1. $A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2B$

(a) $\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B^2 & A(0) = A_0 \\ \dfrac{dB}{dt} = +2k_1 A - 2k_2 B^2 & B(0) = B_0 \end{cases}$

由 $\frac{d}{dt}(2A+B)=0$, $2\bar{A}+\bar{B} = 2A_0+B_0 \triangleq M$ --- ①

令 $\frac{dA}{dt}=\frac{dB}{dt}=0$, 得 $\bar{A} = \frac{k_2}{k_1}\bar{B}^2$. --- ②

由 ① ② 得 $\bar{A} = \frac{k_2}{k_1}\left(\sqrt{\frac{k_1^2}{16k_2^2}+\frac{k_1}{2k_2}M} - \frac{k_1}{4k_2}\right)^2$

$$\bar{B} = \sqrt{\frac{k_1^2}{16k_2^2}+\frac{k_1}{2k_2}M} - \frac{k_1}{4k_2}$$

(b) Jacobi matrix at $(\bar{A},\bar{B})$

$$J = \begin{bmatrix} -k_1 & +2k_2\bar{B} \\ 2k_1, & -4k_2\bar{B} \end{bmatrix}$$

$p = k_1 + 4k_2\bar{B} > 0$ $\quad q = 0$, 临界情况

(c) $S(t) = A(\ln(k_1 A)-1) + B(\ln\sqrt{k_2}B - 1)$

$$\frac{dS}{dt} = \ln k_1 A \frac{dA}{dt} + \ln(\sqrt{k_2}B)\frac{dB}{dt}$$

$$= \ln(k_1A)(-k_1A+k_2B^2) - 2\ln(\sqrt{k_2}B)(-k_1A+k_2B^2)$$

$$= -(-\ln(k_1A)+\ln(k_2B^2))(-k_1A+k_2B^2)$$

由 $y=\ln x$ 单调，知，$\frac{dS}{dt} \le 0$.

2 (a) 见作业2.

(b) 令 $x = y_0 - y_1$，则 x 可视作在 $[0,2\pi]$ 圆上演化

$$\dot{x} = a_0 - a_1 - b\sin(x)$$

类似上一问的讨论，当 $|a_0-a_1|<b$，或 $|a_0-a_1|=b$，时

x 会渐近收敛于圆上一点

即 $|a_0-a_1|\le b$ 时，小蓝与AI的频率逐渐同步.

3. (a) 格林函数解法见作业3.

(b) 考虑齐次问题

$$\begin{cases} \psi''=0, & 0<x<L \\ \psi(0)=0, & \psi'(L)=0 \end{cases}$$

有非平凡解 $\psi=C$. C是常数

当 $\int_0^L f(x)\,dx=0$ 时，问题有无穷多个解

当 $\int_0^L f(x)\,dx\neq0$ 时，问题无解.

4. (a) 特征线为 $\frac{dS}{dt}=1$, $\frac{dA}{dt}=1$

由于一定有 $A(t)>S(t)$ (否则 $n(t,S,A)=0$)

我们只需按 $S(t)$ 与 t 的关系讨论

特征线起源

(I) 当 $s>t$ 时

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}=1 & S(0)=S_0>0 \quad \text{--- ①} \\ \dfrac{dA}{dt}=1 & A(0)=A_0\ (>S_0>0) \quad \text{--- ②} \\ \dfrac{dN}{dt}=-P(S,A)N, & N(0)=n_0(S_0,A_0) \quad \text{--- ③} \end{cases}$$

由①②知 $S(t)=t+S_0 \quad A(t)=t+A_0$ --- ④

而 $\tau\in[0,t]$ 时 $S(t)=(t-\tau)+S(\tau)$

$A(t)=(t-\tau)+A(\tau)$ --- ⑤

由③ $N(t)=N(0)\,e^{-\int_0^t P(S(\tau),A(\tau))\,d\tau}$

(由④⑤) $= n_0(S(t)-t,\ A(t)-t)\,e^{-\int_0^t P(S(t)-t+\tau,\ A(t)-t+\tau)\,d\tau}$

