实内积空间

标准内积：$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$：$(\cdot|\cdot)$　$((x_i),(y_i)) \longmapsto \sum x_i y_i$

性质：①双线性　②对称性　③正定性

内积空间　正定对称双线性形式 + 实向量空间

配极恒等式：$(v|w) = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

Cauchy不等式：$(v|w)^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$

三角不等式：$\|v\|+\|w\| \geq \|v+w\|$

保距线性映射

$\varphi: V \to W$ 是内积空间的同构，且 $\|\varphi(v)\|_W = \|v\|_V$

对任意 $v \in V$ 成立.

Remark：由配极恒等式，保距映射也保内积.

$(\varphi(v_1)|\varphi(v_2))_W = (v_1|v_2)_V$

Gram-Schmidt 正交化

线性无关的一族向量 $v_1, v_2, \cdots$　递归地定义　$w_1 = v_1$

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{(w_i|v_k)}{(w_i|w_i)} \cdot w_i$$

$$u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

得到单位正交基 $u_1, \cdots$

正交补

设 $S \subseteq V$，V是内积空间．$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S, (s|v) = 0\}$

正交分解

设 V是内积空间．$V_0 \subseteq V$ 有限．则 $V = V_0 \oplus V_0^\perp$

内积空间的同构

考虑 $T: V \to W$ 的伴随映射 T^*，则 T 是同构 $\Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Remark：同构将 V 的单位正交基映为 W 的单位正交基.

正交变换

内积空间的自同构.

Remark ① 正交变换构成群.

② $\det$（正交矩阵）$= \pm 1$

③ ${}^tAA = 1 \Leftrightarrow A^*A = 1$

QR 分解

任何可逆矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 可写为 $A = QR$，

Q 正交，R 上可逆上三角阵 （按 Schmidt 正交化书写）

正交投影算子判定

给定有限维内积空间 V，则 $P \in \mathrm{End}(V)$ 是向某个子空间 V_0 的正交投影算子当且仅当 $P^* = P$，$P^2 = P$. 此时 $V_0 = \mathrm{im}\, P$

伴随映射的不变子空间：

设 $T \in \mathrm{End}(V)$ 且 V_0 是 T-不变子空间，则 $V_0^{\perp}$ 是 T^*-不变子空间

自伴算子的正交对角化

映射版本：

设 $T \in \mathrm{End}(V)$ 自伴，则存在 V 的单位正交基 $v_1, \cdots, v_n$ 使每个 v_i 都是 T 的特征向量.

矩阵版本：

设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 满足 ${}^tA = A$． 取 P 为以单位正交基 $v_1, v_2 \cdots v_n$ 为列向量的矩阵 则 P 为正交矩阵． 且有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

二次型版本：

设 V 是内积空间． (V, B) 是二次型 则存在 V 的单位正交基 $v_1, \cdots v_n$ 使得 B 所对应的对称矩阵 $(B(v_i, v_j))_{1\le i,j\le n}$ 为对角矩阵．

正定（半正定）二次型

① 正定（半正定） $\Leftrightarrow$ 特征值恒正（非负） 正交对角化将相似与合同"等价"

② Sylvester 判准：

正定 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式恒正．

③ $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$． 则 $T^*T \in \mathrm{End}(V)$（或 $TT^* \in \mathrm{End}(W)$）是半正定的；若 T 单（或 T^* 单，i.e. T 满）．则它们是正定的．

矩阵版本：设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$． 则 ${}^tAA$ 与 $A{}^tA$ 均半正定． 若满秩则正定．

④ 设 $T \in \mathrm{End}(V)$ 正定（半正定）．则存在唯一 $S \in \mathrm{End}(V)$ 使得 S 正定（半正定）且 $S^2 = T$． 记 $S = \sqrt{T}$．

正交对角化后对特征值 $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$．

极分解

$T \in \mathrm{End}(V)$ 可逆． 则存在唯一 $R, U \in \mathrm{End}(V)$ 使得 R 正定， U 是正交变换． 且 $T = RU$．

取 $R = \sqrt{TT^*}$， 去证 $TR^{-1} = U$ 正交．

奇异值分解 (SVD)

对任意线性映射 $T: V \longrightarrow W$，记 $p := \min\{m, n\}$. 则存在

V 的单位正交基 $v_1, \cdots, v_m$，W 的单位正交基 $w_1, \cdots, w_n$.

非负实数 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p$ 使得 $Tv_i = \begin{cases} \sigma_i w_i, & i \leq p \\ 0, & i > p \end{cases}$

这里 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p$ 由 T 唯一确定. 称为奇异值.

具体求法

给定矩阵 $A_{m\times n}$，求 $U_{m\times m}$ 与 $V_{n\times n}$ 使 $A_{m\times n} = U_{m\times m} \Sigma {}^tV_{n\times n}$

其中 $\Sigma_{m\times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_p & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 是对角阵

STEP1

求 ${}^tAA$ 的特征值

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n$

对应 $v_1, \cdots v_r, \cdots \quad \cdots v_n$

作为标准正交特征向量

(只需求出特征向量后单位化即可，正交性由实对称保证)

STEP2

写 Σ 与 V

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$V_{n\times n} = (v_1 | v_2 | \cdots | v_n)_{n\times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

