

常微分方程期中试题

2023.4.10

共 7 道大题，满分 100 分

1. (40分, 每题10分) 求解下列方程的初值问题, 要求适当化简

$$(1) \quad 2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x, \quad y(1) = 0.$$

$$(2) \quad y' = x^3y^3 - xy, \quad y(0) = 1.$$

$$(3) \quad \int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} dt = 2\sqrt{x} + y(x).$$

$$(4) \quad 2xy^3 dx + (x^2y^2 - 1) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

2. (10分) 求满足积分方程

$$\int_0^1 \varphi(xt) dt = n\varphi(x), \quad n \neq 0$$

以及 $\varphi(1) = 1$ 的连续函数 $\varphi(x)$.

3. (10分) 试求微分方程 $y'^2 - 2xy' + 2y = 0$ 的所有解。

4. (10分) 设 φ, ψ, ω 是定义在区间 $I : a \leq x \leq b$ 上的连续函数, $\omega(x) > 0$, 且

$$\varphi(x) \leq \psi(x) + \int_a^x \omega(s)\varphi(s) ds.$$

进一步假设 $\psi \geq 0$, 单调不减. 证明

$$\varphi(x) \leq \psi(x)e^{\int_a^x \omega(s) ds}, \quad x \in I.$$

5. (15分) 求曲线族 $\Phi_c : y^2 = 4c(x+c)$ 所满足的微分方程 以及与该曲线族 Φ_c 正交的轨线族 Ψ_c 所满足的微分方程 并求出此正交轨线族 Ψ_c .

6. (5分) 证明: 初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在 $[x_0, +\infty)$ 上存在.

7. (10分) 已知 $f(x, y)$ 为正方形

$$\Omega : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

上的连续函数, 并且对所有的 $(x, y) \in \Omega$, 都有 $|f(x, y)| < 1$. 证明关于 $\varphi(x)$ ($x \in [0, 1]$) 的积分方程

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy$$

有唯一的连续解.

【全卷完】