2022年秋季学期应用随机过程实验班第二次期中考试试题。每题10分，满分共80分。

1, 考虑状态空间为$\{1, \ldots, N\}$的跳过程。对于$t \geq 0$, 令$\mathbf{P}(t)$为该跳过程在时刻t的转移概率矩阵。证明$\mathbf{P}(t)$的行列式大于0。

2, 证明以概率为1，标准布朗轨道的局部极值点是稠密集。(注：一个点t是局部极值点当且仅当存在包含该点的一个开邻域使得布朗轨道在该领域中的最大值于点t处取得。)

3，考虑一个顶点度一致有界的无穷连通图$G = (V, E)$。定义$G^3 = (V^3, \mathcal{E})$，其中$((v_1, v_2, v_3), (u_1, u_2, u_3)) \in \mathcal{E}$当且仅当$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in V$且存在$i \in \{1, 2, 3\}$使得

$$u_j = v_j \text{ for } j \neq i; (u_i, v_i) \in E\,.$$

试判断G^3上简单随机游动的常返性并证明之。

4，有n盏灯，刚开始都处于关闭状况。有一个速率为1的泊松闹钟；每当闹钟响起时我都独立的均匀的选取一盏灯并改变该灯的开/闭状态。求时刻t时所有灯都处于关闭状况的概率。

99个子结点，根结点100个?

5, 考虑结点度为100的无穷规则树上的接触过程，其描述如下。每个顶点有两个状态，健康或者感染。每个顶点放置两个独立的泊松闹钟，一个是“康复”闹钟且其速率为1，一个是“传染”闹钟且其速率为100。当康复闹钟响时，如果该顶点处于感染状态，则恢复至健康状态；当传染闹钟响起时，该结点独立均匀的选择一个邻点并且感染它（即把邻点变成感染状态）。假设初始时有且仅有一个结点处于感染状态。证明有正概率该系统永不回复到全体健康的状态。

6, 假设(B_t)是标准布朗运动。令$\tau = \sup\{0 \leq t \leq 1 : B_t = 0\}$. 证明以概率为1存在$t_n < s_n$且$t_n \uparrow \tau$使得$B_{t_n} < 0$且$B_{s_n} > 0$. 加上. $s_n < \tau$

7, 假设(B_t)是标准布朗运动，且假设f是一个连续函数且$f(0) = 0$。证明对于任意的$\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t - f(t)| \leq \epsilon) > 0\,.$$