数院 概率论实验班 19 春 葛颢

北京大学数学科学学院期中试题

2018-2019学年第2学期

考试科目：概率论(实验班)　　　　考试时间：2019年4月18日

姓　　名：______________　　　　学　　号：______________

本试题共八道大题，满分100分。

1. (15分) 甲、乙、丙进行某项比赛，设三人胜每局的概率都相等，先胜三局者为整场比赛优胜者。若甲胜了第一和第三局、乙胜了第二局，问最终优胜者为丙的可能性有多大？

2. (15分) 在线段$[0,1]$上任意投三个点，求由0到这三点的三条线段能构成三角形的概率。

3. (10分) 令X和X'是独立同分布的随机变量，定义$X^s = X - X'$，mX是X的中位数，满足$P(X \geq mX) \geq 1/2 \leq P(X \leq mX)$。请证明：对于任何的$x$和$a$，都有
$$\frac{1}{2}P(X - mX \geq x) \leq P(X^s \geq x),$$
和
$$P(|X^s| \geq x) \leq 2P(|X - a| \geq x/2).$$

4. (15分) 设(ξ,η,ζ)有联合密度
$$p(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1+x+y+z)^4}, & \text{当}x,y,z>0, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$
求$U = \xi + \eta + \zeta$的密度函数。

5. (15分) $\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$是独立同分布的随机变量且服从参数为1的指数分布。$X_{(i)}$表示$\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$中第i大的元素。证明$X_{(1)}$与$\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{(1)}$独立；

6. (10分) 设Y_{nk}，$k = 1,\cdots,k_n$，Z_{nk}，$k = 1,\cdots,k_n$，相互独立，Y_{nk}服从参数为p_{nk}的泊松分布$(0 \leq p_{nk} \leq 1)$，Z_{nk}服从参数为$1-(1-p_{nk})e^{p_{nk}}$的伯努利分布。定义$X_{nk} = 0$，如果$Y_{nk} = 0$且$Z_{nk} = 0$，否则$X_{nk} = 1$。证明
(1) $P(X_{nk} \neq Y_{nk}) \leq p_{nk}^2$；
(2) 记$X_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$，$Y_n = \sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk}$，对于任何的可测集$A$，有
$$|P(X_n \in A) - P(Y_n \in A)| \leq \sum_{k=1}^{k_n} p_{nk}^2.$$

7. (10分) 对于$x = \frac{(k-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \sim o(\lambda^{1/6})(\lambda \to \infty)$，请证明存在正常数$A$，$B$和$C$，使得

$$\left| \frac{p(k;\lambda)}{\lambda^{-1/2}\phi(x)} - 1 \right| \le \frac{A}{\lambda} + \frac{B|x|^3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{C|x|}{\sqrt{\lambda}},$$

其中$p(k;\lambda)$是参数为λ的泊松分布随机变量取k值的概率，$\phi(x)$是标准正态分布的密度函数。
提示：可以利用加强的Stirling公式$0 < k \log \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} < \frac{1}{12}$.

8. (10分) 盒子内有1个红球和1个白球，每次从盒子里随机的摸出1个球并放回，再根据摸出的球的颜色再放入1个另一种颜色的球。用r_n表示第n次摸球时摸到红球的概率,即第$n-1$次摸球并放回后红球所占比例。请证明对于任何$\epsilon > 0$, ~~放回后的比例~~

$$\lim_{n\to\infty} P(|r_n - \frac{1}{2}| > \epsilon) = 0.$$

r_n 随机变量.