北京大学数学科学学院期中试题

2015-2016学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班）　考试时间: 2016年5月5日

姓　　名: ____________　学　　号: ____________

本试题共7道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

注: 下面F表示任意一个域, n表示任意正整数.

一. (24分) 在复数域上求下列矩阵的特征多项式、最小多项式和Jordan标准形.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

二. (20分) 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足$A^3 = I_n$, $A \neq I_n$. 证明:

(1) A在$\mathbb{C}$上可对角化.

(2) A在$\mathbb{R}$上不可对角化.

三. (16分) 设$\operatorname{char} F \neq 2$, $A \in F^{n\times n}$是幂零矩阵. 证明A与$2A$相似.

四. (16分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$. 假设$|\sigma(T)| = n$. 证明V的T-不变子空间的个数等于2^n.

五. (10分) 设V是n维复线性空间, $T \in L(V)$. 证明在V的循环分解中, 直和项的个数等于T的特征子空间的最大维数.

六. (10分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$. 证明集合

$$\{\alpha \in V \mid p_\alpha \neq p_T\}$$

是有限多个V的真子空间的并集.

七. (4分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$. 证明存在V上的非零双线性函数$\Phi \in (V^*)^{\otimes 2}$满足

$$\Phi(T\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, T\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in V.$$

一. (1) 特征多项式$=(x-1)(x-2)^2$, 最小多项式$=(x-1)(x-2)$, Jordan标准形$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(2) 特征多项式$=(x+3)^3$, 最小多项式$=(x+3)^2$, Jordan标准形$=\begin{bmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$. □

二. (1) $A^3=I_n \Longrightarrow p_A|(x^3-1) \Longrightarrow p_A$无重根$\Longrightarrow A$在$\mathbb{C}$上可对角化.

(2) 用反证法. 如果A在$\mathbb{R}$上可对角化, 则p_A是$\mathbb{R}[x]$中一次式的乘积. 结合$p_A|(x^3-1)$, 即得$p_A=x-1$, 从而$A=I_n$, 矛盾. □

三. 只需证明A与$2A$有相同的不变因子序列. 设$F^{n\times 1}=\bigoplus_{i=1}^r V_i$是关于$L_A$的循环分解. 记$d_i=\dim V_i$. 由于$A$ 幂零, 所以A的不变因子序列为$x^{d_1},\ldots,x^{d_r}$. 另一方面, 由于$\operatorname{char}F\neq 2$, 每个$V_i$也是$L_{2A}$的循环子空间. 而$L_{2A}$在$V_i$上的限制映射的特征多项式为$x^{d_i}$. 这说明$2A$的不变因子序列也是$x^{d_1},\ldots,x^{d_r}$. □

四. $|\sigma(T)|=n$推出T可对角化, 并且V是n个1维特征子空间的直和$V=\bigoplus_{i=1}^n V_i$. 我们说明V的T-不变子空间只能是某些V_i的直和, 从而共有2^n个. 设$W\subset V$是T-不变子空间. 则T_W可对角化, 从而W等于T_W的特征子空间的直和. 由于T_W的每个特征子空间总是包含在某个V_i中, 而$\dim V_i=1$, 所以T_W的每个特征子空间一定等于某个V_i. 这就证明了W是一些V_i的直和. □

五. 我们首先断言: 如果T循环, 则它的特征子空间都是1维的. 事实上, 此时V的任意特征子空间V_c作为V的不变子空间是循环的, 而T_{V_c}是恒同映射的常数倍, 所以只能有$\dim V_c=1$.

现在取循环分解$V=\bigoplus_{i=1}^r W_i$, 其中W_i为循环子空间, 并且$f_{T_{W_r}}|f_{T_{W_{r-1}}}|\cdots|f_{T_{W_1}}$. 容易看出, 对任意$c\in\sigma(T)$有$V_c=\bigoplus_{i=1}^r V_c\cap W_i$, 从而$\dim V_c=\sum_{i=1}^r \dim V_c\cap W_i$. 由上面的断言, $\dim V_c\cap W_i=0$或1. 因此$\dim V_c\le r$. 另一方面, 取T_{W_r}的特征值c_0. 则c_0是每个T_{W_i}的特征值, 从而每个$\dim V_{c_0}\cap W_i=1$. 因此$\dim V_{c_0}=r$. 结合起来即得$\max_{c\in\sigma(T)}\dim V_c=r$. □