即 $n(t,s,a)=n_0(s-t,\ a-t)\,e^{-\int_0^t P(s-t+\tau,\ a-t+\tau)\,d\tau}$

(II) 当 $s<t$ 时

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt}=1 \qquad S(t_0)=0 \quad (t_0>0) & \text{---①} \\ \dfrac{dA}{dt}=1, \qquad A(t_0)=A_0\ (>0) & \text{---②} \\ \dfrac{dN}{dt}=-P(S,A)N, \qquad N(t_0)=M(t_0,A_0) & \text{---③} \end{cases}$$

$\boxed{④ \Rightarrow A_0 = A(t)-S(t)}$

由①②知 $S(t)=t-t_0, \quad t\geq t_0$ ---④

$A(t)=t-t_0+A_0, \quad t\geq t_0$

而对 $\tau\in[t_0,t]$ $S(t)=t-\tau+S(\tau)$

$A(t)=t-\tau+A(\tau)$ ---⑤

由③知 $N(t)=N(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t} P(S(\tau),A(\tau))\,d\tau}$

(由④⑤) $= M(S(t)-t,\ A(t)-S(t))\,e^{-\int_{S(t)-t}^{t} P(S(t)-t+\tau,\ A(t)-t+\tau)\,d\tau}$

则 $n(t,s,a) = M(s-t,a-s)\,e^{-\int_{t-s}^{t} P(s-t+\tau,\ a-t+\tau)\,d\tau}$

$(s-t+\tau\to\tau)$ $= M(s-t,a-s)\,e^{-\int_{0}^{s} P(\tau,\ a-s+\tau)\,d\tau}$

综上，$n(t,s,a)=\begin{cases} n_0(s-t,a-t)\, e^{-\int_0^t p(s-t+\tau,\, a-t+\tau)d\tau}, & a>s>t \\ M(t-s,a-s)\, e^{-\int_0^s p(\tau,\, a-s+\tau)d\tau}, & a>s,\ t\ge s \end{cases}$

(b) 特征 $\frac{ds}{dt}=1$ $\frac{dA}{dt}=1$ 表明

无放电时，S，A 随时间线性增加.

