

$e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ 一阶树图散射截面计算

Kaiser

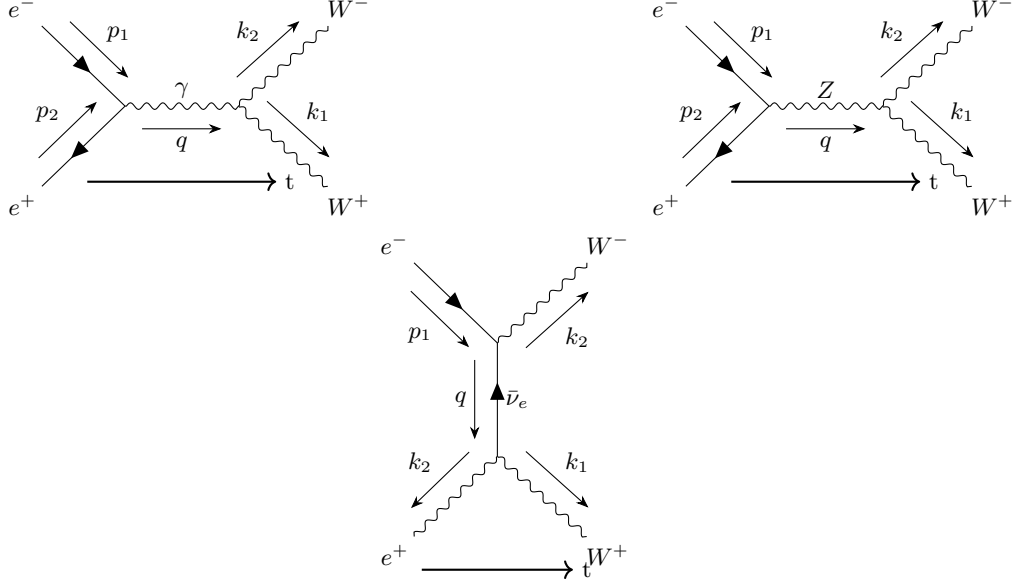
2025 年 5 月 6 日

目录

1	从拉格朗日量到费曼规则	2
1.1	QED 的费曼规则	2
1.2	电弱理论的费曼规则	5
1.2.1	从 QED 的计算当中得到的一些启发	5
1.2.2	电弱理论的拉格朗日量	5
1.2.3	拉格朗日量的展开	6
2	计算过程	8
2.1	计算 M_γ	8
2.1.1	光子传播子	9
2.1.2	电子光子顶点因子	9
2.1.3	$\gamma W^+ W^-$ 顶点因子	9
2.1.4	极化玻色子矢量	11
3	计算散射截面	11
3.1	计算 $\sigma_{\gamma\gamma}$	12
3.2	计算 σ_{ZZ}	14
3.3	计算 $\sigma_{Z\gamma}$	15
3.4	计算 $\sigma_{\nu\nu}$	15
3.5	计算 $\sigma_{Z\nu}$	15
3.6	计算 $\sigma_{\gamma\nu}$	15
4	计算结果以及可视化	15

摘要

这篇文章主要是一次费曼图的计算练习，从而熟悉费曼图的计算方法。计算过程： $e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$ 计算的是树图，因此一共只有三个过程：



接下来我们将先依次计算他们的散射振幅 $M_\gamma, M_Z, M_{\bar{\nu}_e}$ ，然后再计算出总散射截面，最终可可视化各个过程的散射截面对总散射截面的贡献。

1 从拉格朗日量到费曼规则

1.1 QED 的费曼规则

首先，我们给出带协变规范固定项的 QED 拉格朗日量 [6]：

$$\mathcal{L}_{QED} = \frac{1}{2} A^\mu(x) \left[\square g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial^\mu \right) \right] A^\nu(x) + \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) - e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) \quad (1)$$

其中， $A^\mu(x)$ 是光子场， $\psi(x)$ 是电子场， \square 为达朗贝尔算符， $g_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规， ξ 是规范固定参数， m 是电子质量， e 是电子电荷。

接下来，我们将拉格朗日量转化为费曼规则，首先考虑第一部分：

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} A^\mu(x) \left[\square g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial^\mu \right) \right] A^\nu(x) \quad (2)$$