六. 设$p_T=\prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$, 其中$p_i$是互不相伴的素多项式, $r_i\ge 1$. 记$q_i=p_T/p_i$. 由于对于$\alpha\in V$总有$p_\alpha|p_T$, 所以

$$p_\alpha\neq p_T \iff p_\alpha\text{整除某个}q_i \iff \alpha\text{属于某个}\ker(q_i(T)) \iff \alpha\in\bigcup_{i=1}^k\ker(q_i(T)).$$

因此

$$\{\alpha\in V\mid p_\alpha\neq p_T\}=\bigcup_{i=1}^k\ker(q_i(T)).$$

再注意到每个$\ker(q_i(T))$是V的真子空间即可. □

七. 取V的有序基$\mathcal{B}$. 由于$[T]_\mathcal{B}$与$[T]_\mathcal{B}^t$相似, 所以存在$P\in GL_n(F)$满足$P[T]_\mathcal{B}=[T]_\mathcal{B}^tP$. 定义$\Phi(\alpha,\beta)=[\alpha]_\mathcal{B}^tP[\beta]_\mathcal{B}$. 由于$P$可逆, 所以$\Phi$非零(实际上非退化), 并且对任意$\alpha,\beta\in V$有

$$\begin{aligned}\Phi(T\alpha,\beta)&=[T\alpha]_\mathcal{B}^tP[\beta]_\mathcal{B}=([T]_\mathcal{B}[\alpha]_\mathcal{B})^tP[\beta]_\mathcal{B}=[\alpha]_\mathcal{B}^t[T]_\mathcal{B}^tP[\beta]_\mathcal{B}\\&=[\alpha]_\mathcal{B}^tP[T]_\mathcal{B}[\beta]_\mathcal{B}=[\alpha]_\mathcal{B}^tP[T\beta]_\mathcal{B}=\Phi(\alpha,T\beta).\end{aligned}$$

□

北京大学数学科学学院期中试题

2016-2017学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班） **考试时间: 2017年4月25日**

姓　　名: ____________________ **学　　号:** ____________________

本试题共6道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

注: 下面F表示任意一个域, n表示任意正整数.

一. (32分) 在复数域上求下列矩阵的特征多项式、最小多项式、有理标准形和Jordan标准形.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

二. (15分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$循环, $g \in F[x]$是T的特征多项式的因式. 证明

$$\dim \operatorname{Ker}(g(T)) = \deg g.$$

三. (15分) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的最小多项式为$x^n$, 正整数$k \leq [\frac{n}{2}]$. 证明在$A^k$的Jordan标准形中, Jordan块的最小阶数为$[\frac{n}{k}]$.

四. (15分) 设$\operatorname{char} F = 0$, $A \in F^{n\times n}$的特征多项式为$(x-1)^n$. 证明对任意正整数k, A^k与A相似.

五. (15分) 设V是n维F-线性空间, $T, U \in L(V)$不可逆, 并且TU可对角化. 证明$(UT)^2$可对角化.

六. (8分) 设V是n维复线性空间, $T, U \in L(V)$满足$\operatorname{rank}(TU - UT) = 1$. 证明存在$V$的有序基$\mathcal{B}$使得$[T]_{\mathcal{B}}$和$[U]_{\mathcal{B}}$同时为上三角矩阵.

一. (1) 特征多项式=最小多项式$=(x-3)(x-2)^2$,

$$\text{有理标准形}=\begin{bmatrix}0&0&12\\1&0&-16\\0&1&7\end{bmatrix},\qquad \text{Jordan标准形}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

(2) 特征多项式$=(x-6)(x-2)^2$, 最小多项式$=(x-6)(x-2)$,

$$\text{有理标准形}=\begin{bmatrix}0&-12&0\\1&8&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad \text{Jordan标准形}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

