应用数学导论期末大作业

北大数院2020春季

说明

1. 本学期的期末考核没有传统的闭卷考试了，代之以期末大作业形式，课程最终成绩评定采用pass/fail，仍由两部分组成：平时作业25%(包含小组疫情作业)+期末大作业75%.
2. 大作业需要每位同学完成四个部分，必须独立撰写作业报告，包含题目要求的数值实验，展示结果和简要分析. 严禁抄袭！疑似抄袭和被抄袭者均无成绩！
3. 提交方式：建立名为 ”期末大作业_姓名” 的文件夹，其中包含pdf格式的作业报告，命名为 ”大作业报告_姓名.pdf” ，和子文件code，用于存放程序源码. 将 ”期末大作业_姓名” 文件夹整体压缩为 ”大作业报告_姓名.zip” 发送.
   截止时间前，以附件发送到 hujun@math.pku.edu.cn, 并抄送 1901110047@pku.edu.cn，邮件主题为 ”期末大作业_姓名”.
4. 大作业截止时间：毕业年级为 2020年6月20日；非毕业年级为 2020年7月20日.

第一部分：一维问题的自适应方法

考虑如下一维方程：

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \Omega = (0, L) \\ u'(0) = \kappa_0 \left(u(0) - g_0\right) \\ u'(L) = \kappa_L \left(u(L) - g_L\right) \end{cases}$$

其中 $L = 1$.

1. 在上述问题中取 $\kappa_0 = 10^6, \kappa_1 = 0, g_0 = 0$, 取 $f(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$，网格情况如下:

