抽象代数 2023 年期中考试整理

cybcat $\star$

2023 年 11 月 22 日

试题, 答案, 给分参考与评注

问题 1. *H 是 G 的正规子群, K 是 H 的正规子群, 是否有 K 是 G 的正规子群?*

第一题简答. 答案是**否定**的, 典例是 Klein 群 $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 在 S_4 中正规, V_4 中的任意二阶子群在其中正规, 但是容易从置换的计算得出它们在 S_4 不正规. □

评注 1. *本题考察对常见子群例子的掌握. 属于基础问题, 放在试卷第一题可能让一些构造能力较弱的同学感到困扰. 从另一个角度说, 如果真的有这么强且叙述经典的结论, 那么它也应当在教科书中被提及.*

给分参考是, 给出论断 2 分, 反例 2 分, 证明 6 分. 常见的例还有二面体群的包含, 常见的错误是认为 Klein 群在 S_4 中不正规, 或者认为 $\mathbb{Z}_4$ 中的 $\mathbb{Z}_2$ 在 D_4 (8 个元素) 中不正规. 比较精彩的反例使用半直积构造, 但是需要写出半直积方式. 另外对于直接写出正确的群, 没有写出为何不正规的 (甚至没有写出用哪个元素共轭会不稳定的) 扣了 2 分.

改卷人: cyb. 本题平均得分约 6.0, 中位数 8, 满分 10.

问题 2. *两个小问:*

(1) G 有限群中的真子群 H, 证明 H 的 G 共轭的并不是整个 G.

(2) 若 G 为无限群, (1) 中结论是否成立?

第二题简答. (1) 设 $|H| = k$, $|G| = kn$ 其中 $n = [G : H] > 1$. 注意到对 G 的一个 H 陪集 aH, 其中的元素 ah 对 H 共轭作用得到 $ahH(ah)^{-1} = aHa^{-1}$, 与 $h \in H$ 无关, 这表明同一个陪集中的元素作用得到相同的像, 于是 H 中除 e 的其余元素的 G 共轭像至多 $n(k-1)$ 个, 那么

$$n(k-1) + 1 = |G| - (n-1) < |G|.$$

(2) 答案是**否定**的. 比较常见的例子是 n 阶复可逆方阵构成的群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 以及其中的 (Borel) 子群 H, 即 G 中全体上三角矩阵构成的子群. 它符合条件是因为复矩阵总能相似上三角化, 所以 G 中每个元素都被 H 的某个共轭覆盖到. □

评注 2. *第一题是经典的结果, 据说肖总也考过几次, 该题可以推广到***无限群的有限指数子群** *(所以它们并不是第二题反例). 第二题则是比较难的反例考察, 需要学生有一定的积累. 另外关于反例, 一个有趣的事实是, 存在一个无限群 G, 它元素只有两个共轭类, 其中一个自然是单位元 e, 这表明它剩下所有其他元素都共轭, 这就是所谓的 HNN 延拓, 这个群 G 显然是符合 (1) 结论的. 另一些改卷中出现的例子是无限置换群某些典范同构于自身的子群, 细节略.*

正规子群一定不是第二题的反例, 所以半直积中正规的子群一定是错误的反例.

给分参考: (1) 共 10 分, 明确指出 H 有至多 $|G|/|H|$(或者 $|G|/|N_G(H)|$) 个共轭类给 5 分, 剩余证明给 5 分. (2) 共 5 分, 给出完整正确构造和简单阐述即给 5 分. 若错误声称 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中的

矩阵均可上三角化, 仅给 2 分. 若错误声称 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵均可对角化, 不给分. 其他本质上错误的构造均不给分.

改卷人: *yrf*. 本题平均得分约 7.5, 中位数 10, 满分 15.

问题 3. 设 G 是有限群, p 是 $|G|$ 的因子, 定义

$$X = \{(a_1, \cdots, a_p) \in G^p : a_1 \cdots a_p = e_G\}.$$

设 $H = \mathbb{Z}_p$, 对 $k \in H$ 定义作用

$$k(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_p) = (a_{k+1}, \cdots, a_p, a_1, \cdots, a_k).$$

(1) 证明这是 H 在 X 上的群作用.
(2) 求出 $k \in H$ 作用下的不动点集.
(3) N_p 表示群 G 的 p 阶元个数, 证明 $N_p \equiv -1[p]$.

