## 《概率论》期中考试试卷

1. 描述一个你所知道的最复杂的概率空间。

2. 设$X$是连续型随机变量，分布函数为$F$, Y=$-logF(X)$. 试证 Y 服从指数分布。

3. 设$X$和$Y$是相互独立随机变量，$U = min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$. 试用分布函数$F_X$和$F_Y$来表示$F_U$和$F_V$. 进一步设$X$和$Y$服从参数为 1 的指数分布，试求$U$和$V$的分布函数。

4. 假设乘客购票但起飞前取消乘坐飞机的概率为 0.1, 航空公司 A 有九座小飞机，每次卖 10 张机票；航空公司 B 的客机座位数是 18, 每次售卖 20 张机票。试问哪个公司乘客超员的可能性更大?

5. 设 F 和 G 是两个分布函数，定义

   $\mathrm{d(F,G)} = \inf\{\varepsilon > 0: G(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon) + \varepsilon \ \ for \ \ all \ \ x\}$.

   试证 d 是分布函数全体的一个距离。

6. 一坛内有 b 个蓝色球和 r 个红色球。设 X 是第一次摸得红球的时刻，试求 X 的概率分布，并证明 EX=(b+r+1)/(r+1).

7. (a) 设 P(A|B) > P(A), 试证 P(B|A) > P(B), 且 P(A|B$^c$) < P(A);

   (b) 若 P(B|A) > P(B), 且 P(C|B) > P(C), 能否断言 P(C | A) > P(C)?

8. 若将 n 封信全部抽出信纸后再随机装入信封，X 是信纸正确插入信封的数目，试证 (a) EX =1; (b) 当 n 趋向无穷时，X 的分布收敛于泊松分布。

9. 设 X 是取非负值的随机变量。试证

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) \leq EX \ \ \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

10. 设$X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$独立同分布，均服从标准正态分布 N(0,1), 令

$$\xi = \sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}, \qquad \eta = (X_1/\xi,\ X_2/\xi,\ \cdots\cdots X_n/\xi).$$

试证 $\eta$服从 n 维欧氏空间单位球面上的均匀分布。

2021/4/27