可积性问题

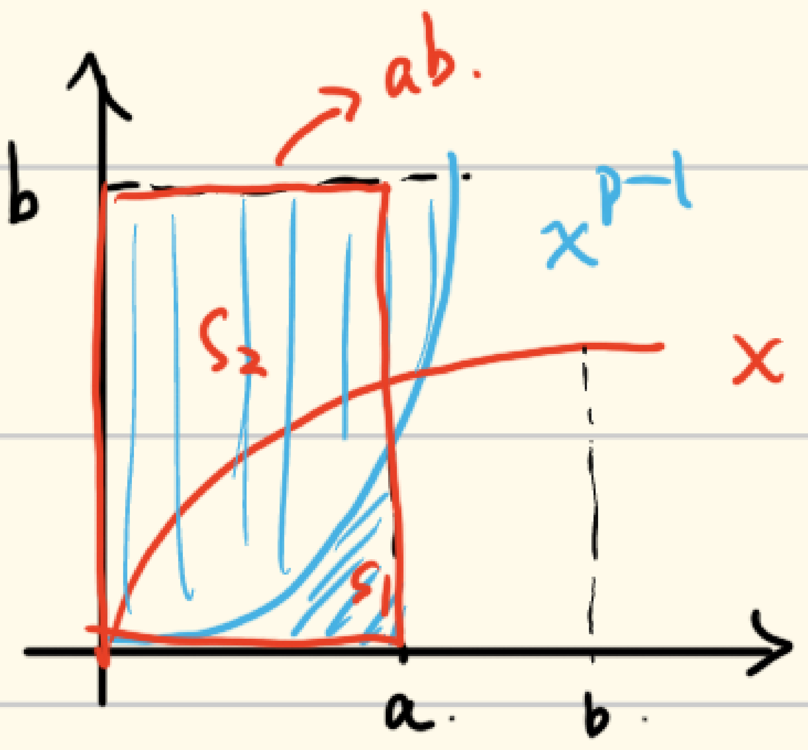
$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\text{连续}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{间断点零测}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\text{可积}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{微积分基本定理}"] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{原函数存在}} \\
& \boxed{\text{有界}} &
\end{tikzcd}$$

2.17 定积分的应用

曲线围成的面积

Example $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a,b\geqslant 0$. 证明: $ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

$\Updownarrow$ $p+q=pq \Leftrightarrow (p-1)(q-1)=1$



$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\,dx=\frac{a^p}{p}$$

$$S_2=\int_0^b x^{q-1}\,dx=\frac{b^q}{q}$$

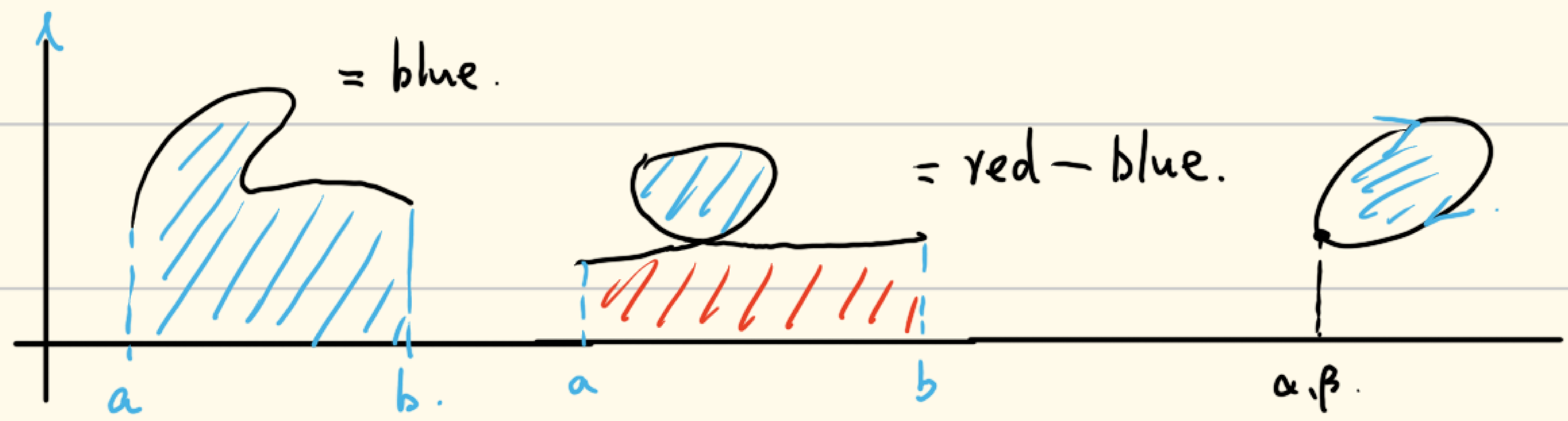
Theorem

$y=f(x)$, $x\in[a,b]$, 由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$

给出, $f(x)$ 连续. $x'(t)$ 存在 (除有限点) $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$.

则 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta y(t)\,d\,x(t)=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt$.

几何直观:



简单闭曲线时 $(x(\alpha)=x(\beta),\ y(\alpha)=y(\beta))$.

面积 $S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt\right|=$

$\int_\alpha^\beta y\cdot dx = x\cdot y\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta x\cdot dy=-\int_\alpha^\beta x\cdot dy$.

故可写为 $S=\frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta (x'y-xy')\,dt\right|$

Example

(I) 椭圆面积: $x=a\cos t$. $y=b\sin t$. $a,b>0$, $t\in[0,2\pi]$

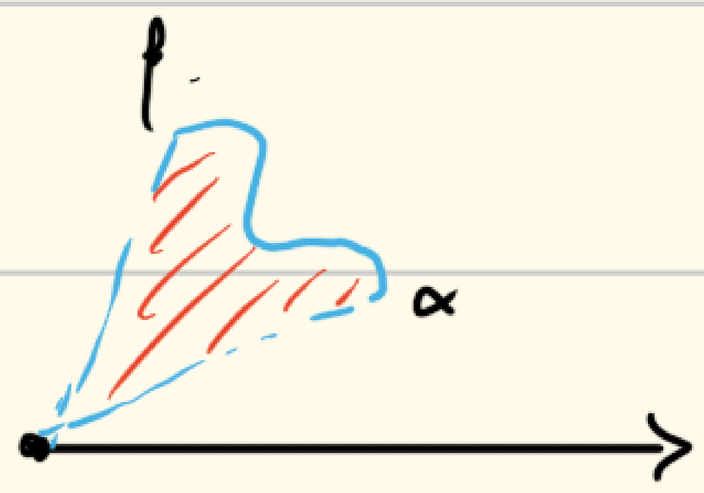
$$S=\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\left(-ab\sin^2 t-ab\cos^2 t\right)dt\right| = ab\cdot\pi.$$

(II) 星形线面积: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$ $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$

$$S=\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} a\cos^3 t \cdots\cdots\right| = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Proposition (极坐标)

$r=f(\theta)$, f连续. 计算扇形面积.



设分割Δ: $\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$.

面积 $\approx \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\theta_{n-1})(\theta_n-\theta_{n-1})$ 令 $n\to+\infty$.

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$$

Example

$r^2=a^2\cos 2\theta.$ 双纽线.

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\, d\theta. = a^2.$$

曲线的弧长.

用"内接折线"来逼近.

Δ: $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$. $M_i=(x(t_i),y(t_i))$

折线: $\bigcup \overline{M_{i-1}M_i}$ 长度: $\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$

称曲线S可求长. 若 $\sup_\Delta\{折线长\}<+\infty$. 则定义 $\sup_\Delta\{折线长\}$ 为曲线弧长. Question: 什么样的曲线可求长?

- 有界变差函数. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. $a=x_0<\cdots<x_n=b$.

$$V_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|. \quad V_{[a,b]}=\sup_\Delta\{V_\Delta\}.$$

Definition 若全变差 $V_{[a,b]} < +\infty$，f 称为有界变差.

Example 单调函数是有界变差. $V_{[a,b]} = |f(b)-f(a)| < +\infty$

保有界变差：取和、差、绝对值. $V_{|f|} \le V_f$, $V_{f+g} \le V_f + V_g$

Theorem $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

有界变差函数的充要条件是两个单增函数的差.

proof: 充分显然. 下证必要. 设 f 有界变差.

定义 $V_f(x) = V_f[a,x]$ 是递增的. 令 $g = V_f(x) - f(x)$

我们宣称 g 单调不减. 从而 $f(x) = V_f(x) - g(x)$ (证毕)

事实上 $g(x_2) - g(x_1) = V_f[a,x_2] - V_f[a,x_1] - (f(x_2) - f(x_1))$

$$= V_f[x_1,x_2] - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0. \quad (x_2 \ge x_1)$$

Property 由于单调函数几乎处处可导. 则有界变差函数几乎处处可导.