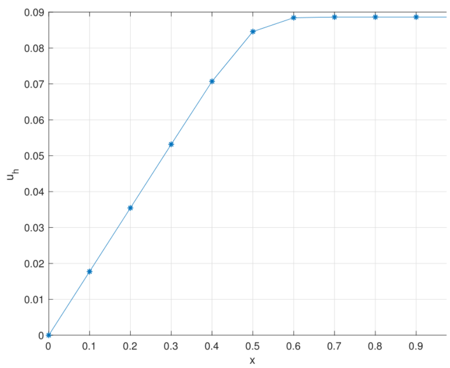


Figure: 均匀剖分10

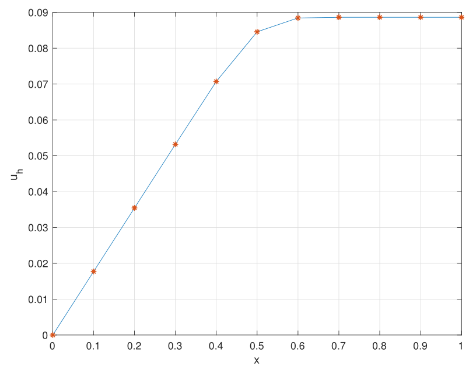


Figure: 自适应初始网格10

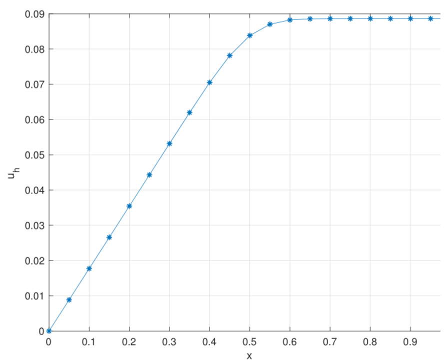


Figure: 均匀剖分20

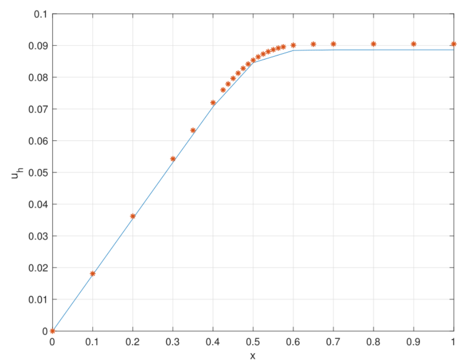


Figure: 自适应网格20

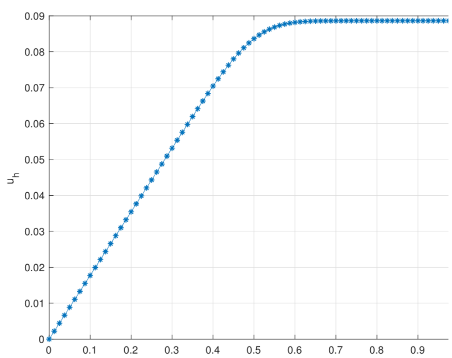


Figure: 均匀剖分80

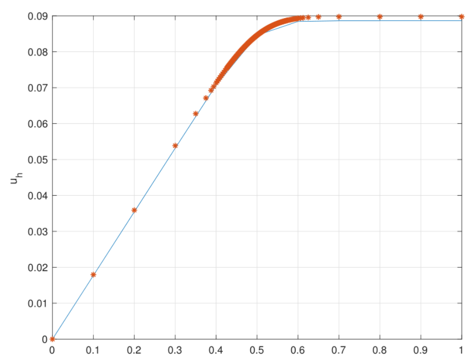


Figure: 自适应网格80

2. 在上述问题中取 $\kappa_0 = 10^6, \kappa_1 = 10^5, g_0 = 0, g_L = 0$，取 $f(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$，网格情况如下:

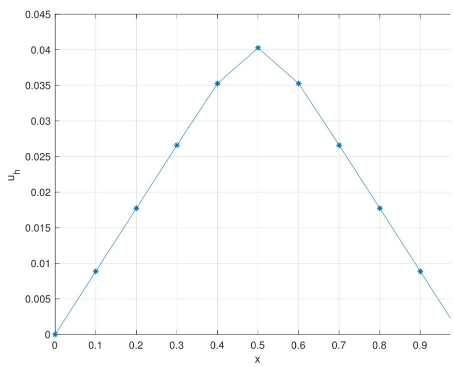


Figure: 均匀剖分10

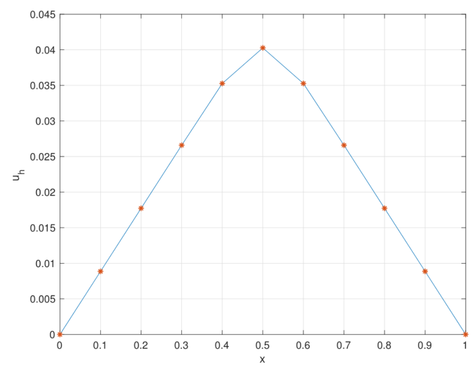


Figure: 自适应初始网格10

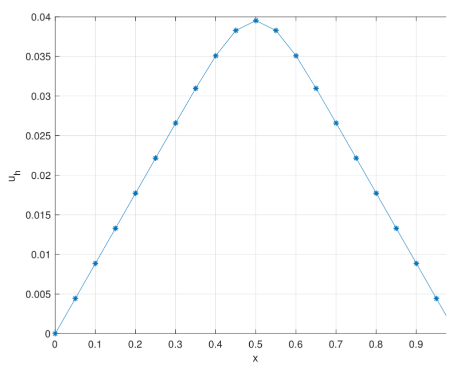


Figure: 均匀剖分20

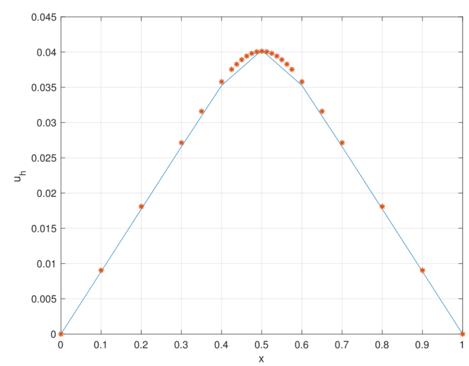


Figure: 自适应网格20

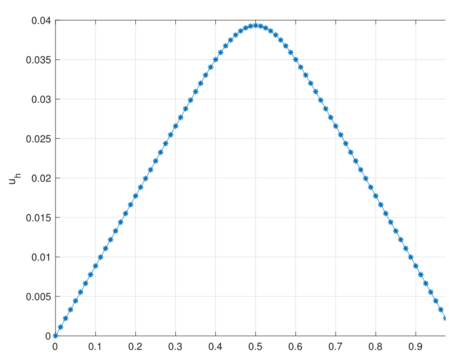


Figure: 均匀剖分80

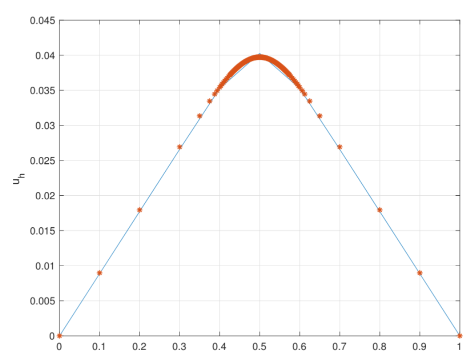


Figure: 自适应网格80

3. 在上述问题中取 $\kappa_0 = 10^6, \kappa_1 = 0, g_0 = -1$，取 $f(x) = 0.03(x-6)^4$，网格情况如下:

