

北京大学数学科学学院期末试题

2013 – 2014 学年第二学期

考试科目: 复变函数 考试时间: 2014 年06 月18 日

姓 名: 学 号:

本试题共七 道大题, 满分100 分

1. (20分) 求Laurent级数展开. 求

$$f(z) = \frac{-z^2 + (4 + 2i)z - 2i}{z(z + i)(z - 2)}$$

在圆环 $\{z \in \mathbf{C} | 0 < |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbf{C} | 1 < |z| < 2\}$, $\{z \in \mathbf{C} | 2 < |z| < 3\}$ 上的Laurent展式.

2. (20分) (1) 是否存在单位圆盘 $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 到复平面 \mathbf{C} 的全纯双射? 若存在请写出例子; 若不存在, 请给出证明。

(2) 是否存在单位圆盘 $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 到复平面 \mathbf{C} 的全纯满映射? 若存在请写出例子; 若不存在, 请给出证明。

3. (10分): 令 $f(z) = \frac{z^2-1}{z \sin^2 z}$, 求留数 $Res(f, 0)$.

4. (15分) 设 Γ 是 D 内可求长的Jordan曲线且其内部属于 D , 再设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内亚纯, 在 Γ 上满足 $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$. 证明

$$N(f) - P(f) = N(g) - P(g),$$

其中 $N(f)$, $P(f)$ 分别是 f 在 Γ 内部的零点和极点的个数(零点和极点均计重数).

5. (15分) $g(z)$ 在单位圆 $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 内全纯, 且 $g(0) = 0$, $Reg(z) < 1 (z \in \Delta)$, 证明 $|g(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}$.

(第六, 七题请见背面)

6. (10分) (1) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是整函数, 证明对任意 $r > 0$, 有

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

- (2) $f(z) = u + iv$ 是整函数, C 是一常数, 存在一列 $r_i \rightarrow \infty$ 使得当 $|z| = r_i$ 时, $u(z) \leq Cr_i^s$. 求证 f 是一个次数小于等于 s 的多项式.

7. (10分) 设 $R_j = \{z \in \mathbf{C} | 1 \leq |z| \leq r_j\}$ ($j = 1, 2$) 是两个闭圆环, $\phi: R_1 \mapsto R_2$ 为全纯同胚, 且在 R_1 上连续, 证明 $r_1 = r_2$.