1、群的直和

最初定义：G_1, G_2 是群，考虑 $G_1 \times G_2$，$\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)$，定义 $(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2, b_1b_2)$　在该运算下形成群 $G_1 \oplus G_2$.

这样构造的群，不难验证 $G_1 \cong G_1 \oplus \{e\} \lhd G_1 \oplus G_2$，我们在将一般群 G 分解为直和时，转而先考察正规子群

定理 1：设 $N_1, N_2, \cdots N_s$ 是群 G 的正规子群，若 (1) $G = N_1 \cdots N_s$，(2) $\forall x \in G$，$\exists x_i \in N_i$，$x = x_1 \cdots x_s$ 且表示唯一，则 $G \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$

(2) 可换为　(2)' 单位元素表示唯一　(2)'' $N_i \cap (N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_s) = \{e\}$，$i=1,2\cdots s$

我们考察有限交换群 G，$|G| = n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$，令 G_i 为 G 的 Sylow p_i 子群，G 是 Abel $\Rightarrow$ G_i 正规 $\Rightarrow$ G_i 唯一　由拉格朗日，G_i 由所有阶为 p 的方幂的元素构成

$\Rightarrow G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_s) = \phi$（用阶区分不同元素）$\Rightarrow G_1 \cdots G_s \cong G_1 \oplus \cdots \oplus G_s$，由 $|G_1 \oplus \cdots \oplus G_s| = n$ 且 $G_1 \cdots G_s \leq G$

得到 $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_s$　（所有的有限 Abel 群均可分解为若干 p 群的直和）

2、可解群

我们用递降子群列刻画有限可解群　考虑群 $G = G^{(0)}$，$G^{(i+1)}$ 是 $G^{(i)}$ 的换位子群 $= \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G^{(i)}\}$，容易得 $G^{(i+1)} \lhd G^{(i)}$

且 $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ 是 Abel 群（换位子群刻画了 G 能有多么 Abel）　对递降子群列 $G \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd \cdots \rhd G^{(k)} \rhd \cdots$　当 G 是有限群时，

若 $\exists k$ 使 $G^{(k)} = G^{(k+1)} \neq \{e\}$，则称 G **不可解**，若 $\exists k$ 使 $G^{(k)} = \{e\}$ 称 G **可解**

定理 2　G 可解等价于存在 $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\}$ 且 $\forall i$，G_i/G_{i+1} 可交换　（key: $G^{(k)} < G_k$，利用 $\forall N \lhd G$，G/N 交换 $\Leftrightarrow G^{(1)} < N$）

定理 3　有限群 G 可解等价于存在 $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\}$，且 $\forall i$，G_i/G_{i+1} 都是素数阶的循环群，其中 $s = \Omega(n)$

key: 在定理 2 基础上，尽可能向 G_i/G_{i+1} 中找正规子群，使 G_i/G_{i+1} 成为交换的单群即素数阶循环群（生成群非e?即 G）

3、群的自同构群

定义：一个群到自身的同构映射称为自同构映射，构成了群 $Aut(G)$

一个群 G 其轭作用到自身，不同 σ_a 构成了 $Inn(G)$ 为内自同构群，$\sigma_a = e$ 的元素恰为 $Z(G)$ 元素，

故 $Z(G) \lhd G$ 且 $G/Z(G) \cong Inn(G)$

定理　$Inn(G) \lhd Aut(G)$，并称 $Aut(G)/Inn(G)$ 为 G 的外自同构群

定理　$Z(G) = \{e\} \Rightarrow Z(Aut(G)) = \{e\}$

4、若尔当-赫尔德定理

定义：G 的有限递降子群列 $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \cdots \rhd G_r = \{e\}$ 称为**次正规子群列**，特别地，当 G_{i-1}/G_i 都是单群时，称为**合成群列**，其中非单位因子群的个数称为该群列的**长度**

在可解群中我们得到：(i) 有限可解群有合成群列，因子群均为素数阶循环群，反之亦成立 ⟶ 独有

(ii) 有限可解群任一无重复项的合成群列的因子群组不计次序仅由 G 唯一确定 ⟶ 所有有限群共性

若尔当-赫尔德定理：有限群 G 的任意两个无重复项的合成群列有相同长度且因子群组在不计次序下对应同构.