特征值 $\lambda_1 = 18 \quad \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

STEP 3

构造 $U_{m\times m}$

取 $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$, $1\le i\le r$

扩充 $u_{r+1}, \cdots u_m$ 至成为单位正交基

最终 $A = U\Sigma {}^tV$

$$u_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

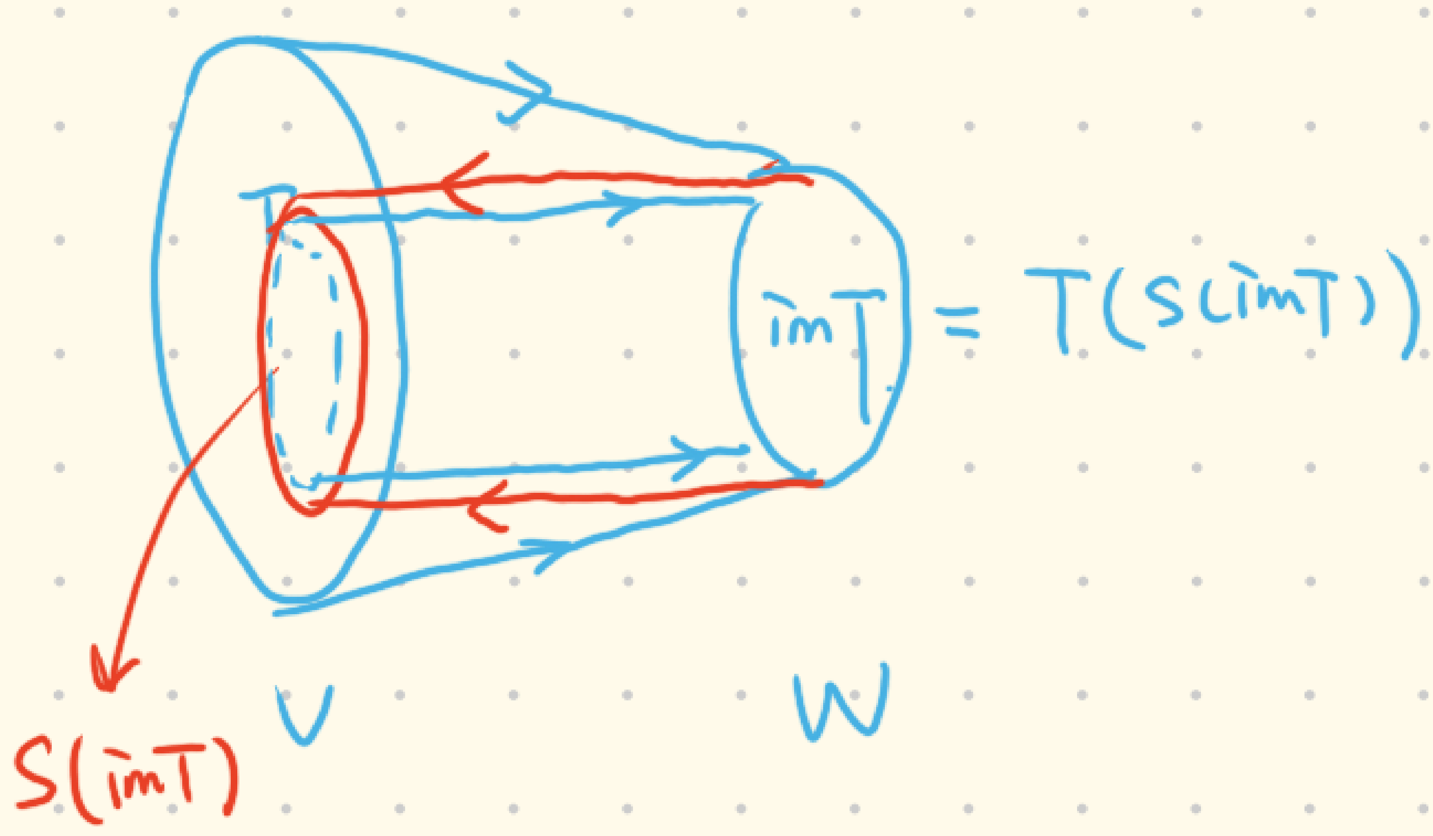
$$\text{得 } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

乘0. 故填什么不影响求积 $U\Sigma {}^tV$.
只需满足 U是正交矩阵即可.

Moore-Penrose 广义逆

求法: $({}^tA A)^{-1}\,{}^tA$ = 广义逆.

任意 $T\in Hom(V, W)$, $\exists\ S \in Hom(W, V)$. 使 $TST=T$



只需令 $TS|_{imT} = id_{imT}$

故 $S + Hom(imT, kerT)$

均符合 $TST=T$.

故 $kerT = \phi \iff S$唯一

那么还能对S作什么要求(唯性多解性): 引入 Moore-Penrose 广义逆:

$\underline{MP.1}$ $\quad TST=T$

$\underline{MP.2}$ $\quad STS=S$

$\underline{MP.3}$ $\quad (TS)^* = TS$

$\underline{MP.4}$ $\quad (ST)^* = ST$

现在利用已知的T去找S, 几个事实:

① $S|_W$ 只与 $S|_{imT}$ 有关.

② 若S在 imT 上的像 $\notin kerT$. 否则 $TS|_{imT}$ 不为单射, 矛盾!

故 S 本质是可逆映射 $S: W/(\mathrm{im}T)^{\perp} \longrightarrow V/\ker T$ 唯一确定 S

S 的定义：设 $w\in W$ 分解为 $\underset{\mathrm{im}T}{\underset{\Uparrow}{w'}} + \underset{\mathrm{im}T^{\perp}}{\underset{\Uparrow}{w''}}$

取 $T^{-1}(w') = v + \ker T$

则 $v+\ker T$ 在 $\ker T^{\perp}$ 上投影唯一. 取为 $S(w)$

$$\ker T^{\perp} \cong \underset{\text{不看}\ker T}{V/\ker T} \cong \mathrm{im}T \cong \underset{\text{只看在}\mathrm{im}T\text{投影}}{W/\mathrm{im}T^{\perp}}$$

<u>定理</u>：任意 $T\in \mathrm{Hom}(V,W)$，它的 Moore-Penrose 逆 $S\in\mathrm{Hom}(W,V)$ 唯一.

极小化极大原理

设 $B: V\times V\to\mathbb{R}$ 是实对称双线性形式，我们熟知其特征值必为实数.

从而可在特征值中建立大小关系.

最大特征值 $\lambda_1 = \max\limits_{\|v\|=1} B(v,v)$　　最小特征值 $\lambda_n = \min\limits_{\|v\|=1} B(v,v)$

key: $\lambda_n = \lambda_n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^2 \leq \lambda_1\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) = \lambda_1$

Rayleigh 商：$\max\limits_{v\neq 0} \dfrac{B(v,v)}{\|v\|^2} \rightarrow$ 正则化.

几何直观：当 B 正定时：理解为椭球 $\begin{cases}\text{包含曲面的最小球R} \rightarrow \max \\ \text{内含于曲面的最大球R} \rightarrow \min.\end{cases}$

核心定理：

$$\lambda_k = \min_{\substack{U\subset V\\ \dim U = n-k+1}} \left(\max_{\substack{\|v\|=1\\ v\in U}} B(v,v)\right) = \max_{\substack{U\subset V\\ \dim U = k}} \left(\min_{\substack{\|v\|=1\\ v\in U}} B(v,v)\right)$$

Perron-Frobenius 原理

约定：$A > B$ 指所有项 $a_{ij} > b_{ij}$.

$A \geqslant B$ 指所有项 $a_{ij} \geqslant b_{ij}$.

引理1：$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$. 若 $A > 0$ 且 $x \geqslant 0$

则 $Ax > 0$.

谱半径：$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}$ 是 A 的特征值$\}$.

记 $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1, x \geqslant 0\}$

定义 $\mathcal{L}: S \to \mathbb{R}_{>0}$ (若 $A>0$)

$x \longmapsto$ 最大 $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ 使 $Ax \geqslant \rho x$ → 由引理 $Ax > 0$. 知 $\rho > 0$ 存在.

引理2：设 $A > 0$. $\mathcal{L}$ 在 v 处取最大值 则

① $v > 0$. ② $\mathcal{L}(v) = \rho(A)$ ③ $Av = \rho(A)v$

记 $\rho = \mathcal{L}(v)$. 则依定义有 $Av \geqslant \rho v$. 我们去证 $Av = \rho v$.

否则 $Av - \rho v \neq 0$ 且 $\geqslant 0$ $\overset{\text{引理1}}{\Rightarrow}$ $A(Av - \rho v) > 0$.

$\Rightarrow$ 存在 $\varepsilon > 0$ 使 $A(Av - \rho v) > \varepsilon Av$

又 $Av \overset{\text{引理1}}{>} 0$. 可取 $w = \frac{1}{\|Av\|}$ 使 $wAv \in S$ → 正则化.

