2023 秋季学期概率论期中试题

命题人：**任艳霞、章复熹**　**考试时间**：2023-11-7 10:10-12:00　**整理人**：**妙姐**

1. 盒子里有 17 个球, 其中有 7 个白球,10 个黑球, 依次从其中不放回地摸出 5 个球.

(1) 请描述古典概型 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

(2) 求前两次摸出白球，后三次摸出黑球的概率.

2. 已知某家庭中有 n 个孩子, 父母以 p 的概率生一个男孩,$1-p$ 的概率生一个女孩，且每个孩子的性别相互独立, 设 $A =$" 该家庭至多有一个女孩",$B =$" 该家庭既有男孩也有女孩".

(1) 求 $P(A), P(B), P(AB)$;

(2) 求 A, B 相互独立当且仅当 n 为多少.

3. 一枚硬币以 0.7 的概率掷出正面,0.3 的概率掷出反面; 甲掷硬币得到结果后去告知乙结果, 途中甲有 0.7 的概率记得结果, 有 0.3 的概率忘记结果, 如果甲记得结果，就会把正确的结果告知乙，否则将随机把正面或反面的结果告知乙.

(1) 求乙被告知是正面的概率;

(2) 求乙被告知正确结果的概率;

(3) 已知乙被告知了结果是正面，求确实掷出了正面的概率.

4. 设 $n \times n$ 矩阵 M 的每一个元素都独立地等可能地取 0 或 1.

(1) 设 X 为 M 第一行元素的和,Y 为 M 第二行元素的和，求 $P(X \geq Y)$;

(2) 已知 M 有 n 个元素取 1, 其余元素都取 0，求这 n 个 1 位于不同行，不同列的概率;

(3) 设与 M 独立的 n 维列向量 $\overrightarrow{V}$ 的 n 个元素独立地以 p 的概率取 1, 以 $1-p$ 的概率取 0, 求 $M\overrightarrow{V}$ 是零向量的概率.

5. 设 X, Y 独立且 $X \sim \Gamma(r, \lambda), Y \sim \Gamma(s, \lambda), W = X + Y, V = \frac{X}{X+Y}$.

(1) 求 V 的密度;

(2) 设 $\hat{V} \stackrel{d}{=} V$ 且与 W 独立，证明 $W\hat{V} \stackrel{d}{=} X$.

6. 设 X 有连续的尾分布函数 $G(x) = P(X > x)$, 定义它的广义逆 $G^{-1}(u) := inf\{x : G(x) \leq u\}; U \sim U(0,1); g$ 是 $[0,1]$ 上的严格单调增函数,$g(0) = 0, g(1) = 1$, 它的逆记为 g^{-1};

(1) 证明 $G^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$;

(2) 求 $G(X)$ 的分布;

(3) 设 $Y := g(G(X))$, 求 Y 的尾分布函数;

(4) 试用 X, G^{-1}, g^{-1} 构造随机变量 Y, 使得 Y 的尾分布函数为 $g \circ G$.

7. 设 W_1, W_2 相互独立且 $W_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), W_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

(1) 设 a, b 为不全为 0 的实数，求 $aW_1 + bW_2$ 的密度函数;

(2) 设 $W_1, W_2, \ldots, W_{10}$ 相互独立且均服从 $N(\mu, \sigma)$, 试构造一个已知函数 f 使得 $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_{10}) \sim N(0,1)$, 这里 "已知函数" 是指不含未知参数 μ, σ 的函数, 例如 $X_1 - \mu$ 不是已知函数,$X_1 + e^{X_2} + 2X_3$ 是已知函数.