

题目 0.0.1 (20). 求

$$\iint_S (x^3 + x^2 + x)dydz + (y^3 + y^2 + y)dzdx + (z^3 + z^2 + z)dxdy$$

其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧.

题目 0.0.2 (20). 求

$$\int_{\Gamma} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

其中  $\gamma$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  和  $x^2 + y^2 = 2rx$  的交线 ( $0 < r < R, z > 0$ ). 从  $(r, 0, 0)$  看过去逆时针.

题目 0.0.3 (20).  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  连续,  $\gamma$  是  $\mathbb{R}^2$  上的简单光滑封闭曲线, 证明  $\int_{\Gamma} f(xy)(ydx + xdy) = 0$ .

题目 0.0.4 (20).  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 且  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx, \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$  收敛, 证明

$$I(t) = \int_0^{+\infty} x^t f(x)dx \in C^\infty(-1, 1).$$

题目 0.0.5 (10).  $f(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \cos(xyz)dxdydz$ ,  $u = x, v = xy, w = xyz$ ,  $t > 0$ , 求  $f(t)$  关于  $(u, v, w)$  的积分形式, 并求  $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf'(t)$ .

题目 0.0.6 (10).  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, g(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx$ , 证明  $g(s) = \Gamma(s)f(s)$ , 证明  $f'(s) > 0$ .