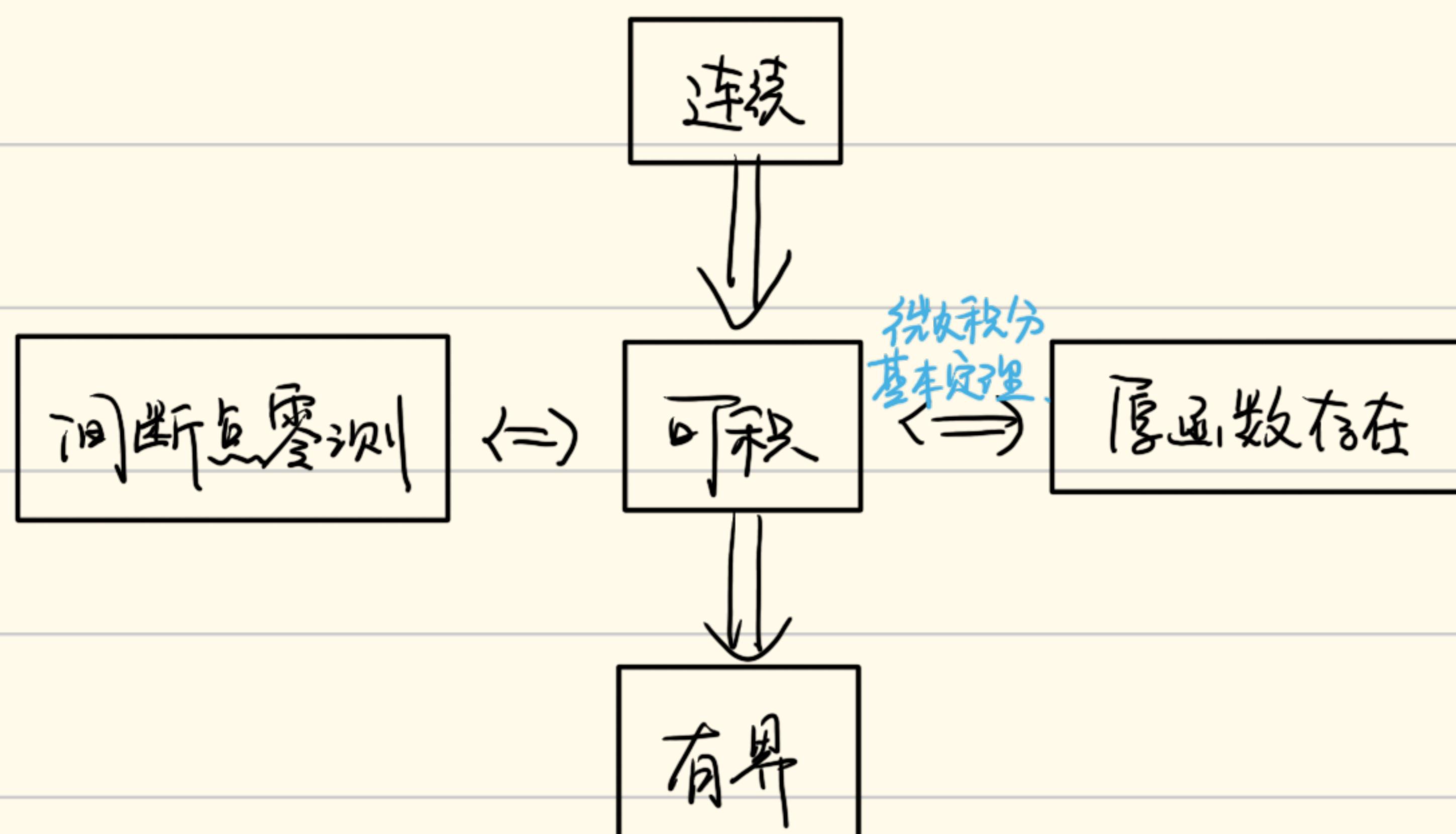


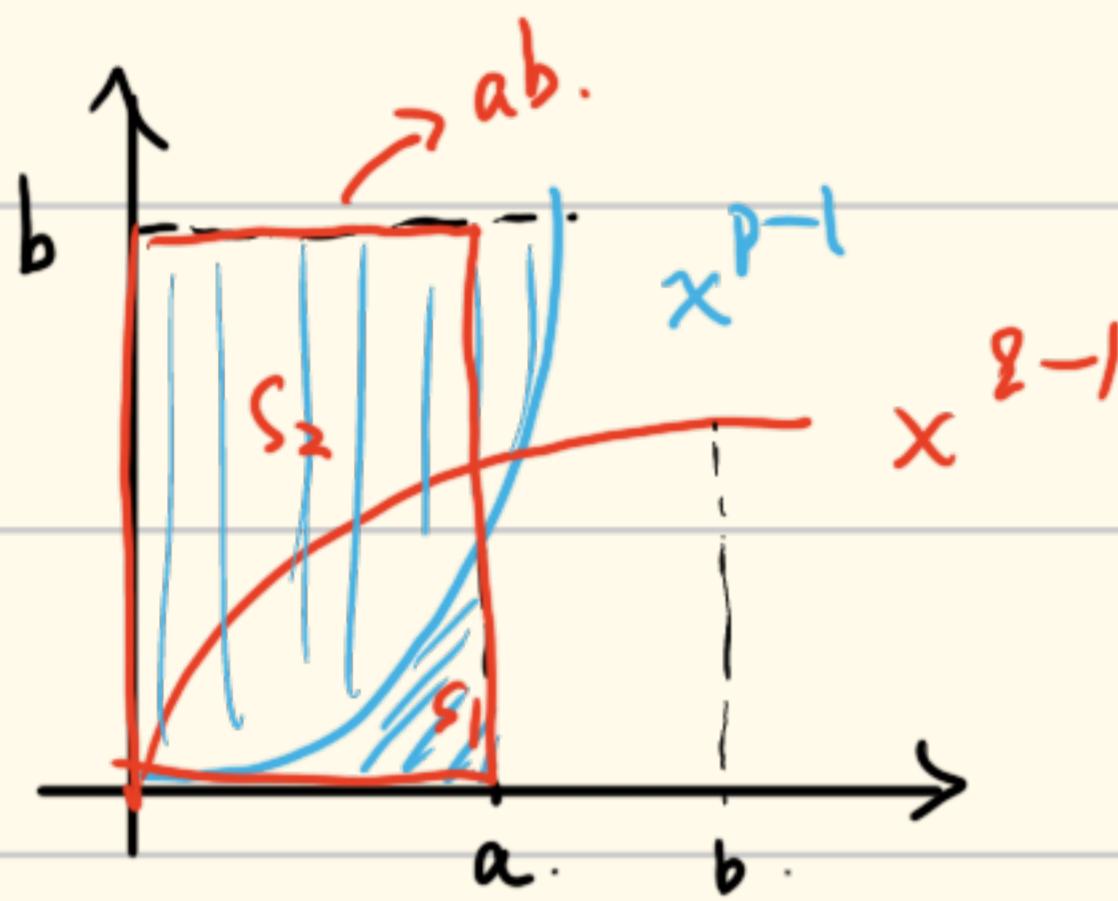
可积性问题



2.17 定积分的应用

曲线围成的面积

Example $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a, b > 0$. 证明: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$



$$p+q=pq \Leftrightarrow (p-1)(q-1)=1$$

$$S_1 = \int_a^b x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_a^b x^{q-1} dx = \frac{b^q}{q}$$

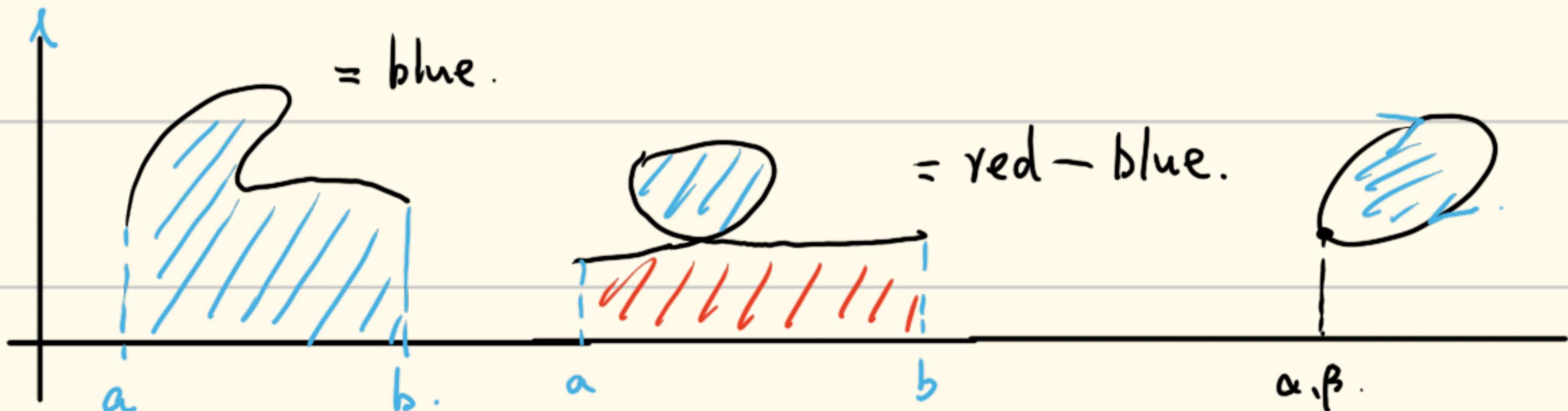
Theorem

$y = f(x), x \in [a, b]$, 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$

给出, $f(x)$ 连续. $x'(t)$ 存在 (除有限点) $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$.