且间断点均为第一类间断点.

连续 $\not\Rightarrow$ 有界变差. $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{else} \end{cases}$ 在 $[0,1]$.

取 $x_i = \dfrac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi}$.

$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \dfrac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi} + \dfrac{1}{(i-\frac{1}{2})\pi}$ 调和级数.

n 充分大即可无界.

李氏连续 $\Rightarrow$ 有界变差 $\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le L \sum |x_i - x_{i-1}| = L(b-a)$

Answer：连续曲线可求长 $\iff$ $x(t)$ 与 $y(t)$ 均为有界变差函数.

proof: $V_\Delta(x(t)) = \sum |x(t_i) - x(t_{i-1})| \le \sum |M_i M_{i-1}| < +\infty$.

$$V_\Delta(y(t)) = \sum |y(t_i)-y(t_{i-1})| \le \sum |M_iM_{i-1}| < +\infty$$

$$\sum |M_iM_{i-1}| \le \sum |x(t_i)-x(t_{i-1})| + |y(t_i)-y(t_{i-1})|$$

$$= V_\Delta(x(t)) + V_\Delta(y(t)) < +\infty.$$

n维曲线可求长 ⟺ 每个分量的函数是有界变差函数.

Proposition.

$x(t)$, $y(t)$ 可导. x', y' 可积. 则

弧长 $|\gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt.$

proof: 注意到. 利用微分中值定理

$$|M_iM_{i-1}| = \sqrt{x'(\xi_i)^2\Delta t_i^2 + y'(\eta_i)^2\Delta t_i^2}$$

$$= \Delta t_i \cdot \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \quad \xi,\eta \text{ 不一样}$$

$$= \underbrace{\sqrt{x'(\eta_i)^2+y'(\eta_i)^2}\cdot\Delta t_i}_{\text{Riemman和}} + \underbrace{(\sqrt{} - \sqrt{})\Delta t_i}_{\text{去证}\to 0}$$

$$\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\eta_i)^2+y'(\eta_i)^2} = \frac{x'(\xi_i)^2 - x'(\eta_i)^2}{\sqrt{} + \sqrt{}}$$

$$= \frac{|x'(\xi_i)+x'(\eta_i)|}{\sqrt{} + \sqrt{}} \cdot |x'(\xi_i)-x'(\eta_i)| \le |x'(\xi_i)-x'(\eta_i)|$$

$$\le \sup_{t_1,t_2} |x'(t_1)-x'(t_2)|$$ 再乘以 Δt_i 即 $\sum \omega_i \cdot \Delta_i$

由 $x'(t)$ 可积知 $=0$.

弧长公式

直角坐标系: $y=f(x)$. $x\in[a,b]$. $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$

极坐标系: $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ $\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

Example

1) $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,t]$. $l=\int_0^t\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)\Big|_0^t$

$\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})$

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $\quad x=a\cos t$. $y=b\sin t$. $\quad b>a>0$. $\varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}=b\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}$

$l=4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}\,dt$ $\quad$ 椭圆积分.

3) $r=a\theta$, $\theta\in[0,t]$, $a>0$. $\quad l=\int_0^t\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,dt=\frac{a}{2}($ 抛 $)$

等周不等式

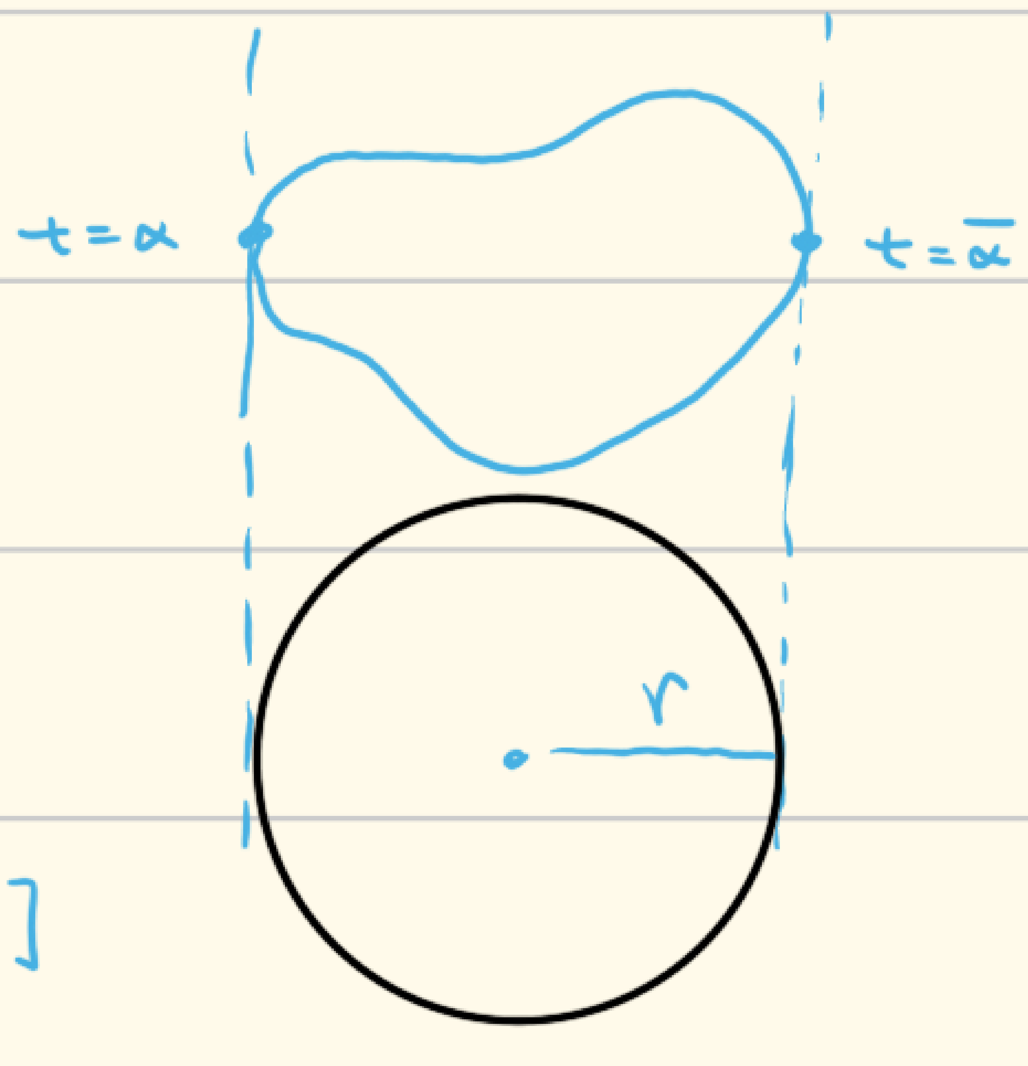
设 Γ 是周长 l 的简单可求长的闭曲线, A 是其所围的面积.

则 $l^2\geq4\pi A$

Proof: 我们对 Γ 是光滑曲线证明. 一般曲线可用光滑曲线逼近.

$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $\quad t\in[\alpha,\beta]$ $\quad x(\alpha)=x(\beta)$. $y(\alpha)=y(\beta)$

$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ 是定值.



面积 $A=\int_\alpha^\beta xy'\,dt$

不妨 $x(\alpha)+x(\bar{\alpha})=0$.

设圆的参数方程 $\bar{y}(t)=\begin{cases}-\sqrt{r^2-x(t)^2}, & t\in[\alpha,\bar{\alpha}]\\ \sqrt{r^2-x(t)^2}, & t\in[\bar{\alpha},\beta]\end{cases}$

$$\pi r^2 = -\int_\alpha^\beta \bar{y}(t)\,x'(t)\,dt$$

$$2\sqrt{A\pi r^2} \le A+\pi r^2 = \int_\alpha^\beta (xy' - \bar{y}x')\,dt$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\le} \int_\alpha^\beta \sqrt{x^2+\bar{y}^2}\cdot\sqrt{y'^2+x'^2}\,dt$$

$$= rl$$

消r 证毕.

多面体体积

设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 全体多面体组成的集合. 体积: $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 的映射 V.

满足: ① V(单位正方体) $=1$.

② 若 V_1 与 V_2 全等. $V(V_1) = V(V_2)$.

③ 若 V_1 与 V_2 相邻. $V(V_1 \cup V_2) = V(V_1) + V(V_2)$.

为什么这叫所谓的体积?

