# 几何 包志强 2018-19 秋 期末（回忆版）

共 10 题，每题 10 分

## 送分

（1） 平面直角坐标系中圆锥曲线不变量：$I_1 = 5$，$I_2 = 4$，$I_3 = -4$

（a） 证明其为椭圆；

（b） 求其半长轴与半短轴；

（2） 写出平面仿射标架上梯形（一组对边平行，另一组对边不相交的四边形）的仿射分类（即每种仿射等价类找到一个代表）**【不必证明，写出即可】**

（3） 射影平面上一般位置四点 A、B、C、D，在射影标架$[P_1, P_2, P_3, P_4]$下的坐标为$\langle(1,0,1)^T\rangle, \langle(0,1,1)^T\rangle, \langle(1,1,1)^T\rangle, \langle(0,0,1)^T\rangle$，试用 A、B、C、D 确定$P_1, P_2, P_3, P_4$

（“确定”指用两点确定一线或两线确定一点）**【也不必证明】**

## 计算

（4） 尤承业《解析几何》3.5 节例 3.5（P168）求对称轴、顶点及开口方向；

（5） 平面仿射标架下仿射变换$f(x, y) = (2x + 4y - 1, 3x + 3y - 3)$，求 f 的不变直线；

（6） 平面直角坐标系中一滑动反射把（1，1），（1，2）分别变为（0，0），（3/5，4/5），求该滑动反射的反射轴与滑动量（结果无三角函数和根号下根号的形式）

（7） 空间仿射坐标系中平面Π：$ax + by + cz + d = 0$ 与单叶双曲面Γ：$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$

证明：若$c^2 > a^2 + b^2$，则Π与Γ的交线为椭圆；

（8） 写出作共线三点 A、B、C 的第四调和点 D 的方法，并证明其合理性；

## 综合

（9） 对于空间中一椭球面Γ和一直线$\ell$

求证：对于任意不过椭球面Γ中心的直线$\ell$，都存在直线$\ell'$，满足：任取$\ell'$上一点 P，若 P 与$\ell$决定的平面与Γ的交线为椭圆（记为γ），则 P 为$\ell$关于γ的极点；

（10） 射影平面中圆锥曲线Γ为满足方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$的点的集合，其上三点 A、B、C 坐标分别为$\langle(1,0,1)^T\rangle$，$\langle(-1,0,1)^T\rangle$，$\langle(0,1,1)^T\rangle$，

求所有射影变换 f，满足：f(Γ)=Γ, f(B)=C, 且 A 为Γ上唯一的不动点。