

2015-2016 学年第二学期高等代数 II 期中考试 (田青春)

May 1, 2016

一、(20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a. 求 A 的极小多项式及特征多项式;
- b. 求 A 的 Jordan 标准型.

二、(30 分)

- a. (5 分) 叙述 Eisenstein 判别法;
- b. (10 分) 证明 Eisenstein 判别法;
- c. (15 分) 设 $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, 求 $\mathbb{Q}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}\}$ 作为 \mathbb{Q} -线性空间的维数 (需要写出详细的推理过程, 只有答案不给分).

三、(10 分) 证明: 多项式 $f(x) \in F[x]$ 是一个不可约多项式的方幂的充要条件是: 对任意的多项式 $g, h \in F[x]$, 如果 $f \mid gh$, 那么存在正整数 m 使得 $f \mid g^m$ 或者 $f \mid h^m$.

四、(15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 F -线性空间 V 的一组基, W 是 V 的 r 维子空间.

- a. 证明存在 i_1, \dots, i_{n-r} 使得 $V = W \oplus \langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-r}} \rangle$;
- b. a 中的 i_1, \dots, i_{n-r} 是唯一 (不计顺序) 的吗? 证明你的判断.

五、(15 分) 设 $A \in M_{10}(\mathbb{C})$, 请确定分别满足下列条件的矩阵是否存在. 如存在列举它们的 Jordan 标准型 (写出推理过程, 只有答案不给分).

- a. $A^4 = 0$, $\text{rank}(A^3) = 1$, $\text{rank}(A^2) = 3$;
- b. $A^5 = 0$, $\text{rank}(A^2) = 5$, $\text{rank}(A^3) = 4$.

六、(10 分) 如果两个实矩阵在复数域上相似, 那么它们在实数域上也相似.