几何学期末考试参考答案

考试日期：2020 年 1 月 5 日　考试时间：上午 8:30-11:00

题 1（10 分）　证明：平面上起点相同的四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$，它们所代表的四个直线方向构成的顺序交比，恰好等于 $\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})}$.（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ 张成的平行四边形的有向面积。）

证明　略。　□

题 2（10 分）　在平面右手直角坐标系 I 中，椭圆的长轴和短轴的方程分别为 $x+y=0$ 和 $x-y+1=0$，并且长半轴为 2，短半轴为 1。求椭圆的方程。

解　答案是 $\boxed{5x^2+6xy+5y^2+2x-2y-7=0}$。计算过程略。　□

评分标准　因看反长短轴或其他原因导致结果出错者，扣 3 分。

题 3（共 24 分）　设 $\mathbb{Q}$ 是双叶双曲面的上半叶，它在单位直角坐标系 $Oxyz$ 下的方程为 $x^2+y^2-z^2=-1, z>0$。

(1)（10 分）设 Γ 是过 O 点的一个平面与 $\mathbb{Q}$ 的交线。请证明 Γ 是双曲线的一支。

证明　若平面过 z 轴，则由于 $\mathbb{Q}$ 具有绕 z 轴的旋转对称性，因此不妨设平面方程为 $x=0$，于是在 Oyz 平面上，Γ 的方程为 $y^2-z^2=-1(z>0)$，为双曲线的一支；若平面不过 z 轴，由旋转对称性不妨设平面方程为 $ax+z=0$，则联立消去 z 得到交线投影到 Oxy 平面的方程为

$$(1-a^2)x^2+y^2+1=0.$$

于是只有当 $1-a^2<0$ 时，解集非空，并且此时 $1-a^2=I_2=I_3<0$，且 x 与 a 异号，说明投影曲线为双曲线的一支。由平行投影不改变二次曲线类型，知 Γ 本身为双曲线的一支。　□

评分标准　不讨论平面过 z 轴的情况扣 2 分；不写或算错 I_2, I_3 扣 2 分；用投影法但不写最后一句话扣 3 分。

(2)（8 分）令 $f:\mathbb{Q}\to\pi$ 是到 Oxy 坐标平面的一个“广义球极投影”，定义为：取定投影中心点 $P=(0,0,-1)$，则对于任一点 $A=(x,y,z)\in\mathbb{Q}$，令 $f(A)$ 是直线 PA 与 Oxy 平面的交点 $A'=(u,v,0)$。试写出 f 的具体解析表达式。

解　经过 $A(x,y,z)$ 与 $P(0,0,-1)$ 的直线具有参数方程 $(tx,ty,-1+t(z+1))(t\in\mathbb{R})$。令 $-1+t(z+1)=0$ 得到 $t=\frac{1}{z+1}$。于是

$$\boxed{f(x,y,z)=\left(\frac{x}{z+1},\frac{y}{z+1},0\right)}\text{，或写成}\ \boxed{u=\frac{x}{z+1},\quad v=\frac{y}{z+1}}.$$

□

(3) （6 分）证明：$f(\mathbb{Q})$ 是 Oxy 平面上的单位圆盘，而 $f(\Gamma)$ 是一条圆弧，与这个单位圆盘的边界（单位圆周）正交。

证明 记 $D := \{(u,v)|u^2+v^2<1\}$ 是平面 Oxy 上的单位开圆盘，其边界（即单位圆周）记为 $\partial D := \{(u,v)|u^2+v^2=1\}$。

首先证明 $f(\mathbb{Q}) = D$。事实上，对 $\mathbb{Q}$ 上的任意一点 $A(x,y,z)$，由 (2) 知 $f(A)$ 的坐标为 $\left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}, 0\right)$，于是 $|Of(A)| = \frac{x^2+y^2}{(z+1)^2} = \frac{z-1}{z+1} < 1$，这说明 $f(\mathbb{Q}) \subseteq D$；另一方面，对 D 上的任意一点 $K(u,v)$（其中 $u^2+v^2<1$），定义 $f^{-1}(K) := \left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right)$，则容易验证 $f^{-1}(K) \in \mathbb{Q}$，且 $f(f^{-1}(K)) = K$，这说明 $f(\mathbb{Q}) \supseteq D$。