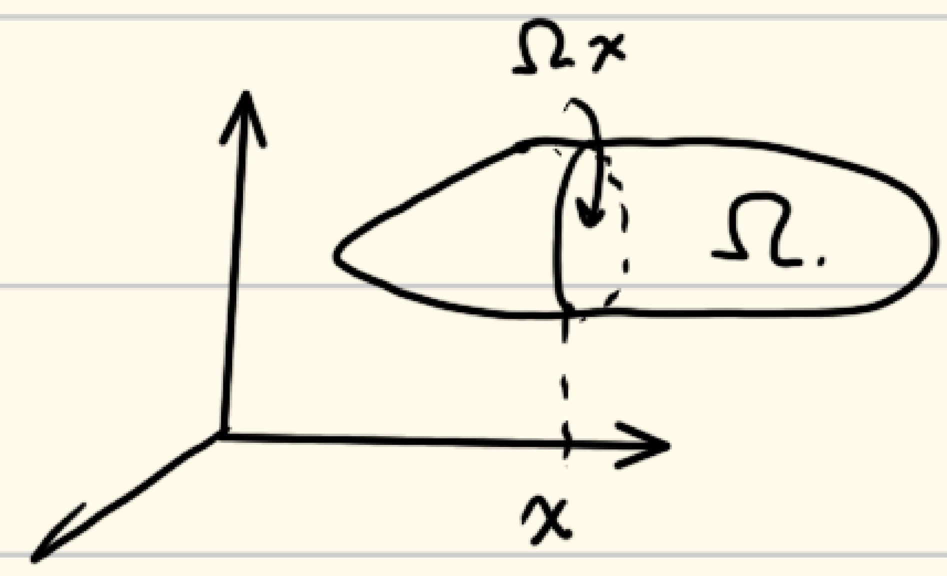
key: ③ 暗示 $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow V(V_1) \le V(V_2)$.

利用 ② 将 ① 切割, 合并. 由 ③ 去逼近.

Definition 称一个图形 S 有体积 $\Longleftrightarrow \sup\limits_{V_1 \subseteq S} \{V(V_1)\} = \inf\limits_{V_2 \supseteq S} \{V(V_2)\}$

V_1, V_2 是多面体.

Theorem



若 Ω 的 $x \in [a,b]$, 截面 Ω_x 可求面积.

$S(x)$ 为 Ω_x 面积. 则体积 $V = \int_a^b S(x)\,dx$.

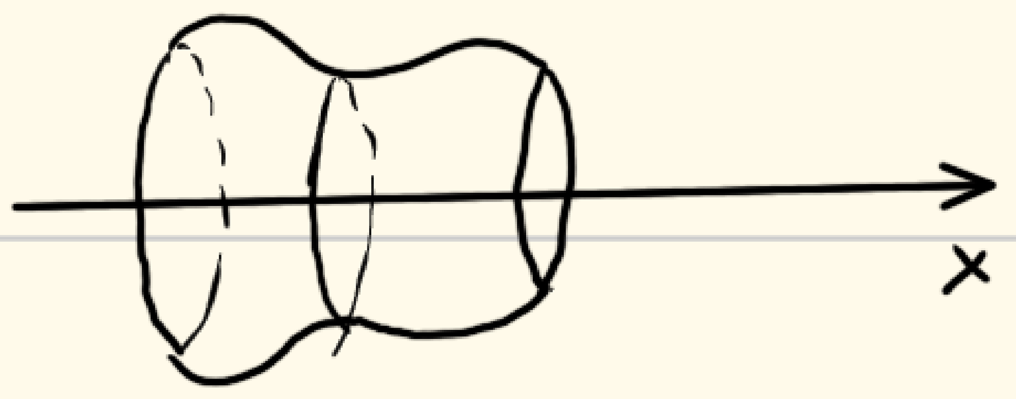
proof: 用体积的达布上(下)和夹出定积分的定义. 而达布上(下)和是多面体的并. 有体积.

Example

椭球体: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, Ω_x: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

$S(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$. $V=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\,dx=\frac{4\pi}{3}abc$

旋转体: $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.



参数方程: $\begin{cases} y=\varphi(t) \\ x=\varphi(t). \end{cases}$ $V=\pi\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt$

侧面积:

Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

圆台侧面积公式: $\Delta S_i=\pi(y_{i-1}+y_i)\cdot|M_{i-1}M_i|$

$$=\pi(y_{i-1}+y_i)\sqrt{(x_{i-1}-x_i)^2+(y_{i-1}-y_i)^2}$$

$$\sum\Delta S_i=\sum\pi(y_{i-1}+y_i)\sqrt{1+\left(\frac{y_{i-1}-y_i}{x_{i-1}-x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$$

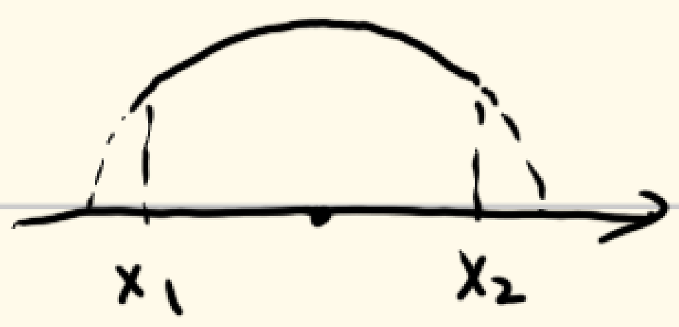
$$=\pi\sum(y_{i-1}+y_i)\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\,\Delta x_i$$

$$=2\pi\sum f(\xi_i)\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\,\Delta x_i+\pi\sum(y_i+y_{i-1}-2f(\xi_i))\sqrt{\ }\,\Delta x_i.$$

当 $|\Delta|\to0$. $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ 0?

第二项 $\le\sup\sqrt{1+f'^2}\cdot\pi\cdot\sum2\omega_i\cdot\Delta x_i\to0$.

Example



"球台"侧面积 $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=2\pi R\int_{x_1}^{x_2}dx=2\pi R(x_2-x_1)$$

$x^2+(y-c)^2=a^2$. $c>a>0$. 绕x轴所得环面面积

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\left(c+\sqrt{a^2-x^2}+c-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=4c\pi\int_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=4c\pi\cdot a\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=4ac\pi\ \arcsin t\Big|_{-1}^{1}=4ac\pi^2$$

参数方程: $x=x(t),\ y=y(t)$. $x\nearrow$.

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\cdot x'(t)\,dt=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

π 是无理数:

proof: 反证 $\pi=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, p,q 互素. $f_n(x)=q^n x^n(p-qx)^n$

是 $2n$ 次整系数多项式, 且 $f^{(i)}(0)=f^{(i)}(\pi)=0$, $i=0,1,\cdots n-1$

且 $f^{(i)}(0)$. $f^{(i)}(\pi)$ $n\le i\le 2n$ 为整数且为 $n!$ 倍数

考虑 $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}f_n(x)\sin x\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}f_n(x)\,d(-\cos x)$

$$=\frac{1}{n!}\left(-f_n\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f_n'\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\left((-f_n\cos x+f_n'\sin x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f_n''\sin x\,dx\right)$$

$=\cdots=$ 都是整数. 又 $I_n>0$. $\Rightarrow I_n\geq 1$

但 $I_n\le\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{2n}}{n!}\cdot\pi\xrightarrow{n\to+\infty}0$ 矛盾!

· 曲线质量

$$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$ $x', y' \in C[\alpha,\beta]$，密度 $\rho(t)\in C[\alpha,\beta]$

求 Γ 质量

$$|\widehat{M_{i-1}M_i}| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,\Delta t_i$$

$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $\quad \widehat{M_{i-1}M_i}$ 的质量 $m_i = \rho_i |\widehat{M_{i-1}M_i}|$

ρ_i 是 $|\widehat{M_{i-1}M_i}|$ 平均密度 $\in [\inf, \sup]$

$$m = \sum m_i = \sum \underbrace{(\rho_i - \rho(\xi_i))}_{\Delta\omega_i}\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2} + \underbrace{\sum \rho(\xi_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}}_{\int \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$$

- 曲线质心

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$ $t\in[\alpha,\beta]$. $\quad \Delta: \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$

设其质心 $(\bar{x},\bar{y})$ $\quad m_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

$$\sum \bar{x}_i m_i = \sum \bar{x}_i\, \rho(\xi_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,\Delta t_i$$

$$= \sum x(\xi_i)\,\rho(\xi_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,\Delta t_i$$

$$+ \sum (\underbrace{\bar{x}_i - x(\xi_i)}_{\Delta\omega_i})\,\rho(\xi_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,\Delta t_i$$

当 $|\Delta|\to 0$. 第一项 $\to \int_\alpha^\beta x\rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

第二项 $\to 0$. $\quad$ key：转化成振幅，用可积性证 $=0$

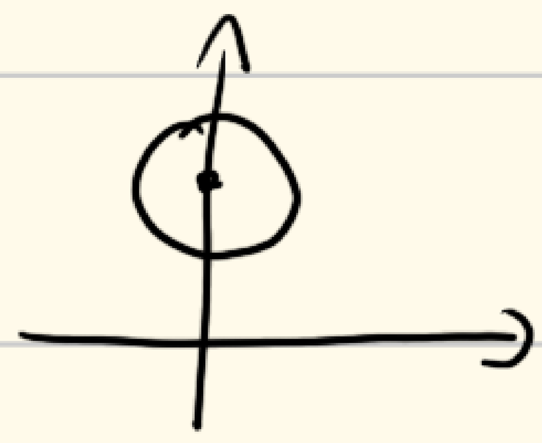
$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta x\rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt} \qquad \bar{y} = \frac{\int_\alpha^\beta y\rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\int_\alpha^\beta \rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}$$

Theorem（古鲁金第一定理）

质心周长 · 曲线长 = 侧面积.