从而 $A(Av) > (\rho + \varepsilon)Av$. 即 $Aw > (\rho+\varepsilon)w$. 与 ρ 最大性矛盾！

再来说明 $\rho(A) = \rho$. 设 $\mu \in \mathbb{C}$ 是特征值，w 是对应的特征向量：$Aw = \mu w$. 则 $w = (w_i)_{i=1}^n$

我们希望找一个 $w' \in \mathbb{R}^n$ 使 $|\mu| \leqslant \mathcal{L}(A)$. 即 $Aw' \geqslant |\mu| w'$.

取 $w' = (|w_i|)_{i=1}^n$. $(|\mu| w')_i = |\mu w_i| = |(\mu w)_i|$

$= |(Aw)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n a_{ij}|w_j| = (Aw')_i$. 得证

从而 $\rho(A) \leqslant \rho$. 又 $Av = \rho v \Rightarrow \rho \leqslant \rho(A) \Rightarrow \rho = \rho(A)$.

ρ 是特征值

Perron定理

设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，$A > 0$. 以下成立：

(i) $\rho(A) > 0$. 且存在 $v \in \mathbb{R}^n$ 使 $Av = \rho(A)v$. 引理之结论.

(ii) 若 μ 为 A 特征值，$\mu \neq \rho(A)$. 则 $|\mu| < \rho(A)$.

圆盘 $|\mu| = \rho(A)$ 上仅一个特征值 μ：可以去比对 $|\mu w|$ 不等式取等条件. 知 μ 必为实数.

(iii) $\dim(V_{\rho(A)}) = 1$. 特征子空间一维.

否则可取 $v, v' \in V_{\rho(A)}$ 与 $\varepsilon > 0$. 使 $v - \varepsilon v'$ 不为0，但有一个分量为0. 而 $v - \varepsilon v' \geq 0 \Rightarrow A(v - \varepsilon v') > 0$

即 $\rho(A)(v - \varepsilon v') > 0$. 但它有一个分量为0. 矛盾!

(iv) $\rho(A)$ 是 Char_A 的单根.

取 $\rho(A)$ 特征向量 $v > 0$. $\mathrm{Char}_A = \mathrm{Char}_{{}^tA} \Rightarrow \rho(A) = \rho({}^tA)$

对 ${}^tA > 0$ 用引理2. 存在 $u \in \mathbb{R}^n$，$u > 0$. ${}^tAu = \rho({}^tA)u = \rho(A)u$.

$\langle u \rangle$ 是1维 ${}^tA$-不变子空间 $\Rightarrow \langle u \rangle^\perp$ 是 $n-1$ 维 A-不变子空间.

且 ${}^tuv > 0 \Rightarrow v \notin \langle u \rangle^\perp \Rightarrow \mathbb{R}v \oplus \langle u \rangle^\perp$ 是 A-不变分解.

记 $B = A|_{\langle u \rangle^\perp}$ $\quad \mathrm{Char}_A = \mathrm{Char}_{A|_{\mathbb{R}v}} \cdot \mathrm{Char}_{A|_{\langle u \rangle^\perp}}$

$= (X - \rho(A))\,\mathrm{Char}_{\langle u \rangle^\perp}$. 重根 $\Rightarrow X - \rho(A) \mid \mathrm{Char}_{\langle u \rangle^\perp}$

得到新特征向量 $\Rightarrow \dim V_{\rho(A)} > 1$. 矛盾!

有向图版本的Perron：

设 $A \geq 0$. 对应的有向图连通. 则

(i) $\rho(A) > 0$ $\qquad$ (ii) 存在 $v > 0$ 使 $Av = \rho(A)v$

(iii) $\rho(A)$ 的特征子空间一维 $\qquad$ (iv) $\rho(A)$ 是 Char_A 的单根.

复内积空间

半双线性形式

$B(\cdot|\cdot)$ 前者是半线性，后者是线性

复共轭

V 是 $\mathbb{C}$-向量空间，$\overline{V}$ 是将纯量乘法 $t\odot\vec{v}=\bar{t}\vec{v}$ 定义.

Remark: $\overline{\overline{V}}=V$

$V\to W$ 的半线性映射即 $\overline{V}\to W$ 或 $V\to\overline{W}$ 的线性映射.

$V\cong\overline{V}$ ，$\overline{V_1}\oplus\overline{V_2}\cong\overline{V_1\oplus V_2}$

$\mathrm{Hom}(V_1,V_2)\cong\overline{\mathrm{Hom}(\overline{V_1},\overline{V_2})}$

$\overline{W^\vee}=\overline{W}^\vee$

左根 $\downarrow$ $\{v\in V: B(v,\cdot)=0\}$

右根 $\downarrow$ $\{w\in W: B(\cdot,w)=0\}$

非退化: B 的左根 $=$ 右根 $=\{0\}$.

矩阵表示半双线性形式:

$$M_{m\times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sesq}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$$

$$A \longmapsto [B(v,w)={}^t\bar{v}Aw]$$

$$B\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i,\ \sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{x_i}y_j$$

B 非退化 $\Leftrightarrow$ A 可逆.

V: 实内积空间

对称矩阵

${}^tA = A$

End(V): 正交变换:

自伴算子的正交对角化

${}^tA = A^{-1}$: 正交矩阵

V: 复内积空间

Hermite 矩阵

${}^tA = \bar{A}$

End(V): 酉变换

正规算子的酉对角化

${}^tP = P^{-1}$: 酉矩阵

可酉对角化 $\Leftrightarrow$ 正规算子

谱分解:

${}^tA = A^{-1}$

${}^tAA = I$

${}^tP\cancel{A}P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$|\lambda_i|$

${}^tS = {}^tV{}^tR = V^{-1}R$

R 对称正定 V 正交

$ARV = RVB$

AV

$V^{-1}RA = BV^{-1}R$

$RA = VBV^{-1}R$

AV

$AR = RVBV^{-1}$

$VBV^{-1} = A$

$R^2A = AR^2$

轨道分解的应用

Definition

设群 G 作用在 X 上. $X^G=\{x\in X:\ \forall g\in G,\ g(x)=x\}$

即 G 作用下的不动点集 $:=X^G$

Proposition

设 p-群作用在有限集 X 上. 则

$$|X|\equiv|X^G|\pmod p.$$

proof: 由轨道-稳定化子等式:

$$|X|=|X^G|+\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{Stab}(x_i)|$$

. 其中 x_i 是非不动点的轨道代表元.

由于 $\mathrm{Stab}(x_i)\le G$, 且 $\ne\{e\}$. 知 $p\,\big|\,|\mathrm{Stab}(x_i)|$.

从而 $|X|\equiv|X^G|\pmod p$

Theorem (Cauchy)

设 G 是有限群, p 为 $|G|$ 的素因数, 则存在 $g\in G$ 使 $\mathrm{ord}(g)=p$.

proof. 令 $\mathbb{Z}_p\subseteq S_p$ 通过轮换作用到以下集合:

$$X=\{(g_1,\cdots,g_p):\ g_1\cdots g_p=1\}$$

注意到 $g_1\cdots g_p=1 \iff g_k\cdots g_pg_1\cdots g_{k-1}=1$.

