抽象代数考试题

命题人：徐茂智

20-21秋季学期

1 期中考试

1 **(15分)**

论证循环群、幂零群、交换群、可解群之间的关系。

2 **(10分)**

证明：对域 F 上的多项式环 $F[x]$ 的每个理想 I ，存在一个多项式 $f(x) \in F[x]$，使得 $I = (f(x))$。

（注：此时还没有正式学主理想整环和欧几里得环）

3 **(15分)**

证明 S_n 可由对换 $(1\ 2)$ 和轮换 $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$ 生成。

4 **(20分)**

设 G 为 182 阶群，证明 G 可解，并给出 G 在同构意义下的合成因子集合。

5 **(20分)**

设 p 是一个奇素数，n 是一个大于 1 的整数，在剩余类环 $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 中，以 $R^\times$ 表示其所有可逆元构成的群。证明： $R^\times$ 的Sylow $p-$子群为循环群。

6 **(20分)**

设 G 是复数域上对角元全为 1 的 n 阶上三角矩阵构成的群，求它的中心 $Z(G)$ 和换位子群 $G' = [G, G]$。

2 期末考试（回忆版）

声明：本课程中涉及到的环若未特别指出，均指幺环。

1 **(40分)**
判断以下命题对错，对的给出简要证明过程，错的举出反例：

(1) 整环中的不可约元都是素元。

(2) 设 P 为交换幺环 R 的素理想，I_1, I_2 为 R 的理想，且 $I_1 \cap I_2 \subseteq P$。则 $I_1 \subseteq P$ 或 $I_2 \subseteq P$。

(3) 设 P_1, P_2 为交换幺环 R 的素理想，I 为 R 的理想，且 $I \subseteq P_1 \cup P_2$。则 $I \subseteq P_1$ 或 $I \subseteq P_2$。

(4) 有限扩张 $\Leftrightarrow$ 代数扩张。

(5) 有无穷多个中间域的域扩张是无限扩张。

(6) 有限正规扩张是可分扩张。

(7) $GF(p^n)/GF(p)$ 是$Galois$扩张。

(8) 主理想整环上的有限生成无扭模为自由模。

2 **(15分)**
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{-3})$，则存在 $\alpha \in K$ 使得 $K = \mathbb{Q}(\alpha)$。求一个不可约多项式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，满足 $f(\alpha) = 0$。

（注：本题中的 α 有相当的任意性，题意为选择一个满足条件的即可）

3 **(20分)**
$f(x) = x^3 - 2x + 3$，用 E 记 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域。求出 $Gal(E/\mathbb{Q})$ 以及 $E/\mathbb{Q}$ 的所有中间域。

4 **(15分)**
设 q 为素数，$f(x)$ 为 $GF(q)[x]$ 中的 n 阶不可约多项式。用 E 记 $f(x)$ 在 $GF(q)$ 上的分裂域，且 $\alpha \in E$ 为 $f(x)$ 的一个根。证明：$f(x)$ 在 E 中的所有根为：$\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \cdots, \alpha^{q^{n-1}}$。

5 **(10分)**
设 M 为主理想整环 R 上有限生成的扭模，且 $p^n M = \{0\}$，其中 p 为 R 中素元。又存在 $x \in M$ 满足：$p^{n-1}x \neq 0$ 且 $Rx \neq M$。证明：$\exists y (\neq 0) \in M$，使得 $Rx \cap Ry = \{0\}$。