数学模型 HW5

2019 年 5 月 16 日

1 第一题

当 $x \neq x_0$ 时我们有 $G'' = 0$，从而

$$G(x,x_0) = \begin{cases} a+bx, & 0<x<x_0, \\ c+dx, & x_0<x<L. \end{cases}$$

根据边界条件，我们有

$$G(x,x_0) = \begin{cases} bx, & 0<x<x_0, \\ d(x-L-1), & x_0<x<L. \end{cases}$$

根据 $G''(x,x_0) = \delta(x-x_0)$, 我们得知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G'(x,x_0)$ 在 $x = x_0$ 处有一个高度为 1 的跳跃，而 $G(x,x_0)$ 连续，从而我们有

$$d = \frac{x_0}{1+L}, \quad b = \frac{x_0-L-1}{1+L}.$$

因此，

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{x(x_0-L-1)}{L+1}, & 0<x<x_0, \\ \dfrac{x_0(x-L-1)}{L+1}, & x_0<x<L. \end{cases}$$

2 第二题

2.1

齐次方程有平凡解

$$\phi_0 = C\sin x,$$

且满足

$$\int_0^\pi f\phi_0 \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi C\sin^2 x \,\mathrm{d}x \neq 0,$$

因此该问题无解。

2.2

齐次方程没有非平凡解，该问题存在唯一解。

2.3

齐次方程没有非平凡解，该问题存在唯一解。

3 第三题

齐次方程的解为

$$\phi_0 = C\sin x + D\cos x.$$

要让 BVP 有解，则需要对于任意 C, D，均满足

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (\beta + x)(C\sin x + D\cos x)\,\mathrm{d}x = 2C\pi = 0$$

因此对于任意 β, 该 BVP 无解。

另外一种证明

若 u 是一个满足条件的解，那么

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} u'' \sin x\,\mathrm{d}x \\
=&\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}u' \\
=&u'\sin x\big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u'\cos x\,\mathrm{d}x \\
=&-\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}u' \\
=&-u'\cos x\big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u'' + u)\sin x\,\mathrm{d}x = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} (\beta + x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

矛盾. 即不存在 β，使该 BVP 有解。

4 第四题

4.1

令 $b_n = n!a_n$, 则

$$b_{n+1} - b_n = n!f(n)$$

因此

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k!f(k)\right]$$

4.2

令 $b_n = na_n$, 则

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(n+2)(n+3)},$$

因此

$$a_n = \frac{1}{n}\left[b_0 - \frac{n}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{n}\left[a_1 + \frac{1}{6} - \frac{n}{(n+1)(n+2)}.\right]$$

4.3

a_0 有限，则 $b_0 = 0$, $a_1 = b_1 = -\frac{1}{6}$.