第三题简答. (1) 注意到它对下标影响是加 k 同余 p, 所以它在下标的 p 个数上可迁作用 (实则是正则作用), 注意到

$$a_1 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_p = e_G$$

当且仅当 $a_1 \cdots a_k$ 是 $a_{k+1} \cdots a_p$ 的左逆, 也是右逆, 于是上式当且仅当

$$a_{k+1} \cdots a_p a_1 \cdots a_k = e_G.$$

进而 H 在下标的作用对应在 X 上的作用.
(2) 随 (1) 的可迁性观察立刻可知, 若 $p \nmid k$ 则 k 生成整个群 H, X 中 k-不动点恰是 X 中 p 个分量都是同一个元素者, 所以不动点恰是阶整除 p 者. 若 $p \mid k$ 则整个 X 都不动.
(3) 注意到 $|X| = |G|^{p-1}$, 因为最后一个元素完全由前 $p-1$ 个元素决定, $|X|$ 是 p 的倍数, H 作用的轨道长度要么是 p 要么是 1, 长度为 1 者的数量自然模 p 余 0, 由于 (2) 的分类, 以及单位元阶为 1, 于是 $N_p + 1 \equiv 0[p]$. □

评注 3. 法式小题, 考察使用一个具体的方法计算群中素数阶的元素. 抛开题目情景, 对题中对象的抽象是, X 是集合 $[p] = \{1, 2, \cdots, p\} \to G$ 的函数, 那么定义域空间 $[p]$ 上的作用自然诱导函数空间 X 上的作用, 如果在定义域空间 $[p]$ 作用可迁, 那么 H-不变元素应当是 X 中常值函数. 当然也要注意这里题目中对 X 特别的限定.

给分参考: *(1)* 不作细节上的要求, 简单说明复合性质成立即给 5 分. *(2)* $k = 0$ 时不动点集为 X 给 1 分, $k \neq 0$ 时给出明确的描述 $\{(a, a, \cdots, a) \in X : a^p = e\}$ 给 4 分, 仅说明 $a_i = a_{i+k}$ 不给分, 若没有限制 $a^p = e$ 扣 1 分. *(3)* 完整证明给 5 分, 仅给出抽象的轨道方程不给分.

本题考察对群作用的基础概念掌握, 较为常规. (1) 从严格角度需要简要说明封闭性和单位元, 但在评分时不作要求. (2) 常见错误为未能注意到 $k \neq 0$ 时生成 H, 另有部分同学忘记讨论 $k = 0$ 的情形. (3) 常见错误是忽略单位元阶为 1 导致结论错误.

改卷人: yrf. 本题平均得分约 12.5, 中位数 15, 满分 15.

问题 4. *有限群 G. G 只有唯一极大子群当且仅当 G 是素数幂阶循环群.*

第四题简答. 倘若 G 素数幂阶循环那么它的子群只有: 阶数整除 $|G| = p^n$ 的循环子群 (而且确定子群阶数后该子群唯一), 这些子群在阶的整除关系下具有包含关系, 所以它的极大子群是阶数 p^{n-1} 的循环子群, 其他真子群都含于它, 从而唯一.

反设 G 有唯一极大子群 H, 任取 $a \notin H$, 不难检查 a 生成 G: 若不然 a 生成 G 的真子群, 那么结合 G 有限, 贪心地添加元素容易证明它一定包含于 G 的一个极大子群中 (或者通过 G 有限, G 的子群总量有限也能轻松说明这一点), 而 G 的极大子群只有 H 所以 $a \in H$ 矛盾. 因此 a 生成 G. 现在 G 循环, 考虑 G 的阶数, 如果有不同的素因子 $p \neq q$ 那么 $|G|/p, |G|/q$ 阶循环子群都极大 (由阶数整除它们和 G 间没有其他群) 从而不唯一, 因此 $|G|$ 是素数幂. $\square$

评注 4. *如果学生知道交换环论中的局部环概念, 那么该解答的思想将更加自然. 本质上来说, 本题实则与 p 群并无直接联系, 上面的做法并没有本质依赖于 Sylow 的定理.*