下面证明 $f(\Gamma)$ 是一条与 ∂D 正交的圆弧。若平面过 z 轴，则易知 $f(\Gamma)$ 是 D 的一条直径（去掉两个端点），当然与 ∂D 正交；若平面不过 z 轴，由旋转对称性不妨设其方程为 $ax+z=0$ ($|a|>1$)。注意到对 D 上的点 $K(u,v)$，$K \in f(\Gamma) \iff f^{-1}(K) \in \Gamma$。将 $f^{-1}(K)$ 的坐标代入平面方程得 $a\frac{2u}{1-u^2-v^2} + \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2} = 0$，因此 $f(\Gamma) = \mathcal{C} \cap D$，其中

$$\mathcal{C} = \{(u,v)|(u+a)^2+v^2 = a^2-1\}$$

是平面 Oxy 上圆心在 $M(-a,0)$、半径为 $\sqrt{a^2-1}$ 的圆。又注意到 $|OM|^2 = a^2 = 1^2 + (\sqrt{a^2-1})^2$，这说明 $\mathcal{C}$ 与单位圆周 ∂D 正交。于是 $f(\Gamma)$ 是一条与单位圆周 ∂D 正交的圆弧。 □

评分标准 证明 $f(\mathbb{Q})$ 是单位开圆盘得 2 分，证明 $f(\Gamma)$ 是与单位圆周正交的圆弧得 4 分。不讨论平面过 z 轴的情况扣 1 分。

注 如果将 $f(\Gamma)$ 定义为 $\mathbb{Q}$ 中的“直线”，则 $\mathbb{Q}$ 实际上给出了双曲平面的另一个模型，称为双曲平面的 Lorentz 模型。并且，若将单位开圆盘 D 视为双曲平面的 Poincaré 圆盘模型，则上述 $f: \mathbb{Q} \to D$ 与 $f^{-1}: D \to \mathbb{Q}$ 给出了这两种模型之间的一对互逆的同构映射。

题 4 （10 分） 试写出 Desargues 定理的对偶命题，并选取一种方法（除开对偶原理之外的方法），证明这个对偶命题。

证明 略。 □

题 5 （10 分） 设 $ABCD$ 是圆锥曲线的一个内接四边形，记 M 是 A 和 C 处切线的交点，N 是 B 和 D 处切线的交点，P 是边 AB 和 CD 的交点，Q 是边 AD 和 BC 的交点。试证明：M, N, P, Q 四点共线。

提示 至少有以下三种思路（过程略）：

- 证明这四点都在直线 AC, BD 的交点关于圆锥曲线的极线上；
- 对六边形 $AABCCD$ 和 $BBADDC$ 使用 Pascal 定理；
- 取射影变换，将 PQ 映为无穷远直线。 □

题 6 （30 分） 判断题。每道 6 分，作出正确判断得 2 分，简要说清理由得 4 分。

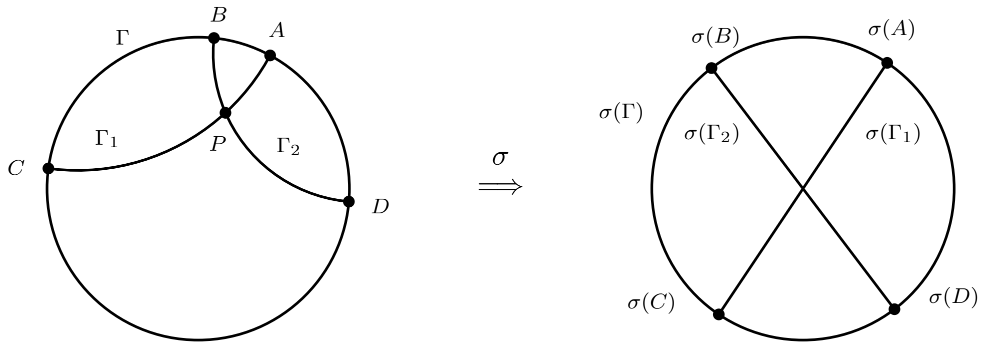
1）一个圆及圆上的任意相异四点，一定可以通过一个射影变换，变成一个圆及它的某个内接矩形的四顶点。

