

2019 Fall 随机模拟方法期末考题

授课老师：李铁军 编辑：Oliver Y. Shu

考试时间：Jan/9/2020

1. 对一维Ising Model, 叙述用MCMC和KMC求平均内能的数学框架. 并解释为何分布能收敛到Gibbs分布.

2. 对Wiener过程 W_t , $t \in [0, 1]$, 证明条件分布 $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n} | W_1 = x)$ 是Gauss分布并求密度函数. 求条件分布 $(W_t | W_1 = x)$ 的期望和方差.

3. (a) 解

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dW_t, \quad X_0 = 0$$

并求 $\mathbb{E}[X_t]$ 和 $\text{cov}(X_s, X_t)$.

(b) 解

$$dX_t = X_t W_t dt + dW_t, \quad X_0 = X_0$$

4. $n = 2$, 考虑圆周 \mathbb{S}^{n-1} 上的布朗运动

$$d\mathbf{X}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top) \circ d\mathbf{W}_t, \quad \mathbf{X}_t \in \mathbb{S}^{n-1}$$

令 $\mathbf{X}_t = (\cos \theta_t, \sin \theta_t)$. 写出 \mathbf{X}_t 和 θ_t (的密度函数)所满足的Fokker-Planck方程.

5. 对Poisson过程的随机积分。略。