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta y(t) dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt.$$

几何直观:



简单用曲线时 ($x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta)$).

$$\text{面积 } S = \left| \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt \right| =$$

$$\int_\alpha^\beta y \cdot dx = x \cdot y \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta x \cdot dy = - \int_\alpha^\beta x \cdot dy.$$

$$\text{故可写为 } S = \frac{1}{2} \left| \int_\alpha^\beta (x'y - xy') dt \right|$$

Example

(I) 椭圆面积: $x = a \cos t, y = b \sin t, a, b > 0, t \in [0, 2\pi]$

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t - ab \cos^2 t) dt \right| = ab \cdot \pi$$

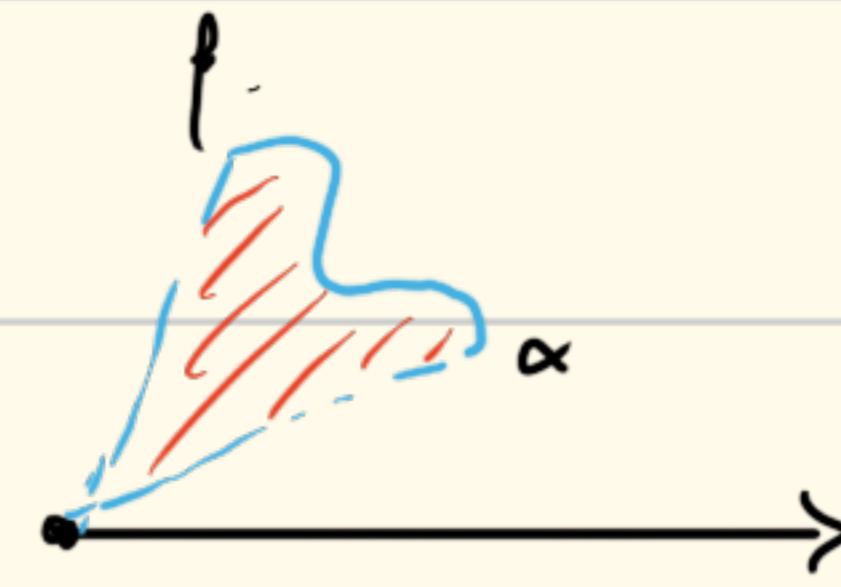
(II) 星形线面积: $\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} a \cos^3 t \right| = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

Proposition (极坐标)

$r = f(\theta)$, f 连续. 计算扇形面积.

设分割 $\Delta: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$.



$$\text{面积} \approx \sum_{n=1}^n \frac{1}{2} f(\theta_{n-1})^2 (\theta_n - \theta_{n-1}) \quad \text{全 } n \rightarrow +\infty.$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

Example

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta. \quad \text{双纽线}$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

曲线的弧长

用“内接折线”来逼近.

$$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta, \quad M_i = (x(t_i), y(t_i))$$

$$\text{折线: } \overline{\cup M_{i-1} M_i} \quad \text{长度: } \sum_{i=1}^n |M_{i-1} M_i|$$

称曲线 S 可求长. 若 $\sup_{\Delta} \{ \text{折线长} \} < +\infty$. 则定义 $\sup_{\Delta} \{ \text{折线长} \}$

为曲线弧长. Question: 什么样的曲线可求长?

• 有界变差函数. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

$$V_{\Delta} = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \quad V_{[a, b]} = \sup_{\Delta} \{ V_{\Delta} \}.$$

Definition 若全变差 $V_{[a,b]} < +\infty$, f 称为有界变差.

Example 单调函数是有界变差. $V_{[a,b]} = |f(b) - f(a)| < +\infty$

保有界变差: 取和、差、绝对值. $V_{|f|} \leq V_f$, $V_{f+g} \leq V_f + V_g$

Theorem $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

有界变差函数的充要条件 是两个单增函数的差.

Proof: 充分显然. 下证必要. 设 f 有界变差.

定义 $V_f(x) = V_{f,[a,x]}$ 是递增的. 令 $g = V_f(x) - f(x)$

我们宣称 g 单调不减. 从而 $f(x) = V_f(x) - g(x)$ (证毕)

$$\begin{aligned} \text{事实上 } g(x_2) - g(x_1) &= V_f[x_1, x_2] - V_f[a, x_1] - (f(x_2) - f(x_1)) \\ &= V_f[x_1, x_2] - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0. \quad (x_2 \geq x_1) \end{aligned}$$

Property 由于单调函数几乎处处可导. 则有界变差函数几乎处处可导.

且间断点均为第一类间断点.

连续 \Rightarrow 有界变差. $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{else} \end{cases}$ 在 $[0,1]$.

$$\text{取 } x_i = \frac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi}.$$

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{(i+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{(i-\frac{1}{2})\pi} \text{ 调和级数.}$$

n 充分大即可无界.

李氏连续 \Rightarrow 有界变差

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum |x_i - x_{i-1}| = L(b-a)$$

Answer: 连续曲线可求长 $\Leftrightarrow x(t)$ 与 $y(t)$ 均为有界变差函数.

$$\text{proof: } V_\Delta(x(t)) = \sum |x(t_i) - x(t_{i-1})| \leq \sum |M_i M_{i-1}| < +\infty.$$

$$V_\Delta(y^{(t)}) = \sum |y^{(t_i)} - y^{(t_{i-1})}| \leq \sum |M_i M_{i-1}| < +\infty$$

$$\begin{aligned} \sum |M_i M_{i-1}| &\leq \sum |x^{(t_i)} - x^{(t_{i-1})}| + |y^{(t_i)} - y^{(t_{i-1})}| \\ &= V_\Delta(x^{(t)}) + V_\Delta(y^{(t)}) < +\infty. \end{aligned}$$

n 维曲线可积 \Leftrightarrow 每个分量的函数是有界变差函数.

Proposition.

$x(t), y(t)$ 可导, x', y' 可积, 则

$$\text{弧长 } |\gamma| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Proof: 注意到, 利用微积分中值定理

$$|M_i M_{i-1}| = \sqrt{x'(\xi_i)^2 \Delta t_i^2 + y'(\eta_i)^2 \Delta t_i^2}$$

$$= \Delta t_i \cdot \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \quad \text{S, y 不一样}$$

$$= \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \cdot \Delta t_i + (\overline{\dots} - \overline{\dots}) \Delta t_i$$

↓
Riemann 和

↓
去证 $\rightarrow 0$.

$$\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\eta_i)^2 + y'(\eta_i)^2} = \frac{x'(\xi_i)^2 - x'(\eta_i)^2}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{|x'(\xi_i) + x'(\eta_i)|}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} \cdot |x'(\xi_i) - x'(\eta_i)| \leq |x'(\xi_i) - x'(\eta_i)|$$

$$\leq \sup_{t_1, t_2} |x'(t_1) - x'(t_2)| \quad \text{再乘以 } \Delta t_i \text{ 即 } \sum w_i \cdot \Delta t_i$$

由 $x'(t)$ 可积知 $= 0$.

弧长公式

直角坐标系: $y = f(x), x \in [a, b]$. $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

极坐标系: $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

Example

$$1) y = \frac{x^2}{2}, x \in [0, t]. l = \int_0^t \sqrt{1+x^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) \Big|_0^t \\ = \frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2})$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \quad b > a > 0. \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = b \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}$$

$$l = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \quad \text{椭圆积分.}$$

$$3) r = a\theta, \theta \in [0, t], a > 0. \quad l = \int_0^t \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} dt = \frac{a}{2} (t)$$

等周不等式

设 Γ 是周长 l 的简单可求长的闭曲线, A 是其所围的面积.

$$\text{则 } l^2 \geq 4\pi A$$

Proof: 我们对 Γ 是光滑曲线证明. 一般曲线可用光滑曲线逼近.

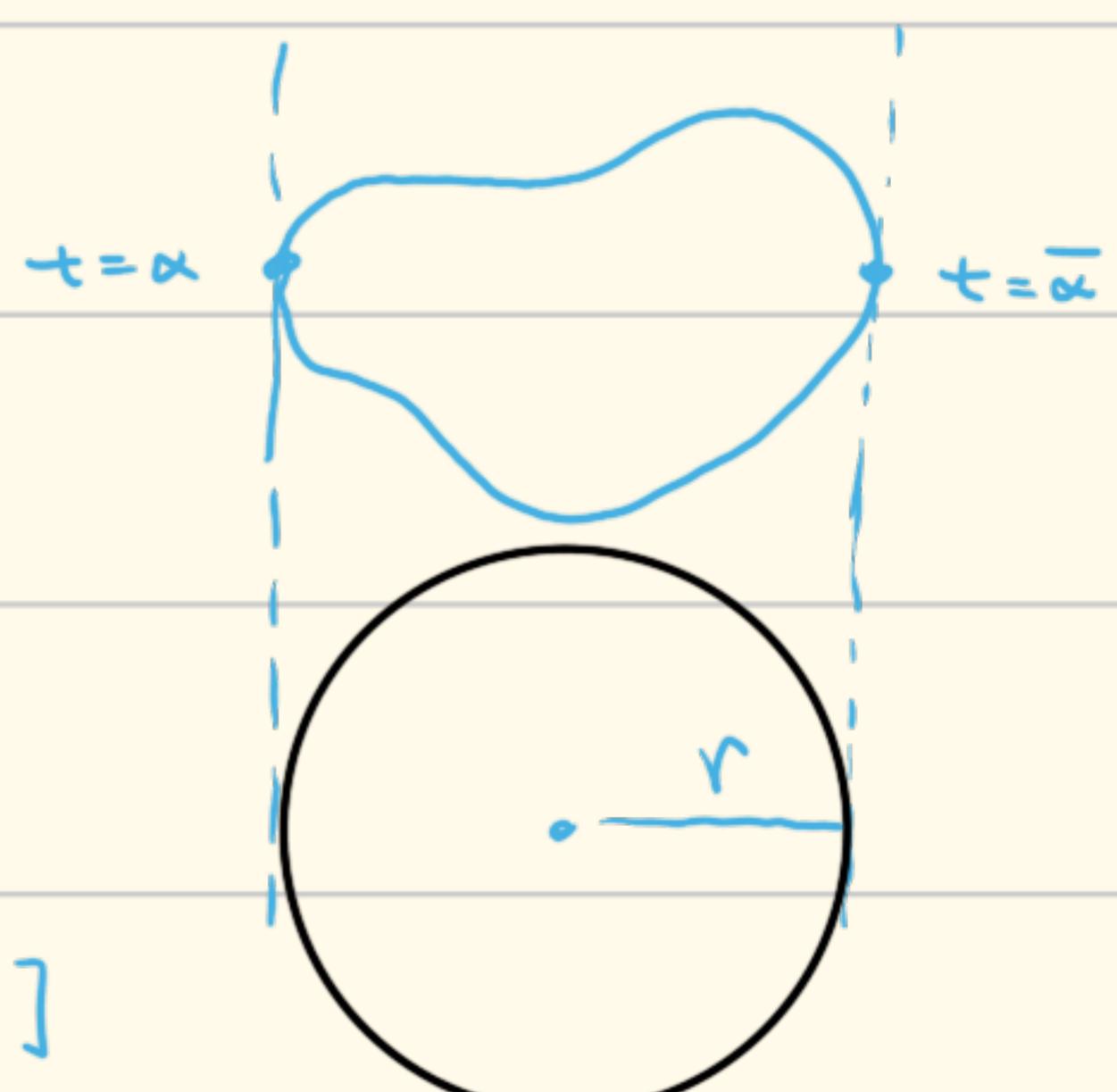
$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad x(\alpha) = x(\beta), \quad y(\alpha) = y(\beta)$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + y^2} dt \quad \text{是定值.}$$