二. 记$R=F[x]$. 设$\alpha\in V$是循环向量, $f_T=p_\alpha=gh$, $\beta=h\alpha$. 我们先证明

$$\mathrm{Ker}(g(T))=R\beta. \tag{1}$$

首先, 对$q\beta\in R\beta$, 有$gq\beta=qp_\alpha\alpha=0$. 因此$q\beta\in\mathrm{Ker}(g(T))$. 另一方面, 设$u\alpha\in\mathrm{Ker}(g(T))$, 则$gu\alpha=0$, 从而$p_\alpha|gu$, 因此$h|u$. 所以$u\alpha=(u/h)\beta\in R\beta$. 这就证明了(1)式. 由此即得

$$\dim\mathrm{Ker}(g(T))=\dim R\beta=\deg p_\beta=\deg g. \qquad \square$$

三. 设J为A^k的Jordan标准形. 由条件可知A的Jordan标准型为$J_n(0)$, 并且J中Jordan块的对角元均为0. 从而J中Jordan块的个数为

$$\dim\mathrm{Ker}(J)=\dim\mathrm{Ker}(A^k)=\dim\mathrm{Ker}(J_n(0)^k)=k.$$

记$d=[\frac{n}{k}]$, 并设$n=kd+r$, 其中$0\le r<k$. 由于$J^{d+1}=(A^k)^{d+1}=0$, 所以J 没有阶数大于$d+1$的Jordan块, 从而J中的$d+1$阶Jordan块的个数为

$$\mathrm{rank}(J^d)=\mathrm{rank}(A^{kd})=\mathrm{rank}(J_n(0)^{kd})=n-kd=r.$$

因此, J中阶数小于等于d的Jordan块的个数为$k-r$. 但是, 这$k-r$个Jordan块的阶数之和为$n-r(d+1)=(k-r)d$. 因此这$k-r$个Jordan块只能都是d阶的. 综合起来, J中恰有r个$d+1$ 阶Jordan块和$k-r$个d阶Jordan块, 而没有其他阶数的Jordan块. 这就完成了证明. $\square$

四. 首先假设A循环. 则$p_A=(x-1)^n$. 从而对于正整数d, 有

$$\begin{aligned}(x-1)^d\text{是}A^k\text{的零化多项式}&\iff(x^k-1)^d\text{是}A\text{的零化多项式}\\&\iff(x-1)^n|(x^k-1)^d\iff d\ge n.\end{aligned}$$

特别地, $(x-1)^n$是A^k的零化多项式, 但$(x-1)^{n-1}$不是A^k的零化多项式. 因此$p_{A^k}=(x-1)^n$. 这说明A与A^k均只有一个不变因子$(x-1)^n$, 从而它们相似. 这就完成了循环情况的证明.

对一般情况, 设A的有理标准形为$\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_r)$, 其中$A_i$循环并且特征多项式为$x-1$的幂. 则$A^k$相似于$\mathrm{diag}(A_1^k,\ldots,A_r^k)$. 由已证的结果, 每个$A_i$与$A_i^k$相似. 于是$\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_k)$与$\mathrm{diag}(A_1^k,\ldots,A_r^k)$相似. 因此$A$与$A^k$相似. $\square$

五. 由于TU可对角化, 所以p_{TU}为互不相同的首项系数是1的一次式的乘积. 因此, 存在TU的零化多项式g使得$h := xg$形如

$$h = x^2(x^2 - c_1^2)\cdots(x^2 - c_r^2),$$

其中$c_1^2, \ldots, c_r^2$非零并且互不相同. 注意到

$$h(UT) = UTg(UT) = Ug(TU)T = 0,$$

所以h是UT的零化多项式. 因此

$$x(x - c_1^2)\cdots(x - c_r^2)$$

是$(UT)^2$的零化多项式. 这说明$(UT)^2$的最小多项式是互不相同的首项系数是1的一次式的乘积, 从而可对角化. □

六. 先证明:

引理. 在题目条件下, 如果$n \geq 2$, 则存在T和U的非平凡公共不变子空间.

引理的证明. 如果T和U均为恒同映射的常数倍, 则引理显然. 不妨设T不是恒同映射的常数倍. 只需证明对于$c \in \sigma(T)$, 非平凡T-不变子空间$\mathrm{Ker}(T - cI)$和$\mathrm{Im}(T - cI)$至少有一个是U-不变的. 记$S = TU - UT$. 如果对任意$\alpha \in \mathrm{Ker}(T - cI)$有$S\alpha = 0$, 则

$$TU\alpha = UT\alpha + S\alpha = cU\alpha,$$

即$U\alpha \in \mathrm{Ker}(T - cI)$. 这说明$\mathrm{Ker}(T - cI)$是$U$-不变子空间. 如果存在$\alpha \in \mathrm{Ker}(T - cI)$使得$S\alpha \neq 0$, 则对任意$\beta \in V$, 由于$\mathrm{rank}(S) = 1$, 所以存在$t \in \mathbb{C}$满足$\beta + t\alpha \in \mathrm{Ker}(S)$, 从而

$$U(T - cI)\beta = U(T - cI)(\beta + t\alpha) = (T - cI)U(\beta + t\alpha) \in \mathrm{Im}(T - cI).$$

这说明$\mathrm{Im}(T - cI)$是U-不变子空间. 引理证毕.