若 $t=t^*$ 时发生放电，$(S(t^*), A(t^*))$ 会被

重置为 $(0, S(t^*))$，即 $A(t^*)$ 会被忘记

若固定 a，$\forall u\ge a$ (a,u) 的重置都是 $(0,a)$

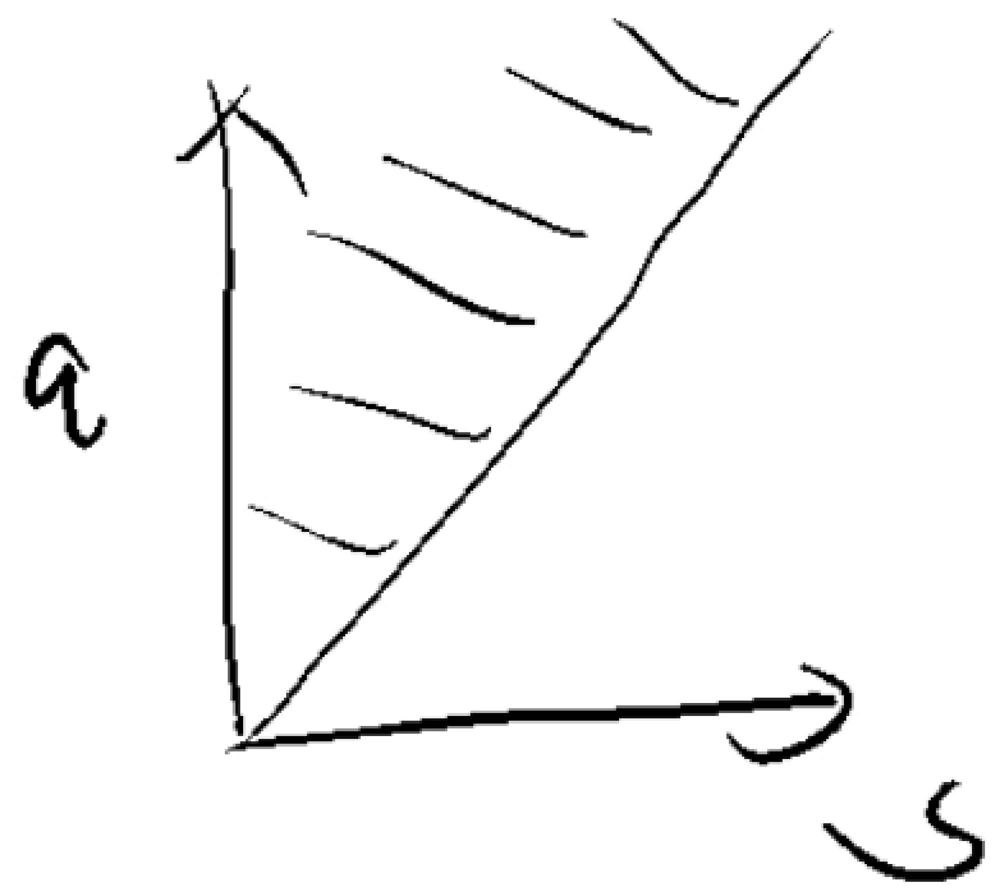
(a,u) 被重置的速率为 $P(a,u)\,n(t,a,u)$

所以被重置为 $(0,a)$ 的速率

$$n(t,0,a)=M(t,a)=\int_a^{+\infty} P(a,u)\,n(t,a,u)\,du$$

$(u\le a$ 时，$n=0)$ $$=\int_0^{+\infty} P(a,u)\,n(t,a,u)\,du.$$

令 $C=\{(s,a),\ 0<s<a<+\infty\}$



$=\{0<s<+\infty,\ s<a<+\infty\}$

$=\{0<a<+\infty,\ 0<s<a\}$

对方程在 C 上积分，得

$$\iint_C \partial_t n+\partial_s n+\partial_a n\,ds\,da = -\iint_C p(s,a)\,n(t,s,a)\,ds\,da$$

即 $$\frac{d}{dt}\iint_C n\,ds\,da - \int_0^{+\infty} n(t,s=0,a)\,da = -\iint_C pn\,ds\,da$$

即 $$\frac{d}{dt}\iint_C n\,ds\,da = 0.$$

(c) $\sigma = \frac{s}{2}+\frac{a}{4}$，不妨令 $\iint_C n\,ds\,da = 1$.

$$\frac{d}{dt}\iint_C \sigma n\,ds\,da = \iint_C \sigma\,\partial_t n\,ds\,da$$

$$= -\iint_C \sigma \partial_s n \, ds\,da \quad \text{---} \quad (\alpha)$$

$$- \iint_C \sigma \partial_a n \, ds\,da \quad \text{---} \quad (\beta)$$

$$- \iint_C \sigma p n \, ds\,da \quad \text{---} \quad (\gamma)$$

$$(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \int_0^a \sigma \partial_s n \, ds \, da$$

$$= -\int_0^{+\infty} \left[\sigma n \Big|_{s=0}^{s=a} - \int_0^a \partial_s \sigma n \, ds \right] da$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{a}{4} n(t, s=0, a) \, da + \frac{1}{2} \iint_C n \, ds\,da$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{a}{4} \int_0^{+\infty} P(a,u) \, n(t,a,u) \, du \, da + \frac{1}{2}$$

$$\overset{a \to s,\ u \to a}{=} \iint \frac{s}{4} P(s,a) \, n(t,s,a) \, ds\,da + \frac{1}{2}$$

$$(\beta) = -\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty} \sigma\, \partial_a n \, da \, ds$$

$$= \frac{1}{4}\iint_C n\, ds\, da = \frac{1}{4}$$

注意 $\frac{s}{4} - \left(\frac{s}{2}+\frac{a}{4}\right) = -\frac{s}{4} - \frac{a}{4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{s}{2}+\frac{a}{4}\right) - \frac{a}{8}$

$$\leq -\frac{1}{2}\sigma$$

则 $(\alpha)+(\beta)+(\gamma)$

$$= \iint_C \left(\frac{s}{4}-\sigma\right) p\, n\, ds\, da + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\leq -\frac{1}{2}\iint_C \sigma\, p\, n\, ds\, da + \frac{3}{4}$$

$(p \geq 1)$ $\leq -\frac{1}{2}\iint_C \sigma\, n\, ds\, da + \frac{3}{4}$

即证（可取 $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{3}{4}$）