几何学期末考试

考试日期: 2022 年12 月30 日。考试时间: 2小时。

题1 （15分） 给定空间四面体$ABCD$，以及AD线段上一点R，BD线段上一点S，CD线段上一点T。设三个三角形RBC, SCA, TAB所在平面交于一点P，并记DP与三角形ABC所在平面交点为Q。证明：$\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{\overrightarrow{DR}}{\overrightarrow{RA}} + \frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SB}} + \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TC}}$.

题2 （15分） 取定空间直角坐标系，写出关于平面$ax + by + cz = 0$的反射在原幺正基下的矩阵A，并验证：A 是正交阵；$A^2 = I$；A有特征值+1（其特征向量张成一个二维子空间）和特征值-1（有一个实特征方向）。

题3（20分）在一个给定的直角坐标系中，旋转单叶双曲面M由方程$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ 决定。任意取定一点$p = (x_0, y_0, z_0)$在它外侧（即有$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 1 > 0$），由$p$向$M$作切线（定义为:该直线的点斜式参数方程$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ 与上述方程$f(x, y, z) = 0$联立后恰好有一对相等实根）。

（1）求证这些切点全体构成某双曲线，并求出它所在平面的方程；

（2）求证这条双曲线的中心与p和原点$(0, 0, 0)$三点共线。

题4（10分） 陈述巴普士Pappus定理的对偶命题，并选一种方法证明此命题。

题5（20分） 判断命题正误。每道4分，判断正确得2分，简要说清理由得2分。

（1）一个凹四边形的二维有界区域，不能射影等价于一个正方形区域。

（2）平面上两个图形的面积之比是仿射不变量，但不是射影不变量。

（3）三维空间建立一个仿射坐标系的自由度为$DOF = 12$。

（4）扩充平面上有两不动点的全体$M\ddot{o}bius$变换构成单参数（实）变换群。

（5）射影平面上的任何一个射影变换都有至少一个不动点。

题6 （10分） 在上半平面$\{(x, y)|y > 0\}$ 上，任取S_1, S_2 是与边界x轴正交的欧氏半圆或欧氏射线，且S_1, S_2彼此不交，没有公共点（从而也不相切）。若有一条欧氏半圆或欧氏射线S，与S_1, S_2 同时正交，这个构形称为上半平面的一个“公垂线构形”。取S 与S_1, S_2 的交点p_1, p_2 以及S与x轴的交点p_0, p_3，定义S_1, S_2 的“距离”为顺序四点复交比$c = cr(p_0, p_1; p_2, p_3)$。证明：

（1）给定S_1, S_2 如上，则存在唯一的S 与S_1, S_2 构成“公垂线构形”。

（2）若另一个“公垂线构形”$\tilde{S}$ 与$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$，可以通过一个莫比乌斯变换，变为S 与S_1, S_2，则对应定义的距离$\tilde{c} = c$。

（3）反之，若对应的不变量$\tilde{c} = c$，则一定存在一个莫比乌斯变换，保持上半平面不变，而把“公垂线构形”S 与S_1, S_2，对应映为$\tilde{S}$ 与$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$。

题7（10分） 射影平面上给定三点A, B, C及过A点的线l，l不含B或C点。

（1）证明：存在一个单参数族的二次曲线$\{\Gamma_t\}$，使得其中每一条都通过A, B, C三点，并与l相切。

（2）试问：如果B, C为无穷远点，Γ_t在仿射平面上的中心随实参数t变化，轨迹是什么？

（3）请问：如果任取平面上一条定直线为无穷远直线，上面第（2）问中的结论，是否还成立？