$$\text{面积 } A = \int_{\alpha}^{\beta} xy' dt$$

$$\text{不妨 } x(\alpha) + x(\beta) = 0.$$

$$\text{该圆的参数方程 } \bar{y}(t) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x(t)^2}, & t \in [\alpha, \bar{\alpha}] \\ \sqrt{r^2 - x(t)^2}, & t \in [\bar{\alpha}, \beta] \end{cases}$$



$$\pi r^2 = - \int_{\alpha}^{\beta} \bar{y}(t) x'(t) dt$$

$$2\sqrt{A\pi r^2} \leq A + \pi r^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - \bar{y}x') dt$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} \cdot \sqrt{y'^2 + x'^2} dt$$

$$= rl$$

消r证毕.

3. 多面体体积

设 \mathcal{V} 是 \mathbb{R}^3 全体多面体组成的集合. 体积: \mathcal{V} 到 $\mathbb{R}_{>0}$ 的映射 V .

满足: ① $V(\text{单位正方体}) = 1$

② 若 V_1 与 V_2 全等, $V(V_1) = V(V_2)$.

③ 若 V_1 与 V_2 相邻, $V(V_1 \cup V_2) = V(V_1) + V(V_2)$.

为什么这即所谓的体积?

key: ② 暗示 $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow V(V_1) \leq V(V_2)$.

利用 ② 将 ① 切割, 合并. 因 ③ 去逼近.

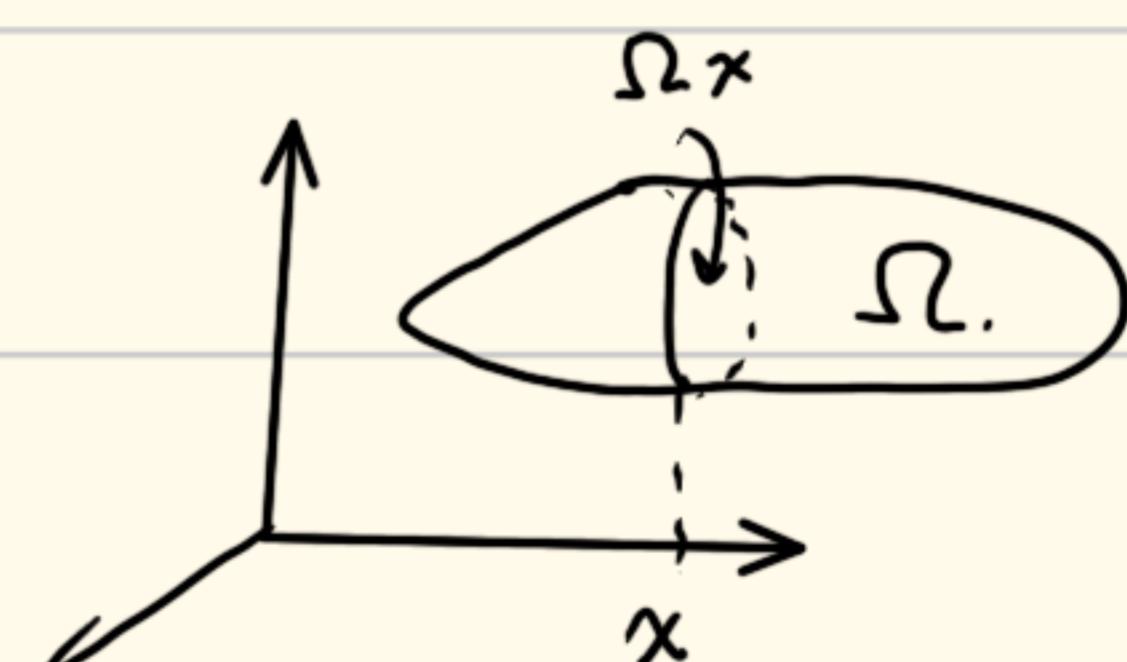
Definition 称一个图形 S 有体积 $\Leftrightarrow \sup_{V_1 \subseteq S} \{V(V_1)\} = \inf_{V_2 \supseteq S} \{V(V_2)\}$

V_1, V_2 是多面体.

Theorem

若 Ω 的 $x \in [a, b]$, 截面 Ω_x 可求面积.

$s(x)$ 为 Ω_x 面积. 则 体积 $V = \int_a^b s(x) dx$



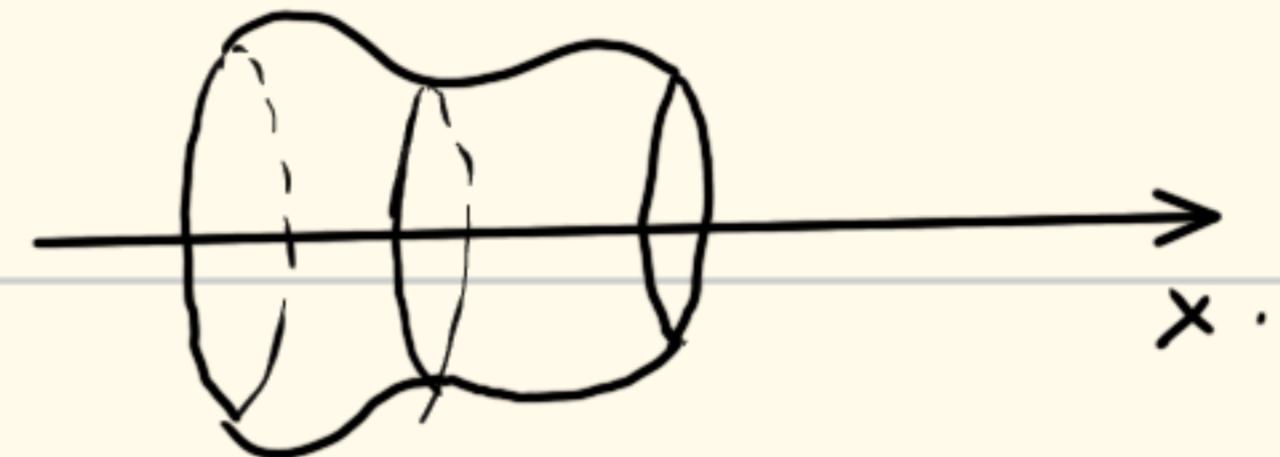
Proof: 用体积的达布上(下)和来出定积分的定义. 而达布上(下)和是多面体的并. 有体积.

