曲线积分与曲面积分

第一型曲线积分

理解　用于求具有线密度 $\rho(t)$ 的材料质量等问题，是微分弧长后积分.

1. 可求长曲线 $\longrightarrow$ 弧长，本质在用折线去拟合曲线

2. 定义：$\int_L f(p)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i$，类似于定积分，若 $(x,y,z)=(x(s),y(s),z(s))$，$\int_L f(p)\,ds = \int_{s_0}^{s^*} f(x(s),y(s),z(s))\,ds$

3. 化归为参数曲线上的定积分：$\vec{r}=\vec{r}(t)$ 且 $\vec{r}'(t)\neq 0,\ \forall t$. 则 $\int_L f(p)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

第一型曲面积分

理解：用于求由不均匀材料制作的曲面片的质量，对小曲面块微分后积分

1. 曲面面积. 衡量细化程度的标尺不再为内接多面体面积，而是微小切平面切块的直径

简单曲面：$\vec{r}(u,v)$ 单射　　正则曲面：$\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq 0$（不共线）的连续可微映射

小块面积 $=\|\vec{r}_u\Delta u\times\vec{r}_v\Delta v\| = \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,dudv$，故 $\sigma(S)=\iint_D \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,dudv$

2. $\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$ 不同形式

① $A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$　$B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$　$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$　则 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$　$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

② $E=\|\vec{r}_u\|^2$　$F=\|\vec{r}_v\|^2$　$G=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)$，则 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\sqrt{EG-F^2}$　$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

③ 显式：$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$　$p=\frac{\partial z}{\partial x}$　$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，$A=-p$　$B=-q$　$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\sqrt{p^2+q^2+1}$，$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{p^2+q^2+1}\,dudv$

3. 第一型曲面积分定义（面积再乘函数）$\iint_S f(Q)\,d\sigma = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,W\,dudv$，$W=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$

第二型曲线积分

理解：用于计算空间的向量场对某一有向曲线上移动质点做功多少. 即 $\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$，对坐标积分

1. 定义与性质. 设 $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 在有向曲线 γ 上积分 $W=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}_j = \int_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$

$=\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$，具有线性，可加性，有向性

2. 计算，假设 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，$\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz = \int_\alpha^\beta\left(P\cdot\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\frac{dz}{dt}\right)dt$

3. 与第一型曲线积分的联系　$\cos\alpha(t)=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}$. 类似定义 $\cos\beta$，$\cos\gamma$，由于 $ds=\|\vec{r}'(t)\|dt=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

故 $\int_C Pdx+Qdy+Rdz = \int_a^b(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\|\vec{r}'(t)\|\,dt = \int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds$

第二型曲面积分

理解：用于求场的通量，例如电场，是有向地向三面做投影后坐标积分

1. 曲面定向：正则简单曲面一定可以定向，非简单正则曲面（Möbius带）不一定可以

曲面定向诱导边界曲线定向（右手螺旋），正则简单参数曲面规则相处（一点上至多三块）形成拼接曲面

2. 定义　可定向正则曲面 S 在点 M 处的正法线向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\iint_S f(M)\cdot\cos\alpha(M)\,d\sigma$ 定义为 f 沿 S 正侧对 y,z 坐标的积分

记为 $\iint_{+S} f(x,y,z)\,dy\wedge dz$，类似 $dz\wedge dx$，$dx\wedge dy$. 我们考虑 $\iint_S(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\sigma = \iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma$

$=\iint_{+S}P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy \triangleq \iint_{+S}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$

根据曲面定向

3. 计算 A,B,C 同上设，$\iint_{+S} P(x,y,z)\,dy\wedge dz = \iint_S P\cos\alpha\, d\sigma = \iint_D P\cdot\frac{\pm A}{\|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\|}\|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\|\,dudv = \pm\iint_D PA\,dudv$

