数学分析 (II) 期末考试

北京大学 2023-2024 学年春季学期*

共 8 题, 总分 100 分

本参考答案仅供进一步学习、查漏补缺之用.

1 (10 分)**.** 判断下列命题的正误并简要论证.

1. (5 分) 函数族 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上等度连续.
2. (5 分) 令 X 为 $[0,1]$ 上全体连续可微函数 (即可导且导函数连续的函数) 构成的线性空间, 那么 $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ 是 X 上的一个范数 (这里的 $f'(x)$ 在区间端点处需理解为单侧导数).

解答. 1. 错误. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 对任意的 $\delta \in (0,1)$, 考虑 $x_1 = 1$, $x_2 = 1-\delta$. 当 $n \geq \ln 2/|\ln(1-\delta)|$ 时, $|x_1^n - x_2^n| = 1-(1-\delta)^n \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$. 所以由定义, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上不等度连续.

另证: 假如 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上等度连续. 由于 $|x^n| \leq 1$, 故 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上也一致有界. 由 Arzelà-Ascoli 定理知, 存在一个子列 $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 不妨设极限函数为 $g(x)$. 由函数 x^{n_k} 的连续性, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上也必然连续. $g(x)$ 同时也是 $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的逐点极限. 但由于 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛到一个不连续的函数, 这产生了矛盾. 因此, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上不等度连续.

2. 错误. $\|f\| = 0$ 无法推出 $f = 0$, 即不满足正定性的条件. 事实上对 $[0,1]$ 上的任何常函数 f, 都有 $\|f\| = 0$.

2 (10 分)**.** 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且 2π 周期, 令 $S_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的 Cesàro 平均. 已知对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1/3}$ 成立. 请证明: $|S_n^*(x) - S_n^*(y)| \leq |x-y|^{1/3}$ 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 以及任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$ 也都成立.

解答. 设 F_n 为 Fejér 核, 那么

$$S_n^*(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)F_n(z)\,dz.$$

故

$$S_n^*(x) - S_n^*(y) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-z) - f(y-z)\big)F_n(z)\,dz.$$

*考试时间: 2024 年 6 月 19 日 8:30 – 10:30.

利用题中条件以及 F_n 非负且在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为 1 的性质,

$$\begin{aligned}\left|S_n^*(x)-S_n^*(y)\right| &\le \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x-z)-f(y-z)\right|\left|F_n(z)\right|dz\\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}\left|x-y\right|^{1/3}F_n(z)\,dz=\left|x-y\right|^{1/3}.\end{aligned}$$

3 (10 分)**.** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 2π 周期的, 在 $[0,2\pi)$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{如果 } x\in[0,\pi],\\ 0, & \text{如果 } x\in(\pi,2\pi),\end{cases}$$

1. (6 分) 计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数;
2. (4 分) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数, 并画出它在 $[-3\pi,3\pi]$ 上的图像. 请简要论证.

解答. 1. 对任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cos nx\,dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x+\cos(n-1)x\,dx\\ &=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{如果 } n=1,\\ 0, & \text{如果 } n\neq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

同理, 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_+$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\,dx.$$

因此,

$$\begin{aligned}b_n&=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}[1-\cos 2\pi], & \text{如果 } n=1,\\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\big(1-\cos\left[(n+1)\pi\right]\big)+\frac{1}{n-1}\big(1-\cos\left[(n-1)\pi\right]\big)\right], & \text{如果 } n>1,\end{cases}\\ &=\frac{1}{2\pi}\big(1+(-1)^n\big)\frac{2n}{n^2-1}.\end{aligned}$$

综上, f 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

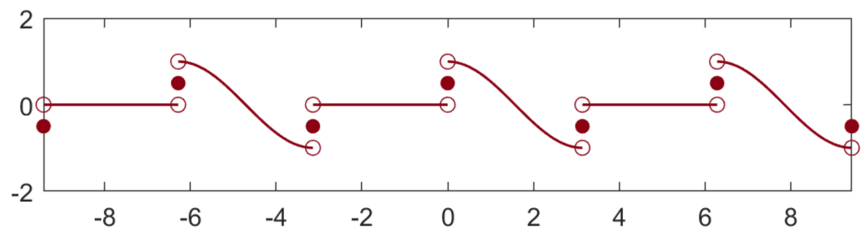

图 1: 第 3 题第 2 小题中 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在 $[-3\pi, 3\pi]$ 上的图像

2. 由于 f 分段可微, f 的 Fourier 级数处处收敛到 $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$, 所以和函数 $S(x)$ 为

$$S(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{如果 } x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)\quad (k\in\mathbb{Z}),\\ 0, & \text{如果 } x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)\quad (k\in\mathbb{Z}),\\ \frac{1}{2}, & \text{如果 } x=2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}),\\ -\frac{1}{2}, & \text{如果 } x=2k\pi+\pi\quad (k\in\mathbb{Z}).\end{cases}$$

它在 $[-3\pi, 3\pi]$ 上的图像见图 1.