解 $\boxed{\text{正确 ✔}}$。对于圆上任意相异四点 A,B,C,D，不妨设对角线 AC,BD 交于 P，则 P 位于圆的内部。用一个保持圆周的射影变换将 P 的极线映为无穷远直线（P 映到圆心）即可。□

2）一个圆及圆上的任意相异四点，一定可以通过一个莫比乌斯变换，变成一个圆及它的某个内接矩形的四个顶点。

解 $\boxed{\text{正确 ✔}}$。方法其实非常多，这里提供两种：

- 如图，对于圆上按逆时针排列的任意相异四点 A,B,C,D，取过 A,C 且与 Γ 正交的圆 Γ_1 以及过 B,D 且与 Γ 正交的圆 Γ_2，它们相交于圆内某点 P。以 P 为反演中心作反演 σ，则 $\sigma(\Gamma_1),\sigma(\Gamma_2)$ 变为了与圆 $\sigma(\Gamma)$ 正交的两条直线，这说明 $\sigma(A),\sigma(B),\sigma(C),\sigma(D)$ 构成圆 $\sigma(\Gamma)$ 的某个内接矩形的四个顶点。



- 对于圆上按逆时针排列的任意相异四点 A,B,C,D，注意复交比 $(A,B;C,D)$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$（这是因为存在保定向的 Möbius 变换将 A,C,D 分别映为 $1,\infty,0$，此时 B 一定被映为实轴上区间 $(1,+\infty)$ 里的一点 z，所以 $(A,B;C,D)=(1,z;\infty,0)=z\in(1,+\infty)$）。取 $z_1=e^{i\theta}$, $z_2=e^{i(\pi-\theta)}$, $z_3=e^{i(\pi+\theta)}$, $z_4=e^{i(2\pi-\theta)}$（其中 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$），则 z_1,z_2,z_3,z_4 构成单位圆内接矩形的四个顶点。计算可知 $(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{1}{\sin^2\theta}$，可以取到 $(1,+\infty)$ 中的任何实数。特别地，存在 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $(z_1,z_2;z_3,z_4)=(A,B;C,D)$。现在取保定向的 Möbius 变换将 A,B,C 映为 z_1,z_2,z_3。则由于保定向的 Möbius 变换保圆、保复交比，因此 $ABCD$ 的外接圆一定映成单位圆，而且 D 一定映为 z_4。□

评分标准 判断错误，试图使用第二种方法论证结论错误，且算出了部分结果者，酌情给 1-2 分；判断正确，使用第二种方法论证结论正确，但没有出现具体计算结果者，酌情扣 1-2 分。

注 这一小问区分度很大，大约只有 1/4 的同学答对。其实，圆周看作单位圆盘（双曲平面）的无穷远边界，保持它不变的射影变换群和 Möbius 变换群其实是同构的，所以前两个判断小题的结论应该彼此一致。这是高观点下的结论。

3）三维空间一个椭球，三条主轴都不等长，则保持它不变的等距对称群必是一个有限群，而保持它不变的仿射对称群有无穷多个元素，自由度为 3。

解 $\boxed{\text{正确 ✔}}$。不妨设这个椭球在空间直角坐标系下有标准方程 $\mathcal{M}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（其中 $a>b>c>0$），单位球 S^2 的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$。

先证明保持 $\mathcal{M}$ 不变的等距对称群必是一个有限群。事实上，保持这个椭球 $\mathcal{M}$ 不变的等距变换一定保持原点，进而最长轴端点 $A=(a,0,0)$ 和最短轴端点 $C(0,0,c)$ 的像点分别各有两个选择，且当二者确定后，$B=(0,b,0)$ 的像点同样只有两种选择。因此保持它不变的等距对称群是一个元素个数为 8 的有限群。

