北京大学数学科学学院期末试题

2016 - 2017 学年第 2 学期

考试科目 高等代数II　　考试时间 2017年6月14日

姓　　名 ________　　学　　号 ________

本试题共　　道大题，满分　　分

一. 填空题（每空3分）（注：欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 都带标准内积）

1) 设实矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&4&8\\1&2&2&5\\1&1&2&4\end{bmatrix}$.则 A 的秩 r =__， 将 A 写成 A = BC,

其中 B 由 A 的一个列极大无关组排成, 则 B, C 的一种取法是 __.

将 A 写成 r 个秩 1 矩阵的和___； A 的解空间的一组基为__；

2) 已知 $n\times r$ 实矩阵 M 列满秩， P 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 向 M 的列空间 W

所作的正交投影. 则 P 在 $\mathbf{R}^n$ 标准基下的矩阵是____. 向量

$\alpha\in\mathbf{R}^n$ 的顶点到 W 的距离为____.

3) 已知 $\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}(V)$ 在 V 的基$\{\alpha_i\}$下的矩阵为 A，设$\{\alpha_i\}$到基

$\{\beta_i\}$的过渡矩阵为 P，则在$\{\beta_i\}$下 $\mathcal{A}$ 的矩阵为__；

4) 已知矩阵 A 的特征多项式为 $(x-2)^5(x+1)^5$，最小多项式

为 $(x-2)^2(x+1)^3$，且特征值 2, -1 的几何重数分别为 3, 2,

则 A 的 Jordan 标准型为__(写出所有可能).

5) 在复数域上, 以下矩阵的相似分类为__；是正规矩阵的有___.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3&-1&3\\2&0&5\\0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&+i&0\\-i&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

6) 设正定共轭双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在基 ω_1,ω_2 下的度量矩阵为

$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$. 求此酉空间的一组标准正交基__; ω_1, ω_2 之间的酉距离__;

7) 设 $\alpha = [a_1 a_2 a_3]^T$ 是 3 维欧氏空间的单位向量, $\mathcal{A}$ 是空间绕 α 旋转 θ 角度(呈右手系)的正交变换. 则 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵为___(要求用 a_1, a_2, a_3, θ 表示), $\mathcal{A}$ 的迹等于___.

二 (10 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明: 对 $\forall\, k \geq 1$,

$$2 \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k \geq \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k-1} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1}.$$

三 (20 分) 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}$ 在基底

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_4 \text{ 下的矩阵为 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1) 求 $\mathcal{A}$ 的特征多项式与最小多项式, 特征子空间;

2) 将 V 分解为两个根子空间 W_1 与 W_2 的直和, 并求各根子空间 W_i 的基底以及限制变换 $\mathcal{A}|W_i$ 在此基底下的矩阵;

四 (20 分) 设实矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1) 证明 B 是幂零矩阵并求 B 的幂零指数;

BU = UJ

2) 求可逆矩阵 U 及 Jordan 形矩阵 J, 使得 $B = U J U^{-1}$.

五 (8 分) 给定 $\alpha \in C^n$ 满足 $\alpha^H \alpha = 1$. 试构造一个酉矩阵 A, 使得 $A^H = A$ 且 A 的第一个列向量为 α. (A^H 为 A 复共轭转置)