4 (12 分). 求函数 $f(x)=\arctan\frac{x}{1+2x^2}$ 的 Maclaurin 展式, 并计算其收敛半径和收敛域.

解答. 首先计算

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{x}{1+2x^2})^2}\cdot\frac{1+2x^2-4x^2}{(1+2x^2)^2}=\frac{1-2x^2}{1+5x^2+4x^4}=\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{1+x^2}.$$

因此

$$f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(2\cdot4^n-1\big)x^{2n}.$$

由 Cauchy-Hadamard 定理, 此幂级数的收敛半径是

$$R=\left[\limsup_{n\to+\infty}\big(2\cdot4^n-1\big)^{\frac{1}{2n}}\right]^{-1}=\frac{1}{2}.$$

故它至少在 $(-R,R)$ 中可以逐项积分, 利用 $f(0)=0$ 可得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\big(2\cdot4^n-1\big)x^{2n+1}.$$

这就是 f 的 Maclaurin 级数, 其收敛半径和上面 f' 的 Maclaurin 展式相同, 都是 $R=\frac{1}{2}$.

最后处理端点情形. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 需考虑数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\big(2\cdot4^n-1\big)2^{-(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\big(1-2^{-(2n+1)}\big),$$

利用 Leibniz 判别可知该级数收敛. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 需考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\big(2 \cdot 4^n - 1\big)2^{-(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\big(1 - 2^{-(2n+1)}\big).$$

将其通项与 $\frac{1}{2n+1}$ 比较可知该级数发散. 综上, f 的 Maclaurin 级数的收敛域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5 (12 分)**.** 设 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 请证明: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在函数族 $\{e^{-nx}\}_{n=0}^{\infty}$ 中元素的一个有限线性组合 $g(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k e^{-n_k x}$ $(n_k \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{R})$, 使得 $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 并且满足 $g(0) = f(0)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

思路. 想要获得的函数 $g(x)$ 实际上是 e^{-x} 的多项式, 即 $g(x) = P(e^{-x})$, P 为某个多项式. 所以可以在坐标变换后利用 Weierstrauss 逼近定理. 而两个额外的条件在坐标变换后对应于对多项式的边值的条件, 可以通过适当调整多项式系数来满足.

解答. 令 $F(s) := f(-\ln s)$, 于是 F 是一个在 $(0, 1]$ 上良好定义的连续函数. 由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 故 $\lim_{s\to0^+} F(s)$ 存在, 记为 c. 补充定义 $F(0) = c$, 这样 F 成为一个在 $[0, 1]$ 上良好定义的连续函数.

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由 Weierstrauss 逼近定理, 存在一个多项式 $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 使得 $|F(s) - G(s)| \le \varepsilon/2$ 对任意 $s \in [0, 1]$ 都成立. 定义新的多项式

$$\tilde{G}(s) := G(s) + (1 - s)\big(F(0) - G(0)\big) + s\big(F(1) - G(1)\big).$$

不难验证 $\tilde{G}(0) = F(0)$ 且 $\tilde{G}(1) = F(1)$. 此外对任意的 $s \in [0, 1]$,

$$|F(s) - \tilde{G}(s)| \le |F(s) - G(s)| + (1 - s)|F(0) - G(0)| + s|F(1) - G(1)| \le \varepsilon.$$

于是令 $g(x) := \tilde{G}(e^{-x})$. 由于 $\tilde{G}$ 是多项式, 故 $g(x)$ 为 $\{e^{-nx}\}_{n=0}^{\infty}$ 中元素的一个有限线性组合. 此外, $g(0) = \tilde{G}(1) = F(1) = f(0)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \tilde{G}(0) = F(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, 且对任意的 $x \in [0, +\infty)$,

$$|f(x) - g(x)| = |F(e^{-x}) - \tilde{G}(e^{-x})| \le \varepsilon.$$

6 (14 分)**.** 假设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的一致有界的可积函数序列, 并且它在 $[0, 1]$ 上均方收敛到一个可积函数 $f(x)$.

