泛函分析期中

1. (20') 给定 $K>0$, 考虑 $\mathrm{Lip}_K := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\le K|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}\}$.

(a) 验证 $d(f_1,f_2)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\sup_{x\in[-j,j]}|f_1(x)-f_2(x)|$ 为 Lip_K 上的一个度量. 这个度量是否可以由范数诱导出来?

(b) 证明 (Lip_K,d) 为完备度量空间.

证明. (a) $d(f_1,f_2)\le\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}(2jK+K_0)<+\infty$, 其中 $K_0=|f_1(0)-f_2(0)|$. (2')

$d(f_1,f_2)\ge 0$, 等号成立当且仅当 $f_1=f_2$. (2')

$d(f_1,f_2)=d(f_2,f_1)$. (2')

$d(f_1,f_3)\le d(f_1,f_2)+d(f_2,f_3)$. (2')

注意到 $d(\lambda f,\lambda g)=|\lambda|d(f,g)$, $d(f,g)=d(f-g,0)$. (1')

记 $\|f\|=d(f,0)$, 则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathrm{Lip}:=\bigcup_{K>0}\mathrm{Lip}_K$ 上的范数, 且 d 是 $\mathrm{Lip}_K\subseteq\mathrm{Lip}$ 上由该范数诱导的度量. (1')

(b) 任取 Lip_K 中的 Cauchy 列 $\{f_n\}$, 则 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛. (4')

设极限函数为 f, 任取 $x<y$, 由 f_n 在 $[x,y]$ 上一致收敛到 f, 可得 $|f(x)-f(y)|\le K|f(x)-f(y)|$, 即 $f\in\mathrm{Lip}_K$. (2')

记 $K_0=\sup_n|f_n(0)-f(0)|$, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty}2^{-j}(2jK+K_0)<\varepsilon$. 又存在 n_0 使得 $n>n_0$ 时 $\sup_{x\in[-N,N]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 所以 $n>n_0$ 时 $d(f_n,f)<2\varepsilon$, 即 $d(f_n,f)\to 0$. (4')

2. (20') X,Y 为 Banach 空间, $T:D(T)\subseteq X\to Y$ 为闭算子.

(a) 证明 $N(T):=\{x\in D(T):Tx=0\}$ 是 X 的闭子空间.

(b) 证明 $N(T)=\{0\}$, $R(T)$ 在 Y 中闭当且仅当 $\exists a>0$ 使得 $\|x\|\le a\|Tx\|, \forall x\in D(T)$.

(c) 证明 $R(T)$ 在 Y 中闭当且仅当 $\exists a>0$ 使得 $d(x,N(T))\le a\|Tx\|, \forall x\in D(T)$.

证明. (a) 显然 $N(T)$ 是子空间. 取 $x_n\in N(T)$, $x_n\to x\in X$. 则 $Tx_n=0$, 由 T 闭知 $x\in D(T)$ 且 $Tx=0$, 从而 $x\in N(T)$. (5')

(b) 充分性. 若 $Tx=0$, 则 $x=0$, 从而 $N(T)=\{0\}$. (1')

若 $y_n\in R(T)$, $y_n=Tx_n$, $y_n\to y\in Y$, 则 $\{y_n\}$ 是 Y 的 Cauchy 列, 所以 $\{x_n\}$ 是 X 的 Cauchy 列. 设 $x_n\to x\in X$, 由 T 闭知 $x\in D(T)$ 且 $Tx=y$, 所以 $y\in R(T)$. (4')

必要性. $N(T)=\{0\}$, 从而 $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ 有定义. 且 T 闭蕴含 T^{-1} 闭. $R(T)$ 闭, 由闭图像定理知 T^{-1} 有界. (5')

(c) 考虑 $\widehat{T}: [D(T)] \subseteq X/N(T) \to Y$, $\widehat{T}[x] = Tx$. 由于 $N(T)$ 闭, $X/N(T)$ 是 Banach 空间, 其上范数定义为 $\|[x]\|_0 = \inf_{x\in[x]} \|x\|$. 于是 $d(x, N(T)) = \|[x]\|_0$. 此外由 $N(T)$ 的定义知 $\widehat{T}$ 良定. 于是由 (b) 的结论, 只需证明 $\widehat{T}$ 是闭算子. 假设 $[x_n] \to [x]$, $\widehat{T}[x_n] \to y$. 取代表元 x_n, x 使得 $\|x_n - x\| \leq 2\|[x_n]-[x]\|_0$, 则 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$. 由 T 闭知 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$, 于是 $[x] \in D(\widehat{T})$ 且 $\widehat{T}[x] = y$. (5')

3. (15') X, Y 为 Banach 空间, 证明 $\Omega = \{T \in L(X,Y) : T \text{ 满}\}$ 是 $L(X,Y)$ 在赋予算子范数构成的 Banach 空间中的开集.

证明. 任取 $T_0 \in L(X,Y)$, 由开映射定理知存在 $\delta > 0$ 使得 $T_0B(0,1) \supseteq B(0,\delta)$. (2')

断言当 $T \in L(X,Y)$, $\|T - T_0\| < \frac{1}{2}\delta$ 时, $T \in \Omega$. (2')

任取 $y_0 \in B(0,\delta)$, 存在 $x_0 \in B(0,1)$ 使得 $T_0x_0 = y_0$. 归纳构造 $x_n \in B(0, 2^{-n})$, 使得 $T_0x_{n+1} = (T_0 - T)x_n$. 这是由 $T_0B(0, 2^{-(n+1)}) \supseteq B(0, 2^{-(n+1)}\delta)$ 保证的. 记 $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, 则 $T_0(x - x_0) = T_0x - Tx$, 即 $Tx = T_0x_0 = y_0$. 于是 $TX \supseteq B(0,\delta)$, $T \in \Omega$. (11')

4. (10') H_1, H_2 为 $\mathbb{R}$ 上的两个 Hilbert 空间, $A: H_1 \to H_2$ 是一个映射, 满足 $A(0) = 0$, $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$, $\forall x, y \in H_1$.