Example

椭球体: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\Sigma_x: \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$$S(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). V = \int_{-a}^a \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4\pi}{3} abc$$

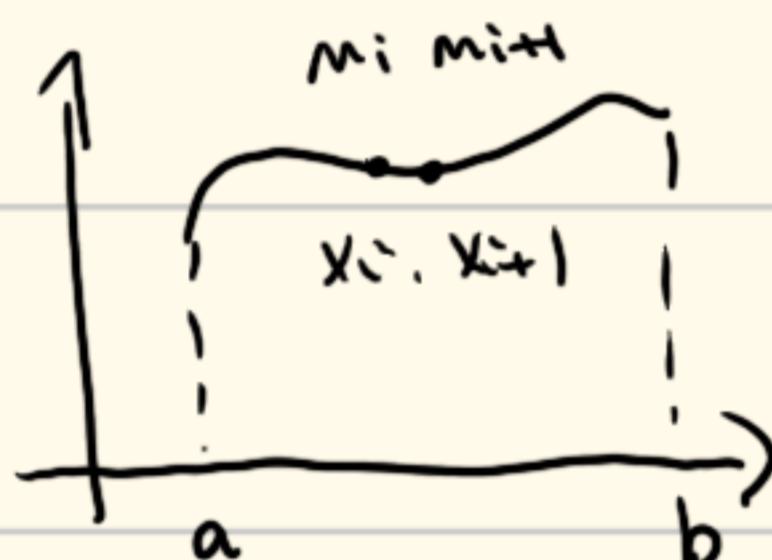
旋转体: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$



参数方程: $\begin{cases} y = \psi(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$$

侧面积:



$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

圆台侧面积公式: $\Delta S_i = \pi (y_{i-1} + y_i) \cdot |M_{i-1}M_i|$

$$= \pi (y_{i-1} + y_i) \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}$$

$$\sum \Delta S_i = \sum \pi (y_{i-1} + y_i) \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

$$= \pi \sum (y_{i-1} + y_i) \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \Delta x_i$$

$$= 2\pi \sum f(s_i) \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \Delta x_i + \pi \sum (y_i + y_{i-1} - 2f(s_i)) \sqrt{\Delta x_i}$$

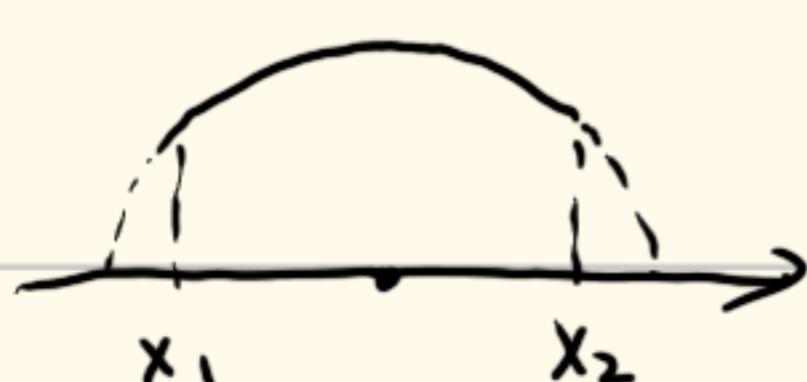
当 $|\Delta| \rightarrow 0$.

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

?

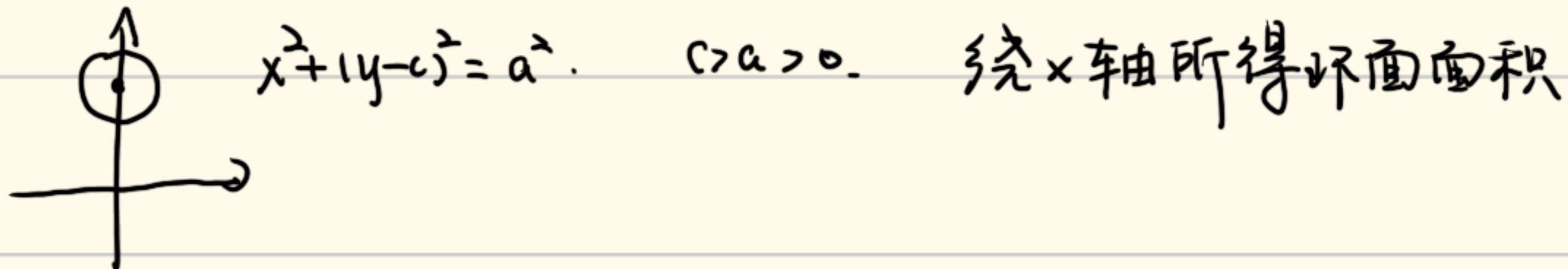
$$\text{第} = \text{项} \leq \sup \sqrt{1 + f'^2} \cdot \pi \cdot \sum 2\Delta x_i \rightarrow 0.$$

Example



"球台" 侧面积 $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi R \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi R(x_2 - x_1)$$



$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a (c + \sqrt{a^2 - x^2} + c - \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 4c\pi \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4c\pi a \int_{-a}^a \frac{1}{1 - (\frac{x}{a})^2} d\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= 4ac\pi \arcsin t \Big|_{-1}^1 = 4ac\pi^2 \end{aligned}$$

参数方程: $x = X(t), y = Y(t)$ $x \nearrow$

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t) dt = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

π 是无理数:

Proof: 假设 $\pi = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \geq 1$. $f_n(x) = p^n x^n (p - qx)^n$

是 $2n$ 次整系数多项式, 且 $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(\pi) = 0$, $i=0, 1, \dots, n-1$

且 $f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$, $n \leq i \leq 2n$ 为整数且为 $n!$ 倍数

$$\text{考虑 } I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi f_n(x) \sin x dx = \frac{1}{n!} \int_0^\pi f_n(x) d(-\cos x)$$

$$= \frac{1}{n!} (-f_n \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f_n' \cos x dx)$$

$$= \frac{1}{n!} ((-f_n \cos x + f_n' \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f_n'' \sin x dx)$$

$= \dots =$ 都是整数. $\Rightarrow I_n > 0$. $\Rightarrow I_n \geq 1$

但 $I_n \leq \frac{(\frac{p}{q})^{2n}}{n!} \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ 矛盾!

• 曲线质量

$$I: \begin{cases} x = x(t) & x, y \in C[\alpha, \beta], 密度 \rho(t) \in C[\alpha, \beta] \\ y = y(t) & \text{求 I 质量} \end{cases}$$

$$|\widehat{M_i}_i M_i| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} dt = \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} \Delta t_i$$

$$s_i \in [t_{i-1}, t_i] \quad \widehat{M_i}_i M_i \text{ 的质量 } m_i = \rho_i |\widehat{M_i}_i M_i|$$

ρ_i 是 $|\widehat{M_i}_i M_i|$ 平均密度 $\in [\inf, \sup]$

$$m = \sum m_i = \sum (\rho_i - \rho(s_i)) \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} + \sum \rho(s_i) \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2}$$

\downarrow
 $\Delta \omega_i$

$$\int \rho(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

• 曲线质心

$$\begin{cases} x = x(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ y = y(t) & \text{设其质心 } (\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad \Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

$$m_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \sum \bar{x}_i m_i &= \sum \bar{x}_i \rho(s_i) \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} \Delta t_i \\ &= \sum x(s_i) \rho(s_i) \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} \Delta t_i \\ &\quad + \sum (\bar{x}_i - x(s_i)) \rho(s_i) \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2} \Delta t_i \end{aligned}$$

当 $|s_i| \rightarrow 0$. 第一项 $\rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$

第二项 $\rightarrow 0$. key: 转化成振幅, 用可积性证 $= 0$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}$$

Theorem (古鲁金第一定理)

质心周长 · 曲线长 = 侧面积.

Example

(i) 圆面: $(y-c)^2 + x^2 = a^2$



质心 $(0, c)$ 周长 $2\pi c$ 曲线长 $2\pi a$.

\Rightarrow 侧面积 $= 4\pi ac$.

(ii) 半圆: 计算半圆的质心 $(0, \bar{y})$

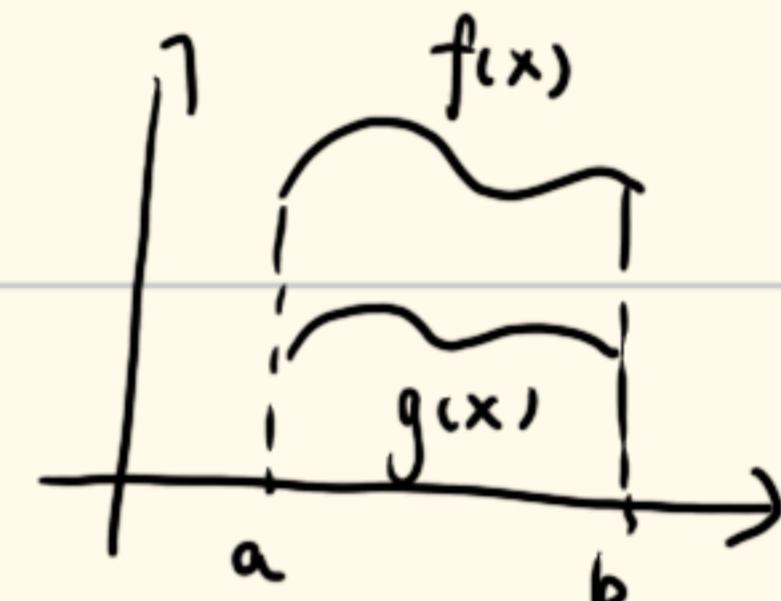


$$2\pi\bar{y} \cdot R\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{2}{\pi}R$$

平面图形质心

面密度为 1 (避免重积分)

$$f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad x \in [a, b] \quad f, g \in C[a, b]$$



$$D: \left\{ a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x) \right\} \quad a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$D_i = \{ x \in [x_{i-1}, x_i], \quad g \leq y \leq f \} \quad \text{质心 } (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$$

$$\text{质量 } M_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - g(x)) dx$$

$$\text{总静力矩} \quad \sum M_i \bar{x}_i = \sum \bar{x}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - g) dx$$

$$= \sum \bar{x}_i (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i$$

$$= \sum x_i (f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)) \Delta x_i + \sum (\bar{x}_i - x_i)(f - g) \Delta x_i$$

$$\int_a^b x (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\sum m_i \bar{y}_i = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2 - g^2) dx$$

$$\Rightarrow \text{质心} = \left(\frac{\int_a^b x (f-g) dx}{\int_a^b (f-g) dx}, \quad \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2 - g^2) dx}{\int_a^b (f-g) dx} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \bar{y} \int_a^b (f - g) dx = \pi \int_a^b (f^2 - g^2) dx$$

Theorem (古鲁金第二定理)

