

# 常微分方程期中试题

2023.4.10

共 7 道大题, 满分 100 分

1. (40分, 每题10分) 求解下列方程的初值问题, 要求适当化简

$$(1) \quad 2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x, \quad y(1) = 0.$$

$$(2) \quad y' = x^3y^3 - xy, \quad y(0) = 1.$$

$$(3) \quad \int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} dt = 2\sqrt{x} + y(x).$$

$$(4) \quad 2xy^3 dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. (10分) 求满足积分方程

$$\int_0^1 \varphi(xt) dt = n\varphi(x), \quad n \neq 0$$

以及  $\varphi(1) = 1$  的连续函数  $\varphi(x)$ .

3. (10分) 试求微分方程  $y'^2 - 2xy' + 2y = 0$  的所有解.

4. (10分) 设  $\varphi, \psi, \omega$  是定义在区间  $I: a \leq x \leq b$  上的连续函数,  $\omega(x) > 0$ , 且

$$\varphi(x) \leq \psi(x) + \int_a^x \omega(s)\varphi(s) ds.$$

进一步假设  $\psi \geq 0$ , 单调不减. 证明

$$\varphi(x) \leq \psi(x)e^{\int_a^x \omega(s) ds}, \quad x \in I.$$

5. (15分) 求曲线族  $\Phi_c: y^2 = 4c(x+c)$  所满足的微分方程 以及与该曲线族  $\Phi_c$  正交的轨线族  $\Psi_c$  所满足的微分方程 并求出此正交轨线族  $\Psi_c$ .

6. (5分) 证明: 初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在  $[x_0, +\infty)$  上存在.

7. (10分) 已知  $f(x, y)$  为正方形

$$\Omega: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

上的连续函数, 并且对所有的  $(x, y) \in \Omega$ , 都有  $|f(x, y)| < 1$ . 证明关于  $\varphi(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) 的积分方程

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy$$

有唯一的连续解.

【全卷完】