1. (6 分) 证明: $e^{f_n(x)}$ 在 $[0, 1]$ 上均方收敛到 $e^{f(x)}$;
2. (8 分) 令 $g_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. 定义 $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 和 $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 如下

$$F_n(x) := \int_0^x g_n(f_n(y))\, dy, \qquad F(x) := \int_0^x e^{f(y)}\, dy.$$

   证明: $\{F_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛到 $F(x)$.

解答. 1. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界, 且 $f \in R[0,1]$, 故存在 $M>0$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和任意的 $[0,1]$, 都有 $|f_n(x)| \le M$ 以及 $|f(x)| \le M$.

对任意 $x \in [0,1]$, 由 Lagrange 微分中值定理知,

$$\left|e^{f_n(x)} - e^{f(x)}\right| \le \sup_{y\in[-M,M]} |e^y| \cdot \left|f_n(x) - f(x)\right| \le e^M \left|f_n(x) - f(x)\right|.$$

因此,

$$\left(\int_0^1 \left|e^{f_n(x)} - e^{f(x)}\right|^2 dx\right)^{1/2} \le e^M \left(\int_0^1 \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

对两边取极限 $n \to +\infty$, 由 f_n 均方收敛到 f 知, $e^{f_n(x)}$ 均方收敛到 $e^{f(x)}$.

2. 根据定义,

$$\begin{aligned}\left|F_n(x) - F(x)\right| &\le \int_0^x \left|g_n(f_n(y)) - e^{f_n(y)}\right| dy + \int_0^x \left|e^{f_n(y)} - e^{f(y)}\right| dy \\ &\le x \sup_{z\in[-M,M]} \left|g_n(z) - e^z\right| + x^{1/2} \left(\int_0^x \left|e^{f_n(y)} - e^{f(y)}\right|^2 dy\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

最后一步中使用了 Cauchy-Schwarz 不等式. 所以,

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|F_n(x) - F(x)\right| \le \sup_{y\in[-M,M]} \left|g_n(y) - e^y\right| + \left(\int_0^1 \left|e^{f_n(y)} - e^{f(y)}\right|^2 dy\right)^{1/2}.$$

由于 $g_n(y)$ 为 e^y 的 Maclaurin 展式的部分和, 而 $g(y)$ 的 Maclaurin 展式收敛半径为 $+\infty$, 故 $g_n(y)$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛到 e^y. 此外, 上一小题已证 $e^{f_n(x)}$ 均方收敛到 $e^{f(x)}$, 故当 $n \to +\infty$ 时, 右边两项都趋于 0. 利用一致收敛的最值判别法即知 $\{F_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $F(x)$.

7 (16 分)**.** 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 2π 周期, 令 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和.

1. (8 分) 证明:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} n^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

2. (8 分) 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left\|f - S_n\right\|_{C[-\pi,\pi]} = 0.$$

此处 $\|f - S_n\|_{C[-\pi,\pi]} := \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - S_n(x)|$.

<u>思路</u>. 函数的光滑性对应于其 Fourier 系数关于 n 的衰减性, 而求导大致对应于将 Fourier 系数的大小乘以 n (如果忽略掉正负号和正弦余弦的系数对换等细节). 本题的解答可以部分参考教材定理 12.3.5 以及补充习题集 2.11 或者 13.4 的做法.

解答. 不妨设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$
$$f''(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx + d_n \sin nx.$$

由 Fourier 系数的定义可知 $c_0 = 0$, 并且对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 利用两次分部积分,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx = -\frac{c_n}{n^2}.$$

同理, $b_n = -d_n/n^2$. 此外, 由定义,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

故逐项求导得

$$S_n''(x) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 a_k \cos kx - k^2 b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} c_k \cos kx + d_k \sin kx,$$

即 S_n'' 也是 f'' 的 Fourier 级数的部分和.

1. 由 $f \in C^2$ 知 f 和 f'' 均在 $[-\pi, \pi]$ 上平方可积. 由 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}
&n^2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&= n^2\left(\pi\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2} \le \left(\pi\sum_{k=n+1}^{\infty} (k^2 a_k)^2 + (k^2 b_k)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\pi\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 + d_k^2\right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x) - S_n''(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < +\infty.
\end{aligned}$$

   最后一行中使用了 S_n'' 是 f'' 的不超过 n 阶的最优均方三角多项式逼近这一性质. 这就得到了待证的不等式.