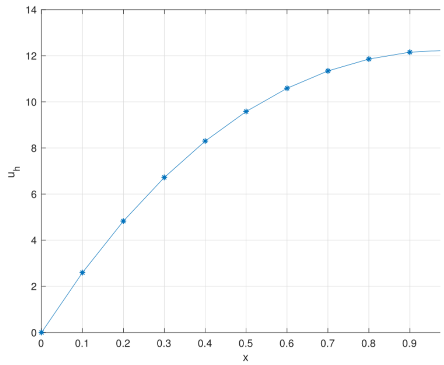


Figure: 均匀剖分10

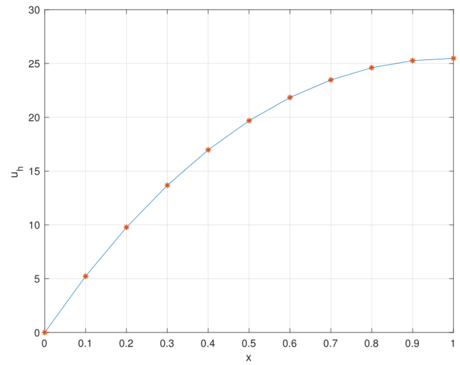


Figure: 自适应初始网格10

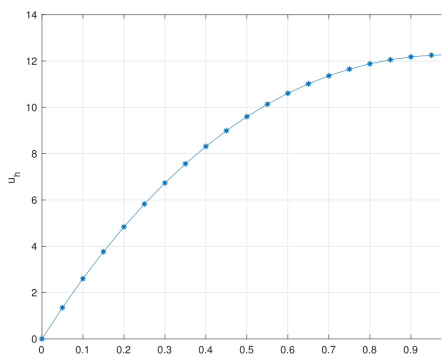


Figure: 均匀剖分20

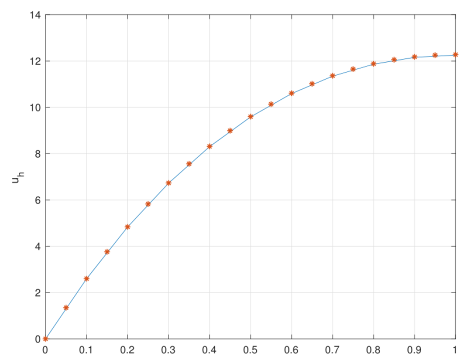


Figure: 自适应网格20

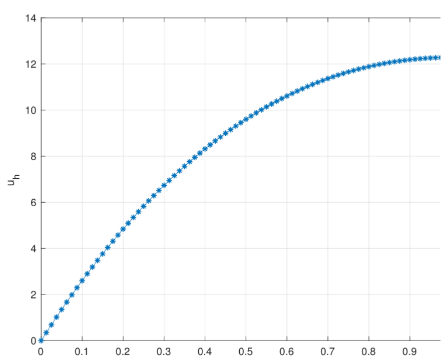


Figure: 均匀剖分80

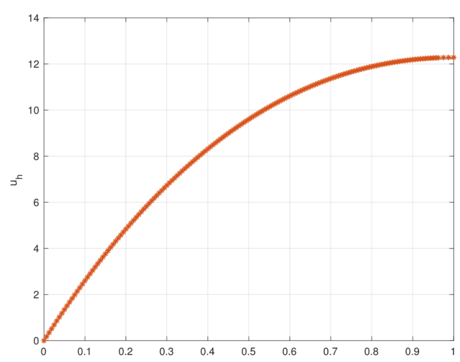


Figure: 自适应网格80

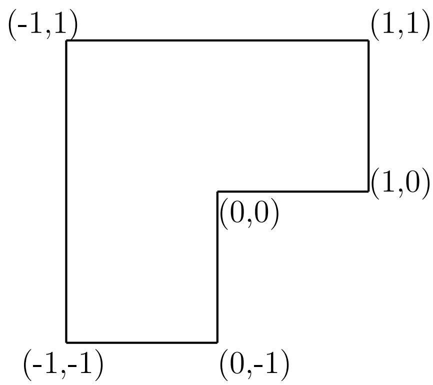
问题：请实现上述三个算例, 画出近似解的曲线.