*给分参考: 循环推唯一极大给 2 分, 证明包含一个元素或包含一个子群的极大子群存在给 2 分 (注意这一步骤是要证明的, 检查有理数群的加法群 $\mathbb{Q}$ 没有极大子群), 化归为 p-群给 3 分, 证明循环给 3 分. 补充一个有趣但是正确的手段: 考虑 G 的一个极小生成元组, 若有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 那么任去掉其一不生成整个群, 而且***含于某个极大子群 (注意去掉某个生成元后生成的群不一定是极大的, 只能保证含于某极大)***, 所以这些生成元都含于 H, 与 H 是真子群矛盾.*

还有一些同学试图化到 p 群归纳, 这种做法也是可以的, 为了归纳递推能过去, 要具体论证商掉某群所得者仍有唯一极大子群, 否则完全可能存在至少两个不完全含有核的极大子群, 商完得到同一个极大子群, 因为这里是逻辑链条的关键, 不写也会被扣一点分. 一般是靠中心非平凡, 需要强调中心在极大子群 H 中, 当然实际上每一个真子群都在 H 中. 最后为了检查交换, 还得补充说明商掉中心得到循环群能推出原群交换, 然后做交换群分类再类似论证.

改卷人: cyb. 本题平均得分约 4.8, 中位数 4, 满分 10.

问题 5. *设 F 为域, 三个小问:*

(1) 证明 $a \in F^*$ 的左乘是域的加法群同构.

(2) 设 F 有限, 证明每个加法群中的元素阶都是某素数 p, 证明 $|F|$ 是 p 的幂.

(3) 求 $\mathbb{Q}$ 加法群自同构群.

第五题简答. (1) 容易检查是同态, 再看单射和满射. 注意到单射因为 $ax=0$ 推出 $x=a^{-1}(ax)=0$, 满射是因为 $x=a(a^{-1}x)$ 所以在像中.

(2) 若 F 有限, 首先证明存在一个素数 p 使 $px=0$ 对任意 $x\in F$, 考虑 $\mathbb{Z}\to F, 1\mapsto 1_F$ 给出同态, 考虑映射的核中的最小正整数, 一定是素数 p, 否则若是合数 rs 则 $r1_F\cdot s1_F=0$ 与域是整环矛盾. 这样 $p\cdot 1_F=0$ 从而 $px=(p1_F)x=0$. 这样由有限交换群分类可知.

(3) 检查 1 的像 t 决定 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 的同态就是乘 t 映射, 对 $q=r/s$, 其中 s 是正整数 r 是整数, 则 $sf(r/s)=f(s\cdot r/s)=f(r)=rf(1)$, 由于乘 s 在 $\mathbb{Q}$ 可逆故 $f(r/s)=rf(1)/s$. 由 (1) 知是同构当且仅当 $t\neq 0$, 结合乘 t_2 映射后乘 t_1 就是乘 t_1t_2 可知, 自同态群是乘法群 $\mathbb{Q}^*$. □

评注 5. *涉及对域论的考察, 实际上 $\mathbb{Q}$ 是可除的 $\mathbb{Z}$-模, 从另一个角度说, 如果学生学过所谓 Cauchy 方程, 那么 (3) 也不困难. 另外 (2) 也涉及对有限域的基本理解, 很多学生在考试前可能对有限域的概念尚不熟悉, 这方面的积累不足导致问题完成得不够理想.*

给分参考: (1) 证明是同态 2 分, 单射 2 分, 满射 2 分. (2) 每个元素的阶是素数 2 分, 这些素数相等 2 分, 由此推出元素数量是素数幂 2 分. (3) 证明集合相同 6 分, 证明群同态 2 分。其中前者只猜出答案 2 分, 证明群同态被 1 的像决定 3 分, 像不为 0 占 1 分.

改卷人: jjd. 本题平均得分约 14.1, 中位数 16, 满分 20.

问题 6. *证明 765 阶群交换. 并给出它们的分类.*

第六题简答. 群记作 G, 用 n_p 表示 G 的 Sylow p 子群的个数, 简单计算得到 $n_{17}=1$, 设唯一的 Sylow 17 子群为 P_{17}, n_5 为 $1, 51$ 之一. 任取 Sylow 3 和 Sylow 5 子群记作 P, Q, 熟知 P 交换.