质心周长 × 面积 = 体积

Example

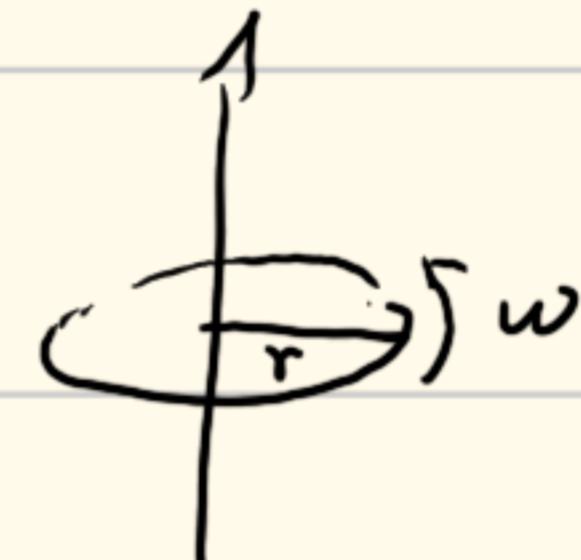


$$x^2 + (y-a)^2 = r^2$$

$$V = 2a\pi \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 ar^2$$

转动惯量

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$



n个点 m_1, m_2, \dots, m_n . 角速度 ω $I_u = \sum m_i r_i^2$



$$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

$$M_i: (x(t_i), y(t_i)) \quad \widehat{M_i - M_i} \text{ 质量 } m_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

关于y轴转动惯量 $x(\eta_i)^2 m_i$, $I_y = \sum x(\eta_i)^2 m_i$

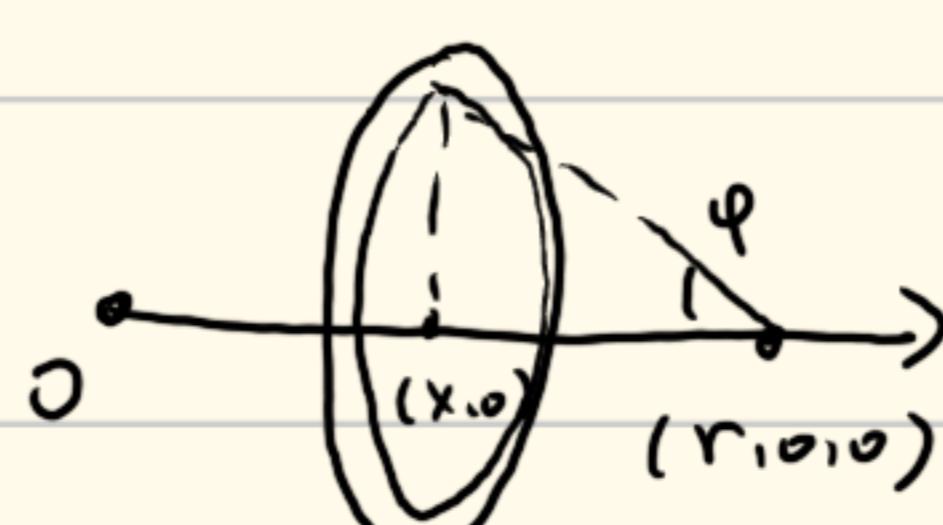
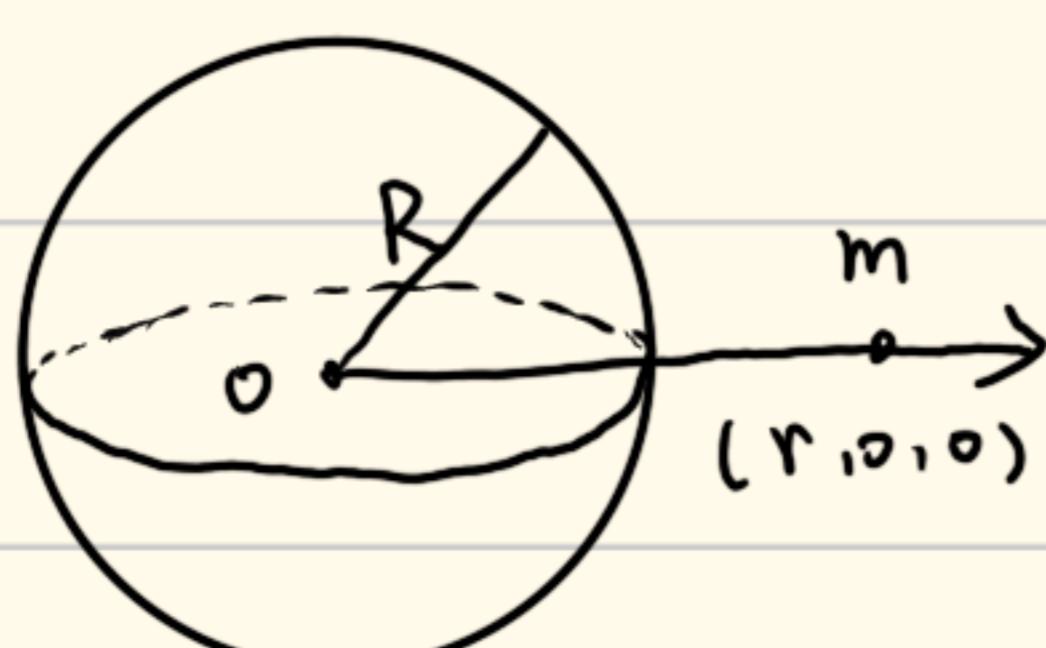
$$= \sum x(\eta_i)^2 \rho(\xi_i) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2} \Delta t_i \quad (|\Delta| \rightarrow 0)$$

$$\rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x(t)^2 \rho(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

关于x轴转动惯量: $\int_{\alpha}^{\beta} y(t)^2 \rho(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

引力

求面与质点间的引力:



取-3不计： $\frac{Gmm}{(r-x)^2+r^2-x^2} \cos\varphi$ ，设面密度为 ρ 为常数。

$$\text{总引力} = \int_{-R}^R 2R\pi \cdot \rho \cdot \frac{Gm}{(r-x)^2+r^2-x^2} \frac{r-x}{\sqrt{(r-x)^2+r^2-x^2}} dx$$

$$= 2\pi R \rho G m \int_{-R}^R \frac{(r-x)}{(R^2+r^2-2rx)^{\frac{3}{2}}} dx$$

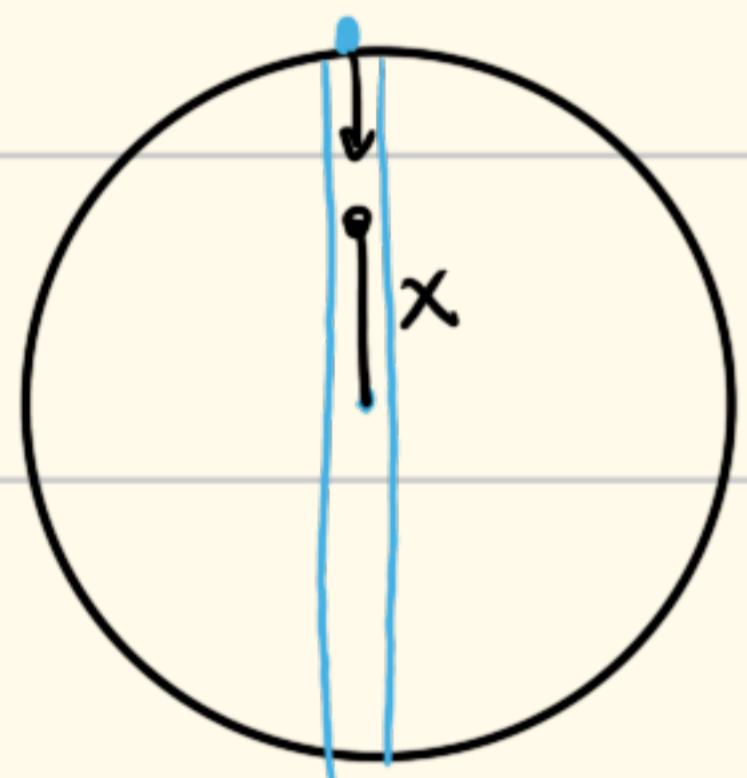
$$\Rightarrow R^2+r^2-2rx = t^2$$

$$\text{上式} = C \cdot \int_{|r-R|}^{R+r} \frac{\frac{r^2-R^2+t^2}{2r} \cdot \left(-\frac{t}{r}\right) dt}{t^3}$$

$$= \frac{m\pi R \rho G}{r^2} \left(t - \frac{r^2-R^2}{t}\right) \Big|_{|r-R|}^{R+r}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < r < R \\ \frac{4\pi R^2 m \rho G}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$4\pi R^2 \rho$ 是球面质量。可视作质点于球心



球体落下 $F_{31} \propto x$ ，作简谐运动

3 定积分的近似计算

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k$$

$$\textcircled{2} \quad \approx \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_{k-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \approx \sum_{k=1}^n f(x_{k-\frac{1}{2}}) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

$$\textcircled{1,2} \text{误差: } \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k - \frac{(b-a)^2}{2n} f'(s)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_{k-1} + \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) d(x-x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$= - \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \frac{(b-a)^2}{2n^2} \quad (\text{积分中值})$$

$$= - \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi) \quad (\text{导数介值})$$

$$\textcircled{3} \text{ 误差: } \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_{k-\frac{1}{2}} + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

$$\text{设 } M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f'', \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f''$$

$$f(x) - f(x_{k-\frac{1}{2}}) = (x - x_{k-\frac{1}{2}}) f'(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (x - x_{k-\frac{1}{2}})^2 f''(\xi_k)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_{k-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-\frac{1}{2}})) dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((x - x_{k-\frac{1}{2}}) f'(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (x - x_{k-\frac{1}{2}})^2 \cdot M_k^2) dx$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=1}^n M_k^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi_1)$$

$$\text{由上式} \geq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=1}^n M_k^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi_2)$$

$$\Rightarrow = \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi) \text{ for some } \xi. \quad (\text{介值性})$$

$$\textcircled{4} \quad \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} dx = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_n \right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

$$\text{证: } \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) d(x-x_k) = f(x_k) \frac{b-a}{n} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) (x-x_{k-1}) dx$$

$$= f(x_k) \frac{b-a}{n} - \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) d(x-x_{k-1})^2$$

$$= f(x_k) \frac{b-a}{n} - \frac{1}{2} f'(x_k) \frac{(b-a)^2}{n^2} + \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) (x-x_{k-1})^2 dx$$

$$\text{由上式} = f(x_{k-1}) \frac{b-a}{n} + \frac{1}{2} f'(x_{k-1}) \frac{(b-a)^2}{n^2} + \frac{1}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) (x_{k-1}-x)^2 dx$$

$$\text{相加除以2得: } = \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^3}{4n^2} (f'(x_{k-1}) - f'(x_k))$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) [(x-x_{k-1})^2 + (x_k-x)^2] dx$$

$$\text{全求和得误差} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) \left((x-x_k)^2 + (x-x_{k-1})^2 - \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x) (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_k)(x-x_{k-1}) \\
&= -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) \\
&= -\frac{(b-a)^2}{12n^2} f''(\zeta)
\end{aligned}$$