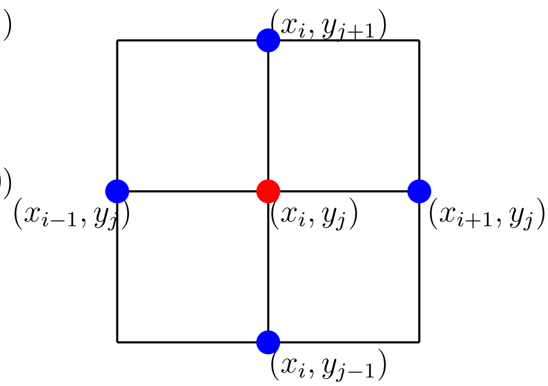
第二部分：L型区域上的泊松问题

考虑如下泊松问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad (x,y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中区域Ω为如下L型区域, $u(x,y) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)$





$$\frac{2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j} = f\left(x_i, y_j\right)$$

$$A_h U_h = F_h$$

已知单元顶点的函数值或者是近似值，下面用这些节点值构造一个在单元上的多项式来近似原函数. 为了对所有单元统一叙述，先将单元映射到参考单元上，然后对参考单元进行处理. 对于单元K，定义映射为:

$$\hat{F}: \xi = \frac{2\left(x - x_c\right)}{h_x}, \eta = \frac{2\left(y - y_c\right)}{h_y}, \quad (x,y) \in K, (\xi,\eta) \in \hat{K}$$

定义如下的基函数：

$$\phi_1 = \tfrac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \phi_2 = \tfrac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$
$$\phi_3 = \tfrac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \phi_4 = \tfrac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

在$\hat{K}$上构造一个双线性函数 $\hat{u}(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta$, 即

$$u_h(x,y)|_K = \hat{u}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} u_i \phi_i(\xi,\eta)$$

取 $h=h_x=h_y=2/N, N=32,64,128,256,512,1024$, 完成下面任务:

1. 分别用LDL^T分解, Gauss-Seidel迭代, SOR迭代(自选松弛因子), V-cycle多重网格方法求解离散方程 $A_hU_h=F_h$ 的解U $_h$ 或者近似解 $\tilde{U}_h$, 对近似解 $\tilde{U}_h$, 要求

$$\left\|A_h\tilde{U}_h-F_h\right\|_2/\left\|F_h\right\|_2\leq 10^{-8}$$

   请比较上述求解方法的计算时间.

2. 自我选择数值积分方法, 计算误差

$$e_{h,0}=\left(\int_\Omega\left(u(x,y)-u_h(x,y)\right)^2dxdy\right)^{1/2}$$

   和

$$e_{h,1}=\left(\int_\Omega\left|\nabla u(x,y)-\nabla u_h(x,y)\right|^2dxdy\right)^{1/2}$$

   并计算 $\ln e_{h,0}/\ln h$ 和 $\ln e_{h,1}/\ln h$.

第三部分：L型区域上泊松问题的自适应方法

对任意单元K, 定义

$$\eta_K^2:=h_K^2\|f\|_{L^2(K)}^2+\sum_{e\in\mathcal{E}_K}h_e\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e}\right]\right\|_{L^2(e)'}^2$$

这里 h_K 是K最长边的长度, $\mathcal{E}_K$ 是K四条边的集合, h_e 是边 e 的长度, n_e 是 e 上的外法向方向 , $\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e}\right]$ 是法向导数跨过 e 的跳跃, 即

$$\left.\frac{\partial u_h}{\partial n_e}\right|_{K^+}-\left.\frac{\partial u_h}{\partial n_e}\right|_{K^-}$$

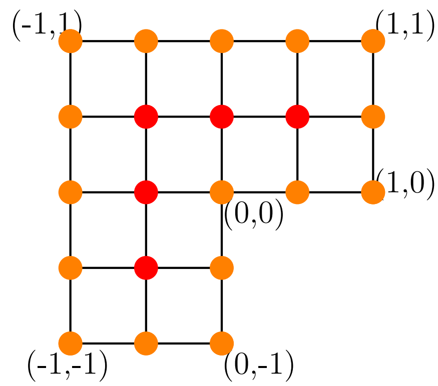
设$\mathcal{T}$是所有单元构成的集合, $\mathcal{M}\subset\mathcal{T}$, 定义

$$\eta^2(\mathcal{T}):=\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta_K^2,\quad \eta^2(\mathcal{M}):=\sum_{K\in\mathcal{M}}\eta_K^2$$

