

2017 年春季概率论期中考试

May 9, 2017

1. (10 分) 已知有 5 个红球, 6 个蓝球和 8 个绿球, 现无放回地任取 3 个球.
 - (1) 构造该古典概型的样本空间;
 - (2) 求三个球颜色相同的概率.
2. (10 分) 已知一个家庭有 $n(n \geq 1)$ 个小孩的概率为 $\alpha\rho^n, 0 < \rho < 1, 0 < \alpha\rho < 1 - \rho$, 没有小孩的概率为 $1 - \alpha\rho/(1 - \rho)$. 设男孩和女孩等概率出生, 求一个家庭恰有 $k(k \geq 1)$ 个男孩的概率.
3. (12 分) 已知 X 的分布函数如下:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2 + (x - 1)/4, & 1 \leq x < 2, \\ 11/12, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

求: (1) $P(X = 3)$; (2) $P(1/2 < X \leq 3/2)$; (3) $P(X < 2)$.

4. (10 分) 已知 ξ, η, ζ 均为随机变量, 且 ξ 和 η 有相同的分布, 问 $\xi + \zeta$ 和 $\eta + \zeta$ 是否有相同的分布? 若是, 说明理由, 若不是, 构造反例.

5. (20 分) 汽车压力表的显示状态只有“满”和“没油”两种. 已知油箱中有油的概率为 0.9, 汽车电池有电的概率为 0.9, 有油有电的情况下压力表显示“满”的概率为 0.8, 没油有电的情况下压力表显示“满”的概率为 0.2, 有油没电的情况下压力表显示“满”的概率为 0.2, 没油没电的情况下压力表显示“满”的概率为 0.1. 现在观察到压力表显示为“没油”.

- (1) 油箱实际没油的概率是多少?
 - (2) 若进一步检查发现电池没电, 则油箱实际没油的概率是多少?
6. (10 分) 已知随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求 $Y = y(y > 0)$ 的条件下 X 的条件密度;

(2) 求 $P(X > 1|Y = y)(y > 0)$;

(3) 求 $P(X > Y^2)$.

7. (20 分) 已知随机向量 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x, y) : |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$ 上的均匀分布.

(1) 求 (X, Y) 的联合密度;

(2) 求 X, Y 的边缘密度;

(3) 问 X, Y 是否独立? 说明理由;

(4) 问 $X + Y, X - Y$ 是否独立? 说明理由;

(5) 求 $X - Y$ 的密度函数.

8. (8 分) 设 Z 是取正整数值随机变量. 在集合 $\{1, 2, \dots, Z\}$ 中任取一个数 ξ , 记 $R = \#\{\xi + 1, \xi + 2, \dots, Z\}$, 即 $\{1, 2, \dots, Z\}$ 中比 ξ 大的数的个数. 设随机变量 U 与 Z 独立, 且 $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, 问 R 与 $[UZ]$ 是否同分布? 说明理由 (注: $[x]$ 表示 x 的整数部分).