Example

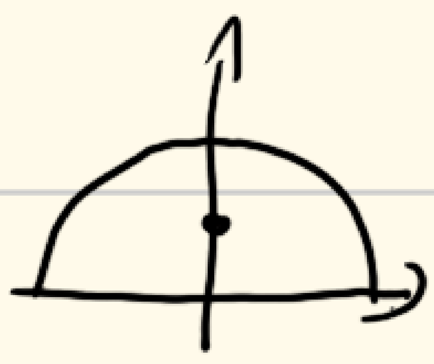
(i) 环面: $(y-c)^2+x^2=a^2$



质心 $(0,c)$ 周长 $2\pi c$. 曲线长 $2\pi a$.

$\Rightarrow$ 侧面积 $=4\pi^2 ac$.

(ii) 球面: 计算半圆的质心 $(0,\bar{y})$

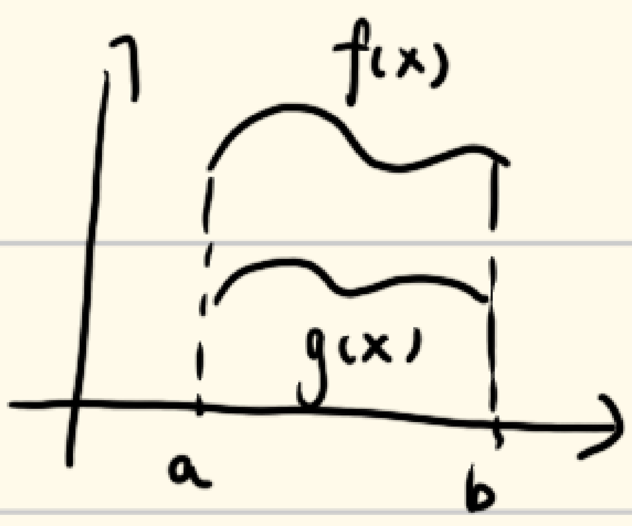


$$2\pi\bar{y}\cdot R\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow \bar{y}=\frac{2}{\pi}R$$

平面图形质心

面密度为1 (避免重积分)

$f(x)\geq g(x)\geq 0$. $x\in[a,b]$ $f,g\in C[a,b]$



$D:\{a\leq x\leq b,\ g(x)\leq y\leq f(x)\}$ $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$D_i=\{x\in[x_{i-1},x_i],\ g\leq y\leq f\}$ 质心 $(\bar{x_i},\bar{y_i})$

质量 $M_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-g(x))\,dx$

总静力矩 $\sum M_i\bar{x_i}=\sum\bar{x_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f-g)\,dx$

$$=\sum\bar{x_i}(f(\xi_i)-g(\xi_i))\Delta x_i$$

$$=\underbrace{\sum x(\xi_i)(f(\xi_i)-g(\xi_i))\Delta x_i}_{=\int_a^b x(f(x)-g(x))dx}+\underbrace{\sum(\bar{x_i}-x(\xi_i))(f-g)\Delta x_i}_{\to 0}$$

$\sum M_i\bar{y_i}=\frac{1}{2}\int_a^b(f^2-g^2)\,dx$

$$\Rightarrow \text{质心}=\left(\frac{\int_a^b x(f-g)\,dx}{\int_a^b(f-g)\,dx},\ \frac{\frac{1}{2}\int_a^b(f^2-g^2)\,dx}{\int_a^b(f-g)\,dx}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\pi \bar{y} \int_a^b (f-g)\,dx = \pi \int_a^b (f^2-g^2)\,dx$$

Theorem (古鲁金第二定理)

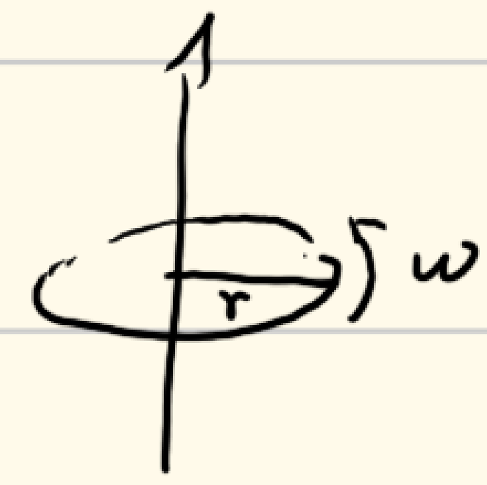
质心周长 × 面积 = 体积

Example

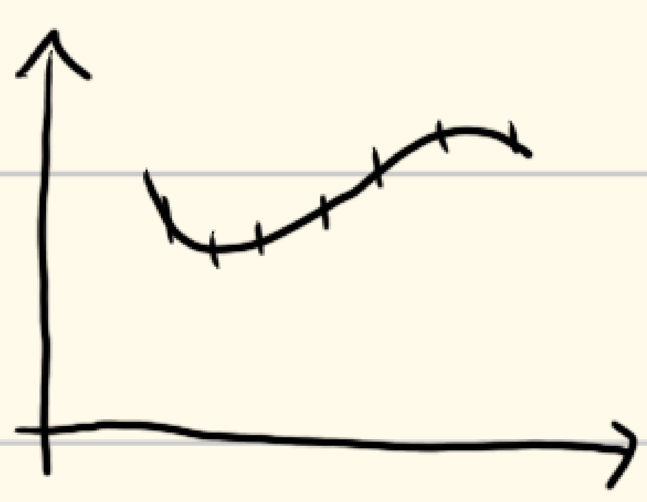
$x^2+(y-a)^2=r^2$ $\quad V = 2a\pi \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2$

转动惯量

$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$



n个点 $m_1, m_2, \cdots, m_n$. 角速度 ω $\quad I_u=\sum m_i r_i^2$



$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

$M_i: (x(t_i), y(t_i))$ $\quad \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 质量 $m_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

关于y轴转动惯量 $x(\eta_i)^2 m_i$ ，总 $=\sum x(\eta_i)^2 m_i$

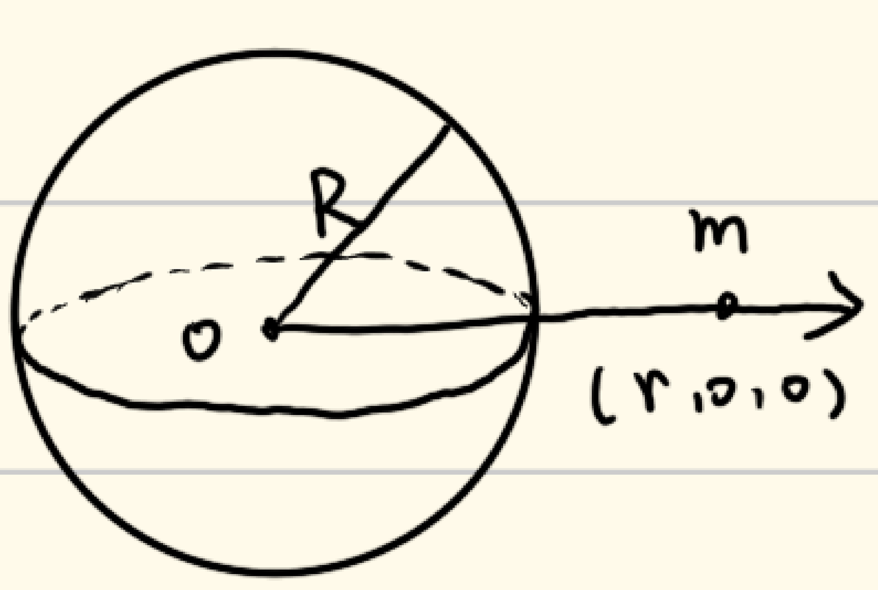
$= \sum x(\eta_i)^2 \rho(\xi_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,\Delta t_i \quad (|\Delta|\to 0)$

