2023 春季学期高等代数(II)期末试题

命题人：王福正　考试时间：2023-6-13 8:30-10:40(延时10分钟)　整理人：妙姐

注：本卷中向量空间均指有限维的.如不特别说明,默认是数域上的向量空间. 以下是可能用到的定理,如需引用可不进行证明：

- 若子空间 U 是同构 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,则 U 也是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的不变子空间
- 有限维向量空间不能被有限个真子空间覆盖
- Sylvester秩不等式的线性映射版

一、1) 对于任意的向量空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$,是否有 $V = ker\mathscr{A} \oplus Im\mathscr{A}$?
对于酉空间上的Hermite变换 $\mathscr{A}$,是否有 $V = ker\mathscr{A} \oplus Im\mathscr{A}$?
(如果正确,请给出证明;如果错误,请举出反例)

2) $\mathbb{Q}$ 上的 n 维向量空间上是否存在线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^3+\mathscr{A}-I = O$?
如果存在,请写出这样的变换;如果不存在，请说明理由.

二、$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$. 定义 $M_2(\mathbb{F})$ 上的映射 $\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{M}, \forall \boldsymbol{X} \in M_2(\mathbb{F})$$

1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 $M_2(\mathbb{F})$ 上的线性变换, 并证明 $\mathscr{A}$ 的最小多项式和 $\boldsymbol{M}$ 的最小多项式相同;

2) 若$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $ker\mathscr{A}$ 及 $Im\mathscr{A}$ 的一组基, 并说明 $ker\mathscr{A} + Im\mathscr{A}$ 是否是直和.

三、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是向量空间 V 的一组基, 线性映射 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}\alpha_1 = \alpha_1,\ \mathscr{A}\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2,\ \mathscr{A}\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \mathscr{A}\alpha_4 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 的Jordan标准形和 V 的一组Jordan基;

2) 求 V 的所有 $\mathscr{A}-$不变子空间.(要求说明理由)

四、欧式空间$(V,(,))$的一组标准正交基为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$. 任取 $k \in \mathbb{R}$ 和非零向量 $\xi \in V$,定义 V 上的映射 $\mathscr{A}_\xi(\alpha) = k(\alpha, \xi)\xi - \alpha,\ \forall \alpha \in V.$

1) 证明 $\mathscr{A}$ 是线性变换,并求出它在标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵;

2) 确定 k 的值使得 $\mathscr{A}_\xi$ 为 V 上的正交变换.

五、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是向量空间 V 中的 s 个非零向量. 证明: 存在线性函数 f 使得

$$f(\alpha_i) \neq 0,\ \forall i = 1,2,\cdots,s.$$

六、设$(V,(,))$为复数域上的 $n(>2)$ 维非退化正交空间.

1) 证明 V 中存在非零迷向向量和双曲平面;

2) 试确定 V 的极大零内积子空间的维数.

七、证明 V 上秩为 r 的线性变换的最小多项式的次数不超过 $r+1$.