⑤ 抛物线逼近

过 $x_{k-1}, x_{k-\frac{1}{2}}, x_k$ 处的二次曲线 $\varphi_k(x) = px^2 + qx + r$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) dx &= \left. \frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2 + rx \right|_{x_{k-1}}^{x_k} \\
&= \frac{x_k - x_{k-1}}{6} (\varphi_k(x_k) + \varphi_k(x_{k-1}) + 4\varphi_k(x_{k-\frac{1}{2}})) \\
&= \frac{x_k - x_{k-1}}{6} (y_k + y_{k-1} + 4y_{k-\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f dx = \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} y_{k-\frac{1}{2}} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_k) + R_n(x),$$

$$\text{若 } f \text{ 四阶可导, } R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\zeta)$$

R-S

拉格朗日有界变差函数:

设 $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $\alpha(x)$ 有界变差 $= \beta(x) - \gamma(x)$: $\beta \geq \gamma$ 单调增.

$$\text{则 } \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta - \int_a^b f d\gamma$$

Proposition

设 $f \in C[\bar{a}, b]$ 或 $(f \text{ 有界变差且 } \alpha \in C[a, b])$, α 有界变差.

定义 $V_a^x \alpha$ 表示 a 到 x 的全变差. 则有

$$|\int_a^b f d\alpha| \leq \int_a^b |f| dV$$

特别地，当 $\alpha \rightarrow P$ 时。 $|\int_a^b f d\alpha| \leq \int_a^b |f| d\alpha$

Pf: 对 \forall 分割 P : $a = x_0 < \dots < x_n = b$

$$-\sum |f(t_k)| \Delta V_k \leq S(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |f(t_k)| \cdot |\Delta \alpha_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(t_k)| \Delta V_k$$

□

结论:

$$|\int_a^b f d\alpha| \leq \sup |f| \cdot V_a^b \alpha$$

Theorem (分部积分)

f, α 有界变差, f, α 有一个连续, 则 $\int_a^b f d\alpha = f\alpha|_a^b - \int_a^b \alpha df$

Theorem (第二积分中值定理)

f 单调, α 连续有界变差.

则 $\int_a^b f d\alpha = f(a)(\alpha(s) - \alpha(a)) + f(b)(\alpha(b) - \alpha(\xi))$

Pf: 用分部积分: $\int_a^b f d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha df$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(\xi)(f(b) - f(a))$$

Theorem (变量替换公式)

$f, g \in C[a, b]$, g 严格 \nearrow , $h = g^{-1}$, $c = g(a)$, $d = g(b)$

则 $\int_a^b f(x) dx \stackrel{x=h(y)}{=} \int_c^d f(h(y)) dh(y)$

广义积分

定义: $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

例: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln A, & p=1 \\ \frac{A^{-p+1}}{1-p}, & p \neq 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \text{不存在}, & p \leq 1 \end{cases}$$

换元公式: $f \in C[a, b]$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, $\varphi(\beta - 0) = +\infty$

$$a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

· 引入函数广义积分收敛性

$f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$, 内闭可积, $F(A) = \int_a^A f(x) dx \nearrow$

只需给 $F(A)$ 找上界即可收敛。

· 比较原理

$0 \leq f \leq g$, $c > 0$. 若 $\int_a^\infty g dx < \infty$, 则 $\int_a^\infty f dx < \infty$

若 $\int_a^\infty f dx = +\infty$, 则 $\int_a^\infty g dx = +\infty$

Ex: 证明: $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 收敛. ($\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 收敛)

R3: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty, & p \leq 1 \\ < \infty, & p > 1 \end{cases}$

Ex. $f \in C[a, +\infty)$. 单调. $f(+\infty) = 0$ 未证: $\int_a^\infty f' \sin^2 x dx$ 收敛.

证: f' 定号, 不妨 $f' \geq 0$, $0 \leq \text{Goal} \leq \int_a^\infty f' dx = f(x)|_a^\infty = -f(a) < \infty$.

Ex. 判断 $\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ 收敛性.

$$\begin{aligned} \text{pf: } F(n\pi) &= \int_0^{n\pi} \frac{x dx}{1+x^4 \sin^2 x} = \sum_{k=1}^n u_k, \quad u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1+x^4 \sin^2 x} \\ &\geq (k-1)\pi \cdot \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k\pi)^4 \sin^2 x} \geq (k-1)\pi \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k\pi)^4 x^2} \\ &= \frac{2(k-1)\pi}{k^2 \pi^2} \arctan k^2 \pi^2 x \Big|_0^\frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\pi^3}{2} \cdot \frac{k-1}{k^2} > C_0 \cdot \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

求和无界.

Definition

绝对收敛: $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

pf: $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$ 故 $\int_a^{+\infty} |f| - f dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f dx$ 收敛.

条件收敛: 不绝对收敛, 但收敛.

Ex. 已知 $f, g \in C^1[a, +\infty)$, $f' \geq 0$, $f(\infty) = 0$, g 有界.

判断 $\int_a^\infty f g' dx$ 收敛性:

$$\begin{aligned} \text{pf: } \int_a^A f g' dx &= f g|_a^A - \int_a^A g f' dx \\ &\downarrow 0 - f(a) g(a) \quad \text{有界} \quad \downarrow \text{积分有界} \Rightarrow \text{绝对收敛} \end{aligned}$$

• Cauchy 收敛定理

$\int_a^{+\infty} f dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > a$, 使对 $\forall A > B \geq M$,

$$\left| \int_B^A f dx \right| < \varepsilon.$$

Ex. $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. 内闭可积. $p > 0$. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p dx < \infty$.

$$\text{证: } \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

$$\text{pf: } |u+v|^p \leq 2^{p-1} (|u|^p + |v|^p) \quad \text{且} |h| < 1$$

$$\Rightarrow \int_A^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \left(\int_A^{+\infty} |f(x)|^p dx + \int_{A+1}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right) < \varepsilon.$$

$$\text{同理可取 } A \text{ 使 } \int_{-\infty}^{-A} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

再关心 $[A-1, A+1]$ 上分划 $\Delta: -A-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = A+1$

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

$$\text{若 } g(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{则 } |f(x) - g(x)| \leq M_k - m_k, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

$$\text{又 } \Delta \text{ 充分细使 } \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon^2.$$

$$\Delta_1 := \{1 \leq k \leq n \mid M_k - m_k \geq \varepsilon\}. \quad \Delta_2 := \{1 \leq k \leq n \mid M_k - m_k < \varepsilon\}$$

$$\varepsilon \sum_{k \in \Delta_1} \Delta x_k = \sum_{k \in \Delta_1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \Delta_1} \Delta x_k < \varepsilon.$$

$$\int_{-A-1}^{A+1} |f-g|^p dx = \sum_{k \in \Delta_1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f-g|^p dx + \sum_{k \in \Delta_2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f-g|^p dx$$

$$\leq \dots \quad \checkmark$$

勒贝格-阿贝尔判别法

$f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 内闭可积. f 单调

① (D): $f(+\infty) = 0$, $G(A) = \int_a^A g dx$ 有界.

② (A): f 有界 $\int_0^\infty g dx$ 收敛.

记42: 第二中值:

$$\int_A^B fg dx = f(A) \int_A^S g dx + \underbrace{f(B) \int_S^B g dx}_{\text{有界}}$$

① $f(B) = 0$. $\int g dx$ 有界

② f 有界. $\int g$ 收敛

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} ?$$

黎曼引理: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b \sin \lambda x f(x) dx = 0$ for $f \in R[a, b]$.

Pf: 对分划: $\Delta: a = x_0 < \dots < x_n = b$.

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

$$\text{证} | \int_a^b \sin \lambda x f(x) dx | = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \lambda x dx \right|$$

$$\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin \lambda x dx \right| + \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n m_i \sin \lambda x dx \right|$$

$$\leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i) dx + \left| \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right| \right)$$

$$\leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i + \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i \right) \rightarrow 0. \quad \square$$

$$\text{定义 } f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}, & \text{else.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \left(f(x) + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \right) \sin((n+\frac{1}{2})x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sin((n+\frac{1}{2})x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

例

$$f \in C[0, +\infty), \quad \int_0^\infty f^2 dx < \infty, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

求证 $\frac{g(x)}{x}$ 平方可积，且 $\int_0^\infty \frac{g^2(x)}{x^2} \leq 4 \int_0^\infty f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{pf: } \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx &= - \int_0^A g^2(x) d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= - \frac{g^2}{x} \Big|_0^A + \int_0^A \frac{1}{x} g \cdot 2g' dx = - \frac{g^2(A)}{A} + 2 \int_0^A \frac{g}{x} \cdot f dx \\ &\leq 2 \left(\int_0^A \frac{g^2}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^A f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

广义积分：

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. b 是瑕点， f 内闭可积，称广义积。

若 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛，若 $\lim_{A \rightarrow b^-} \int_a^A f(x) dx$ 存在。

Theorem

(i) 非负瑕积分. 收敛 \Leftrightarrow 有界

(ii) 非负瑕积分. b_n 趋于原点.