故作用是封闭的. 我们看 $X^{\mathbb{Z}_p}=\{(g,\cdots,g):\ g^p=1\}$

由于 $\mathbb{Z}_p$ 是 p 群 且 $(1,\cdots,1)\in X^{\mathbb{Z}_p}$. 且 $p\,\big|\,|X|$.

知 $X^{\mathbb{Z}_p}$ 非平凡. 即存在 g 使 $g\ne1$ 且 $g^p=1$

Definition

Lagrange 预解式: $t(\omega,\sigma) := x_{\sigma(1)} + \omega x_{\sigma(2)} + \cdots + \omega^{n-1} x_{\sigma(n)}$

其中 ω 是 n 次单位根 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, x_i 是 n 个根. $\sigma \in S_n$

Lemma (由预解式解出根)

设 $1 \le k \le n$ 是给定整数. $\sigma \in S_n$, $\omega_m = \omega^m = e^{\frac{2\pi m i}{n}}$, 则

$$x_{\sigma(k)} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \omega_m^{-k+1} \cdot t(\omega_m, \sigma),$$

proof: $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \omega_m^{-k+1} \cdot \sum_{l=1}^{n} \omega_m^{l-1} x_{\sigma(l)}$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \omega_m^{l-k} x_{\sigma(l)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} x_{\sigma(l)} \cdot \sum_{m=1}^{n} \omega_m^{l-k}$$

$l=k$ 时取 n. 其他取

$$= n x_{\sigma(k)}.$$

Lemma

记 $\xi = (1\,2\,3 \cdots n) \in S_n$. 则 $t(\omega, \sigma\xi) = \omega^{-1} t(\omega, \sigma)$

验证平凡

Lemma

可以非本原 n 次单位根

设 $h \mid n$. ω 是 h 次单位根. $\mathbb{Z}_n$ 分为 $C_k := k + \mathbb{Z}_h$, $k = 1, 2, \cdots \frac{n}{h}$ 的无交并

记 $K_h = \{\tau \in S_n : \forall k,\ \tau(C_k) = C_k\}$ 为保 C_k 结构的置换

则 $K_h \le S_n$ 且 $K_h \cong (S_{\frac{n}{h}})^h$

模

- 左模、右模. R-模指: R: 环 M: 加法群.

  装备 $R\times M\to M$ 的乘法.

- 子模: $N<M$. $R\times N\to N$ 封闭.

  子模的有限和、任意交均为子模.

- 子集生成的模, 有限生成模, 单元素生成的: 循环模

- 模同态: $M\to M'$ 均为 R 模 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. $rf(x)=f(rx)$.

- 模同构: 存在 $f\in Hom(M,M')$, $g\in Hom(M',M)$, $f\circ g=id_{M'}$; $g\circ f=id_M$.

  $Hom(M,M')$ 本身可作为 R-模

- 核: $\ker f$ 按加法群同态的核.

- 商模: 按加法群间的商来计算

- 余核: $M'/\mathrm{Im} f$ 满 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{coker}=\{0\}$. 单 $\Leftrightarrow$ $\ker=\{0\}$.

- 模同态基本定理: $M/\ker f\cong \mathrm{Im} f$

  一一对应: $N+\ker f \cong f(N)$ （$M/\ker f \supseteq N+\ker f$，$\mathrm{Im} f \supseteq f(N)$）

- 直积: $(M_i)_{i\in I}$ 是一族 R-模. $\prod_{i\in I} M_i$

- 直和: $\bigoplus_{i\in I} M_i=\{(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} M_i : 有限个\ i\neq 0\}$.

  有结合律.

  约定: M^I: 按 I 直积 M, $M^{\oplus n}:=\underbrace{M\oplus\cdots\oplus M}_{n份}$.

  他们通过嵌入映射成为 $\oplus$ 与 $\prod$ 的子模.

- 直和判定: 以下命题等价

(i) $\sum_{i\in I} M_i = M$，且 $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{0\}$

(ii) $x\in M$ 唯一写成 $\sum_{i\in I} x_i$ 且 $x_i \in M_i$.

(iii) $\bigoplus_{i\in I} M_i \underset{\sigma}{\simeq} M$ $\qquad \sigma((x_i)_{\in I}) = \sum_i x_i$.

命题：设 L, N 是 M 的子模，且 $M = N\oplus L$. 则商同态 $q: M\to M/N$ 限制为同构 $q|_L: L \xrightarrow{\sim} M/N$.

注意：任一子模 $N\subset M$，未必存在子模 L 使 $N\oplus L = M$. 异于向量空间.

e.g.: $R=\mathbb{Z}$. $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $\quad N = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

自由模：设 X 为集合，其上的自由模 $R^{\oplus X}$ 为直和，以 X 为下标集.

有自然的嵌入 $X\to R^{\oplus X}$, $x \mapsto (r_y)_{y\in X}$. $r_x = 1$, else $r=0$.

命题：设 N 是任意 R-模，则有双射：(不是同构)

$$\mathrm{Hom}(R^{\oplus X}, N) \xleftrightarrow{1:1} \{\text{func}: f: X\to N\}$$

$$\varphi \longmapsto [x \mapsto \varphi((r_y)_{y\in X})]$$

其中 $r_x=1$, else $r=0$.

$$[(r_x)_{x\in X} \mapsto \sum_{x\in X} r_x f(x)] \longleftarrow f$$

线性无关子集：设 M 是 R-模，$S\subseteq M$，若有限和 $\sum_{s\in S} r_s s = 0$ 当且仅当 $r_s = 0$ 时所有 s 成立. 则称 S 为 M 的线性无关子集.

命题：

设 X 为模 M 的子集. 以下陈述等价：

(i) X 生成 M，且线性无关

(ii) $m\in M$ 可唯一表示为有限和 $m = \sum_{x\in X} r_x x$, $r_x \in R$.

(iii) $\varphi: R^{\oplus X} \to M$ 为同构 生成 $M \Rightarrow$ 满. 线性无关 $\Rightarrow$ 单

此时我们称：M 是以 X 为基的自由模.

挠：设 R 为整环（无零因子的交换幺环），M 为 R-模，若 $x\in M$

满足 $rx=0 \Leftrightarrow r=0$，则称 x 无挠，否则称为挠元。

这里 $M=R^{\oplus X}$ 没有非零的挠元，这是因为对于所有 $r\in R$ 与 $\sum_x r_x x\in R^{\oplus X}$

$r\cdot\sum_{x\in X} r_x x = \sum_{x\in X}(r r_x)\cdot x = 0 \Leftrightarrow r r_x=0,\ \forall x\in X \Leftrightarrow r=0$ 或 r_x 全为 0.