首先简写一下，将中间部分定义为一个大的算符 $P_{\mu\nu}(x)$ ，

$$P_{\mu\nu}(x) = \square g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial^\mu \right) \quad (3)$$

接着将我们的拉格朗日量通过傅里叶变换进入到动量空间当中,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\mu(q) \quad (4)$$

于是我们有:

$$\partial_\mu \rightarrow -iq_\mu, \quad \square \rightarrow -q^2 \quad (5)$$

通过这个变换, 我们将可以把 $P_{\mu\nu}(x)$ 写成:

$$P_{\mu\nu}(q) = -q^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) q_\mu q_\nu \quad (6)$$

考虑到, $P_{\mu\sigma}(q) (P^{-1})^{\sigma\nu}(q)$ 求得为 $g_\mu^\nu = I$, 因此我们设逆矩阵的形式为

$$(P^{-1})^{\mu\nu} = a(q) g_{\mu\nu} + b(q) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \quad (7)$$

代入进行计算, 便可以求得 $a(q), b(q)$

$$a(q) = -\frac{1}{q^2}, \quad b(q) = \frac{1-\xi}{q^2} \quad (8)$$

因此我们可以得到

$$(P^{-1})^{\mu\nu} = -\frac{1}{q^2} g^{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{q^4} q^\mu q^\nu \quad (9)$$

$$= \frac{i}{q^2} \left[i g^{\mu\nu} - i(1-\xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (10)$$

接下来, 再乘上一个 i , 我们就可以得到光子传播子的费曼规则:

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{q^2} \left[-g^{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (11)$$

其费曼图我们表示为

$$\begin{array}{c} \mu \text{ ~~~~~ } \nu \\ \xrightarrow{q} \end{array}$$

接着我们考虑第二部分:

$$\mathcal{L}_{ee} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (12)$$

首先我们将拉格朗日量进行傅里叶变换, 得到:

$$\mathcal{L}_{ee} = \bar{\tilde{\psi}}(q) (\not{q} - m) \tilde{\psi}(q) \quad (13)$$

和在计算光子传播子过程一样，我们让

$$(\not{q} - m) S_F(q) = 1 \quad (14)$$

求解并乘上 i 可得费曼传播子

$$S_F(q) = \frac{i}{\not{q} - m} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \quad (15)$$

而我们的第三项，是一个光子场和两个电子场的耦合项，通过这一项，我们可以得到电子光子相互作用的顶点因子，还是给出这一部分的拉格朗日量

$$\mathcal{L}_{e\gamma} = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \quad (16)$$

同样的，我们将拉格朗日量进行傅里叶变换，得到：

$$\mathcal{L}_{e\gamma e} = e \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i(p_2 + p_1 - q)x} \bar{\psi}(p_2)\gamma^\mu \tilde{A}_\mu(q)\tilde{\psi}(p_1) \quad (17)$$

我们考虑的过程是一个 $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ 的正负电子对湮灭过程，通过观察一下我们的指数部分，得到动量守恒的条件

$$p_2 + p_1 = q$$

接下来继续计算一下 $SMatrix$ 矩阵元，

$$S = T \exp \left(\int d^D x \mathcal{L}_{e\gamma e}(x) \right) \quad (18)$$

我们可以得到其一阶围绕展开部分

$$S^1 = i \int d^D x \mathcal{L}_{e\gamma e}(x)$$

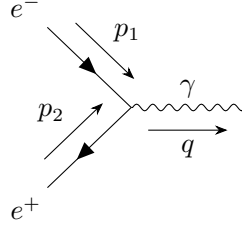
计算可以得到

$$S^1 = ie \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(p_2 + p_1 - q) \bar{\psi}(p_2)\gamma^\mu \tilde{A}_\mu(q)\tilde{\psi}(p_1)$$

从中，我们可以得到一个部分，也就是我们的 $e^- \gamma e^+$ 顶点因子

$$\mathcal{V}_\mu = -ie\gamma^\mu \quad (19)$$

其对应的费曼图为



到此我们几乎计算完了我们的 QED 当中的所有的顶点因子。

1.2 电弱理论的费曼规则

1.2.1 从 QED 的计算当中得到的一些启发

在本节的前面一般的部分，我们示例性的计算出来了 QED 的费曼规则，接下来我们需要计算的是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的费曼规则，但在计算前，我们先给一个比较基本的目标（这时我们从计算 QED 的过程当中得到的一些经验）