2. 由上面的推导知,

$$|a_n| = \frac{1}{n^2}|c_n|, \quad |b_n| = \frac{1}{n^2}|d_n|.$$

   由于 $f'' \in C$, 由 Riemann-Lebesgue 定理, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon > 0$, 使得当 $n \ge N_\varepsilon$ 时, 均有 $|c_n|, |d_n| \le \varepsilon/2$. 另一方面, 由于 $f \in C^2$, 由教材中的定理 12.3.5 知, S_n 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 f, 即 Fourier 级数等于 f 本身. 因此, 对于

$n \geq N_\varepsilon$ 和任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\big|f(x) - S_n(x)\big| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\big(|c_k| + |d_k|\big) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{\varepsilon}{n}.\end{aligned}$$

所以,

$$n\big\|f - S_n\big\|_{C[-\pi,\pi]} \leq \varepsilon.$$

由 ε 的任意性和对应的 N_ε 的存在性, 结论得证.

注记. 事实上, 第 2 部分的证明还可以仿照定理 12.3.5 的证法来改进. 基于上面的推导并利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\big|f(x) - S_n(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \cdot k^2\big(|a_k| + |b_k|\big)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^4 \cdot 2\big(|a_k|^2 + |b_k|^2\big)\right)^{1/2} \cdot n^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 + |d_k|^2\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

最后一步中对 f'' 使用了 Parseval 等式. 这样, 我们证明了一个更强的结果:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} n^{3/2}\|f - S_n\|_{C[-\pi,\pi]} \leq \left(\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

由它可以推出第 2 部分的结论.

8 (16 分)**.** 在 $[0, +\infty)$ 上考虑函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\beta x^{\frac{1}{n}} e^{-nx}.$$

1. (6 分) 证明: 当 $\beta \geq 0$ 时, 该级数在 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛;
2. (10 分) 证明: 当 $\beta < 0$ 时, 该级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

   提示. 可以考虑先证明 $\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^n a^{1/n}\right| \leq 2$ 对于任意的 $a \in [0, 1]$ 和任意的 $N \in \mathbb{Z}_+$ 都成立.

解答. 1. 令 $f_n(x) = x^{1/n}e^{-nx}$. 则在 $(0, +\infty)$ 上, $f_n'(x) = (\frac{1}{nx} - n)f_n(x)$. 由此可得 $|f_n(x)|$ 在 $x = \frac{1}{n^2}$ 取到最大值 $M_n := f_n(\frac{1}{n^2}) = n^{-2/n}e^{-1/n}$. 由于 $\lim_{n\to+\infty} M_n = 1$, 故当 $\beta \geq 0$ 时,

$$\sup_{x\geq 0}\left|(-1)^n n^\beta x^{\frac{1}{n}} e^{-nx}\right| \not\to 0 \quad (n \to +\infty).$$

所以上述级数在 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛.

2. 先证明 $\left|\sum_{n=1}^N (-1)^n a^{1/n}\right| \leq 2$ 对于任意的 $a \in [0,1]$ 和任意的 $N \in \mathbb{Z}_+$ 都成立. 事实上,

$$\left|\sum_{n=1}^N (-1)^n a^{1/n}\right| = \left|\sum_{n=1}^N (-1)^n - \sum_{n=1}^N (-1)^n\big(1 - a^{1/n}\big)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^N (-1)^n\right| + \left|\sum_{n=1}^N (-1)^n\big(1 - a^{1/n}\big)\right|.$$

第一项显然不大于 1. 而第二项是一个交错和, 且由于 $a \in [0,1]$, $(1 - a^{1/n})$ 关于 n 单调递减, 所以第二项可以用其中求和式首项的绝对值 $1 - a$ 控制住. 综上,

$$\left|\sum_{n=1}^N (-1)^n a^{1/n}\right| \leq 1 + (1 - a) \leq 2.$$

回到原问题. 令

$$u_n(x) := (-1)^n\big(xe^{-x}\big)^{\frac{1}{n}}, \quad v_n(x) := n^\beta e^{-(n-\frac{1}{n})x}.$$

当 $\beta < 0$ 时, 显然对任意的 $x \in [0, +\infty)$, $v_n(x)$ 关于 n 单调递减, 且 $\{v_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛到 0. 另一方面, 借助上一小题的推导, 在 $[0, +\infty)$ 上, $0 \leq xe^{-x} \leq M_1 = e^{-1}$. 所以由上面证明的不等式, 对于任意的 $x \in [0, +\infty)$ 和任意的 $N \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left|\sum_{n=1}^N u_n(x)\right| \leq 2.$$

因此由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)v_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 即证明了本题的结论.