北京大学常微分方程期末考试试题

(2022-2023 学年第二学期)

考试科目: 常微分方程　　　　考试时间: 2023 年 6 月 12 日

一 、(每小题 15 分, 共 60 分)

1. 求微分方程 $y'' - 2y' + y = e^{\alpha x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, 初值问题的解, 其中 α 是常数. 讨论.

2. 求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 初值问题的解.

3. 求下面微分方程组的通解

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. 求下面微分方程组的通解

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

二 、(10分) 求解Hermite微分方程的通解(可以考虑用幂级数方法)

$$y'' - 2xy' + 2y = 0$$

三 、(10分) 验证 $y = x$ 是方程

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = -2$$

2阶 Liouville

相应的齐次方程的一个特解, 进而求该方程的通解(要适当简化通解的表达式).

四 、(5分) (1) 求微分方程

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

以及初值问题 $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$ 的解 $x_t = \varphi(t, x_0, y_0)$, $y_t = \psi(t, x_0, y_0)$.

(2) 设 Ω_0 是平面上的任一个可求面积的有界闭区域，在映射

$$(x_0, y_0) \mapsto (x_t, y_t)$$

下， Ω_0 变成了 Ω_t. 试证明 Ω_t 与 Ω_0 的面积相等，即

$$\iint_{\Omega_0} dx_0 dy_0 = \iint_{\Omega_t} dx_t dy_t.$$

五 、(5分) 考虑微分方程

$$y'' - u(x)y = 0,$$

其中 $u(x)$ 在整个数轴上连续，当 $x \geq 1$ 时 $u(x) \geq 1$. 证明该方程的任何一个非零解 $y = \varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 都只有有限个零点。

六 、(5分) 试决定使得方程 $y'' + \frac{\alpha}{x^2} y = 0$ 的任意非平凡解均振动的所有可能的$\alpha \in \mathbf{R}$ 的值.

七 、(5分) 考虑方程

$$y'' + (1 + r(x))y = 0,$$

其中 $r(x)$ 在$[1, +\infty)$ 上连续, 且

$$\int_1^{+\infty} |r(x)| dx < +\infty.$$

证明：该方程存在一个解$\varphi(x)$ 使得

$$\lim_{x \to +\infty} |\varphi(x) - \cos x| = 0.$$

全卷完