结构	来源	费曼规则
二次项	规范场的动能项、质量项	传播子
三次项、四次项（甚至更多）	规范场的相互作用项	顶点因子

1.2.2 电弱理论的拉格朗日量

接下来我们给出电弱理论的拉格朗日量，我们将其分成三项，分别是自由动能项、质量项和规范固定项 [1]：

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_{mass} = m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi_W} \text{Re}[(\partial^\mu W_\mu^+)(\partial^\nu W_\nu^-)] - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial^\mu Z_\mu)(\partial^\nu Z_\nu) - \frac{1}{2\xi_\gamma}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) \quad (22)$$

其中，

1. $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon_{bc}^a W_\mu^b W_\nu^c$ ，此为 $SU(2)$ 的规范场强，蓝色的部分为 W^+W^- 的动能项，红色部分为非阿贝尔项，也导致了三规范玻色子耦合；
2. $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ，此为 $U(1)$ 的规范场强；

这两项便是所有的电弱玻色子的相互作用来源，这时候我们再引入玻色子（也就是我们在质量项和规范固定项当中所提到的）

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (23)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \quad (24)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \quad (25)$$

电磁相互作用耦合常数（电荷）为： $e = g \sin \theta_W$

1.2.3 拉格朗日量的展开

接下来我们需要做的，将拉格朗日量当中的指标缩并给展开（这是真让人头大，算了，我小半天终于展开完了，不难，但是小细节挺多的，一停下来就忘了自己刚刚算到哪儿了）。

第一步，我们将规范场 $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu$ 给转化为规范玻色子的形式（即 $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu, A_\mu$ ），通过式 (23), (24), (25) 可以得到：

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^- + W_\mu^+) \quad (26)$$

$$W_\mu^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(W_\mu^- - W_\mu^+) \quad (27)$$

$$W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W \quad (28)$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W \quad (29)$$

这也就有

$$\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) + (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \quad (30)$$

$$\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \quad (31)$$

第二步，我们需要将我们刚刚得到的式 (30)、(31)、(28)、(29) 代入到拉格朗日量当中，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kinetic}^{W^\pm} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)^2 \\
&= -\frac{1}{8} [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) + (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] [(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) + \\
&\quad (\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+})] + \frac{1}{8} [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) - \\
&\quad (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] [(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) - (\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+})] \\
&= -\frac{1}{4} [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) (\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+}) + (\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-})
\end{aligned}$$

接着再添加上我们的规范固定项和质量项，就可以得到 W^\pm 玻色子的自由拉格朗日量

$$\mathcal{L}_{free}^{W^\pm} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) + \frac{1}{2\xi_W} \mathbf{Re} [(\partial^\mu W_\mu^+) (\partial^\nu W_\nu^-)] + m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \quad (32)$$

与计算 QED 时一样，我们将拉格朗日量转化到动量空间当中，主要的变换关系为

$$\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu, \quad \partial^\mu \rightarrow -ip^\mu \quad (33)$$

首先是将 W^\pm 的场变换到动量空间当中

$$\begin{aligned}
W_\mu^+ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{W}_\mu^+(p) \\
W_\mu^- &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{W}_\mu^-(p)
\end{aligned}$$

