Sylow p子群

定义：G有限群，$|G|=p^l m$，p素，$\gcd(p,m)=1$，$P<G$，$|P|=p^l$

群在集合上的作用（G作用在X上）

$\mathrm{Orb}(x)$：轨道　$\mathrm{Stab}(x)$：稳定子群

lemma1：G在 $\mathrm{Orb}(x)$ 上作用等价于G在 $G/\mathrm{Stab}(x)$ 上作用.

proof：记 $H_x=\mathrm{Stab}(x)$，G/H_x 齐性空间，考虑 $\alpha: G/H_x \longrightarrow \mathrm{Orb}(x)$

由于G在 $\mathrm{Orb}(x)$ 上的作用封闭，所以有意义.

$\forall aH_x$，$\alpha(aH_x)=ax$

单：若 $\alpha(aH_x)=\alpha(bH_x) \Rightarrow ax=bx \Rightarrow a^{-1}bx=x$

$\Rightarrow a^{-1}b\in H_x \Rightarrow a^{-1}bH_x=H_x \Rightarrow bH_x=aH_x$

满：$\forall y\in \mathrm{Orb}(x)$，知 $\exists t\in G$，$y=tx$，则 $\alpha(tH_x)=y$

等价：$\forall g\in G$，$\alpha^{-1}(gtx)=gtH_x=g(\alpha^{-1}(tx))$ □

Sylow第一定理：sylow p子群存在. 一般地，p^k 阶 $(0\le k\le l)$ 子群存在

proof：考虑X为G所有 p^k 元子集构成的集族. $|X|=\binom{p^l m}{p^k}$

$v_p\binom{p^l m}{p^k}=\#\{p^k+(p^l m-p^k)$ 时进位次数$\}=l-k$，G自然作用到X上.

由lemma1，$|\mathrm{Orb}(x)|=|G/\mathrm{Stab}(x)|$，$X=\bigsqcup_x \mathrm{Orb}(x)$

由于 $p^{l-k+1}\nmid|X| \Rightarrow \exists A\in X$，$p^{l-k+1}\nmid \mathrm{Orb}(A) \Rightarrow p^k \mid \mathrm{Stab}(A)\triangleq H_A$

由 $e\in H_A \Rightarrow |H_A|\ge 1 \Rightarrow |H_A|\ge p^k$，$\forall a\in A$，$g_1,g_2\in H_A$

若 $g_1a=g_2a \Rightarrow g_1=g_2$（a是G的元素）. 故 $|H_Aa|=|H_A|$

又 $H_Aa\subseteq A \Rightarrow |H_Aa|\le|A| \Rightarrow p^k\le|H_A|=|H_Aa|\le|A|=p^k$

$\Rightarrow |H_A|=p^k$ □

由稳定子群定义只能映到A中

H_A中元素一一作用到a后得到的集合.

普通的阶为p的幂的群均可

lemma2：sylow p子群作用到X上，$|X|=n$，$\gcd(p,n)=1$，则必有不动元素.

proof：考虑各轨道. $|\mathrm{Orb}(x)|=|G/\mathrm{Stab}(x)|=p^t$，$t\le k$.

又 $n=\sum_x (|\mathrm{Orb}(x)|\not\equiv 0 \pmod p) \Rightarrow \exists x,\ p\nmid \mathrm{Orb}(x)$

$\Rightarrow |\mathrm{Orb}(x)|=1 \Leftrightarrow x$ 为不动元素 □

lemma3：设不动元素有k个，则 $n\equiv k \pmod p$ □

Sylow第二定理：$|H|=p^k$，$H<G$，则 $\forall P$ 为sylow p群，$\exists g\in G$ 使得 $H<gPg^{-1}$　任一个p幂阶群与sylow p群可连系在一起.