再证明保持 $\mathcal{M}$ 不变的仿射对称群有无穷多个元素，自由度为 3。有两种看法：

- 设 $\sigma: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c})$ 为沿坐标轴的 3 个正压缩的复合，则 $\sigma(\mathcal{M})=S^2$，且对任意空间仿射变换 f，f 保 $\mathcal{M}$ 不变 $\iff$ $\sigma f \sigma^{-1}$ 保 S^2 不变，所以保持 $\mathcal{M}$ 不变的仿射对称群与保持单位球 S^2 不变的仿射对称群有一一对应。而如果仿射变换 $h(X)=AX+C$ 保单位球，则由仿射变换保中心知 h 保球心，所以 $C=\mathbf{0}$，进而得到 A 是正交矩阵。因此保持单位球 S^2 不变的仿射对称群就是三阶正交群 $O(3)$，自由度当然是 3。
- 注意到空间仿射变换群的自由度是 12（四点决定一个空间仿射变换），空间中椭球全体的自由度是 9（3（中心）+3（主轴方向）+3（主轴长度）），所以保持椭球不变的仿射变换群的自由度，是空间仿射变换群的自由度减去空间中椭球全体的自由度，等于 3。

评分标准 等距对称群和仿射对称群的论证各 2 分。有的同学写了类似于“等距对称群里只有恒同、180° 旋转和反射”的话，这样会被扣掉 1 分，因为漏掉了中心对称（注意中心对称是三个反射的复合，不能简单地写作一个反射）；还有部分同学直接构造出了三族关于主截面的“椭圆流动”（即三个单参数子群）以说明仿射对称群的自由度是 3，但这样也会被扣掉 1 分，因为严格来说还需要说明它们生成了整个仿射对称群，而这并不平凡。

注 1 很容易证明保持 $\mathcal{M}$ 不变的等距对称群是 $\langle\sigma_1\rangle\times\langle\sigma_2\rangle\times\langle\sigma_3\rangle$，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 分别是关于 Oxy, Oyz, Ozx 平面的反射。这个群同构于 Abel 群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

注 2 以上关于仿射对称群的两种看法本质上是群作用 (group action) 的两个基本性质。一般来说，设群 G 作用（视为左乘）在集合 X 上，对 $x\in X$，记 $\mathrm{Orb}(x):=\{gx|g\in G\}\subset X$ 为 x 在 X 中的轨道 (orbit)，$\mathrm{Stab}(x):=\{g\in G|gx=x\}\leqslant G$ 为 x 的稳定化子 (stabilizer)，则

- 对任意 $x\in X, g\in G, \mathrm{Stab}(gx)=g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$。
- 对任意 $x\in X$，映射
$$\begin{aligned}\varphi:\ G/\mathrm{Stab}(x) &\to \mathrm{Orb}(x)\\ g\,\mathrm{Stab}(x) &\mapsto gx\end{aligned}$$
是一个双射（这称为轨道-稳定化子定理 (Orbit-stabilizer theorem)）。

特别地，取 G 为空间仿射变换群，而 X 是空间中全体椭球构成的集合，便得到上述两种看法。

4）一组三条平行线，与另一组三条平行线，必定射影等价。

解 $\boxed{\text{正确 ✔}}$。任取三线上不共线三点，则它们与线向所代表的无穷远点构成不共线四点组。由射影变换基本定理，存在一个射影变换，将这四点分别映到另一组三线上不共线三点以及线向所代表的无穷远点；或用对偶原理，转化为共线三点组之间射影等价。 □

5）一组三条平行线，与另一组三条平行线，必定莫比乌斯等价。

解 $\boxed{\text{错误 ✖}}$。任取直线 ℓ 与前三条直线正交于 A, B, C，则一定保持 $(A, B; C, \infty)$，然而 $(A, B; C, \infty)$ 不一定等于 $(A', B'; C', \infty)$。 □

题 7（6 分） 给定平面上一对同心圆 Γ, S，其中 S 在外围，记 S 的圆心为 O。现在任作一个该平面上的射影变换 ϕ，使得 $\phi(S) = S$，而 $\phi(\Gamma) = \Gamma'$ 是包含于 S 内部不同于 Γ 的一条椭圆。有人猜想，这样的椭圆 Γ' 必定不是圆，且短轴所在的直线经过 O 点。

