# 2020春季学期高等代数(II)期末试题

命题人：王福正　　考试时间：2020-9-15　整理人：JS

一、(20分)数域F上次数不超过3的多项式构成的向量空间上可定义映射$f: F[x]_3 \to F[x]_3$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_0)x^2 + (a_3 - a_1)x^3$$

证明：$f$为线性变换，并求 ker $f$，Im $f$，$F[x]_3/\ker f$ 的一组基.

二、(10分)有理数域上的多项式$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\dots(x - a_n) + 1$，其中$a_1, a_2, \dots a_n$为两两不等的整数. 若$f(x)$在$\mathbb{Q}$上可约，证明$f(x)$为某整系数多项式$g(x)$的平方。

三、(20分)定义在$\mathbb{C}[x]_n$上的映射$\mathcal{D}: \mathbb{C}[x]_n \to \mathbb{C}[x]_n$满足$(\mathcal{D}f)(x) = f'(x)$，其中$f'(x)$为多项式的形式导数.

(1)(8分)证明$\mathcal{D}$为线性变换，求一组Jordan基，使得$\mathcal{D}$在此基下的矩阵为Jordan标准型，并写出Jordan标准型.

(2)(12分)求$\mathcal{D}$的所有不变子空间. (要求说明理由)

四、(10分)已知$a + bi$为n级正交矩阵Q的非实的复特征值，将Q看成复矩阵，则$\alpha + \beta i (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n)$为相应的特征向量. 证明：$\alpha, \beta$正交且长度相等.

五、(10分)$\mathcal{A}$为有限维空间$V$上的线性变换，且$rank\mathcal{A} = rank\mathcal{A}^2$.

证明：$V = ker\mathcal{A} \oplus Im\mathcal{A}$.

六、(10分) $V$为$n$ $(n \geq 1)$维线性空间，$m (m \geq 1)$个从$V$到F的线性函数$f_1, f_2, \dots f_m$均不相等.

证明：存在$\alpha \in V$，使得$f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots f_m(\alpha)$两两不同.

七、(10分) $V$为有限维空间，$\mathcal{A}$为$V$上的线性变换，且$ker\mathcal{A} = Im\mathcal{A}$.

证明：存在$V$上的一组基使$\mathcal{A}$在基下的矩阵为Jordan标准型，并求出此Jordan标准型.

八、(10分)A为正定矩阵. 证明：对任意实矩阵B，矩阵方程AX + XA = B有唯一解X = C.