1、计算下列各行列式(28分，每小题7分)：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ x_1 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & -x_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2、(32分) 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) (12分) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5$的一个极大无关组;

(b) (10分) 证明: $\beta \in <\alpha_1, \cdots, \alpha_5>$

(c) (10分) 求出方程组 $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i x_i = \beta$的解集。

3. (10分) 设$A = (a_{ij})$是n阶方阵, A_{ij}是a_{ij}的代数余子式, 证明: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = |A|$. [redacted]、

4. (10分) 设数域F上的线性方程组$\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n = \beta$有解, 其相伴齐次线性方程组的解空间是$n-r$维的。证明: 在非齐次线性方程组的解集中存在$n-r+1$个线性无关向量$\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r+1}$使得它的解集为

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-r+1} a_i \gamma_i \ \middle|\ \sum_{i=1}^{n-r+1} a_i = 1, a_i \in F \right\}.$$

5. (10分) 设$A \in M_{mn}$, $r(A) = r$, 对任意的$s < m, t < n$, A_1是A的任意s行, t列交叉处的分量构成的子矩阵。证明: $r(A_1) \geq r+s+t-m-n$.

6. (a) (5分) 设$A \in M_{mn}(F)$, $r(A) = r$. 证明: 如果A的第1行, 第2行, $\cdots$, 第 r行线性无关, 第1列, 第2列, $\cdots$, 第 r列线性无关, 那么$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \neq 0$.

(b) (5分) 证明反对称矩阵的秩是偶数。 [redacted]