例1. 求 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$:

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ 也有限.}$$

Theorem

(i) 绝对收敛 \Rightarrow 收敛.

(ii) Cauchy 原理.

(iii) A-D 判别法:

$f, g \in C[a, b]$. f 单调.

① $f(b) = 0$, $\int_a^{b-\varepsilon} g(x) dx$ 有界

或 ② f 有界, $\int_a^b g(x) dx$ 收敛.

则 $\int_a^b f \cdot g dx$ 收敛.

(iv) 积分判别法:

$f(x) > 0$. 单调, 连续. $a_n = f(n)$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$

级数

Theorem

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 反之不成立.

Theorem

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} + \dots + a_{n_{k+1}})$ 收敛

Theorem

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 \Leftrightarrow 有界

Theorem

(i) 非负级数, 比较定理

(ii) 设 $a_n > 0, b_n > 0,$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.

(iii) 比值判别法 (正项级数)

若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. 则 $\sum a_n$ 收敛

$= l > 1$ 则 $\sum a_n$ 发散

(iv) 根值判别法 (正项级数)

$a_n > 0, l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, l < 1$ 则 $\sum a_n < \infty$

\hookrightarrow 1. $\sum a_n = +\infty$

Remark: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

(v): 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$

(vi): 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$.

(vii): 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{mn}} < \frac{1}{e}$. 则 $\sum a_n < \infty$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{mn}} > \frac{1}{e}$. 则 $\sum a_n = \infty$

(viii): 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m^{\frac{1}{a_n}}}{m^n} \right) > 1$. 则 $\sum a_n < \infty$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m^{\frac{1}{a_n}}}{m^n} \right) < 1$. 则 $\sum a_n = \infty$.

一般项级数收敛.

1. 绝对收敛.

2. 收敛级数: 若 $a_n \rightarrow 0$. 则 $\sum (-1)^n a_n$ 收敛.

3. Cauchy 压缩.

4. D-A

设 a_n 单调, $|B_n| = |\sum_{k=1}^n b_k|$ 有界.

(D) $a_n \rightarrow 0$.

(A) a_n 有界, $\sum b_n$ 收敛.

} 则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

$$\text{例} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

$x=0$ 时 前散后敛.

$$x \neq 0 \text{ 时. } \sum_{k=1}^n \sin kx = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

法2: 设 $z = e^{ix}$. $z^n = \cos nx + i \sin nx$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\ln(1-z) = -\ln(1-\cos x - i \sin x)$$

$$= -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right) \right) = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cdot e^{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)i} \right)$$

$$= -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{\pi - x}{2} i$$

命题

f 在 $[1, +\infty)$ 可导. 且 $\int_1^\infty |f'| dx < \infty$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \asymp \int_1^\infty f(x) dx$ 收敛性相同.

正项级数可以重排.

$\sum a_n$ 条件收敛. $B \leq A \in [-\infty, +\infty]$

则存在重排 $\sum a_{\sigma(n)}$ 使 $\lim s_n = A \quad \lim s_n = B$.

无序乘积.

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k$ 存在且非0.

Property 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 不妨 $a_n > 0$.

Property 2. $a_n > 0$ 时. $\prod (1+a_n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum a_n$ 收敛.

$\sum a_n^2 < \infty$ 时. $\prod (1+a_n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum a_n$ 收敛.

Property 3. $\sum |\ln(1+a_n)| < \infty \Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$

Ex. $I(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$, $x \neq 0, -1, -2, \dots$

$$I(1+x) = x I(x).$$

同收敛散性: 用 Abel: $\sum a_n \leq \sum a_n b_n$ 同收敛.

去证 b_n 单调有界

$\sin x = 0$ 只有实根 $k\pi$.

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} ??$$

$$(\cos x + i \sin x)^{2n+1} = \cos(2n+1)x + i \sin(2n+1)x.$$

= 复数展开 $\Rightarrow \sin(2n+1)x = \sin x P_n(\sin^2 x)$. P_n 是 n 阶多项式.

当 $x = \varphi_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 时 P_n 有 $\sin^2 \varphi_k$ 为根.

$$\lim_{x \rightarrow 0} P_n(\sin^2 x) = P_{10} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 2n+1,$$

$$\Rightarrow P_n(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\sin^2 \varphi_k}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right) = U_m \cdot V_m.$$

$$U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$V_m = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_m = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

$$1 > \lim_{n \rightarrow \infty} V_m \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$$

再令 $m \rightarrow \infty$. $V_m \rightarrow 1$.

等度连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 若 $|x-y| < \delta$. $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$. $\forall n$.

Prop: $\{f_n\}$ 等度连续, 且 $f_n(x) \rightarrow f(x)$. 则 $f_n(x) \xrightarrow{\text{def}} f(x)$

Prop: $x_0 \in [a, b]$, $f_n(x) \xrightarrow{\text{def}} f(x)$ $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \alpha_n$ 存在. 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

推论: $f_n \xrightarrow{\text{def}} f$, $x \in [a, b]$. 若 f_n 在 $x = x_0$ 处连续, 则 f 也在 x_0 处连续.

且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$

Prop: $f_n(x) \in [a, b]$, $f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$, $f_n \rightarrow f$.

则 $f_n \xrightarrow{\text{def}} f \Leftrightarrow f \in C[a, b]$.

推论: 写成正负函数级数.

Prop: $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $f_n \geq 0$. $\forall x \in X$. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq M$. $\forall [a, b]$.

R) $\lim_{x \rightarrow b^-} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b^-)$

Prop: 一致收敛且保可积性

Prop: $f_n \in C^1[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. 已知 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛. $\{f'_n\}$ 一致收敛.

R) $f_n \rightarrow f$. 且 $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ → 求导与取极限可交换顺序

1. $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$. f_n, g_n 有界: $\Rightarrow f_n g_n \rightarrow fg$

2. (M-判别法) 若 $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in I$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 绝对一致收敛.

• $\{f_n(x)\} \subset C[a, b]$, 且在至少一点处收敛. 且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使 $\forall n > m > N$.

$f_n(x) - f_m(x)$ 的 Lipschitz 常数 $< \varepsilon$. 则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛.

• 进一步. 若对某个 $x \in [a, b]$, 若 $f'_n(x)$ 存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = c$.

则 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = c$.

推论: 可导函数列 $\{f_n(x)\}$, $x \in [a, b]$. 已知 $\exists x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ 存在.

且 $f'_n(x) \rightarrow g(x)$. 则 $f_n(x) \rightarrow f(x)$. 且 $f'(x) = g(x)$.

推论: 导函数列一致收敛到导函数列

Def: 初等集: 有限个不交区间的并

$m(E)$: 初等集 E 的长度和

闭初等集: 有限闭区间的并

闭初等集套定理: A 有界, $A_{n+1} \subseteq A_n \neq \emptyset$. 则 $\bigcap^{\infty} A_n \neq \emptyset$

Lemma

$\{A_n\}$ 是有界非空集列, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap A_n = \emptyset$

记 $\alpha_n = \sup \{m(E) \mid E \subset A_n, E \text{ 为初等集}\}$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Lemma

对 $\forall \varepsilon > 0$, $A_n = \{x \in [a, b] \mid \exists i \geq n \text{ 使 } |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

则 $A_{n+1} \subseteq A_n$ 且 $\bigcap A_n = \emptyset$, 由引理 $\alpha_n \rightarrow 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 使 $n > N$ 时, A_n 的任意初等子集 E 有 $m(E) < \varepsilon$

给定 $n > N$, 对 H 阶梯函数 $s(x)$: $0 \leq s(x) \leq |f_n(x) - f(x)|$

$E = \{x \in [a, b] \mid s(x) \geq \varepsilon\}$ 是初等集

$F = [a, b] \setminus E$ 亦初等.

$$\int_a^b s(x) dx = \int_E s(x) dx + \int_F s(x) dx$$

$$\leq 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a)$$

→ 勒贝格控制收敛定理.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

□

定理: $f_n \in R[a, b]$, $|f_n| \leq M$. $\lim f_n = f(x)$ 存在.

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 存在.

pf: $\exists \bar{F} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx}$, $\underline{F} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx}$

取 $f_{n_1}, \dots, f_{n_k}, \dots$ $f_{m_1}, \dots, f_{m_k}, \dots$

则 $\bar{F} - \underline{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b (f_{n_k} - f_{m_k}) dx$

由 $|f_{n_k} - f_{m_k}| \leq 2M$ 有界. \Rightarrow

$$= \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_{m_k}) dx = \int_a^b (f - f) dx = 0.$$

$\Rightarrow \bar{F} = \underline{F} \Rightarrow$ 收敛.

$f_n \in R[a, b]$.

Borel 引理

$$\lim (\int f_n) \stackrel{?}{=} \int \lim f_n$$

对 \forall 実数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$. 存在 $f \in C^\infty$, $f^{(n)}(0) = a_n$

pf: by 截断函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\exists g \in R[a, b]$

$|f_n| \leq g$ 恒成立

Example for: 处处连续但处处不可导.