proof：考虑H作用到P的左陪集上. $h\in H$，$h(gP)=hgP$

由 $|H|=p^k$，$|G/P|=m$，$\gcd(p^k,m)=1$

由lemma2，$\exists$ 不动元素 gP，使 $\forall h\in H$，$hgP=gP$

$\Rightarrow hg\in gP \Rightarrow h\in gPg^{-1} \Rightarrow H\subseteq gPg^{-1}$　又H为群

$\Rightarrow H<gPg^{-1}$ □

lemma4：G的所有sylow p子群两两共轭　共轭后仍为子群

proof：$\forall P_1,P_2$ 为 sylow p子群，取 $H=P_1$，$P=P_2$

由sylow第二定理，$P_1<gP_2g^{-1}$，由 $|P_1|=|P_2|$

$\Rightarrow P_1=gP_2g^{-1}$ □

lemma5：G恰有一个sylow p子群 $\Leftrightarrow$ G的一个sylow p子群正规　共轭作用P群下的不动元素

proof："$\Rightarrow$"：$\forall g\in G$，gPg^{-1} 为G的一个p子群 $\Rightarrow gPg^{-1}=P \Rightarrow P$ 正规

"$\Leftarrow$"：由sylow第二定理，以及P的任一共轭子群为本身 $\Rightarrow$ 仅一个sylow p子群. □

定义：$H<G$，$N(H)=\{x\in G \mid xHx^{-1}=H\}$，H的正规化子

lemma6：$H\lhd N(H)$

proof：显然 $H<N(H)$，设 $h\in H$，$\tau\in N(H)$

则 $\tau h\tau^{-1}=h$，即 $\tau H\tau^{-1}=H \Rightarrow H\lhd N(H)$ □

lemma7：P为sylow p子群，则不存在异于P的sylow p子群为 $N(P)$ 子群，故 $N(N(P))=N(P)$

proof：由 $P\lhd N(P)$ 为 $N(P)$ 的sylow p子群，由lemma5 且

$\Rightarrow P$ 为 $N(P)$ 唯一sylow p子群

设 $g\in N(N(P))$，则 $gN(P)g^{-1}=N(P)$

又 $P\lhd N(P) \Rightarrow gPg^{-1}\subseteq N(P)$ 为sylow p子群

$\Rightarrow gPg^{-1}=P \Rightarrow g\in N(P) \Rightarrow N(N(P))\subseteq N(P)$

又显然 $N(P)\subseteq N(N(P)) \Rightarrow N(N(P))=N(P)$

sylow第三定理：设G有k个sylow p子群，则 $k\mid m$ 且 $k\equiv 1 \pmod p$

proof：(i) 考虑G在X上作用，X是所有sylow p子群集

$\forall g\in G$，$Q\in X$，$g(Q)=gQg^{-1}$，由lemma4，

G在X上的作用是传递的，则 $\mathrm{Stab}(Q)=N(Q)$

$\mathrm{Orb}(Q)=X \Rightarrow |X||N(Q)|=|G| \Rightarrow |N(Q)|=m$

又 $Q<N(Q) \Rightarrow k\mid m$ □

(ii) 考虑P在X上作用，P为任一sylow p子群

$\forall g\in P$，$Q\in X$，$g(Q)=gQg^{-1}$

由lemma7，X中的不动元素 $<N(P)$ 只有P.

由lemma3，$k=|X|\equiv 1 \pmod p$ □

G在 G/H_x 与 O_x 作用等价 $\longrightarrow$ $|O_x||H_x|=|G|$

- → Sylow I：G作用在G的所有p元子集上（p群均存在）
- → sylow II：给定的H作用到给定的P的陪集上（任子群可找到上位的任一p群共轭）→ sylow p群两两共轭
- → sylow III：
  - G在sylow P集族上作用（$k|m$）
  - sylow p子群在sylow P集族上作用（$k\equiv 1 \pmod p$）

