

2024 年几何学期中

1. 对任意向量 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 证明混合积 $(\alpha \times \beta, \alpha \times \gamma, \alpha \times \delta) = 0$

2. 在一个空间仿射坐标系中, 直线 l_1 过点 $(0,0,1)$ 和点 $(1,1,1)$, 直线 l_2 过点 $(1,1,0)$ 和点 $(1,2,3)$

(a). 求出过直线 l_1 且与直线 l_2 平行的平面的方程。

(b). 求出 l_1 和 l_2 的距离。

3. 在一个平面仿射坐标系中, 曲线 Γ 的方程为 $a(x^2 + y^2 - 1) + b(x - y^2) = 0$

(a, b 不全为零)

(a). 判断 Γ 能否表示空集, 并说明理由。

(b). 当 a 和 b 满足什么关系时, Γ 为两条相交直线? a 和 b 满足什么关系时, Γ 为两条平行直线?

4. 在平面直角坐标系中, 直线 l 过点 $(-2,0)$ 和点 $(0,1)$

(a). 求出关于 l 的反射 $f(x, y)$

(b). g 为关于 y 轴的反射, 证明 $g \circ f$ 为旋转, 并求出旋转中心的坐标。

5. 在一个空间仿射坐标系中, 直线 l_1 为 y 轴, 直线 l_2 过点 $(0,0,1)$, 一个方向向量为 $(1,1,0)$

(a). 求与直线 l_1 和直线 l_2 相交, 且与平面 $y = z$ 平行的所有直线组成曲面的方程。

(b). 用仿射变换将该曲面方程转化为标准形式并判断曲面类型。