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n h(4^n x).$$

Example for: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ 的满射

幂级数：收敛半径 $R > 0$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

阿贝尔定理：

(i) $(-R, R)$ 内闭一致收敛

(ii) 在 R 处收敛: $(-R, R]$ 内闭一致收敛

(iii) 在 $-R$ 处收敛: $[-R, R)$ 内闭一致收敛

推论 1: $x = x_0 + R$ 处收敛 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + R - 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$,

推论 2: 在收敛域连续.

定理: 在收敛或取闭子区间, 求和号与积分号交换次序.

定理: 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 有任意阶导数. 求导可与求和号交换次序.

定理: 幂级数在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 对应函数有泰勒级数, 即幂函数本身

定理: 一个函数在 x_0 处有泰勒展开. $\Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 在 x_0 附近成立.

定理: 连续函数可被多项式逼近.

§ 傅利叶级数

基本三角函数系：1. $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad : n\text{阶三角多项式}$$

性质：①周期性(2π) ② 正交.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Theorem

设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 连续，以 2π 为周期，且 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为 0。

则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上恒为 0。保证了连续函数 \rightarrow Fourier 级数是单射。

proof：反证。由连续性，不妨取 $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}_+, f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

处取值均 $> \frac{f(x_0)}{2} = M_0 > 0$. 局部：正弦区间上有正值

由 Fourier 系数恒零 \Rightarrow 全三角多项式 $T(x)$. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T(x) dx = 0$

$$\overline{f}_2 T_0(x) = 1 + \cos(x-x_0) - \cos \delta. \quad r = \cos \frac{\delta}{2} - \cos \delta > 0.$$

则 $\forall x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$, $T_0(x) > r+1 > 1$.

$\forall x \in [x_0 - \pi, x_0 + \pi] \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|T_0(x)| \leq 1$.

考虑 $T(x)$ 的 n 次幂 (n 为大) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的上界: $|f(x)| \leq M$

有限	无限	有限
$x_0 - \pi$	$x_0 - \delta$	$x_0 + \delta$

\rightarrow 矛盾

$$\left| \int_{x_0 - \pi}^{x_0 - \delta} f(x) T_0^n(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{x_0 + \pi} f(x) T_0^n(x) dx \right|$$

$$\leq \int_{x_0 - \pi}^{x_0 - \delta} |f(x)| |T_0^n(x)| dx + \int_{x_0 + \delta}^{x_0 + \pi} |f(x)| |T_0^n(x)|$$

$$\leq \int_{x_0 - \pi}^{x_0 - \delta} M dx + \int_{x_0 + \delta}^{x_0 + \pi} M dx < 2\pi M. \quad \text{有限}$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) T_0^n(x) dx \geq \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f(x) T_0^n(x) dx \geq M_0 \cdot r^n \delta \rightarrow +\infty \text{ 无限.}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x) T_0^n(x) dx \rightarrow +\infty. \text{ 矛盾!}$$

Example. 设 $f(x) = x$ ($-\pi \leq x < \pi$). 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\text{由于 } f \text{ 奇. } a_n \equiv 0, n=0, 1, 2, \dots. \text{ 且 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$$

$$\text{故 } f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

延拓: 奇延拓 \rightarrow 正弦级数

偶延拓 \rightarrow 余弦级数.

周期为 2π . 换元 \rightarrow 周期 2π . Fourier 级数.

此时的基本三角函数系: $1, \cos \frac{\pi}{T} x, \sin \frac{\pi}{T} x, \cos \frac{2\pi}{T} x, \sin \frac{2\pi}{T} x, \dots$

Fourier 级数的收敛性.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos kx \cos ku + \sin kx \sin ku) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(u-x)) \right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(u-x))}{2 \sin \frac{n+1}{2}} du \quad \text{若换元 } t=u-x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{n+1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{n+1}{2}} dt \end{aligned}$$

Definition

记 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$ 为 Dirichlet 核

$\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$ 为 $f(x)$ 的 Dirichlet 积分 考虑 $n \rightarrow +\infty$ 时 收敛到的位置

特别地 $f \equiv 1$ 有 $\int_0^\pi D_n(t) dt = 1$.

下面考虑 $\{S_n(x_0)\}$ 是否以 $S_0 = f(x_0)$ 为极限.

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - S_0 &= \int_0^\pi (f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0) D_n(t) dt \\ &= \int_0^\pi \underbrace{\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{2\pi \cdot \sin \frac{t}{2}}}_{\text{系数}} \cdot \sin(n+\frac{1}{2})t \cdot dt \\ &= \int_0^\pi g(t) \cdot \sin(n+\frac{1}{2})t \cdot dt. \end{aligned}$$

Theorem (黎曼-勒贝格引理)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积或有瑕点时绝对可积. 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

有了引理后观察 $\int_0^\pi G(t) \sin(n+\frac{1}{2})t dt$. $\forall \varepsilon > 0$. $G(t)$ 在 $[\varepsilon, \pi]$ 上可积.

当 $n \rightarrow +\infty$ 时必取 0. 我们只关心 t 在 0 附近的表现. 得到以下定理:

(黎曼局部化定理) 设 $f(x)$ 周期 2π . $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛性只与 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 取值相关. $\forall \delta > 0$.

引理: $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) = 0$.

引理: $\int_0^\delta \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin \frac{t}{2}} f(t) dt \leq \int_0^\delta \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} f(t) dt$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时

具有相同的收敛性. 取 $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ 或 ..., 利用黎曼-勒贝格.

$$\text{推论: } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{令 } f(t) = 1.$$

Fourier 级数的收敛判别法

起始: $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=x_0$ 收敛到 s_0 的必要条件是对充分小的 $\delta > 0$,

$$\text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s_0}{t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt = 0.$$

Case 1: $f(x)$ 左可导、右可导. 设 s_1 是左极限, s_2 是右极限.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \left(\frac{f(x_0+t) - s_2}{t} + \frac{f(x_0-t) - s_1}{t} \right) \sin(n+\frac{1}{2})t dt$$

\downarrow \downarrow \downarrow
在 $t=0$ 处均有定义 \Rightarrow 连续 \Rightarrow 非瑕点 \Rightarrow 梯勤 $= 0$.

由此得到:

Theorem

设 $f(x)$ 周期 2π , $[-\pi, \pi]$ 分段可微, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

我们看到 $\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s_0}{t}$ 可积或瑕绝对可积时 Fourier 收敛.

Theorem (Dini 定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积.

并对于 $x_0 \in [-\pi, \pi]$, $\exists \delta > 0$, 使 $\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < +\infty$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 s_0 .

Theorem (李普希茨定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积。

且 $f(x)$ 在 $x_0 \in [-\pi, \pi]$ 时满足 α -赫尔德连续性。即存在 $L > 0, \delta > 0$ 。

使得对于 $x \in U(x_0, \delta)$, $|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq L|t|^\alpha$

$$\text{证: 由 } \alpha > 0, \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t)|}{t} dt = \int_0^{\delta} \frac{L}{t^{1-\alpha}} dt < +\infty$$

狄利克雷定理:

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时绝对可积。

再设 x_0 不是瑕点，且存在 $\delta_0 > 0$ ，使 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta_0, x_0)$ 及 $(x_0, x_0 + \delta)$ 分别单调。

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛到 $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

总结：设 $f(x)$ 周期 2π ，且满足以下条件之一：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 分段单调

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 分段可微。

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

魏尔斯特拉斯定理

第一定理： $f(x) \in C[a, b]$ ，则 $f(x)$ 可被多项式逼近。

第二定理： $f(x) \in C(\mathbb{R})$ ， $f(x)$ 周期为 2π ，则 $f(x)$ 可被三角多项式逼近。

$y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ 而 x_n 有更好的收敛性（健壮）。

取这里三角多项式为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的算数平均。

推论： $f(x)$ 可积，且 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐点收敛，则级数收敛到 $f(x)$ 上。

$$f(x) = \lim S_n^*(x) = \lim S_n(x) = g(x)$$

↓ ↓
三角逼近 Fourier 级数 逐点收敛到

$$y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \quad x_n$$

平方可积

平方可积： $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上的瑕积分收敛。对这样的 f 有以下定义：

定义： $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$ 。称 $\{f_n(x)\}$ 平方收敛于 $f(x)$

• $|f(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x)+1)$ 。故有限定时 f 平方可积 \Rightarrow 绝对可积。

$$\begin{aligned} \cdot |f(x)g(x)| &\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} \\ (f(x) + g(x))^2 &\leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \text{平方可积函数类保加法乘法。}\right.$$

定义平均偏差 $\Delta_n = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ ，其中 $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{(a_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right]}_{> 0} - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

$\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ 时误差最小。

Theorem (Fourier 级数最佳逼近)

用 n 次三角多项式逼近 $f(x)$ 时，在均方误差意义下 Fourier 级数给出的系数最简：

Theorem

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 可积或有瑕点时平方可积。则对 $\{S_n(x)\}$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

$S_n(x)$ 是固定 \deg 后的最佳多项式。只要有逼近的多项式到 $T_n(x)$ 。 $(\deg = n)$ 。

可用 $S_n(x)$ 作为误差的置信下界。 $\epsilon \rightarrow 0$ 。

定理 (帕塞瓦尔等式)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积，则有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\text{pf: } 0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx < \varepsilon$$

由此可见，并不是任何一个三角级数都可以写成某个平方可积函数的 Fourier 级数。

推论 (广义帕塞瓦尔等式)

设 f, g 在 $[-\pi, \pi]$ 平方可积。并设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$g(x) \sim \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$

$$\text{则 } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n)$$

-致收敛性

定理

设 f 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 可导，且 $f'(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积。则 $f(x)$

Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$ 。

逐项微分： $f''(x)$ 存在且 $[-\pi, \pi]$ 可积

逐项积分： $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 可积。利用帕塞瓦尔+分段线性函数去证。

Note: 若 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n (1 - \cos nx)}{n} \right]$$

