数理统计 2017 年期末考试

January 11, 2018

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma_0^2)$ 的简单随机样本（σ_0 已知）. 求:

（1）μ 的最大似然估计;

（2）μ 的矩估计;

（3）Fisher 信息量 $I(\mu)$;

（4）μ 的无偏估计的方差下界;

（5）问 (1) 中的估计是最小方差无偏估计吗? 说明理由;

（6）试求 μ^2 的无偏估计.

2. 判断正误.

（1）一个检验的显著性水平为其拒绝零假设的概率;

（2）一个检验的显著性水平减小时，其功效会上升;

（3）若显著性水平为 α 的检验拒绝了零假设，则零假设为真的概率为 α;

（4）零假设被错误拒绝的概率即为检验法的功效;

（5）若样本落在了检验的拒绝域内，则第 I 类错误发生;

（6）似然比是随机变量.

3. 设线性模型 $y_i = a + bx_i + \epsilon_i$，现有观测数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$，假定 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 相互独立，且均值为 0 方差为 σ^2.

（1）当 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ 时，求 a, b 的最小二乘估计 $\hat{a}, \hat{b}$ 及它们的方差 $\mathrm{Var}(\hat{a}), \mathrm{Var}(\hat{b})$;

（2）若限定 $x_1, \cdots, x_n \in [-1, 1]$，应如何选取 x_i 使得 $\mathrm{Var}(\hat{b})$ 最小?

4. 设在单因素实验中，因素 A 共有 $A_1, \cdots, A_s$ 共 s 个水平，对水平 A_i 重复进行了 r_i $(r_i \geq 1)$ 次实验，得到数据 $y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{ir_i}$. 假定数据满足模型 $y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$, $(1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r_i)$，其

中 $\{e_{ij}\}$ 独立同分布均服从 $N(0,\sigma^2)$. 现定义偏差平方和 $S_T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i}(y_{ij}-\bar{y})^2$，其中 $\bar{y}$ 为所有样本的均值. 试定义因素 A 引起的平方和 S_A 及误差的平方和 S_e，并推导平方和分解公式 $S_T=S_A+S_e$.

5. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=e^{-(x-\frac{1}{\theta})},\quad x>\frac{1}{\theta},$$

且有简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

（1）求 θ 的最大似然估计；

（2）求 θ 的一个充分统计量.

6. 设 X 是来自 $\mathrm{Beta}(\theta,1)$ 分布的一个样本，$\theta>0$，分布的密度函数为

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1},\quad 0<x<1.$$

（1）设 $Y=-(\log X)^{-1}$，求 $\theta\in[Y,2Y]$ 的置信度；

（2）寻找一个枢轴量，并利用该量构造一个置信区间 $[0,\theta_U]$，使之拥有与 (1) 相同的置信度.

7. 现对三角形的三个内角 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 进行测量，第一次测量 θ_1 得到观测值 y_1，第二次测量 θ_2 得到观测值 y_2，第三次和第四次均测量 θ_3 得到观测值 y_3 和 y_4. 设测量无系统偏差，测量误差独立同分布服从 $N(0,\sigma^2)$. 求 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 的最小二乘估计.

8. 设总体服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，σ^2 的先验分布为逆伽马分布 $IG(\alpha,\beta)$，其密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-\alpha-1}e^{-\beta/x},\quad x>0.$$

现有样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 σ^2 的后验分布、后验期望，以及当 $n\to\infty$ 时后验期望的极限.