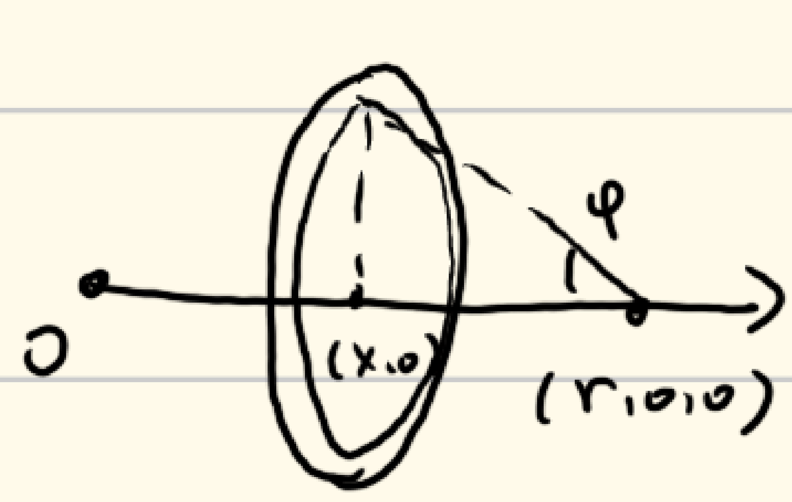
$\to \int_\alpha^\beta x(t)^2 \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

关于x轴转动惯量: $\int_\alpha^\beta y(t)^2\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

引力

球面与质点间的引力:





取一环 m_i：引力为 $\frac{Gmm_i}{(r-x)^2+R^2-x^2}\cos\varphi$，设面密度为 ρ 为常数.

总引力 $= \int_{-R}^{R} 2R\pi\cdot\rho\cdot\frac{Gm}{(r-x)^2+R^2-x^2}\frac{r-x}{\sqrt{(r-x)^2+R^2-x^2}}dx$

$= 2\pi R\rho Gm\int_{-R}^{R}\frac{(r-x)}{(R^2+r^2-2rx)^{\frac{3}{2}}}dx$

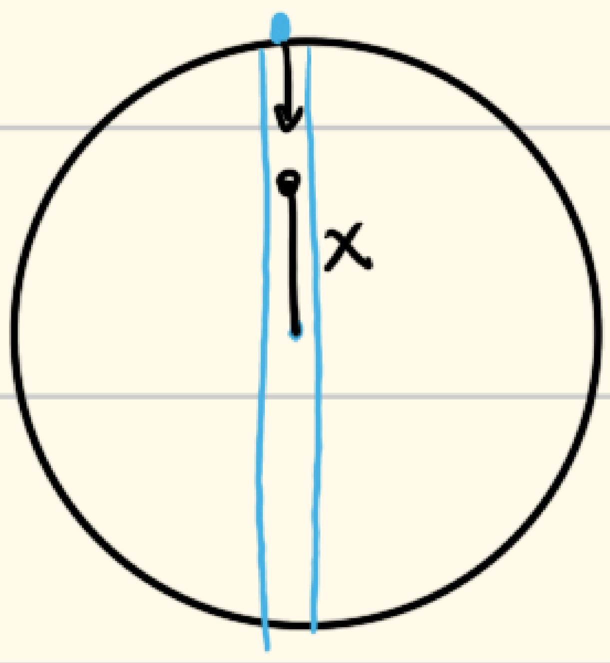
记 $R^2+r^2-2rx=t^2$

$$\text{上式} = C\cdot\int_{|R-r|}^{R+r}\frac{\frac{r^2-R^2+t^2}{2r}\cdot\left(-\frac{t}{r}\right)dt}{t^3}$$

$$= \frac{m\pi R\rho G}{r^2}\left(t-\frac{r^2-R^2}{t}\right)\Big|_{|r-R|}^{r+R}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0<r<R \\ \frac{4\pi R^2 m\rho G}{r^2}, & r>R \end{cases}$$

$4\pi R^2\rho$ 是球面质量，可视作质点于球心



球体落下．$F_引 \propto x$，作简谐运动

5 定积分的近似计算

① $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$

② $\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}$

③ $\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-\frac{1}{2}})\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$

①② 误差：$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{(b-a)^2}{2n}f'(\xi)$

$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} + \frac{(b-a)^2}{2n}f'(\eta)$

证明：$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))dx$

$= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))\,d(x-x_{k-1})$

$$= -\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)\frac{(b-a)^2}{2n^2}$$ (积分中值)

$$= -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$$ (导数介值)

③ 误差: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-\frac{1}{2}} + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$

设 $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f''$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f''$

$$f(x) - f(x_{k-\frac{1}{2}}) = (x - x_{k-\frac{1}{2}}) f'(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(x - x_{k-\frac{1}{2}})^2 f''(\xi_k)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(x_{k-\frac{1}{2}})\right) dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left((x - x_{k-\frac{1}{2}}) f'(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(x - x_{k-\frac{1}{2}})^2 \cdot M_k^2\right) dx$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{k=1}^{n} M_k^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi_1)$$

同理 $\ge \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{k=1}^{n} m_k^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi_2)$

$\Rightarrow \; = \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi)$ for some ξ. (介值性)

④ $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\Delta x = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$

证: $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,d(x - x_k) = f(x_k)\frac{b-a}{n} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x - x_{k-1})\,dx$

$$= f(x_k)\frac{b-a}{n} - \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\,d(x - x_{k-1})^2$$

$$= f(x_k)\frac{b-a}{n} - \frac{1}{2} f'(x_k)\frac{(b-a)^2}{n^2} + \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x - x_{k-1})^2\,dx$$

同理 $= f(x_{k-1})\frac{b-a}{n} + \frac{1}{2} f'(x_{k-1})\frac{(b-a)^2}{n^2} + \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x_k - x)^2\,dx$

相加除以2得: $= \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{4n^2}\left(f'(x_{k-1}) - f'(x_k)\right)$

$$+ \frac{1}{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\left[(x - x_{k-1})^2 + (x_k - x)^2\right] dx$$

全求和 得 误差 $= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\left((x - x_k)^2 + (x - x_{k-1})^2 - \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x - x_k)(x - x_{k+1})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)(x-x_{k-1})$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)$$

$$= -\frac{(b-a)^2}{12n^2} f''(\xi).$$

⑤ 抛物线逼近.

过 x_{k-1}、$x_{k-\frac{1}{2}}$、x_k 处的二次曲线 $Q_k(x) = px^2+qx+r$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} Q_k(x)\,dx = \frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$$= \frac{x_k-x_{k-1}}{6}\left(Q_k(x_k)+Q_k(x_{k-1})+4Q_k(x_{k-\frac{1}{2}})\right)$$

$$= \frac{x_k-x_{k-1}}{6}\left(y_k+y_{k-1}+4y_{k-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_a^b f\,dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_n+4\sum_{k=1}^{n} y_{k-\frac{1}{2}}+2\sum_{k=1}^{n-1} y_k\right)+R_n(x).$$

若 f 四阶可导. $R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi)$

R-S

推广到有界变差函数:

设 $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. $\alpha(x)$ 有界变差 $= \beta(x)-\gamma(x)$: β 与 γ 单调增.

则 $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\beta - \int_a^b f\,d\gamma$

Proposition

设 $f\in C[a,b]$ 或 (f 有界变差且 $\alpha\in C[a,b]$), α 有界变差.

定义 $V_a^x\alpha$ 表示 a 到 x 的全变差. 则有

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,dV$$

特别地，当 $\alpha \nearrow$ 时，$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,d\alpha$

pf：对 $\forall$ 分划 P：$a=x_0<\cdots<x_n=b$

$$-\sum |f(t_k)|\Delta V_k \le S(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)|\cdot|\Delta\alpha_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)|\Delta V_k$$

□

推论：

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \sup|f|\cdot V_a^b\alpha$$

Theorem（分部积分）

f,α 有界变差，f,α 有一个连续，则 $\int_a^b f\,d\alpha = f\alpha\Big|_a^b - \int_a^b \alpha\,df$

Theorem（第二积分中值定理）

· f 单调，α 连续有界变差，

则 $\int_a^b f\,d\alpha = f(a)(\alpha(\xi)-\alpha(a)) + f(b)(\alpha(b)-\alpha(\xi))$

pf：用分部积分：$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha\,df$

$$\overset{\text{第一中值}}{=} f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\alpha(\xi)(f(b)-f(a))$$

Theorem（变量替换公式）

$f,g\in C[a,b]$，g 严格 $\nearrow$，$h=g^{-1}$，$c=g(a)$，$d=g(b)$

则 $\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal{x=h(y)} \int_c^d f(h(y))\,dh(y)$

§广义积分

<u>定义</u>: $f: [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

<u>例</u>: $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \ln A, & p=1 \\ \dfrac{A^{-p+1}-1}{1-p}, & p\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p>1 \\ \text{不存在}, & p\le 1 \end{cases}$$

换元公式: $f \in C[a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta)$, $\varphi(\beta-0) = +\infty$

$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t)$ $\quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

· 非负函数广义积分收敛性.

