几何学期中考试

考试日期: 2020年12月5 日。考试时间: 2小时。

题1 （15分） 空间中不共面4点P_i（$i=0,1,2,3$）可以张成一个四面体，其体积等于“任一底面的面积乘以对应高的1/3”. 取空间直角坐标系，4点坐标为(x_i,y_i,z_i)，试用关于这些坐标的行列式函数，表示出这个体积（不计正负），并证明你的结论。进一步，请说明上述体积与底面（和对应高）的取法无关。

题2（15分） 在平面直角坐标系I中（右手系），有一条二次曲线Γ，方程为$9x^2+4xy+6y^2+2x+16y+10=0$.（1）试求出它的长轴和短轴所在直线；（2）写出这条二次曲线在某个新直角坐标系（右手系）中的标准方程；（3）求出到新直角坐标系I' 的坐标变换公式。

题3 （15分） $\mathbb{Q}$是双叶双曲面，它在直角坐标系$Oxyz$（相对于右手系幺正标架建立）下的方程为$x^2+y^2-z^2=-1$。设ℓ是两平面$x=1$和$z=0$的交线。设$\sigma(\theta)$是过直线ℓ的平面，它与平面$z=0$的交角为θ。
问：平面$\sigma(\theta)$与$\mathbb{Q}$ 何时有截线？截线存在时，分别是什么类型的曲线？写出当θ从0连续变到$\pi/2$时，你的结论和理由。

题4（15分） 设ϕ是一个空间等距变换，保定向，无不动点。证明它是一个螺旋运动（即：$\phi=f\circ g$是平移f与旋转g的复合，且f平移方向与g旋转轴平行）。

题5（24分） 判断题。每道6分，作出正确判断得2分，简要说清理由得4分。

1）平面上全体抛物线构成的曲线类，有4个自由度。

2）给定一个正八面体，则将它映到自身的反定向空间等距变换共有24个。

3）给定一个空间仿射坐标系以及不在坐标平面上的一个点P，一定存在过P点的一个平面Σ，使得Σ与三个坐标轴交出的三点构成的三角形，恰好以P点为其重心。

4）双曲线Γ与双曲线Γ'总是有相同的共轭方向，当且仅当它们有相同的渐近线方向。

题6（10分） 在平面直角坐标系中，已知仿射变换f的变换公式为$X'=AX+C$，其中2×2实矩阵A满足$A^2=-I$, I为单位阵。证明：

（1）f没有不变方向，有唯一不动点O'。

（2）存在一对标架向量v_1,v_2，使得$f(v_1)=v_2, f(v_2)=-v_1$.

（3）存在幺正基e_1',e_2' 及非零实数λ，使得$f(e_1')=\lambda e_2', f(e_2')=-\frac{1}{\lambda}e_1'$.

（4）存在平面上的一个椭圆，使得它在f作用下保持不变。

题7 （6分） 平面上有两条抛物线S,S'，它们有一条公切线L，且位于L的同侧。与L平行且距离为t 的一条直线L_t，与S相交得到交点弦A_tB_t，与S'相交得到交点弦$A_t'B_t'$。试证：两条弦长之比$|A_t'B_t'|/|A_tB_t|$ 是一个与t无关的常数。