命题：R 交换环，M 自由模，则 M 的任两组基 X、Y 均满足 $|X|=|Y|$，

共同基数称为 M 的秩 $:=\mathrm{rk}(M)$

以下默认 R 均为交换环。

定义：对任意理想 $I\subset R$ 和 R 模 M，定义 M 的 I-挠子模为

$M[I]:=\{x\in M:\ \forall t\in I,\ tx=0\}$.　　乘 I 为 0 的 M 中的元素.

为什么是子模？ $\forall t\in I,\ tx=0 \Leftrightarrow \forall t\in I,\ r\in R,\ t(rx)=(tr)x=t'x=0$.

利用了理想 I 的吸收性.

当 I 是主理想 (h) 时，另记 $M[h]:=M[(h)]=\{x\in M: hx=0\}$

称为 M 的 h-挠子模

性质：$I\supset J \Rightarrow M[I]\subset M[J]$　　$M[0]=M$，$M[1]=\{0\}$

$M[I]\cap M[J]=M[I+J]$　　$h,k\in R$ 且 $h\mid k \Rightarrow M[h]\subset M[k]$.

$(\bigoplus_i M_i)[I]=\bigoplus_i M_i[I]$

命题：设 R 是 PID，M 是 R-模，且存在 $t\in R\setminus\{0\}$ 使 $M=M[t]$.

将 t 作不可约分解后是 $p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$，其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是素元，则有直和分解

$M=\bigoplus_{i=1}^n M[p_i^{a_i}]$.　　例：$R=\mathbb{Z}$，$M=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $t=n=p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}$

$M[p_i^{a_i}]\cong \mathbb{Z}/p_i^{a_i}\mathbb{Z}$.

proof：只需证：a,b 互素时 $M[ab]=M[a]\oplus M[b]$

由于存在 $u,v\in R$，$ua+vb=1$，若 $x\in M[ab]$，$x=uax+vbx\in M[b]+M[a]$

设 $x\in M[a]\cap M[b]$，即 $ax=0$，$bx=0$，$\Rightarrow 1\cdot x=uax+vbx=0 \Rightarrow x=0$.

注意到对素元 p: $M[p] \subset M[p^2] \subset \cdots$

易见 $M[p^\infty] := \bigcup_{n=1}^{\infty} M[p^n]$ 是 M 的子模. 从而 $M = \bigoplus M[p_i^{a_i}]$ 可以写为

$$M = \bigoplus_{\substack{p:\text{素元} \\ p \mid t}} M[p^\infty]$$

. 这是因为 n 充分大时 $M[p^n] = M[p^n] \cap M[t]$

$= M[\gcd(p^n, t)] = M[p^a]$. 其中 $p^a \| t$

<u>引理</u>:

设 R 是PID, $t \in R \setminus \{0\}$, 且 p 是 R 的素元. 考虑 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(i) 若 $p^a \mid t$, 则 $(R/(t))[p^a] \simeq R/(p^a)$

(ii) 若 $p^a \| t$. 则 $(R/(t))[p^\infty] \simeq R/(p^a)$.

刻画 $M[p^\infty]$ 结构.

<u>定理</u> (PID上的有限生成模分类)

设 R 为PID, M 是有限生成 R-模. 则有同构

$$M \simeq R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_k \oplus E.$$

其中

- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $I_1 \supset \cdots \supset I_k$ 是 R 中一列非零真理想.
- E 是有限生成自由 R 模.

且他们具有唯一性: I_i 上同构, E 上同秩.

$$I_k \supset \cdots \supset I_k \supset \underbrace{\{0\} = \cdots = \{0\}}_{rk(E)\text{份}}$$

称为 M 的不变因子.

线性映射与模结构.

设 V 是 F-向量空间，指定 $T\in \mathrm{End}(V)$ 等价于将 V 升级为 $F[x]$-模. 升级方式为.

将 $x\cdot v$ 视为 $T(v)$. $v\in V$. .

进一步，若 $F[x]$-模 V 与 V' 分别对应 $T\in \mathrm{End}(V)$ 与 $T'\in \mathrm{End}(V')$. 则

$$\{F[x]\text{-模同态 } \varphi: V\to V'\} \quad = \quad \{\varphi\in \mathrm{Hom}(V,V'): T'\varphi = \varphi T\}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "T"] & V' \arrow[d, "T'"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

为什么 $F[x]$-模 V 的结构能与线性变换 (up to 相似) 有一一对应？

- 有 $F[x]$ 模 V： $\forall f(x)\in F[x]$，有 $\rho_f: V\longrightarrow V$. 是线性映射 (?)

  取 ρ_x 为 T 即可.

  为什么 V 作为向量空间的加法群时，$F[x]$ 模的作用必为线性映射？

  (1) $\rho_x(v_1+v_2) = \rho_x(v_1)+\rho_x(v_2)$

  (2) $\rho_x(\lambda v_1) = \rho_x(\rho_\lambda(v_1)) = \rho_{x\cdot\lambda}(v_1) = \rho_\lambda(\rho_x(v_1)) = \lambda\cdot\rho_x(v_1)$

  模 $\Rightarrow$ $\rho_\lambda(v) = \lambda v$ for $\lambda\in F$.

- 有线性映射 T： 取 $f(x) = \sum_k a_k x^k$. 则 $\rho_f = \sum_k a_k T^k$ 作为线性算子.

  为什么这是 $F[x]$-模？

  (1) 线性映射条件 $\Rightarrow$ $\rho_f(v_1+v_2) = \rho_f(v_1)+\rho_f(v_2)$, $\rho_1(v) = v$

  (2) $F[x]$ 环 $\Rightarrow$ $\rho_{f+g} = \rho_f+\rho_g$. $\rho_f(\rho_g(v)) = \rho_{f\cdot g}(v) = (\rho_f\cdot\rho_g)(v)$

	集合		元素.
矩阵	$M_{n\times n}(F)/\sim$	$\ni$	A
	$\downarrow$ 矩阵的相似.		$\updownarrow$
线性映射	$\{(V,T),\ \dim V = n\}/\simeq$	$\ni$	$(F^n, A) = T$
	$\downarrow$ 线性空间的同构		$\updownarrow$ 升级 V
$F[x]$-模.	$\{n$ 维 $F[x]$-模$\}/\simeq$	$\ni$	$F[x]$-模 V.
	$F[x]$-模的同构		

矩阵的分块对角 $\Leftrightarrow$ 线性映射的直和 $\Leftrightarrow$ 模的直和.

有理标准形

命题

设 $f = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$，对于 $F[x]$-模 $F[x]/(f)$

取其有序基为 $1+(f), \cdots, x^{n-1}+(f)$. 则对应的 $n\times n$ 矩阵为友矩阵

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x & x^2 & & x^{n-1} & x^n \end{array} \\
C_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & & & & -c_1 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

这是它们之间的关系.