- 倘若 $n_5=51$ 那么 QP_{17} 是 85 阶群, 此时用 Sylow 定理容易证明其中的 Sylow 5 是正规的, 这表明 QP_{17} 总是交换群, 这表明 $QP_{17}\leq N_G(Q)$ 但是 $|N_G(Q)|=|G|/n_5=15$ 从而推出矛盾.
- 倘若 $n_5=1$ 那么 $P_5:=Q, P_{17}$ 都是正规子群, 注意到 PP_5, PP_{17} 是 $45, 153$ 阶群, 此时用 Sylow 定理容易证明它们中的 Sylow 3 是正规的, 从而 PP_5, PP_{17} 是交换群, 由此 $P\leq Z(G)$ 所以 $n_3=1$, 熟知不同素数 Sylow 子群间的交平凡的性质, 它们都正规那么整个群将是它们的直和, 也就是说

$$G=PP_5P_{17}=P\times P_5\times P_{17}.$$

进而 G 是交换群.

$$G_1=\mathbb{Z}_{765}=\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{17},\ G_2=\mathbb{Z}_{255}\times\mathbb{Z}_3=\mathbb{Z}_3^2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{17}.$$

通过有限交换群的结构定理 (或者上面的证明过程), 上述两种给出了完整的分类. □

评注 6. *Sylow p-定理的经典使用情景. 需要学生对处理小阶数的群有一定经验.*

给分参考: 证明 17 阶群正规得 2 分. 注意 Sylow 3 和 Sylow 5 都有可能不正规. 中间步骤有两种情况, 有的同学证明了商群的 45 阶群交换, 这一步骤占 2 分, 但是大多数同学都默认该群存在 45 阶子群, 这是不正确的, 因为 Sylow 3 和 Sylow 5 如果都不正规, 它们的乘积不见得是子群, 正规子群和商群也未必是半直积. 然后还有的办法是分别证明 17 阶子群与 Sylow 3 和 Sylow 5 交换, 这些步骤也各有 2 分, 然后证明是交换群得到最后的 2 分. 给出分类得 2 分.
另外有一些同学试图计数, 这也是有一些问题的, 因为 Sylow 3 子群未必不交, Sylow p 子群只有是素数阶循环群时才能直接论断出两个不同者不交. 例如 S_4 中的 Sylow 2 就相交得比较严重, Klein 群就在 3 个 Sylow 2 的每一个中. 这样一来即便原题中 Sylow 3 有 85 个, 阶整除 9 的元素也未必有那么多.
改卷人: cyb. 本题平均得分约 5.3, 中位数 5, 满分 10.

问题 7. *对 105 阶群的研究.*
(1) 证明不是单群.
(2) 构造交换以及非交换的 105 阶群各一个.
(3) 给出 105 阶群的分类.

第七题简答. (1) 群记作 G, 用 n_p 表示 G 的 Sylow p 子群的个数, 倘若 Sylow 子群都不正规, 也就有 $n_5 = 21$, $n_7 = 15$, 注意到它们都是素数阶循环群所以不同的 Sylow p 相交平凡, 于是 $5, 7$ 阶元数量至少为

$$4 \times 21 + 6 \times 15 > 105.$$

(2) 交换的例子是 $\mathbb{Z}_{105} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$, 不交换的例子是 $H \times \mathbb{Z}_5$, 其中 H 是如下构造的 21 阶非交换子群:

$$H = \{(x \mapsto ax + b) : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7 : a \in \{1, 2, 4\} \subset \mathbb{Z}_7^*, b \in \mathbb{Z}_7\}.$$

群乘法为函数复合, 这 H 也就是 $\mathbb{Z}_7$ 和 $\mathbb{Z}_3$ 的非平凡半直积.
(3) 我们证明 105 阶群只有 (2) 所述的两个. 由于 (1) 证明了 Sylow $5, 7$ 至少其一正规, 于是 G 存在 35 阶子群 H. Sylow 定理容易推出 35 阶群是循环群, 此外它正规, 否则 G 左乘在陪集上给出 $G \to S_3$ 的映射, 映射的核 K 是 H 的子群, 由于 $[G : K] = [G : H][H : K] = 3[H : K]$ 是 $|S_3| = 6$ 的因子, 故 $[H : K]$ 是 2 的因子, 从而 $H = K$ 这样 H 正规.
于是考虑任取 Sylow 3 共轭作用在其上, 因为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{35})$ 是 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_3$ 的像要么平凡, 要么 1 打到其中的元素 $(0, 2)$ 或者 $(0, 4)$. 平凡时得到交换群, 后者情况下差一个 3 阶循环群自同构, 因此得到的半直积是同一个. 所以我们得知 105 阶群至多只有两种, 所以只能是 (2) 中的两种. □

