数学模型　期中考试（1）

Exam Date: April 26.　Time: 03:15 pm to 04:55 pm.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. 变化率模型。（30分）

（a）（10分）对于依赖于参数 $a>0$ 的一维系统，

$$\dot{x} = ax^2(2-x) - x.$$

讨论不同参数取值的时候，系统的平衡点的个数和稳定性。a 取什么值时，会出现分岔现象？

（b）（15分）考虑 Becker-Döring 模型。这是包含无穷多个状态变量$C_k (k=1,2,3...)$ 的变化率模型。每种反应物的基本单元(以下称“分子”)都是由同种单体(以下称“原子”)构成的，只是每种反应物包含单体的数目不同。具体地，我们用变量 $C_k\,(k=1,2,3...)$ 表示第 k 种反应物的浓度，一个 C_k 分子由 k 个原子构成。

这里只考虑以下两种类型的反应：一个 C_k 分子结合一个原子 C_1，形成聚合物，一个 C_{k+1} 分子；以及其逆反应：一个 C_{k+1} 分子分解成一个 C_1 原子和一个 C_k 分子（注意当 $k+1=2$ 时，一个 C_2 分子分解成2个 C_1 原子）。对应的反应速率系数分别为 a_k 和 b_{k+1}：

$$C_1 + C_k \underset{b_{k+1}}{\overset{a_k}{\rightleftharpoons}} C_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

根据质量作用定律，写出各个 $C_k\,(k=1,2,3...)$ 满足的常微分方程。

（c）（5分）对于（b）中的模型，形式地推导这个系统满足如下的质量守恒:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kC_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k(0), \quad \forall\, t \geq 0.$$

注：这个模型于1935年被物理学家Becker和Döring提出来对液滴凝结成核建模，后来有了广泛的应用，对这个模型的分析也引起了很多数学家的兴趣。关于其适定性及质量守恒的第一个严格证明是 Ball et al. 在1986年给出的。

2. 一阶波方程和特征线法。(20分)

当使用特征线法求解 Burgers’ equation

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

我们需要关心特征线首次相交的时间和位置。假设如下的光滑初值 $u(x,0) = e^{-x^2}$。

（a）（15分）对于分别从 A_1 和 A_2 出发的两条特征线，如果它们相交，计算相交的时间和位置。

（b）（5分）求解激波首次形成的时间（需要算出具体的数值）。

3. 泛函与优化。(20分)

1927年，Thomas 和 Fermi 分别独立地提出了电子气体的能量泛函模型，之后 Dirac 对这个能量泛函模型做了修正。我们考虑空间坐标 x 是三维的情形。如果我们用 $n(x)$ 表示电子气体的密度，$V(x)$ 表示给定的势能函数，那么这个能量泛函可以表示为如下的形式

$$E=\frac{3}{5}\int_{\mathbb{R}^3}\left(n(x)\right)^{\frac{5}{3}}dx+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)n(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n(x)n(x')}{|x-x'|}dxdx'-\frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\left(n(x)\right)^{\frac{4}{3}}dx.$$

(a)(15分)在无约束的情况下，求使得此能量泛函达到极值的必要条件。(只推导方程，无需求解)

(b)(5分)在系统中电子数量固定为 N 的约束下，即

$$\int_{\mathbb{R}^3}n(x)dx=N,$$

求使得此能量泛函达到极值的必要条件。(只推导方程，无需求解)

4. 守恒律模型。(30分)

(a)(15分)令空间坐标 $x\in\mathbb{R}$, 把 $u(x,t):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 看作一个(广义的)密度函数。在时间 t 时，位于 x_1 和 x_2 这两点之间的总质量由如下的定积分给出

$$m(t)=\int_{x_1}^{x_2}u(x,t)dx.$$

对模型做适当的假设和补充定义，推导出平衡率模型(Balance law)：

$$u_t+(J)_x=\psi.$$

(b)(10分)定义 $V(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为势能函数。令 $\psi\equiv 0, J=-u_x-uV'$，则上述平衡率模型简化为一个对流扩散方程

$$u_t-u_{xx}-(uV')_x=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

在本小题中，假设势能函数 V 满足存在正数 $\gamma>0$，使得 $V''\le-\gamma<0$。如果给定初始条件 $u(x,0)=u_0(x)\ge 0$，形式推导如下的估计(推导过程中假设所有∞处的边界项都为 0)

$$\int_{\mathbb{R}}u^2dx\le e^{-\gamma t}\int_{\mathbb{R}}u_0^2dx.$$

(c)(5分)在本小题中，我们假设势能函数 V 满足，如果当 $|x|\to+\infty$ 时，$V(x)\to+\infty$。容易验证(b)中方程有一个形如 $ce^{-V(x)}$ 的平衡解，其中 c 为常数，由初值和质量守恒决定。对于任意的光滑凸函数 $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，通过计算证明(推导过程中假设所有$\infty$处的边界项都为 0)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}e^{-V(x)}H\left(\frac{u(x,t)}{e^{-V(x)}}\right)dx\le 0.$$

提示：计算 $\left(e^{-V(x)}\left(u(x,t)e^{V(x)}\right)_x\right)_x$，并与对流扩散方程对比。