$f(x) \ge 0$, $x \in [a,+\infty)$, 内闭可积, $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx \nearrow$

只需给 $F(A)$ 找上界. 即可收敛.

· 比较原理

$0 \le f \le g$, $c>0$. 若 $\int_a^\infty g\,dx < \infty$, 则 $\int_a^\infty f\,dx < \infty$

若 $\int_a^\infty f\,dx = +\infty$, 则 $\int_a^\infty g\,dx = +\infty$

<u>Ex</u>: 证明: $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ 收敛. $\left(\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ 收敛}\right)$

Rk: $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty, & p\le 1 \\ <\infty, & p>1 \end{cases}$$

Ex. $f\in C[a,+\infty)$. 单调. $f(+\infty)=0$ 求证: $\int_a^\infty f'\sin^2 x\,dx$. 收敛.

pf: f' 定号, 不妨 $f'\geq 0$, $0\leq \text{Goal}\leq \int_a^\infty f'dx = f(x)\Big|_a^\infty$

$= -f(a) < \infty$.

Ex. 判断 $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4\sin^2 x}$ 收敛性.

pf: $F(n\pi) = \int_0^{n\pi} \frac{x\,dx}{1+x^4\sin^2 x} = \sum_{k=1}^n u_k$, $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x\,dx}{1+x^4\sin^2 x}$

$\geq (k-1)\pi\cdot \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k\pi)^4\sin^2 x} \geq (k-1)\pi\cdot \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k\pi)^4 x^2}$

$= \frac{2(k-1)\pi}{k^2\pi^2} \arctan k^2\pi^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \geq \frac{2}{\pi}\arctan \frac{\pi^3}{2}\cdot \frac{k-1}{k^2} > C_0\cdot \frac{1}{k-1}$

求和无界.

Definition

绝对收敛: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

pf: $0\leq |f|-f\leq 2|f|$. 故 $\int_a^{+\infty} |f|-f\,dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ 收敛.

条件收敛: 不绝敛, 但敛.

Ex. 已知 $f,g\in C^1[a,+\infty)$, $f'\geq 0$, $f(\infty)=0$ g 有界.

判断 $\int_a^\infty fg'dx$ 敛散性:

pf: $\int_a^A fg'dx = \underbrace{fg\Big|_a^A}_{0-f(a)g(a)} - \int_a^A \underbrace{g}_{\text{有界}}\underbrace{f'dx}_{\text{积分有界}}$ $\Rightarrow$ 绝对收敛.

· Cauchy 收敛原理.

$\int_a^{+\infty} f\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists M>a$, 使对 $\forall A>B\geqslant M$,
$\left|\int_B^A f\,dx\right| < \varepsilon$.

Ex. $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$. 内闭可积. $p>0$. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^p dx<\infty$.

求证: $\lim\limits_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx = 0$.

Pf: $|u+v|^p \leqslant 2^{p-1}(|u|^p+|v|^p)$ 　 不妨 $|h|<1$

$\Rightarrow \int_A^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx \leqslant 2^{p-1}\left(\int_A^{\infty}|f(x)|^p dx+\int_{A+1}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)<\varepsilon$.

同理可取 A 使 $\int_{-\infty}^{-A}|f(x+h)-f(x)|^p dx<\varepsilon$.

再关心 $[-A-1,A+1]$ 上分划 $\Delta: -A-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=A+1$

$m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

记 $g(x)=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1})+f(x_{k-1})$ 　 $x\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2\cdots n$.

则 $|f(x)-g(x)|\leqslant M_k-m_k$, $\forall x\in[x_{k-1},x_k]$.

取 Δ 充分细使 $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon^2$.

$\Delta_1:=\{1\leqslant k\leqslant n \mid M_k-m_k\geqslant\varepsilon\}$. 　 $\Delta_2:=\{1\leqslant k\leqslant n\mid M_k-m_k<\varepsilon\}$

$\varepsilon\sum\limits_{k\in\Delta_1}\Delta x_k \leqslant \sum\limits_{k\in\Delta_1}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon^2$

$\Rightarrow \sum\limits_{k\in\Delta_1}\Delta x_k<\varepsilon$.

$\int_{-A-1}^{A+1}|f-g|^p dx = \sum\limits_{k\in\Delta_1}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f-g|^p dx+\sum\limits_{k\in\Delta_2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f-g|^p dx$

$\leqslant$ ⋯ ✓

狄利克雷-阿贝尔判别法

$f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ 内闭可积， f 单调

① (D): $f(+\infty)=0$ ， $G(A)=\int_a^A g\,dx$ 有界.

② (A): f 有界 $\int_0^\infty g\,dx$ 收敛.

记忆：第二中值：$\int_A^B fg\,dx = f(A)\int_A^{\xi} g\,dx + \underline{f(B)\int_{\xi}^{B} g\,dx}$

① $f(B) \to 0$. $\int g\,dx$ 有界

② f 有界. $\int g$ 收敛.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$?

黎曼引理：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b \sin\lambda x\, f(x)\,dx = 0$ for $f\in R[a,b]$.

pf: 对分割：Δ: $a=x_0<\cdots<x_n=b$.

$M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$.

则 $\left|\int_a^b \sin\lambda x\, f(x)\,dx\right| = \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x\,dx\right|$

$\leq \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-m_i)\sin\lambda x\,dx\right| + \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left|\sum_{i=1}^n m_i\sin\lambda x\,dx\right|$

$\leq \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(M_i-m_i)\,dx + \left|\sum_{i=1}^n m_i\cdot\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\Big|_{x_i}^{x_{i-1}}\right|\right)$

$\leq \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left(\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i\right) \to 0.$ □

定义 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}, & \text{else}.\end{cases}$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(f(x)+\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx = \frac{\pi}{2}$$

例.

$f\in C[0,+\infty)$, $\int_0^{\infty}f^2dx<\infty$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

求证 $\frac{g(x)}{x}$ 平方可积. 且 $\int_0^{\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\leq 4\int_0^{\infty}f(x)dx$.

Pf: $\int_0^A g^2(x)/x^2dx = -\int_0^A g^2(x)\,d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{g^2}{x}\Big|_0^A+\int_0^A\frac{1}{x}g\cdot 2g'dx = -\frac{g^2(A)}{A}+2\int_0^A\frac{g}{x}\cdot f\,dx$$

$$\leq 2\left(\int_0^A\frac{g^2}{x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^A f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ □.

瑕积分:

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$. b是瑕点, f内闭可积, 称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 若 $\lim_{A\to b-0}\int_a^A f(x)dx$ 存在.

Theorem

(i) 非负瑕积分. 收敛 $\Leftrightarrow$ 有界

(ii) 非负瑕积分. 比较原理.

例: 求 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$:

$\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 均有限.

Theorem

(i) 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛.

(ii) Cauchy 原理.

(iii) A-D 判别法:

$f, g \in C[a, b)$. f 单调,

① $f(b) = 0$ $\int_a^{b-\varepsilon} g(x) dx$ 有界

或 ② f 有界, $\int_a^b g(x) dx$ 收敛.

则 $\int_a^b f \cdot g \, dx$ 收敛.

(iv) 积分判别法:

$f(x) > 0$. 单减, 连续. $a_n = f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$

级数

Theorem

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$，反之不对.

Theorem

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k-1})$ 收敛

Theorem

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 有界

Theorem

(i) 非负级数，比较定理.

(ii) 设 $a_n > 0$，$b_n > 0$,

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < \infty$，则 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.

(iii) 比值判别法（正项级数）

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. 则 $\sum a_n$ 收敛

$= l > 1$ 则 $\sum a_n$ 发散.

(iv) 根值判别法（正项级数）

$a_n > 0$，$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$，$l < 1$ 则 $\sum a_n < \infty$.

$L>1$ 则 $\sum a_n = +\infty$

Remark: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

(v): 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\cdot\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$.

