

M 是交换环 R 的极大理想, N 是某理想

① R/N 中极大理想与 R 中极大理想一一对应.

理想有对应, 包含关系在 R 与 R/M 中等价

② (0) 是极大理想 $\Leftrightarrow R$ 是域 (关键在有逆)

(\Leftarrow) 任一非 (0) 理想 M 取非零元 $a, a^{-1}a=1 \in M \Rightarrow M=R$

(\Rightarrow) 任一非零元 $a, Ra \neq (0) \Rightarrow Ra=R \Rightarrow \exists b, ab=1 \in Ra$.

有逆的交换环 \Rightarrow 域

③ M 是极大理想 $\Leftrightarrow (0)$ 是 R/M 极大理想 $\Leftrightarrow R/M$ 是域



review:

整环: 无零因子的交换环

体: 构成乘法群

域: 构成乘法交换群

P 是交换环 R 中的一个素理想, N 是某理想

① 理想 P 是素理想 $\Leftrightarrow R/P$ 是整环

前者 $\Leftrightarrow \forall ab \in P \Rightarrow a \in P$ 或 $b \in P$

$\Leftrightarrow \forall \bar{a}\bar{b} \in (0) \Rightarrow \bar{a} \in (0)$ 或 $\bar{b} \in (0)$

\Leftrightarrow 后者.

② R 是整环 $\Leftrightarrow (0)$ 是素理想.

在①中含 $P=(0), R/(0)=R$.

③ R 中含 N 素理想与 R/N 中素理想一一对应

设 $N \subseteq P, P$ 是理想 $\Rightarrow R/P = R/N/P/N$

P 素理想 $\Leftrightarrow R/P$ 整环 $\Leftrightarrow R/N/P/N$ 整环

$\Leftrightarrow P/N$ 素理想. 此即对应.

任何元素有逆 \Rightarrow 无零因子.

反之不一定成立 (整环)