.（10 分）设 G 为 n 阶简单无向图，

(a) 若 G 为正则图，则 $\beta_0(G) \le \frac{|V(G)|}{2}$；

(b) 证明 $\chi(G) \ge \frac{n}{\beta_0(G)}$.

7.（10 分）设 G 是 2-连通的简单无向图且最小度大于等于 3，若 G 不是完全图，证明存在顶点 u, v, w，使得 $(u,v), (u,w) \in E(G), (v,w) \notin E(G)$, 且 $G - \{v, w\}$ 连通.

8.（15 分）设简单无向图 G 有 $2n$ 个顶点和 $n^2 + 1$ 条边，证明 G 中必存在 K_3.

9.（15 分）设 G 为无向简单图，

(a) 证明 $\chi(G) \le 1 + \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}$；

(b) 若 $\delta(G) \ge 3$，则 G 中必存在偶圈.