

# 2015-2016 学年第二学期高等代数 II 期中考试 (田青春)

May 1, 2016

一、(20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a. 求  $A$  的极小多项式及特征多项式;
- b. 求  $A$  的 Jordan 标准型.

二、(30 分)

- a. (5 分) 叙述 Eisenstein 判别法;
- b. (10 分) 证明 Eisenstein 判别法;
- c. (15 分) 设  $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ , 求  $\mathbb{Q}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}\}$  作为  $\mathbb{Q}$ -线性空间的维数 (需要写出详细的推理过程, 只有答案不给分).

三、(10 分) 证明: 多项式  $f(x) \in F[x]$  是一个不可约多项式的方幂的充要条件是: 对任意的多项式  $g, h \in F[x]$ , 如果  $f \mid gh$ , 那么存在正整数  $m$  使得  $f \mid g^m$  或者  $f \mid h^m$ .

四、(15 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $F$ -线性空间  $V$  的一组基,  $W$  是  $V$  的  $r$  维子空间.

- a. 证明存在  $i_1, \dots, i_{n-r}$  使得  $V = W \oplus \langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-r}} \rangle$ ;
- b. a 中的  $i_1, \dots, i_{n-r}$  是唯一 (不计顺序) 的吗? 证明你的判断.

五、(15 分) 设  $A \in M_{10}(\mathbb{C})$ , 请确定分别满足下列条件的矩阵是否存在。如存在列举它们的 Jordan 标准型 (写出推理过程, 只有答案不给分) .

- a.  $A^4 = 0$ ,  $\text{rank}(A^3) = 1$ ,  $\text{rank}(A^2) = 3$ ;
- b.  $A^5 = 0$ ,  $\text{rank}(A^2) = 5$ ,  $\text{rank}(A^3) = 4$ .

六、(10 分) 如果两个实矩阵在复数域上相似, 那么它们在实数域上也相似。