$\int_a^b f(t,x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$ 定义了 $t$ 的函数

## 1、含参变元的常义积分

$f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 连续，$D\subseteq\mathbb{R}$，考察 $I(t)=\int_a^b f(t,x)dx$ 与 $J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)dx$

(连续性) 定理1：$f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 一致连续 $\Rightarrow$ $I(t)$ 在 $D$ 连续，$J(t,u,v)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$ 连续 （$D=[\alpha,\beta]$ 情形）

(可微性) 定理2：$f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续可微，则 $I(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续可微，$\frac{dI}{dt}=\int_a^b\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dx$

$J(t,u,v)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$ 连续可微并且有 $\frac{\partial J}{\partial t}=\int_u^v\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$，$\frac{\partial J}{\partial u}=-f(t,u)$，$\frac{\partial J}{\partial v}=f(t,v)$

定理3：设 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 连续，则 $\int_\alpha^\beta I(t)dt=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,t)dxdt=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dt\right)dx$ 交换积分次序

其实是重积分

## 2、一致收敛性的讨论

定义：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $u\in E$，$0<|u-u_0|<\delta$，就有 $\sup_{t\in D}|F(t,u)-\varphi(t)|<\varepsilon$，我们说当 $u$ 沿 $E\to u_0$ 时

$F(t,u)\rightrightarrows\varphi(t)$ 一致收敛 类比函数列，$u_0=+\infty$，$D=\mathbb{N}^*$ $n\to+\infty$ 时有 $\lim f_n(x)=f(x)$

定理1.（Cauchy列）$F(t,u)\rightrightarrows\varphi(t)$ 等价于：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $u,u'\in E$，$0<|u-u_0|<\delta$，$0<|u'-u_0|<\delta$

就有 $\sup_{t\in D}|F(t,u)-F(t,u')|<\varepsilon$

定理2.（序列式定义的等价性）$F(t,u)\rightrightarrows\varphi(t)$ 等价于：对于 $E\setminus\{u_0\}$ 任意满足 $u_n\to u_0$ 的序列 $\{u_n\}$，$\varphi_n(t)=F(t,u_n)$

在 $D$ 上一致收敛于极限函数 $\varphi(t)$ （构造了与函数极限的 bridge！）

定理3.（连续+一致收敛 $\Rightarrow$ 极限函数连续）$\forall u\in E$，$F(u,t)$ 对 $t$ 连续 且 $u\to u_0$ 时 $F(u,t)\rightrightarrows\varphi(t)$

则 $\varphi(t)$ 连续 连续的函数列：index $=u$.

定理4.（微分性质）若 a. $F(t,u)$ 连续可微，$\forall u\in E$ b. $u\to u_0$ 时 $F(t,u)\to\varphi(t)$ c. $u\to u_0$ 时 $F'(t,u)\to\psi(t)$

则 $\varphi(t)$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上连续可微且 $\varphi'(t)=\psi(t)$

定理5（积分性质）若 $F(u,t)$ 对 $t$ 连续，$\forall u\in E$ 且 $F(t,u)\overset{u\to u_0}{\rightrightarrows}\varphi(t)$，则 $\lim_{u\to u_0}\int_\alpha^\beta F(t,u)dt=\int_\alpha^\beta\varphi(t)dt$

定理6（迪尼定理推广）若 $F(t,u)\xrightarrow{u\to u_0}\varphi(t)$，a. $\forall t\in D$ 取定，$F(t,u)$ 关于 $u$ $\nearrow$ b. $\forall u\in E$ 取定，$F(u,t)$ 关于 $t$ 连续

c. $\varphi(t)$ 在 $D$ 上连续，则 $u\to u_0$ 时 $F(t,u)\rightrightarrows\varphi(t)$

## 3、含参变元的广义积分

定义：仅考虑 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$．记 $F(t,u)=\int_c^u f(t,x)dx$，$u>c$．当 $u\to+\infty$ 时，$F(t,u)$ 对 $t\in D$

一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)=\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$，我们说 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 对 $t\in D$ 一致收敛

将上一讲内容一股脑搬来：

定理1（一致收敛的Cauchy原理）设 $f(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续 则 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\Delta>c$，

只要 $u'>u>\Delta$，$\left|\int_u^{u'}f(t,x)dx\right|<\varepsilon$，$\forall t\in D$

定理2（序列式定义）⋯等价于：对于满足 $u_n>c$，$u_n\to+\infty$ 的任意序列 $\{u_n\}$，$\varphi_n(t)=\int_c^{u_n}f(t,x)dx$ 一致收敛

定理3（连续性）$f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$ 连续且 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 对 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则 $\varphi(t)=\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$

在 $[\alpha,\beta]$ 连续

定理4（可微性）设 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$ 连续可微，$\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 对 $t\in[\alpha,\beta]$ 收敛于 $\varphi(t)$

$\int_c^{+\infty}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dx$ 对 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则 $\varphi(t)$ 连续可微且 $\varphi'(t)=\int_c^{+\infty}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dx$

定理5（积分顺序）$\int_c^{+\infty}f(t,x)dx\rightrightarrows\varphi(t)$，$f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$ 连续，则 $\int_\alpha^\beta\varphi(t)dt=\int_c^{+\infty}(\int_\alpha^\beta f dt)dx$

定理6（迪尼推广）$f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$ 连续且非负，且 $\varphi(t)=\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛且在 $[\alpha,\beta]$ 连续

则 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛

以下考虑2个广义积分交换次序的问题

定理7. $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[b,+\infty)$ 连续且非负，若 $\forall A>a$，$\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in[a,A]$ 一致收敛

$\forall B>b$，$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 对 $y\in[b,B]$ 一致收敛，则 $\int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty}f(x,y)dy=\int_b^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$

等号一端的积分收敛，则另一端积分收敛且相等.

推论：设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[b,+\infty)$ 连续且非负，若 $\varphi(x)=\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$，$\psi(x)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 均连续，也成立！

最终考虑 $f(x)$ 不恒非负的情况

定理8 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[b,+\infty)$ 连续，$\forall A>a$，$\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in[a,A]$ 一致收敛

$\forall B>b$，$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 对 $y\in[b,B]$ 一致收敛，$\int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty}|f(x,y)|dy<+\infty$（或 $x,y$ 互换）

则 $\int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty}f(x,y)dy=\int_b^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$

以下考虑判定广义积分一致收敛性的一些常用判别法.

1. 魏尔斯特拉斯判别法

若 $f(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续. $g(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 连续且 $|f(t,x)|\le g(x)$，$\forall t\in D$，$x\in[c,+\infty)$

则若 $\int_c^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛

2. 狄利克雷判别法

设 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续，若 (i) $\forall t\in D$ 给定，$f(t,x)$ 关于 $x$ 单调收敛至 $0$，$x\to+\infty$

(ii) $\int_c^u g(t,x)dx$ 对 $t,u$ 一致有界，则 $\int_c^{+\infty}f(t,x)g(t,x)dx$ 对 $t\in D$ 一致收敛

3. 阿贝尔判别法

设 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续，若 (i) $\forall t\in D$ 给定，$f(t,x)$ 关于 $x$ 单调有界，$x\to+\infty$

(ii) $\int_c^{+\infty}g(t,x)dx$ 对 $t\in D$ 一致收敛，则 $\int_c^{+\infty}f(t,x)g(t,x)dx$ 对 $t\in D$ 一致收敛