sylow p群两两共轭 ↓ Sylow p子群唯一 ⇔ 有一个p群正规

$P \lhd N(P)$ → （$k|m$）

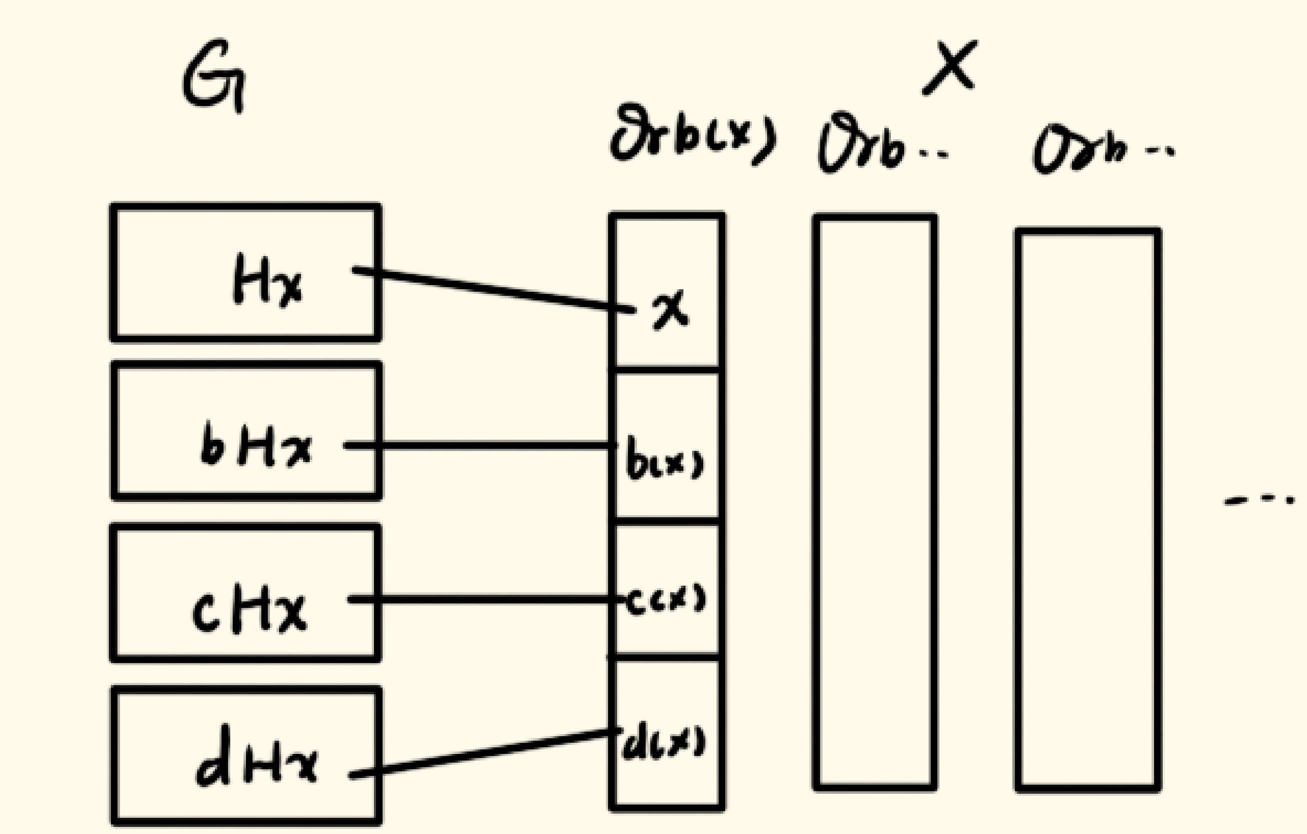
$P \lhd N(P)$ → $N(P)$仅有一个p子群

Sylow p子群唯一 → $N(P)$仅有一个p子群

$N(P)$仅有一个p子群 → （$k\equiv 1 \pmod p$）

$N(P)$仅有一个p子群 ↓ $N(N(P)) = N(P)$

sylow p 在集合X上作用且 $p\nmid |X|$
则必有不动元素k个，$k\equiv |X| \pmod p$



不同的对x作用效果不同