评注 7. *(1) 本题为作业题的特殊情形, 因此考察对作业题证明的掌握情况, 直接引用作业结论将扣分. (2) 本题非交换群唯一, 一般依赖于半直积构造. 此处半直积非平凡需要 $\mathbb{Z}_3$ 作用在 $\mathbb{Z}_7$*

上, 因而 $\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_{21}$ 等错误构造将不得分. 若给出明显错误的群作用也不得分. 直接声明 $\mathbb{Z}_3$ 在 $\mathbb{Z}_{35}$ 上有非平凡群作用扣 2 分. *(3)* 将 G 分解为正规子群和商群的半直积依赖于 G 中有和商群同构的子群. 因此若在得到 G 有 7 阶正规子群 H 后, 直接声明 $G = H \rtimes K$, 本题不得分.

给分参考: *(1)* 以任何方式给出完整证明 8 分. 若直接引用 pqr 阶群不为单群仅得 4 分, 若直接引用 pqr 阶群有 r 阶正规子群仅得 6 分. *(2)* 交换构造给 2 分. 非交换情形共 6 分, 给出正确的半直积形式 2 分, 说明需要非平凡群同态 $\phi : \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_7)$ 或其他等价形式给 2 分, 给出群同态构造或证明存在性 2 分. *(3)* 完整证明共 4 分. 因为 *(2)* 的存在声明 105 阶群仅有上述 2 种不再给分. 证明存在 35 阶正规循环子群给 2 分. 其他不完整的讨论过程视完整程度和正确性酌情给 $1 \sim 3$ 分.

改卷人: *yrf*. 本题平均得分约 12.9, 中位数 14, 满分 20.

得分情况与试卷总评

有效卷 114 **份, 平均得分约** 63.1**, 中位数** 62.5**, 最高分** 98**, 满分** 100**.**

分段分布为: 90 到 100 分共 5 人, 80 到 90 分共 26 人, 70 到 80 分共 17 人, 60 到 70 分共 14 人, 50 到 60 分共 22 人, 50 分以下共 30 人.

总的来说, 这份卷子暴露出很多同学在抽代学习中的不少问题, 以逻辑推理方面的不完善以及基础知识点的缺失为重. 常见的错误也有很多种, 例如认为群 G 正规子群 H 那么 G 同构 H 与 G/H 的半直积, 实际上 G/H 就未必是 G 的子群; 又例如给出的反例经不起推敲, 甚至给出不是群的例子; 再如对群的结构认识失当, 认为 p 群甚至一般的群具有某种乘积结构, 或者分不清普通陪集结构和正规子群的商群结构等. 这也和抽代教材的选择有一定关系, 笔者认为课本教材的选择并不适宜学生入门这一对于初学者极其抽象的理论, 不仅在重点上有所偏颇, 而且在知识点讲解上也模糊难懂. 当然抽象代数作为现代数学的钥匙, 是深入学习往后各方向知识的敲门砖.

将抽代作为一门必修课本身可能就是值得斟酌的. 在学习抽代的过程中, 学生尤其是最后不走向基础和应用数学方向的学生, 需要培养的更多应当是一种思维方式, 如果将它变成死记硬背熟知结果与证明, 考试纯靠刷题和背书的课程, 就背离了设立该课程的初衷. 在大二时大多数同学课表密集, 时间有限, 观察到学院课程安排紧密给同学带来的压力, 能理解同学们在期中碰到的种种困难, **最后期末总评时可能会根据学生状况对各次考察与平时成绩进行综合调整**.

无论如何, 期中考试已经结束, 成绩好坏都已成为过去. 即便此次考试的成绩不理想, 也请在下半学期再接再厉.