

北京大学工学院2015级常微分方程期中试卷

(本试题共四道大题, 满分100分)

一 填空题 (26分)

(1) 二阶方程 $x'' + a^2x = 0 (a > 0)$ 满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 1$ 的解等价于方程组() 满足初始条件() 的解。

(2) 已知函数 $a(t), b(t), f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 函数 $2e^t + te^t, 7e^t + te^t, 5e^t + 2te^t$ 是方程

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad (1)$$

的解, 则此方程对应的齐次方程的通解可以表示为();
方程 (1) 的通解可以表示为()。

(3) 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -t^2x - ty + (\sin t)^2 \end{cases}$$

满足初始条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ 的解有 () 个, 其存在区间为 ()。

(4) 已知二阶线性方程

$$x'' - tx' + t^2x = 0 \quad (2)$$

$\varphi_1(t)$ 是方程 (2) 满足初始条件 $x(0) = \alpha, x'(0) = 0$ 的解, $\varphi_2(t)$ 是方程 (2) 满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = \beta$ 的解, 其中 α, β 是两个常数, 则由 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 构成的朗斯基行列式可表示为(); $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 线性无关的充要条件为 ()。

(5) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(t)$ 不恒为零, $f(t+1) = f(t)$ 。则方程 $\frac{dx}{dt} + 2x = f(t)$ 的通解为 ()。上述方程有 () 个以1为周期的周期解。此方程以1为周期的周期解可表示为 ()。

二 (48分) 求解下列方程

(1) $\frac{dy}{dx} = x + y + 3.$

(2) $\frac{dy}{dx} - xy = y^2x^3.$



$$(3) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

$$(4) yy'' - (y')^2 = 0.$$

三 (16分) (1) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = 0$ 的通解。

(2) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = e^t(t-1)^2$ 的通解。

(3) 求方程 $(t-1)x'' - tx' + x = e^t(t-1)^2$ 满足初始条件 $x(0) = 0, x'(0) = 0$ 的解。

四 (10分) 已知 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个基本解组, 其中 $p(t), q(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

(1) 如果 $\varphi_1(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒不为零, 证明函数 $\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加或者严格单调减少。

(2) 证明在 $\varphi_2(t)$ 的两个相邻零点之间存在且仅存在一个 $\varphi_1(t)$ 的零点。