现在证明原题. 设k是满足如下条件的最大正整数: 存在T和U的公共不变子空间序列$\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_k = V$. 只需证明$k = n$. 若不然, 则对某个$1 \leq i \leq k$有$\dim W_i/W_{i-1} \geq 2$. 对$T$ 和U在W_i/W_{i-1}上诱导的映射应用引理, 可知存在T和U的公共不变子空间$W \subset V$ 满足$W_{i-1} \subsetneq W \subsetneq W_i$, 与$k$的最大性矛盾. □

北京大学数学科学学院期中试题

2017-2018学年第2学期

考试科目: 高等代数II（实验班） **考试时间: 2018年4月24日**

姓　　名: ______________ **学　　号:** ______________

本试题共5道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

注: 下面F表示任意一个域, n表示任意正整数.

一. (40分) 考虑矩阵的集合

$$\Omega = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A\text{中恰有两个非对角矩阵元为1, 其他矩阵元均为0}\}.$$

分别写出下面的集合 (不需要写过程):

(1) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f\text{是}\Omega\text{中某个矩阵的特征多项式}\}$.

(2) $\{p \in \mathbb{Q}[x] \mid p\text{是}\Omega\text{中某个矩阵的最小多项式}\}$.

(3) $\{J \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid J\text{是}\Omega\text{中某个矩阵的有理标准形}\}$.

(4) $\{R \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid R\text{是}\Omega\text{中某个矩阵的Jordan标准形}\}$.

二. (10分) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^2可对角化. 证明A^3可对角化.

三. (20分) 设$A \in F^{n\times n}$是非零幂零矩阵, $g \in F[x]$. 证明下面两个陈述等价:

(1) $g(A)$与A相似.

(2) $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$.

四. (20分) 设F是无限域, V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$. 证明下面两个陈述等价:

(1) V只有有限多个T-不变子空间.

(2) T是循环的.

五. (10分) 设V是n维F-线性空间, $T \in L(V)$循环幂零. 求$L(V)$的子空间

$$M = \{U \in L(V) \mid T^2U = UT^2\}$$

的维数.

一. (1) $\{x^3, x(x+1)(x-1)\}$.　　(2) $\{x^2, x^3, x(x+1)(x-1)\}$.

$$(3)\ \left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}.\qquad (4)\ \left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

一个分类方法: 若某个$A\epsilon_i$不是ϵ_j或0的形式, 则在相似意义下, 不妨设$A\epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_3$, 从而$A\epsilon_2 = A\epsilon_3 = 0$. 此时$A$相似于(4)中第一个矩阵. 假设每个$A\epsilon_i$均为$\epsilon_j$或0的形式. 注意到必有某个$A\epsilon_i = 0$. 在相似意义下, 不妨设$A\epsilon_1 = 0$. 则$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$均为$\epsilon_j$的形式. 若$A\epsilon_2 = A\epsilon_3 = \epsilon_1$, 则$A$相似于(4)中第一个矩阵. 若$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$恰有一个等于$\epsilon_1$, 在相似意义下不妨设$A\epsilon_2 = \epsilon_1$, 则$A\epsilon_3 = \epsilon_2$, 此时$A$相似于(4)中第二个矩阵. 若$A\epsilon_2$和$A\epsilon_3$都不等于$\epsilon_1$, 则$A\epsilon_2 = \epsilon_3$, $A\epsilon_3 = \epsilon_2$, 此时A相似于(4)中第三个矩阵. □

二. 由于A^2可对角化, 所以$p_{A^2} = \prod_{c\in\sigma(A^2)}(x-c)$. 考虑集合

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 存在c \in \sigma(A^2)满足\lambda^2 = c^3\},$$

并定义$g = \prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda)$. 容易看出$g(A^3) = 0$, 从而$p_{A^3} \mid g$. 这推出$p_{A^3}$为互不相同的首一一次式的乘积. 因此$A^3$可对角化. □

三. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 由于$g(A)$与A相似, 所以也幂零, 因此$g(A)$特征值只能为0. 另一方面, 由于0是A的特征值, 所以$g(0)$是$g(A)$的特征值. 这就推出$g(0) = 0$. 如果还有$g'(0) = 0$, 则存在$h \in F[x]$满足$g(A) = A^2h(A)$. 设A的最小多项式为x^d. 由于$A \neq 0$, 所以$d \geq 2$, 因此$g(A)^{d-1} = A^{2d-2}h(A)^d = 0$, 即$x^{d-1}$为$g(A)$的零化多项式. 这与(1)矛盾.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 设A的有理标准形为$\mathrm{diag}(J_{d_1}(0), \ldots, J_{d_r}(0))$. 则$g(A)$相似于$\mathrm{diag}(g(J_{d_1}(0)), \ldots, g(J_{d_r}(0)))$. 只需证明$J_d(0)$与$g(J_d(0))$相似$(1 \leq d \leq n)$. $d = 1$时显然. 设$d \geq 2$. 由于$J_d(0)$的最小多项式为x^d, 所以只需证明$g(J_d(0))$的最小多项式也是x^d. 由$g(0) = 0$推出$g(J_d(0))$幂零, 并且存在$q \in F[x]$满足$g^{d-1} = g'(0)^{d-1}x^{d-1} + x^d q$. 所以$g(J_d(0))^{d-1} = g'(0)^{d-1}(J_d(0))^{d-1} \neq 0$. 因此$g(J_d(0))$的最小多项式为$x^d$. □

四. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 假设T不循环. 则对循环分解$V = \bigoplus_{i=1}^r R\alpha_i$有$r \geq 2$. 考虑不变子空间$W_t = R(\alpha_1 + t\alpha_2)$, $t \in F$. 我们验证当$s \neq t$时有$W_s \neq W_t$, 从而存在无穷多个不变子空间. 事实上, 如果$s \neq t$但$W_s = W_t$, 则$\alpha_1 + s\alpha_2 \in W_t$, 从而$(s-t)\alpha_2 \in W_t$, 进而$\alpha_2 \in W_t$. 这推出存在$f \in R$满足$f(\alpha_1 + t\alpha_2) = \alpha_2$, 即$f\alpha_1 = 0$, $tf\alpha_2 = \alpha_2$. 由$f\alpha_1 = 0$推出$p_1 = p_T|f$, 因此$f\alpha_2 = 0$, 矛盾.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 设$V = R\alpha$. 我们证明V的不变子空间一定形如$Rh\alpha$, 其中h为p_α的首一因式, 从而只有有限多个. 设$W \subset V$是不变子空间. 取$h = p_{\alpha+W}$. 则$Rh\alpha \subset W$. 另一方面, 设$g\alpha \in W$, 则$h|g$, 从而$g\alpha = (g/h)h\alpha \in Rh\alpha$. 因此$W \subset Rh\alpha$. 这就证明了$W = Rh\alpha$. □

五. $\dim M = \begin{cases} 2n, & n偶; \\ 2n-1, & n奇. \end{cases}$

下面证明. $n = 1$时显然. 设$n \geq 2$. 由于T^2幂零, 所以在T^2的循环分解中, 直和项的个数为

$$\dim \mathrm{Ker}(T^2) = \dim \mathrm{Ker}(J_n(0)^2) = 2.$$

另一方面, 由于$(T^2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$, 所以每个直和项的维数$\leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. 这说明$T^2$的有理标准形为$\mathrm{diag}(J_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(0), J_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(0))$. 直接计算可得

$$\dim\{A \in F^{p\times q} \mid J_p(0)A = AJ_q(0)\} = \min\{p, q\}.$$

而

$$\begin{pmatrix} J_p(0) & \\ & J_q(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_p(0) & \\ & J_q(0) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} J_p(0)A & J_p(0)B \\ J_q(0)C & J_q(0)D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AJ_p(0) & BJ_q(0) \\ CJ_p(0) & DJ_q(0) \end{pmatrix}.$$

所以与$\mathrm{diag}(J_p(0), J_q(0))$可交换的$p+q$阶方阵构成的线性空间的维数为$p + q + 2\min\{p, q\}$. 取$(p, q) = (\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$即可. □