对 $0<\theta<1$, 找最小的集合 $\mathcal{M}$, 使得

$$\eta^2(\mathcal{M})\geq\theta\eta^2(\mathcal{M})$$

给定初始网格$\mathcal{T}_0$ (见下图), 分别取 $\theta = 0.8, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1$ 可允许误差 $\epsilon = 10^{-6}$, 令 $k = 0$



求解 在网格 $\mathcal{T}_k$, 求解方程 $A_kU_k = F_k$, 计算 u 的近似 u_k

估计 计算后验误差估计子 $\eta\left(\mathcal{T}_k\right)$, 若 $\eta\left(\mathcal{T}_k\right) \leq \epsilon$, 记 $N = k$, 跳出循环.

标记 找 $\mathcal{T}_k$ 最小的子集 $\mathcal{M}_k$ 使得

$$\eta\left(\mathcal{M}_k\right)^2 \geq \theta\eta\left(\mathcal{T}_k\right)$$

加密 将 $\mathcal{M}_k$ 中每个正方形剖分成四个相等的小正方形, 再将至少有条边上有两个及以上悬点的正方形剖分成四个相等的小正方形, 直至所有单元的四条边形最多只有一个悬点. 记输出的网格为 $\mathcal{T}_{k+1}$, 令 $k = k + 1$, 回到"求解"步.

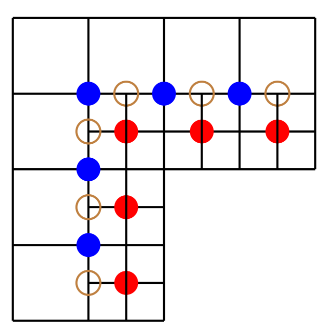


图 1: 悬点的处理

对 $\theta = 0.8, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1$, 实现上述自适应算法. 对每个 θ:

1. 画出有代表性的四个网格.

2. 对 $\ell = 0, 1, 2, \cdots, N$, 记 $h_\ell = 1/|\mathcal{T}_\ell|^{1/2}$, 其中 $|\mathcal{T}_\ell|$ 表述网格 $\mathcal{T}_\ell$ 中正方形的个数, 计算误差

$$e_{\ell,0} = \left(\int_\Omega (u - u_\ell)^2 \, dxdy\right)^{1/2}, \quad e_{\ell,1} = \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_\ell|^2 \, dxdy\right)^{1/2}$$

并计算$\ln e_{\ell,0}/\ln h_\ell$ 和$\ln e_{\ell,1}/\ln h_\ell$, 并和大作业的第二部分相应的比值作比较, 给出你的解释.

注: 求解 $A_k U_k = F_k$ 的方法自选, 鼓励有兴趣的同学探索V-cycle多重网格方法.

第四部分：数值求解热传导方程

已知如下热传导方程:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad 0 < x, y < 1, 0 < t \le 1 \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \Omega = (0,1) \times (0,1), 0 < t \le 1 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \end{cases}$$

1. 分别用显式、隐式（见讲义）和Crank-Nicolson格式离散方程计算方程的近似解，选择不同的网格比，比较三种格式的稳定性.

2. 对隐式格式，取空间步长h $= h_x = h_y = \frac{1}{128}$, 时间步长 $k = \frac{1}{512}$,比较用平方根法、Gauss-Seidel迭代法、多重网格方法将解线性方程时从初始时间层计算到最后时间层的总计算时间. 对于迭代法，用稀疏存储方法存储矩阵，使用上一个时间层的离散解为初始值，迭代的终止条件是残量(向量)的2-范数小于等于初始残量(向量)的2-范数的10^{-6}倍.

3. 对三种离散格式，取空间步长为h $= \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{512}$, 选取适当的时间步长k使得既能保持格式的稳定性，又有最优收敛性(对空间步长)，在最后一个时间层上，对离散解(向量)，用插值方法(见讲义)得到一个分片双线性函数，分别记为 $u_h^{(i)}(x, y, 1), i = 1, 2, 3$, 再利用数值积分方法计算误差

$$\left\|u(x,y,1) - u_h^{(i)}(x,y,1)\right\|_0 = \left(\int_\Omega \left(u(x,y,1) - u_h^{(i)}(x,y,1)\right)^2 dxdy\right)^{1/2}$$

并画出误差图(横坐标为空间步长, 纵坐标为误差，取对数坐标).