故 $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{+S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint_D (PA+QB+RC)\,dudv = \pm\iint_D (\vec{v},\vec{r_u},\vec{r_v})\,dudv$ （混合积）

特别当 $z=f(x,y)$ 时，$\vec{r_u}\times\vec{r_v} = \pm(-p,-q,1) = \pm(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)$

格林公式 $\oint_{\partial\Omega} Pdx+Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_\Omega \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega \vec{\nabla}\times\vec{v}\,dxdy$

高斯公式 $\oiint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \boxed{\iiint_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dxdydz}$ → 向量场 $\vec{v}$ 在 Ω 的散度积分

斯托克斯公式 $\oint_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \iint_S (\vec{\nabla},\vec{v},\vec{n})\,d\sigma = \iint_S \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\times\vec{n})\,d\sigma = \iint_S \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})\,d\sigma$ → 向量场 $\vec{v}$ 在 S 沿 $\vec{n}$ 的方向旋度

微分形式

$(f\omega_1+f\omega_2)\wedge\theta = f\omega_1\wedge\theta + f\omega_2\wedge\theta$ （f,g 是函数）

$\omega\wedge(g_1\theta_1+g_2\theta_2) = g_1\omega\wedge\theta_1 + g_2\omega\wedge\theta_2$

$\omega\wedge\theta = (-1)^{pq}\theta\wedge\omega$ （θ p次形式，ω q次形式）

$(\omega\wedge\theta)\wedge\eta = \omega\wedge(\theta\wedge\eta)$

$d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

$d(\omega\wedge\theta) = d\omega\wedge\theta + (-1)^p\omega\wedge d\theta$ （ω是p次形式）

$d(d\omega)=0$

若 f 是 0次 C^r 形式，则 df 是 f 的微分

三大公式的统一 $\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega$

曲线积分与路径无关的条件

1. 平面情形 ① ∀分段连续可微闭区线C，$\oint_C Pdx+Qdy=0$

② ∀M_0 到 M_1 的2条分段连续可微曲线 γ,η 有 $\int_\gamma Pdx+Qdy = \int_\eta Pdx+Qdy$

③ 存在函数 $u(x,y)$ 在G连续可微，$du = Pdx+Qdy$

④ 在G中有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

以上在单连通情形下均等价，在多连通情形 ①②③ 等价

2. 空间情形 ① G中任一条分段连续可微闭曲线 γ 有 $\oint_\gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$

② 积分 $\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关

③ ∃连续可微 u，$du = Pdx+Qdy+Rdz$

④ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$

$\mathbb{R}^3$ 中单连通区域，以上命题等价

场论

梯度：数量场 → 向量场 $\mathrm{grad}\, f(M_0) = \nabla f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

散度：向量场 → 数量场 $\mathrm{div}\,\vec{F}(M) = (\nabla\cdot\vec{F})_M = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$

旋度：向量场 → 向量场 $\mathrm{rot}\,\vec{F}(M) = (\nabla\times\vec{F})_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$

注意到：① 设 f 是数量场，df 系数即 $\mathrm{grad} f$ 分量

② 设 $\vec{F}$ 是向量场 (P, Q, R)，$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$，则 $d\omega$ 的系数为 $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ 的分量

③ 设 $\vec{F}$ 是向量场 (P, Q, R)，$\theta = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$，则 $d\theta$ 的系数即 $\mathrm{div}\,\vec{F}$

因而 $\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad} = 0$，$\mathrm{div}\circ\mathrm{rot} = 0$　本质：$d\circ d = 0$

场论中，翻译一下可得以下命题等价

向量场 $\vec{F}$ 在 Ω 有定义：① Ω 任何闭路径 C 均有 $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,d\lambda = 0$

② 积分 $\int_{M_0}^{M_1} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,d\lambda$ 与路径无关

③ 存在数值函数 u，$\vec{F} = \mathrm{grad}\,u$

称满足以上要求的场为保守场，③中的 u 为势函数