(a) 证明 A 是有界线性算子.

(b) 考虑复数域上的情形, 结论是否成立?

证明. (a) 利用 $2(x,y) = \|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ 可知 $(Ax, Ay) = (x,y)$. 于是通过计算 $\|A(x+y) - Ax - Ay\|^2$, $\|A(\lambda x) - \lambda Ax\|^2$ 可知 A 线性. (4')

由 $\|Ax\| = \|x\|$ 知 $\|A\| = 1$, 有界. (2')

(b) 不成立. (1')

考虑 $\mathbb{C}$ 上 $Az = \bar{z}$, 它不是复线性, 但是保距. (3')

5. (10') 考察空间 $C^1[0,1]$, 其上赋予内积 $(f,g) = \int_0^1 (f'g' + fg)dx$. 定义 $Y = \{g \in C^1[0,1] : g(0) = g(1) = 0\}$. 记 $H = (C^1[0,1], (\cdot,\cdot))$, $H_0 = (C^2[0,1], (\cdot,\cdot))$.

(a) 证明 Y 是 H 的闭子空间, $Y \bigcap H_0$ 是 H_0 的闭子空间.

(b) 考虑 Z 是 $Y \bigcap H_0$ 在 H_0 中的正交补, 给出 Z 的刻画并探讨 $\dim Z$.

证明. (a) 设 $g_n \in Y$, $g_n \to g \in H$, 来证明 $g \in Y$. 即证 $g(0) = g(1) = 0$. 注意到 $|(g_n(x) - g(x)) - (g_n(0) - g(0))|^2 = |\int_0^x (g_n - g)'dt|^2 \leq x^2 \int_0^x |(g_n - g)'|^2 dt \leq \|g_n' - g'\|_{L^2}^2$, 因为 $g_n' - g'$ 在 L^2 意义下收敛到 0, 所以 $g_n(x) - g(x) + g(0)$ 一致收敛到 0. 但 $g_n - g$ 在 L^2 意义下收敛到 0, 所以 $g(0) = 0$. 同理 $g(1) = 0$. (2')

$Y \bigcap H_0$ 在 H_0 中闭的证明与上面完全相同. (2')

(b) $g \in Z$ 当且仅当任取 $f \in Y \bigcap H_0$, 都有 $(f, g) = 0$, 即 $\int_0^1 f(g'' - g)dx = 0$. 由于 $Y \bigcap H_0$ 在 $L^2[0,1]$ 中稠密, 该式等价于在 L^2 意义下 $g'' - g = 0$. 又 $g \in C^2[0,1]$, 所以 $g''(x) = g(x)$, $\forall x \in [0,1]$. 即 $g(x) \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e^x, e^{-x}\}$. (4')

$\dim Z = 2$. (2')

6. (20') (a) X 为 Banach 空间, M, N 为 X 的非平凡闭子空间, $X = M \oplus N$, 直和分解为 $x = P_M x + P_N x$. 证明 P_M, P_N 为有界线性算子.

(b) X 为 Banach 空间, T, $S \in L(X)$ 满足 $T^2 = T$, $S^2 = S$, $TS = ST$, 证明 $T = S$ 或 $\|T - S\| = 1$.

证明. (a) 由直和分解的唯一性可知 P_M, P_N 为线性算子. 定义 $P : X \to M \times N$, $Px = (P_M x, P_N x)$, 其中 $M \times N$ 上的范数定义为 $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. 则 $M \times N$ 为 Banach 空间. 由直和分解的唯一性可以证明 P 是闭算子, 由闭图像定理知 P 有界, 所以 P_M 与 P_N 都有界. (12')

(b) 对于 $n = 2m - 1$ 为奇数, 有

$$(T - S)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T^k (-S)^{n-k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k (T^k (-S)^{n-k} + T^{n-k}(-S)^k) = T - S.$$

于是 $\|T - S\| \le \|T - S\|^n$, 即 $\|T - S\| = 0$ 或 $\|T - S\| \ge 1$. (8')

7. (5') X 是 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的赋范线性空间, $A \in L(X)$ 紧, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. 证明 $\lambda I - A$ 为单射当且仅当 $\|x\| \to \infty$ 蕴含 $\|(\lambda I - A)x\| \to \infty$.

证明. 充分性. 若 $\lambda I - A$ 不是单射, 取 $x_0 \in \ker(\lambda I - A)$, $x_0 \neq 0$, 则 $\|n x_0\| \to \infty$ 但 $\|(\lambda I - A)(n x_0)\| = 0$, 矛盾. (2')

必要性. 若存在 $\|x_n\| \to \infty$ 且 $\|(\lambda I - A)x_n\|$ 有界, 考虑 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = 1$ 且 $\|(\lambda I - A)y_n\| \to 0$. A 紧, 所以 $\{Ay_n\}$ 存在收敛子列 $Ay_{n_k} \to z_0$. 于是 $\lambda y_{n_k} \to z_0$. 特别地 $z_0 \neq 0$. 于是 $Az_0 = \lambda z_0$, $z_0 \in \ker(\lambda I - A)$, 矛盾. (3')