(vi): 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$.

(vii): 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}$. 则 $\sum a_n < \infty$

若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n^{\frac{1}{\ln n}} > \frac{1}{e}$. 则 $\sum a_n = \infty$

(viii): 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\ln\frac{1}{a_n}/\ln n\right) > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$.

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\ln\frac{1}{a_n}/\ln n\right) < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$.

一般项级数收敛.

1. 绝敛 ⇒ 敛.

2. 交错级数: 若 $a_n \downarrow 0$. 则 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛.

3. Cauchy 原理.

4. D-A 设 a_n 单调, $|B_n| = |\sum\limits_{k=1}^{n} b_k|$ 有界.

$$\left.\begin{array}{ll}(D) & a_n \to 0. \\ (A) & a_n \text{ 有界}, \sum b_n \text{ 收敛}.\end{array}\right\} \text{则 } \sum a_n b_n \text{ 收敛}.$$

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

$x=0$时. 前敛后散.

$x\neq 0$时. $\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

法2: 设 $z=e^{ix}$. $z^n=\cos nx + i\cdot\sin nx$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n = -\ln(1-z) = -\ln(1-\cos x - i\sin x)$$

$$= -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\right) = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})i}\right)$$

$$= -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi-x}{2}i$$

命题

f 在$[1,+\infty)$可导. 且 $\int_1^{\infty}|f'|dx<\infty$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ 敛散性相同.

正项级数可以重排.

$\sum a_n$ 条件收敛. $B\leq A \in [-\infty,+\infty]$

则存在重排 $\sum a_{\sigma(n)}$ 使 $\overline{\lim}\, s_n = A$ $\underline{\lim}\, s_n = B$.

§ 无穷乘积.

$\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k$ 存在且非0.

Property 1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. 不妨 $a_n > 0$.

Property 2. $a_n > 0$ 时. $\prod(1+a_n)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ 收敛.

$\sum a_n^2 < \infty$ 时. $\prod(1+a_n)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ 收敛.

Property 3. $\sum |\ln(1+a_n)| < \infty \Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$

Ex. $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$, $x \neq 0, -1, -2, \cdots$

$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$.

同敛散性: 用 Abel: $\sum a_n$ 与 $\sum a_n b_n$ 同敛散.

去证 b_n 单调有界

$\sin x = 0$ 只有实根 $k\pi$.

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad ??$$

$$(\cos x + i\sin x)^{2n+1} = \cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x.$$

二项式展开 $\Rightarrow$ $\sin(2n+1)x = \sin x\, P_n(\sin^2 x)$. P_n 是 n 阶多项式.

当 $x = \varphi_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 时 P_n 以 $\sin^2\varphi_k$ 为根.

$$\lim_{x\to 0} P_n(\sin^2 x) = P(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 2n+1.$$

$$\Rightarrow P_n(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\varphi_k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = U_m\cdot V_m.$$

$$U_m = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$V_m = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_m = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$1 > \lim_{n\to\infty} V_m \geq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

再令 $m\to\infty$. $V_m\to 1$.

<u>等度连续</u>: $\forall\varepsilon>0$、$\exists\delta>0$ 若 $|x-y|<\delta$. $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. $\forall n$.

<u>Prop</u>: $\{f_n\}$ 等度连续, 且 $f_n(x)\to f(x)$. 则 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$

<u>Prop</u>: $x_0\in[a,b]$, $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $\quad x\in[a,b]\setminus\{x_0\}$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$ 存在. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

推论: $f_n\rightrightarrows f$, $x\in[a,b]$. 若 f_n 在 $x=x_0$ 处连续, 则 f 也在 x_0 处连续.

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$

Prop: $f_n(x)\in C[a,b]$, $f_1(x)\leq\cdots\leq f_n(x)\leq\cdots$, $f_n\to f$.

则 $f_n\rightrightarrows f \iff f\in C[a,b]$.

推论: 写成正项函数级数.

Prop: $f_n: [a,b) \to \mathbb{R}$. $f_n \geq 0$. 关于 x ↗. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq M$. $\forall [a,b)$.

则 $\lim_{x \to b-0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b-0)$

Prop: 一致收敛保可积性

Prop: $f_n \in C^1[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. 已知 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛. $\{f_n'\}$ 一致收敛.

则 $f_n \rightrightarrows f$. 且 $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ → 求导与取极限可交换顺序

1. $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, f_n, g_n 有界: $\Rightarrow f_n g_n \rightrightarrows fg$

2. (M-判别法) 若 $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in I$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 绝对一致收敛.

- $\{f_n(x)\} \in C[a,b]$, 且在至少一点处收敛. 且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使 $\forall n > m > N$.

$f_n(x) - f_m(x)$ 的 Lipschitz 常数 $< \varepsilon$. 则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛.

- 进一步, 若对某个 $x \in [a,b]$, 若 $f_n'(x)$ 存在 且 $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = c$.

则 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = c$.

推论: 可导函数列 $\{f_n(x)\}$, $x \in [a,b]$ 已知 $\exists x_0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在.

且 $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ 则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 且 $f'(x) = g(x)$.

推论: 导函数列一致收敛到导函数列

Def: 初等集: 有限个不交区间的并

$m(E)$: 初等集E的长度和

闭初等集: 有限闭区间的并

闭初等集套定理: A_1有界, $A_{n+1} \subseteq A_n \neq \emptyset$. 则 $\bigcap^{\infty} A_n \neq \emptyset$

Lemma

$\{A_n\}$是有界非空集列, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap^{\infty} A_n = \emptyset$

记 $\alpha_n = \sup\{m(E) \mid E \subset A_n, E\text{为初等集}\}$

则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Lemma

对 $\forall \varepsilon > 0$, $A_n = \{x \in [a,b] \mid \exists i \geq n \text{ 使 } |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

则 $A_{n+1} \subseteq A_n$ 且 $\bigcap A_n = \emptyset$, 由引理 $\alpha_n \to 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使 $n > N$ 时, A_n的任意初等子集E. 有 $m(E) < \varepsilon$

给定 $n \geq N$. 对 $\forall$阶梯函数 $s(x)$: $0 \leq s(x) \leq |f_n(x) - f(x)|$.

$E = \{x \in [a,b] \mid s(x) \geq \varepsilon\}$ 是初等集

$F = [a,b] \setminus E$ 亦初等

$$\int_a^b s(x)dx = \int_E s(x)dx + \int_F s(x)dx$$

$$\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a)$$

勒贝格控制收敛定理.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0. \quad \square$$

推论: $f_n \in R[a,b]$, $|f_n| \le M$. $\lim f_n = f(x)$ 存在.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ 存在.

Pf: 令 $\overline{F} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_a^b f_n(x)\,dx$, $\underline{F} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_a^b f_n(x)\,dx$

取 $f_{n_1}, \cdots f_{n_k} \cdots$ $\quad f_{m_1}, \cdots, f_{m_k} \cdots$

则 $\overline{F} - \underline{F} = \lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b (f_{n_k} - f_{m_k})\,dx$

由 $|f_{n_k} - f_{m_k}| \le 2M$ 有界. $\overset{\text{控收}}{\Rightarrow}$

$= \int_a^b \lim\limits_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{m_k})\,dx = \int_a^b (f-f)\,dx = 0.$

$\Rightarrow \overline{F} = \underline{F} \Rightarrow$ 收敛.

$f_n \in R[a,b]$.

$\lim(\int f_n) \overset{?}{=} \int \lim f_n$

$\exists g \in R[a,b]$

$|f_n| \le g$ 恒成立

Borel 引理

对 $\forall$ 实数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$. 存在 $f \in C^\infty$, $f^{(n)}(0) = a_n$

Pf: by 截断函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Example for: 处处连续但处处不可导.

$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$ $\qquad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n h(4^n x).$

Example for: $[0,1] \to [0,1]^2$ 的满射.

幂级数：收敛半径 $R>0$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

阿贝尔定理：

(i) $(-R, R)$ 内闭一致收敛

(ii) 在 R 处收敛：$(-R, R]$ 内闭一致收敛.

(iii) 在 $-R$ 处收敛：$[-R, R)$ 内闭一致收敛

推论1：$x=x_0+R$ 处收敛 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0+R-0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

推论2：在收敛域连续.

定理：在收敛域取闭子区间，求和号可与积分号交换次序.

定理：在 (x_0-R, x_0+R) 有任意阶导数. 求导可与求和号交换次序.

定理：幂级数在 (x_0-R, x_0+R) 对应函数有泰勒级数，即幂函数本身

定理：一个函数在 x_0 处有泰勒展式. $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. 在 x_0 附近成立.

定理：连续函数可被多项式逼近.