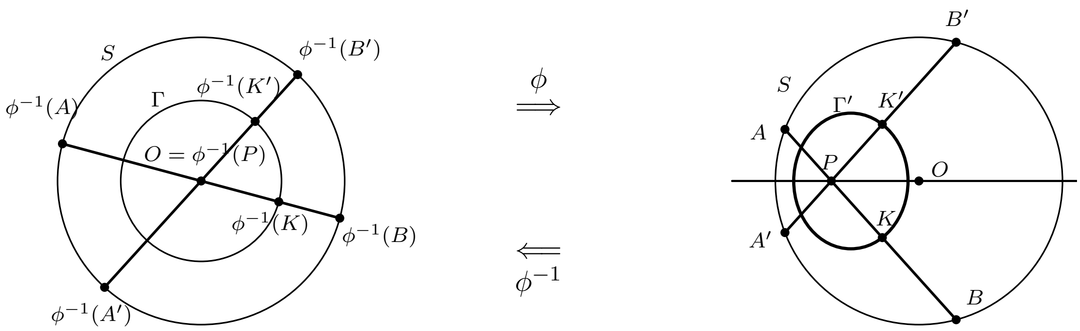
如果你同意这个猜想，试予以证明。如果你不同意，试给出你的理由或反例。

解 $\boxed{\text{同意}}$。证明如下：

- 首先证明 $\phi(O) \neq O$。

记 l_∞ 为无穷远线。若 $\phi(O) = O$，结合条件 $\phi(S) = S$，易知 $\phi(l_\infty) = l_\infty$。于是 ϕ 是保圆 S 不变的平面仿射变换，故一定为绕点 O 的旋转，但此时 $\phi(\Gamma) = \Gamma$，矛盾。

- 记 $\phi(O) = P$。下面证明直线 OP 为 Γ' 的一条对称轴。



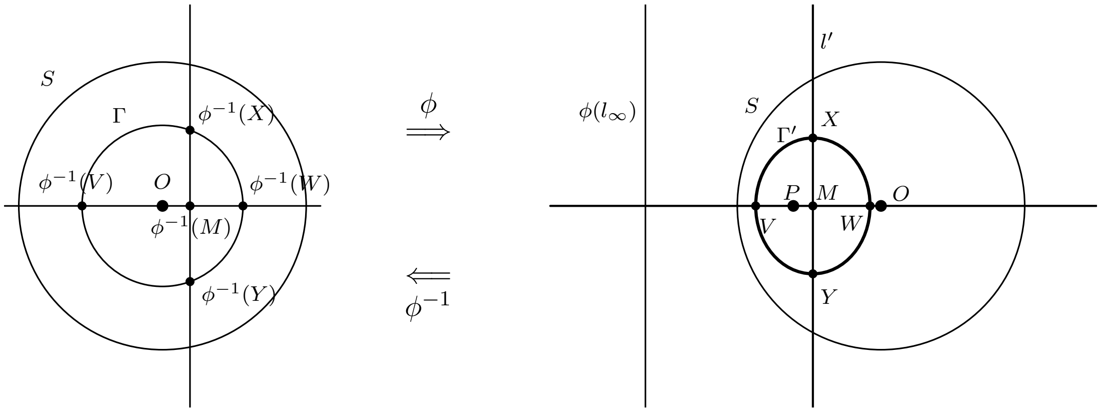
如图，只需说明 Γ' 上任意一点关于直线 OP 的对称点也在 Γ' 上。事实上，任取 Γ' 上一点 K，设直线 PK 与圆 S 交于两点 A, B。注意 P 一定位于 Γ' 内部，因此可不妨设点 K 位于线段 BP 的内部。设 A, B 关于直线 OP 的对称点分别为 A', B'，点 K' 是 $A'B'$ 与 Γ' 的交点，且位于线段 $B'P$ 的内部。因为 $\phi^{-1}(P) = O$ 为同心圆 Γ, S 的圆心，且由条件易知 $\phi^{-1}(K), \phi^{-1}(K')$ 分别是线段 $\phi^{-1}(B)\phi^{-1}(P)$, $\phi^{-1}(B')\phi^{-1}(P)$ 与 Γ 的交点，所以

$$\begin{aligned}(A', P; K', B') &= (\phi^{-1}(A'), \phi^{-1}(P); \phi^{-1}(K'), \phi^{-1}(B')) \\ &= (\phi^{-1}(A), \phi^{-1}(P); \phi^{-1}(K), \phi^{-1}(B)) \\ &= (A, P; K, B).\end{aligned}$$