推广：给定首一多项式 $f_1, \cdots, f_k \in F[x]$，按上述方式选定每个 $F[x]/(f_i)$ 的有序基. 则 $F[x]$-模 $\bigoplus_{i=1}^{k} F[x]/(f_i)$ 对应分块对角阵 $\mathrm{diag}(C_{f_1}, \cdots, C_{f_k})$

定理（有理标准形）

设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$A \in M_{n\times n}(F)$. 则存在唯一一列前后整除的非常数首一多项式 $f_1 | f_2 \cdots | f_k$. 使得 $\sum_{i=1}^{k} \deg f_i = n$ 且 A 共轭于分块对角矩阵

$$\mathrm{diag}(C_{f_1}, \cdots, C_{f_k}) = \begin{pmatrix} C_{f_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{f_k} \end{pmatrix}$$

称为有理标准型.

$f_1, \cdots, f_k$ 称为 A 的不变因子.

proof:

将矩阵 A 对应到 $F[x]$-模 M. 将 M 代入 PID: $F[x]$ 的有限生成模（$\dim M$ 有限）的结构定理，分解中自由部分不存在. 因为自由部分的 $\dim = \infty$. M 有限维

此外 $M \neq \{0\}$，因此我们可得到唯一 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 与一列非零真理想 $I_1 \supset \cdots \supset I_k$ 使

$$M \simeq F[x]/I_1 \oplus \cdots \oplus F[x]/I_k$$

推论：(i) $\mathrm{Min}_A = f_k$

(ii) $\mathrm{Char}_A = \prod_{i=1}^{k} f_i$

proof：$F[x]$-模 M 中，$(\mathrm{Min}\,A) = \{t \in F[x] : \forall x \in M, tx = 0\}$

由 $M \cong \bigoplus_i F[x]/(f_i)$ 知 $(\mathrm{Min}\,A) = (f_k) \Rightarrow \mathrm{Min}\,A = f_k$

$\mathrm{Char}_A = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Char}\, C_{f_i} = \prod_{i=1}^{k} f_i$

推论（另一种形式）

设 $A \in M_{n\times n}(F)$，取 Min_A 的不可约分解 $p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$，其中 p_i 是相异的不可约多项式。则 A 共轭于形如 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots A_n)$ 的分块对角矩阵，其中 $A_j = \mathrm{diag}\left(C_{p_j^{b_{1,j}}}, \cdots, C_{p_j^{b_{r_j,j}}}\right)$，$1 \le b_{1,j} \le \cdots \le b_{r_j,j}$

一旦 $p_1 \cdots p_n$ 顺序选定，资料 $(b_{i,j})_{i,j}$ 也唯一确定。

这里只须记住 $M \cong \bigoplus_{j=1}^{n} M[p_j^\infty]$ 而 A_j 对应的模恰为 $M[p_j^\infty]$

内部怎么分解分以上 2 种情况。

线性映射版本：

设 V 是 n 维 F-向量空间，$T \in \mathrm{End}(V)$

Form 1

存在 V 的有序基和一列非常数首一多项式 $f_1 | \cdots | f_k$ 使得 $\sum_{i=1}^{k} \deg f_i = n$，且 T 表作矩阵 $\mathrm{diag}(C_{f_1}, \cdots, C_{f_k})$。

Form 2

取 Min_T 的不可约分解 $p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$，则存在 V 的有序基，使得 T 的矩阵为 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_n)$，其中 $A_j = \mathrm{diag}\left(C_{p_j^{b_{1,j}}} \cdots C_{p_j^{b_{r_j,j}}}\right)$。

引理 (Smith标准形) → Euclid Domain. 本质算法是带余除法.

设R是$\mathbb{Z}$或一元多项式环，给定 $A\in M_{n\times m}(R)$，存在 $P\in GL(m,R)$，$Q\in GL(n,R)$，使得 $A=Q\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_k\end{pmatrix}P$，且 $d_1|d_2|\cdots$

命题 (有理标准形的计算)

设P, Q取法同上，若 $X\cdot 1_{n\times n}-A=Q\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}P$，且 d_i 取为首一的.

则 $(d_i)_{i=1}^{n}$ 删除 $d_i=1$ 的项后，产物是有理标准形的不变因子.

1°. 取 $A=(a_{ij})$ 中 Norm 最小项 移动到 $(1,1)$

2°. 若 a_{11} 整除所有 a_{i1} 与 a_{1j}，$\xrightarrow{\text{除法}}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$.

若 a_{11} 不整除所有，作带余除法得到norm更小者. 返回1°

3° $n\to n-1\to\cdots\cdots$ 得到 $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$.

注意到若B中某个矩阵元不被a_{11}整除，可行变换无痛到第一行. 再执行2°.

从而保证产出的 $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ 有 $d_1|d_2\cdots|d_n$

命题

以下说法等价：

(i) A, B 在 $M_{n\times n}(F)$ 共轭(相似)

(ii) $X\cdot 1_{n\times n}-A$ 与 $X\cdot 1_{n\times n}-B$ 相抵在 $M_{n\times n}(F[X])$

§ Jordan 标准形

幂零元r: $r^d=0$ for $r\in R$. R: 环.

幂零指数 d: $r^d=0$ 的 d

命题

$\dim V = n$，$T \in End(V)$，以下等价：

(i) T 幂零

(ii) 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使 $Min_T = x^k$　　此时 k 恰为 T 的幂零指数.

(iii) $Char_T = x^n$

(iv) $V = V_{[0]}$

Pf：(i) ⇒ (ii)：$T^? = 0$　由 Min_T 最小性

(ii) ⇒ (iii)：利用不变因子

(iii) ⇒ (iv)：特征值仅有 0，用广义特征子空间分解

(iv) ⇒ (i)：$T - \lambda$ 在 $V_{[\lambda]}$ 幂零.

Jordan 块：

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{d\times d}$$

$$J_{d(\lambda)}^{T} = {}^{t}J_{d}(\lambda)$$

$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + J_d(0)$，故研究 $J_d(0)$

而且 $J^T_d(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{d\times d}$　恰好为 x^d 的友矩阵.

$$Min_{J_d(\lambda)} = (x-\lambda)^d = Char_{J_d(\lambda)}$$

定理

设 V 为 n 维 F-向量空间，$T \in End(V)$，设 $Char_T$ 在 F 上分裂，记其相异根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in F$.　- - - -　(略)

Jordan 标准形的计算

引理

设 T 幂零，$\dim V = n$.

(i) T 的 Jordan 标准形中，Jordan 块总数为 $n - rk(T)$

(ii) 对于每个 $d \geq 1$. $d \times d$ Jordan块的个数为

$$\mathrm{rk}(T^{d+1}) - 2\,\mathrm{rk}(T^{d}) + \mathrm{rk}(T^{d-1})$$

<u>定理</u>: $\dim V = n$, $T \in \mathrm{End}(V)$ 满足 Char_T 分裂. 设 T 特征值为 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$.

(i) 在 T 的 Jordan 标准形中, 特征为 λ_j 的 Jordan 块总数为 $n - \mathrm{rk}(T - \lambda_j)$

(ii) $J_d(\lambda_j)$ 个数为 $\mathrm{rk}((T-\lambda_j)^{d+1}) - 2\,\mathrm{rk}((T-\lambda_j)^{d}) + \mathrm{rk}((T-\lambda_j)^{d-1})$

计算 Jordan 标准形也可以先求不变因子 (Smith 标准形) 再写块.

