

北京大学数学科学学院2019年《概率论》期中试题

姓名: 学号

1. (6分) 一个坛子中有2个红球, 2个蓝球, 从中无放回地任取2个球.
 - 建立概率空间描述这一随机试验, 并说明你建立的是否是古典概型.
 - 求取到的2个球颜色相同的概率.
2. (9分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x/4 & 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2 + (x-1)/4 & 1 < x \leq 2, \\ 11/12 & 2 < x \leq 3, \\ 1 & 3 < x. \end{cases}$$
 求 (1) $P(X = 3)$, (2) $P(1/2 \leq X < \frac{3}{2})$, (3) $P(X \leq 2)$.
3. (10分) 储物箱里有3种不同的一次性手电. 第一种手电使用超过100小时的概率为0.7, 第二种和第三种手电相应的概率分别是0.4和0.3. 假设箱子里的手电20%为第一种, 30%为第二种, 50%为第三种.
 - 随机抽取一个手电, 能使用100小时以上的概率是多大?
 - 随机抽取一个手电, 已知手电使用超过100小时, 问它是第一种手电的概率是多大?
4. (15分) 假设 ξ, η 都是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的连续型随机变量.
 - 假设 f 是 R^1 上可测函数, $f(\xi)$ 是否为连续型随机变量? 为什么?
 - $(\xi, |\xi|)$ 是否为连续型随机变量? 为什么?
 - 若 ξ 与 η 分布相同, 是否一定有 $P(\xi = \eta) = 1$? 为什么?
(给出证明或举出反例)
5. (5分) 假设 ξ, η 与 ζ 都是随机变量, 并且 ξ 与 η 的分布相同. 试问 $\xi\zeta$ 与 $\eta\zeta$ 的分布是否一定相同, 为什么? (给出证明或举出反例)
6. (10分) 假设射击手每次射击的命中率为 $p(0 < p < 1)$, 现射击手连续射击且每次射击是独立的. 令 S_n 表示第 n 次击中目标时的射击次数, 求
 - 在条件 $S_2 = j$ ($j \geq 2$)的条件下, S_1 的条件分布.
 - 在条件 $S_1 = i$ ($i \geq 1$)的条件下, S_2 的条件分布.
7. (15分) 假设 X 与 Y 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx(y-x)e^{-y} & 0 \leq x \leq y < \infty, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求 c .
- (2) 计算在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度函数, 其中 $y \in (0, \infty)$.
- (3) 求 $P(0 < X < 1/2 | Y = 1)$.
8. (20分) 设 X_1, X_2, X_3 独立且服从参数为1的指数分布.
- (1) 求 $\frac{X_1}{X_1 + X_2}$ 的分布.
- (2) 求 $U = X_1 + X_2, V = X_1 + X_3$ 与 $W = X_2 + X_3$ 的联合概率密度函数.
- (3) 问 U, V, W 是否相互独立? 为什么?
- (4) 求 X_3 与 $\max(X_1, X_2)$ 的联合密度函数.
9. (10分) 假设有3个玩家 A, B, C 依次掷骰子, 顺序为 $ABCABCA\cdots$.
- (1) 求3个玩家中 A 首先掷出点数6, B 第二个掷出点数6, C 第三个掷出点数6的概率.
- (2) 求首个点数6是由 A 掷出, 第二个点数6是由 B 掷出, 第三个点数6是由 C 掷出的概率.