又 $(A', P; B') = (A, P; B)$，所以 $(A', P; K') = (A, P; K)$，故 K', K 关于直线 OP 对称。

- 下面，通过计算得出：Γ' 不是圆，而且直线 OP 确实是短轴所在的直线。

以下是一种可行的算法，其中所有的计算都基于 ϕ（或 ϕ^{-1}）保交比这一事实。由于这样的计算初等、繁琐且无聊，因此下面将略去所有计算过程，只展示一些必要的结果。



如图，不妨设 S 是单位圆，$\phi(O)=P$ 的坐标为 $(-a,0)$，Γ 的半径为 t，其中 $a,t\in(0,1)$，于是点 P 关于圆 S 的极线（即 $\phi(l_\infty)$）的方程为 $x=-\frac{1}{a}$。设直线 OP 与 Γ' 交于 V,W 两点，求得 $V\left(-\frac{a+t}{at+1},0\right),W\left(\frac{a-t}{at-1},0\right)$。于是 Γ' 的中心 M 就是 V,W 的中点，其坐标为 $\left(-\frac{a(1-t^2)}{1-a^2t^2},0\right)$。可以算出 $\phi^{-1}(M)$ 在线段 $O\phi^{-1}(W)$ 上，且到点 O 的距离为 at^2。设直线 l' 经过点 M 且垂直于 OP，则 l' 就是 Γ' 的另一条对称轴，且 $\phi^{-1}(l')$ 就是经过 $\phi^{-1}(M)$ 且垂直于 $\phi^{-1}(V)\phi^{-1}(W)$ 的直线。设 l' 与 Γ' 交于 X,Y 两点，可以算出 X,Y 的纵坐标分别是 $\pm\frac{t\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2t^2}}$。所以

$$|VW|=2t\frac{1-a^2}{1-a^2t^2},\quad |XY|=2t\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2t^2}}$$

比较大小知 $|VW|<|XY|$，所以 Γ' 不是圆，而且直线 OP 确实是短轴所在的直线。 $\square$

评分标准 只要取得一些进展均能得到一定的分数。只写“同意”而无任何理由者不得分。

注 1 利用“一个射影变换可以看作一次中心投影再复合一次仿射映射”，以及“一个仿射变换可以看作一次正压缩复合一个相似变换”，可以看到，保持 S 不变的射影变换，可以看作先来了一次中心投影，此时 S 与 Γ 这对同心圆，必然映成长短轴分别平行的一对椭圆（而且长轴在同一条直线上，不过中心一般不重合）；然后再通过一次正压缩，把外面的椭圆的长轴缩短到与其短轴一样长，则依然保持一对轴共线的性质。这基本证明了题目所要求证的一多半核心结论。这是本题的一种几何直观，有一两位同学运用了这一观点，虽然没有全部说清楚（确实不容易），依然很棒。

注 2 我们在最后一次课的 ppt 中，提到了双曲平面的射影模型，其中双曲平面用一个圆盘来代表，而任何一条弦代表一条双曲直线。它可以与 Poincaré 圆盘模型联系起来，如下：

- 先通过以南极点为投影中心，赤道所在平面为投影平面的球极投影的逆映射，把后者映到上半球面，此时与边界正交的双曲直线，映为上半球面与边界赤道正交的半圆，故在一个竖直平面上，而任何一个双曲圆（同时也是欧氏圆）对应到上半球面的一个小圆；

- 然后，通过向水平坐标平面的平行投影，把这些竖直放置的半圆（双曲直线）映到 xy 平面上的直线（弦），而把上半球面的这些小圆（双曲圆）映到 xy 平面的椭圆。

由此可见，在射影圆盘模型中，一个双曲圆，其实是欧氏眼光下的一个椭圆，而且其对称轴过单位圆盘的圆心。注意任何一个双曲圆，都可以由一个特殊的双曲圆（圆心恰好在原点的一个欧氏圆），通过一个保持单位圆盘不动的射影变换而得到，这样得到了本题的第二种几何直观（当然是高观点为依据的一种高级几何直观）：我们在考察一个射影圆盘模型中的双曲圆，到底是欧氏眼光下的什么图形。

至于如何证明这条公共对称轴恰好是内部椭圆的短轴，似乎没有简明的方法，而必须通过具体计算。当然，在高观点下，利用双曲几何的直观（可惜课上讲得太少，下学期几何低讨班上会深入很多），会自然猜测到，这个双曲圆在单位圆盘的欧氏眼光下，会显得沿半径方向短一点。