高等代数 II 期末考试

命题: 赵春来 录入: erliban@bdwm

时间: 2004年6月

一. (15分) 求 $\mathbb{Q}[x]$ 中次数小于 3 的多项式 $f(x)$, 使得

$$\begin{cases} f(x) \equiv x^5 & \pmod{x-1} \\ f(x) \equiv x+1 & \pmod{x^2-2} \end{cases}$$

二. (20分) 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是方程 $3x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = 0$ 的根, 求 $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i - 1}$ 的值.

三. (20分) 给定实系数多项式 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x - 1$.

1. (15分) 求 $f(x)$ 实根的个数(若是重根, 写出其重数);
2. (5分) 求出所有整数 a, 使得 $f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 内有实根.

四. (10分)设 p 为素数, 以 $\mathbb{F}_p$ 记 p 个元素组成的有限域. 证明 $\mathbb{F}_p$ 上的 2×2 的可逆矩阵共有 $(p^2-1)(p^2-p)$ 个.

五. (15分) 设 K 为数域, $f(x)$ 为一元多项式环 $K[x]$ 中的不可约多项式, $\alpha \in \mathbb{C}$ 为 $f(x)$ 的一个根. 证明 $K[\alpha] = K(\alpha)$, 其中

$$K[\alpha] = \{g(\alpha) | g(x) \in K[x]\},$$

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{u(\alpha)}{v(\alpha)} | u(x), v(x) \in K[x], v(x) \neq 0 \right\}.$$

六. (15分)设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 的线性变换. 令 $f(x)$为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式. 如果

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda) \cdots f_t(\lambda),$$

其中 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots f_n(\lambda)$ 为 $K[\lambda]$ 中两两互素的 (次数大于0 的) 元素, 证明 V 的 $\mathbf{A}$-不变子空间的个数不少于 2^t .

七. (5分)设 A, B 为 $n \times n$ 上的正规矩阵, 且存在 n 阶可逆复矩阵 T, 使得 $B = T^{-1}AT$. 证明 存在酉矩阵 U, 使得 $B = U^{-1}AU$.