<u>应用</u>: Jordan-Chevalley 分解

<u>定理</u>: $\dim V = n$, $T \in \mathrm{End}(V)$. Char_T 在 $F[x]$ 上分裂.

则存在唯一 $S, N \in \mathrm{End}(V)$:

(i) S 是对角的. (ii) N 是幂零的.

(iii) $SN = NS$. $T = N + S$.

张量积

定义-命题 (张量积)

(1) 设 V, W 是 F-向量空间，则存在 F-向量空间 L_{univ} 连同双线性映射 $B_{univ}: V\times W \to L_{univ}$，使得对所有 F-向量空间 L 和双线性映射 $B: V\times W \to L$，存在唯一的线性映射 $\varphi: L_{univ} \to L$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "B_{univ}"] \arrow[dr, "B"'] & L_{univ} \arrow[d, "\varphi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

(2) 若 (L_{univ}, B_{univ}) 与 (L'_{univ}, B'_{univ}) 皆具有以上性质，则存在唯一同构 φ.

$$\begin{tikzcd} & L_{univ} \arrow[d, "\wr\ \varphi"] \\ V\times W \arrow[ur, "B_{univ}"] \arrow[r, "B'_{univ}"'] & L'_{univ} \end{tikzcd}$$

于是，精确到同构，这样的 L_{univ}, B_{univ} 唯一.

记 $B_{univ}(v,u) := v\otimes u$，　$L_{univ} := V\otimes W$.

构造：考虑以 $V\times W$ 所有元素为基的线性空间：$F^{\oplus(V\times W)}$

其元素表示为 $\sum a(v_i, w_i)$，$v_i \in V$，$w_i \in W$.

子空间 $\mathcal{N}$ 由以下元素生成：

$$\left.\begin{array}{l} (v+v', w) - (v,w) - (v',w) \\ (v, w+w') - (v,w) - (v,w') \\ (tv, w) - t(v,w) \\ (v, tw) - t(v,w) \end{array}\right\} \text{保证了 } B_{univ} \text{ 是双线性的}.$$

则 $L_{univ} := F^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{N}$ 符合要求.

$B_{univ}(v,w) = (v,w) + \mathcal{N}$.

所谓泛性质，即 $\mathrm{Hom}(V\otimes W, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}(V, W, L)$ 是双射.

$$\varphi \longmapsto \varphi B_{univ}$$

定义（多元张量积）

给定F-向量空间 $V_1, \cdots, V_n$.

(i) 存在n重；
C_{univ}, M_{univ}
使 $\forall C, M$, $\exists!\ \varphi$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "C_{univ}"] \arrow[dr, "C"'] & M_{univ} \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

(ii) 同构意义下的唯一性.

构造：$M_{univ} = F^{\oplus(V_1 \times \cdots \times V_n)} / \mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$ 由以下元素生成：

$$(\cdots v+v' \cdots) - (\cdots v \cdots) - (\cdots v' \cdots)$$

$$(\cdots tv \cdots) - t(\cdots v \cdots)$$

定义-命题：

给定一簇线性映射 $f_i: V_i \to W_i$，其中 $i=1,\cdots,n$. 存在唯一的线性映射 $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ 使以下交换

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "(f_1,\cdots,f_n)"] \arrow[d] \arrow[dr, "多重线性"] & W_1 \times \cdots \times W_n \arrow[d] \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[r, "f_1 \otimes \cdots \otimes f_n"'] & W_1 \otimes \cdots \otimes W_n \end{tikzcd}$$

由此 存在，唯一

也即 $\underbrace{(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)}_{f_1,\cdots,f_n \text{ 诱导的映射}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$ 成立.

性质

(1) 设 $U_i \xrightarrow{g_i} V_i \xrightarrow{f_i} W_i$，则

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = f_1 g_1 \otimes \cdots \otimes f_n g_n$$

(2) $id_{V_1} \otimes \cdots \otimes id_{V_n} = id_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_n}$.

(3) $a, a' \in F$, $f_i, f_i' : V_i \to W_i$, 则

$$\cdots \otimes (af_i + a'f_i') \otimes \cdots = a \cdots \otimes f_i \otimes \cdots + a' \cdots \otimes f_i' \otimes \cdots$$

性质：(i) 若 $v_i = 0$，则 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = 0$.　(利用 $0 \cdot v_i = v_i$)

(ii) 若 $V_i = 0$. 则 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = \{0\}$.　(利用(i))

(iii) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

(iv) $F \otimes V \simeq V \simeq V \otimes F$

(v) $V \otimes W \simeq W \otimes V$

(vi) $V = \oplus_{i \in I} V_i$，则 $V \otimes W \simeq \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W)$

(vii) 设 $(v_i)_{i \in I}$ 是 V 的基，$(w_i)_{i \in J}$ 是 W 的基. 则

$(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$ 是 $V \otimes W$ 的基

矩阵的Kronecker基：

$$A \otimes B := \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{array}\right)$$

考虑线性映射 $f: V \to V'$，$g: W \to W'$，分别对应矩阵 A, B.

则 $f \otimes g: V \otimes W \to V' \otimes W'$ 对应矩阵 $A \otimes B$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

命题：

$f_i: V_i \to W_i$, $1 \leq i \leq n$.

(1) f_i 均满 $\Rightarrow$ $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ 满

(2) f_i 均单 $\Rightarrow$ $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ 单

命题 设 V, W 为 F-向量空间. 存在线性映射如下: Goal 1: 诠释对偶空间

$$V^\vee\otimes W \xrightarrow{\Theta_{V,W}} \mathrm{Hom}(V,W)$$

$$\lambda\otimes w \mapsto [v\mapsto \lambda(v)\cdot w]$$

还有 $\lambda_1\otimes w_1+\lambda_2\otimes w_2 \mapsto [v\mapsto \lambda_1(v)w_1+\lambda_2(v)w_2]$ 等等

$\Theta_{V,W}$ 恒为单射，当 V 或 W 有限维时是同构.

例: 对于 $V=W$，取 V 的基 $(v_i)_{i=1}^n$ 与对偶基 $(\check{v}_i)_{i=1}^n$ 则

$$\Theta_{V,V}\left(\sum_{i=1}^n \check{v}_i\otimes v_i\right)=\mathrm{id}_V.$$

这等价于 $\forall j$, $\sum_{i=1}^n \check{v}_i(v_j)\cdot v_j = v_j$.

