

常微分方程考试

1. (25分) 解微分方程

$$y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x + e^{3x}.$$

2. (25分) 解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

3. (25分) 解方程

$$\begin{cases} y'' + ly = 0, \\ y(0) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y(x)$ 有界.

4. (15分) 考虑非齐次方程的 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} y'' + (lr(x) + q(x))y = f(x), \\ y(0) \cos \alpha - y'(0) \sin \alpha = 0, \quad y(1) \cos \beta - y'(1) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

其中 $r(x), q(x)$ 均为连续函数, $r(x) > 0$. 证明: 当 l 不是对应的齐次方程的 S-L 边值问题的特征值时, 它有且仅有一个解; 而当 $l = l_m$ 是相应的特征值时, 它有解的充分必要条件是

$$\int_0^1 f(x) \phi_m(s) ds = 0,$$

其中 $\phi_m(x)$ 是对应于特征值 l_m 的特征函数.

5. (10分) 假设函数 $q \leq 0$ 是连续的, 证明方程

$$y'' + q(x)y = 0,$$

满足边值条件

$$y(0) = a, \quad y(1) = b,$$

的解存在唯一. 进一步地, 如果 $b = 0$, 则这个解在 $[0, 1]$ 上是单调的.