§ 傅利叶级数.

基本三角函数系：$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots$

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$ ： n阶三角多项式

性质：① 周期性 (2π) ② 两两正交.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Theorem

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，以 2π 为周期，且 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为 0.

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒为 0. 保证了 连续函数 → Fourier 级数是单射.

proof：反证. 由连续性，不妨取 $x_0\in\mathbb{R}$. $\delta\in\mathbb{R}_+$，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

处取值均 $>\frac{f(x_0)}{2}=M_0>0$. 局部：正长度区间上有正值

由 Fourier 系数恒零 $\Rightarrow$ $\forall$ 三角多项式 $T(x)$. $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)\,dx=0$

取 $T_0(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta$. $r=\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta>0$.

则 $\forall x\in\left(x_0-\frac{\delta}{2},\ x_0+\frac{\delta}{2}\right)$，$T_0(x)>r+1>1$.

$\forall x\in[x_0-\pi,\ x_0+\pi]\setminus(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，$|T_0(x)|\le 1$.

考虑 $T(x)$ 的 n 次幂 (n 充大)　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的上界：$|f(x)|\le M$.

| 有限 | 无限正 | 有限 | → 矛盾

$x_0-\pi$　$x_0-\delta$　$\frac{\delta}{2}$　$\frac{\delta}{2}$　$x_0+\delta$　$x_0+\pi$.

$$\left|\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta}f(x)T_0^n(x)\,dx+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi}f(x)T_0^n(x)\,dx\right|$$

$$\le\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta}|f(x)||T_0^n(x)|\,dx+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi}|f(x)||T_0^n(x)|$$

$$\le\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta}M\,dx+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi}M\,dx<2\pi M.$$ 有限

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,T_0^n(x)\,dx \geq \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f(x)\,T_0^n(x)\,dx \geq M_0\cdot r^n\delta \to +\infty \quad \text{无限.}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)\,T_0^n(x)\,dx \to +\infty. \quad \text{矛盾!}$$

Example. 设 $f(x) = x \ (-\pi \leq x < \pi)$. 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数

由于 f 奇. $a_n \equiv 0$. $n=0,1,2,\cdots$. 看 $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}$$

故 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx)$

延拓: 奇延拓 $\longrightarrow$ 正弦级数

偶延拓 $\longrightarrow$ 余弦级数.

周期为 $2T$. 换元 $\longrightarrow$ 周期 2π. Fourier 级数.

此时的基本三角函数系: $1, \cos\frac{\pi}{T}x, \sin\frac{\pi}{T}x, \cos\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{2\pi}{T}x \cdots\cdots$

Fourier 级数的敛散性

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos kx\cos ku + \sin kx\sin ku)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}\,dx \qquad \text{作换元 } t=u-x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Definition

记 $D_n(t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ 为 Dirichlet 核

$\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt$ 为 $f(x)$ 的 Dirichlet 积分　考虑 $n\to+\infty$ 时收敛到的位置

特别取 $f\equiv 1$ 有 $\int_0^{2\pi}D_n(t)\,dt=1$.

下面考虑 $\{S_n(x_0)\}$ 是否以 $S_0=f(x_0)$ 为极限.

$$S_n(x_0)-S_0=\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0)D_n(t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\cdot\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt.$$

$$=\int_0^{\pi}G(t)\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})t\cdot dt.$$

Theorem （黎曼-勒贝格引理）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 或 有瑕点时绝对可积，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0.$$

有了引理后观察 $\int_0^{\pi}G(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$ ．$\forall\varepsilon>0$，$G(t)$ 在 $[\varepsilon,\pi]$ 上可积.

当 $n\to+\infty$ 时必取 0．我们只关心 t 在 0 附近的表现．得到以下定理：

（黎曼局部化定理）设 $f(x)$ 周期 2π，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处敛散性只与 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 取值相关．$\forall\delta>0$.

引理：$\lim_{t\to0}\left(\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{t}\right)=0$.

引理：$\int_0^{\delta}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}f(t)\,dt$ 与 $\int_0^{\delta}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}f(t)\,dt$ 在 $n\to\infty$ 时

具有相同的敛散性．取 $\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}, & t\neq0\\ 0, & t=0.\end{cases}$　φ 连续 $\Rightarrow f(t)\varphi(t)$ 可积 或…，利用黎曼-勒贝格.

推论：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$　　令 $f(x) \equiv 1$.

Fourier 级数的收敛判别法

起点：$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = x_0$ 收敛到 S_0 的充要条件是对充分小的 $\delta > 0$,

有 $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{t} \sin(n+\frac{1}{2})t \, dt = 0$.

Case 1：$f(x)$ 左可导，右可导　　设 S_1 是左极限，S_2 是右极限.

原式 $= \lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \left(\frac{f(x_0+t) - S_2}{t} + \frac{f(x_0-t) - S_1}{t} \right) \sin(n+\frac{1}{2})t \, dt$

在 $t=0$ 处均有定义 $\Rightarrow$ 非瑕点 $\xrightarrow{\text{黎勒}}$ $=0$.

由此得到：

Theorem

设 $f(x)$ 周期 2π，$[-\pi, \pi]$ 分段可微，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

我们看到 $\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{t}$ 可积或瑕绝可积时 Fourier 收敛.

Theorem（Dini 定理）

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

并对于 $x_0 \in [-\pi, \pi]$，$\exists \delta > 0$，使 $\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < +\infty$.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 S_0.

Theorem (李普希茨定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

且 $f(x)$ 在 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 时满足 α-赫尔德连续性. 即存在 $L>0$, $\delta>0$.

使得对于 $x\in U(x_0,\delta)$, $|f(x_0+t)-f(x_0)|\le L|t|^\alpha$

Pf: 由 $\alpha>0$, $\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}dt \le \int_0^\delta \frac{L}{t^{1-\alpha}}dt < +\infty$

狄利克雷定理:

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

再设 x_0 不是瑕点，且存在 $\delta_0>0$，使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_0, x_0)$ 及 $(x_0, x_0+\delta)$ 分别单调.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛到 $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

总结: 设 $f(x)$ 周期 2π，且满足以下条件之一:

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段单调

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段可微.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

魏尔斯特拉斯定理.

第一定理: $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 可被多项式逼近.

第二定理: $f(x)\in C(\mathbb{R})$, $f(x)$ 周期为 2π. 则 $f(x)$ 可被三角多项式逼近.

$y_n=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 比 x_n 有更好的收敛性 (健壮).

取这里三角多项式列为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的算数平均.

推论：$f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐点收敛，则级数收敛到 $f(x)$ 上。

$$f(x) = \lim S_n^*(x) = \lim S_n(x) = g(x)$$

三角逼近 Fourier 级数 逐点收敛到

$y_n = \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$ x_n

均方收敛

平方可积：$f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分收敛。对这样的 f 有以下定义：

定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\,dx = 0$. 称 $\{f_n(x)\}$ 均方收敛于 $f(x)$

- $|f(x)| \le \frac{1}{2}(f^2(x)+1)$. 故有瑕点时 f 平方可积 $\Rightarrow$ 绝对可积
- $|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}$

$(f(x)+g(x))^2 \le 2(|f(x)|^2+|g(x)|^2)$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ 平方可积函数类 保加法、乘法。

定义平均偏差 $\Delta_n = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$，其中 $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]}_{\alpha_0=a_0,\ \alpha_k=a_k,\ \beta_k=b_k\text{ 时误差最小}} - \frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

≥ 0.

Theorem（Fourier 级数最佳逼近）.

用 n 次三角多项式逼近 $f(x)$ 时，均方误差意义下 Fourier 级数给出的系数最棒！

Theorem

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积或有瑕点时平方可积，则对 $\{S_n(x)\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx = 0.$$

$S_n(x)$ 是固定 deg 后的最佳多项式。只要有逼近的多项式到 $T_{n_i}(x)$.（$\deg = n_i$）.

可用 $S_{n_i}(x)$ 作为误差的置信下界 $\to 0$.

定理（帕塞瓦尔等式）

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积、或有瑕点时平方可积，则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

pf: $0 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2 < \varepsilon$

由此可知，并不是任一个三角级数都可以写成某个平方可积函数的 Fourier 级数.

推论（广义帕塞瓦尔等式）

设 f, g 在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，并设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$g(x)\sim\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$

则 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)$

一致收敛性

定理

设 f 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 可导，且 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则 $f(x)$ Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$.

逐项微分：　$f''(x)$ 存在且 $[-\pi,\pi]$ 可积

逐项积分：　$f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 可积.　利用帕塞瓦尔 + 分段线性函数去证.

Note: 若 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n(1-\cos nx)}{n}\right]$$