定义（缩并） Goal 2: 介绍缩并

给定 F-向量空间 V，通过张量积的泛性质对应到双线性形式 $V^\vee\times V\to F$

$(\check{v},v)\mapsto\langle\check{v},v\rangle$

得到唯一的线性映射 $\varphi: V^\vee\otimes V\to F$ 称为缩并.

$$\begin{tikzcd}
V\otimes V^\vee \arrow[r, "\sim", "\Theta_{V,V}"'] \arrow[dr, "缩并"'] & \mathrm{End}(V) \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
 & F
\end{tikzcd}$$

命题

设 $V_1,\dots, V_n$ 为 F-向量空间. 则有典范的线性映射 Goal 3: 研究张量积的对偶空间

$$\psi_{V_1\cdots V_n}: V_1^\vee\otimes\cdots\otimes V_n^\vee \longrightarrow (V_1\otimes\cdots\otimes V_n)^\vee$$

通过张量积的泛性质，有以下对应:

$\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)=\prod_{i=1}^n \dim(V_i)$

$$V_1^\vee\times\cdots\times V_n^\vee \longrightarrow (V_1\otimes\cdots\otimes V_n)^\vee$$

$$(\check{v}_1,\dots,\check{v}_n)\mapsto\left[v_1\otimes\cdots\otimes v_n\mapsto\prod_{i=1}^n\langle\check{v}_i,v_i\rangle\right]$$

当 V_i 均有限维时为同构

泛性质图:

$$\begin{tikzcd}
V_1^\vee\times\cdots\times V_n^\vee \arrow[r] \arrow[dr, "已知"'] & V_1^\vee\otimes\cdots\otimes V_n^\vee \arrow[d, "\psi_{V_1\cdots V_n}"] \\
 & (V_1\otimes\cdots\otimes V_n)^\vee
\end{tikzcd}$$

定义（张量幂）

给定 F-向量空间 V 和 $n\in\mathbb{Z}$， $V^{\otimes n}:=V\otimes\cdots\otimes V$ (n份).

$V^{\otimes 0}:=F$.

Goal1 与 Goal3 揭示了，从有限维 F-向量空间出发，反复取 $\otimes$，Hom，对偶，

所得产物均同构于 $V^{\otimes p}\otimes(V^\vee)^{\otimes q}$，$p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，记为 V 上的 (p,q) 型张量.

例1：V 是 (1,0) 型，$V^\vee$ 是 (0,1) 型，End(V) 是 (1,1) 型.

双线性形式 $V\times V\to F \simeq \mathrm{Hom}(V\otimes V,F)\simeq(V^\vee)^{\otimes 2}$，(0,2) 型

例2：$V^{\otimes p}\otimes(V^\vee)^{\otimes q}\xrightarrow{\sim}(V\otimes V^\vee)\otimes(V^{\otimes(p-1)}\otimes(V^\vee)^{\otimes(q-1)})$

$\xrightarrow{\text{缩并}} V^{\otimes(p-1)}\otimes V^{\otimes(q-1)}$

§ 张量代数

定义 F-代数：w/ 环 R 的元素张成 F-向量空间.

Eg. $M_{n\times n}(F)$，$F[x]$.

子代数：子环且为 F-向量空间

同态：环同态.

理想：环理想.

商代数：商环.

定义

设 V 是 F-向量空间. $T(V)=\bigoplus_{n\geq 0}(V^{\otimes n})$

则 $(V^{\otimes a})\otimes(V^{\otimes b})=V^{\otimes a+b}$ 诱导 $T(V)\times T(V)\to T(V)$

的映射，也得到 T(V) 是 F-代数：单位元 1_F.

运算：$(v_1\otimes\cdots\otimes v_a)\otimes(v_1'\otimes\cdots\otimes v_b')=v_1\otimes\cdots v_b'$

加法为 F 的加法.

T(V) 中元素的样子：$v_1+v_2\otimes v_3\otimes v_4+v_5\otimes v_6$

定义：设 V 是 F 向量空间，$m\in\mathbb{Z}$，M 是 F 向量空间

$C: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{m\text{份}} \longrightarrow M$ 是 m 重线性映射.

I. 对称代数：

I_{sym}：$x\otimes y - y\otimes x$ 生成的理想、

定义为 $T(V)/I_{sym} = Sym(V)$

$I^n_{sym} := I_{sym}\cap V^{\otimes n}$. 则 $I_{sym} = \bigoplus_{n\geq 0} I^n_{sym}$

定义 $Sym^m(V) = V^{\otimes m}/I^m_{sym}$

II. 外代数：

$I_\wedge$：$x\otimes x$ 生成的理想. $\Lambda(V) = T(V)/I_\wedge$

同上有 $I^m_\wedge$. $\Lambda^m(V) = V^{\otimes m}/I^m_\wedge$

命题

设 M 为 F-向量空间，则 $Mul(V,\cdots V;M) \simeq Hom(V^{\otimes m}, M)$ 限制为

$\{C\in Mul$，对称$\} \simeq Hom(Sym^m(V), M)$

$\{C\in Mul$，交错$\} \simeq Hom(\Lambda^m(V), M)$

对称代数中 $x\otimes y = y\otimes x$

外代数中 $x\wedge y = -y\wedge x$

下面确定外代数结构：设 $\dim V = n$

(i) $m>n$ 时 $\Lambda^m(V) = 0$

(ii) $1\leq m\leq n$ 时 $\dim\Lambda^m(V) = \binom{n}{m}$

Exactly，取 V 的基 $v_1,\cdots v_n$，$\Lambda^m(V)$ 的基为 $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_m}$

$1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n$.

(iii) $\dim\Lambda(V) = \sum_{m=0}^{+\infty}\binom{n}{m} = 2^n$

定义 设 $\varphi: V \to W$, $T(\varphi): T(V) \to T(W)$

$$\mathrm{Sym}(\varphi): \mathrm{Sym}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(W)$$
$$x_1 \cdots x_m \longmapsto \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m)$$

$$\Lambda(\varphi): \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(W)$$
$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \longmapsto \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_m)$$

推论

设 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. $\det(\varphi)$ 由下式刻画:

$$\Lambda^n(\varphi) = \det(\varphi) \cdot \mathrm{id}_{\Lambda^n(V)}$$

定理

设 $\dim V = n$. 取基 $v_1, \cdots, v_n$. 则有 F代数的同构:

$$\mathrm{Sym}(V) \xrightarrow{\sim} F[x_1, \cdots, x_n]$$

加法 Chevalley 分解.

$T \in \mathrm{End}(V)$. Char_T 分裂 $\Rightarrow$ 存在! $S, N \in \mathrm{End}(V)$.

* S 可对角化
* N 幂零
* $T = S + N$, $SN = NS$

且 $S = f(T)$, $N = g(T)$ for some f, g

核心：分成特征子空间的直和，在特征子空间上做事情.

T^{-1} 存在 $\Rightarrow$ S^{-1} 存在

取 $f \equiv \lambda_i \pmod{(x-\lambda_i)^n}$. 这样 $f(T)$ 在 $V[\lambda_i]$ 上表现为 $\lambda_i \cdot id$

CRT 保证存在.

$F[x]$ 是 PID

$V_{\lambda_i} = \{ v \in V \mid (T - \lambda_i I)^n v = 0 \}$

$T = S + N$,

$u = S + N$

$u = id + N \cdot S^{-1}$

$Su = S + N$

$N \cdot S^{-1}$. 取多项式的逆？ 用贝祖！ 裴蜀！

$S(u - id) = N$ ✓