1.(每一问判断正确得 2 分, 给出简要理由或举出反例得 3 分)

(1) **错误**：考虑书上 91 页的例 2.3,$Z[\sqrt{-5}]$ 中 $9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, 因为 3 和 $2 \pm \sqrt{-5}$ 都是不可约元，即得 $3 \nmid 2 \pm \sqrt{-5}$，所以 3 不是素元。

(2) **正确**：反设存在 $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, x_1, x_2 \notin P$，则 $x_1x_2 \in I_1 \cap I_2 \subseteq P$, 与 P 为素理想矛盾。

(3) **正确**：反设存在 $x_1, x_2 \in I$, 但 $x_1 \in P_2 - P_1, x_2 \in P_1 - P_2$，则 $x_1 + x_2 \in I \subseteq P_1 \cup P_2$，但是 $x_1 + x_2$ 不可能属于 P_1 或 P_2。

(4) **错误**：考虑 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的代数闭包 $\overline{Q}$，则 $\overline{Q}/\mathbb{Q}$ 是代数扩张，考虑 $\sqrt[n]{p} \in \overline{Q}$,$p$ 是任一个素数，n 为任一个正整数，则 $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) : \mathbb{Q}] = n$，因为 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) \subseteq \overline{Q}$, 所以 $\overline{Q}/\mathbb{Q}$ 不是有限扩张。

(5) **错误**：考虑域扩张 $F_p(x,y)\ /\ F_p(u,v)$, 其中 u, v 是未定元, x, y 分别满足方程 $x^p - u = 0$, $y^p - v = 0$. 则该扩张是有限扩张, 不可分, 且不是单扩张, 所以有无穷多个中间域.

(6) **错误**：不对，考虑书上 122 页的例 3.9，有限域上的有理分式域 $F_p(t)$ 上的多项式 $f(x) = x^p - t$，则 $f(x)$ 不可约且只有一个根，记 K 为 $f(x)$ 在 $F_p(t)$ 上的分裂域，则 $K/F_p(t)$ 是有限正规扩张，但不是可分扩张。

(7) **正确**：F_{p^n} 就是 $x^{p^n} - x$ 在 F_p 上的分裂域，又因为有限域上的不可约多项式都是可分多项式，所以 F_{p^n}/F_p 是 $Galois$ 扩张。

(8) **正确**：由主理想整环上的有限生成模的分解定理，M 是一个自由模和 M 的挠子模的直和，因为 $Tor(M) = 0$，所以 M 自由。

2.(求出 α 得 5 分, 再求出 $f(x)$ 得 10 分; 或直接求出 $f(x)$ 得 15 分)

从书上单扩张定理的证明过程中可看出 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})$，记 $\alpha = \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$，则 α 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上的极小多项式为 $g(x) = (x - \sqrt{2})^3 + 3$，$\alpha$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ 上的极小多项式为 $h(x) = (x + \sqrt[3]{3})^2 - 2$，设 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式为 $f(x)$，则 $g(x) \mid f(x), h(x) \mid f(x)$，

$$g(x) = (x - \sqrt{2} + \sqrt[3]{3})(x - \sqrt{2} - e^{\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{3})(x - \sqrt{2} - e^{-\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{3})$$
$$h(x) = (x - \sqrt{2} + \sqrt[3]{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$$

把 $\sqrt{2}$ 映到 $-\sqrt{2}$，把 $\sqrt[3]{3}$ 映到自己是 $K/\mathbb{Q}$ 上的一个 $Galois$ 变换，从而看出 $f(x)$ 其它的两个根是 $-\sqrt{2} + e^{\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{3}, -\sqrt{2} + e^{-\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{3}$。计算得到 $f(x) = ((x+\sqrt{2})^3 + 3)((x - \sqrt{2})^3 + 3) = x^6 - 6x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 36x + 1$。

3.(求出 $Gal(E/\mathbb{Q})$ 得 10 分, 4 个中间域每个 2 分)

$f(x) = x^3 - 2x + 3$, 容易验证 $f(x)$ 没有有理根，从而不可约。计算判别式 $\Delta = -4(-2)^3 - 27(3)^2 = -211 \notin \mathbb{Q}^2$，所以 $Gal(E/\mathbb{Q}) = S_3$，有三个二阶子群，一个三阶子群，以及两个平凡子群。设 $f(x)$ 的三个根分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，则三个二阶子群对应的中间域分别为 $\mathbb{Q}(\alpha_1), \mathbb{Q}(\alpha_2), \mathbb{Q}(\alpha_3)$，三阶子群对应的中间域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-211})$，其余的两个中间域为 $\mathbb{Q}$ 和 K。

4.(证出每个 α^{q^k} 均是根得 8 分, 证出只有这些根得 7 分)

记 $K = F_q(\alpha)$，则 $[K : F_q] = n$，K 就是 F_{q^n}（同构意义下），所以 K/F_q 是 $Galois$ 扩张，$|Gal(K/F_q)| = n$。考虑同构 $\sigma : K \to K, \sigma(\beta) = \beta^q$, 因为 F_{q^m} 就是 $x^{q^m} - x$ 在 F_q 上的分裂域, 容易看出 $\sigma \in Gal(K/F_q)$, 且 $Gal(K/F_q) =< \sigma >$。而 $f(x)$ 的根就是集合 $\{\sigma(\alpha) | \sigma \in Gal(K/F_q)\}$，命题得证。

5.(酌情给分, 可以利用结构定理)

由题目条件得到 $M = M(p^n), ann(x) = (p^n)$, 取 $z \notin M - Rx$, 设 $ann(y) = (p^m), m \leq n$. 考虑投射 $\psi : M \to M/Rx$, 则在 M/Rx 中 $ann(\overline{z}) = (p^k), k \leq m, \overline{z} = \psi(z)$。这样 $p^k z = rx, r \in R$, 两边同时乘以 p^{m-k}，得到 $p^m z = p^{m-k} rx = 0$, 所以 $p^n | p^{m-k} r, p^{n-m+k} | r$，因为 $n - m \geq 0$，所以 $p^k | r, r = p^k r_1$，这样 $p^k(z - r_1 x) = 0$, 令 $y = z - r_1 x$，则 $ann(y) = (p^k)$，我们断言 $Ry \cap Rx = \{0\}$: 设 $ry = r'x$，则 $\psi(ry) = 0 = r\overline{y} = r\overline{z}$，所以 $p^k | r$，从而 $ry = 0$。