接着便可得到动量空间的拉格朗日量

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kinetic}^{W^\pm}(p) &= \frac{1}{2} (p_\mu p^\mu \tilde{W}_\nu^+ \tilde{W}^{-\nu} - p_\mu p^\nu \tilde{W}_\nu^+ \tilde{W}^{-\mu} - p_\nu p^\mu \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\nu} + p_\nu p^\nu \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu}) \\
&= p^2 g^{\mu\nu} \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}_\nu^- - (p \cdot \tilde{W}^+) (p \cdot \tilde{W}^-) \\
\mathcal{L}_{mass}^{W^\pm} &= m_W^2 \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu} = m_w^2 \tilde{W}_\mu^+ g^{\mu\nu} \tilde{W}_\nu^- \\
&= g^{\mu\nu} m_w^2 \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}_\nu^- \\
\mathcal{L}_{gauge}^{W^\pm} &= -\frac{1}{2\xi_W} 2 (-ip_\mu \tilde{W}_\mu^+) (-ip^\nu \tilde{W}^{-\nu}) \\
&= \frac{1}{\xi_W} (p \cdot \tilde{W}^+) (p \cdot \tilde{W}^-) \\
\mathcal{L}_{free}^{W^\pm} &= \mathcal{L}_{kinetic}^{W^\pm} + \mathcal{L}_{mass}^{W^\pm} + \mathcal{L}_{gauge}^{W^\pm} \\
&= -\tilde{W}_\mu^+ \left[- (p^2 - m_W^2) g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_W} \right) p^\mu p^\nu \right] \tilde{W}_\nu^-
\end{aligned}$$

和之前在计算 QED 的时候一样，我们可以得到 W^\pm 的传播子

$$D_{\mu\nu}^{W^\pm}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_W^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - m_W^2 \xi} (\xi_W - 1) \right] \quad (34)$$

同理，我们还可以计算得出 Z 玻色子的传播子以及电弱理论的光子的自由拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_{free}^Z(p) = -\tilde{Z}_\mu^+ \left[-(p^2 - m_Z^2) g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_Z} \right) p^\mu p^\nu \right] \tilde{Z}_\nu^- \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{free}^\gamma(p) = -\tilde{A}_\mu^+ \left[-p^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_\gamma} \right) p^\mu p^\nu \right] \tilde{A}_\nu^- \quad (36)$$

接着也仍然是一样的步骤，这里便不再赘述，直接给出答案（太难算了，写了好几页，实在是没力气敲下去了）

$$D_{\mu\nu}^Z(p) = -\frac{i}{p^2 - m_Z^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - m_Z^2 \xi} (\xi_Z - 1) \right] \quad (37)$$

$$D_{\mu\nu}^\gamma(p) = -\frac{i}{p^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 \xi} (\xi_\gamma - 1) \right] \quad (38)$$

当然，这里通过电弱理论得到的光子传播子和 QED 的光子传播子是一样的，这也说明了其正确性（当然，其实一开始我们知道有 $U(1)$ 对称性时我们就应该知道，光子场的形式一定是不变的）

这里一般有三种规范 [3]

1. Feynman 规范 ($\xi = 1$)
2. Landau 规范 ($\xi = 0$)
3. Coulomb 规范 ($\xi \rightarrow \infty$)

我们正常用的都是 Feynman 规范，所以传播子一般都是（分母一般还会加上一个 $i\epsilon$ ，这代表着这些玻色子的衰变率）

$$D_{\mu\nu}^{W^\pm}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} \quad (39)$$

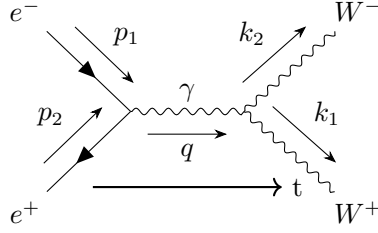
$$D_{\mu\nu}^Z(p) = -\frac{i}{p^2 - m_Z^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} \quad (40)$$

$$D_{\mu\nu}^\gamma(p) = -\frac{i}{p^2} g_{\mu\nu} \quad (41)$$

2 计算过程

2.1 计算 M_γ

首先我们需要计算 M_γ ，我们可以通过计算 M_γ 的各个部分来得到 M_γ ，首先给出费曼图：



然后，我们给出其顶点因子以及传播子等：

2.1.1 光子传播子



$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \quad (42)$$

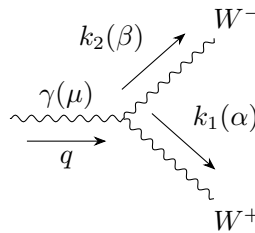
其中 $q = p_1 + p_2$, 此为系统的总动量

2.1.2 电子光子顶点因子

这是标准 QED 顶点，其为 $-ie\gamma^\mu$ ，我们的正电子旋量为 $\tilde{v}(p_2)$ ，电子旋量为 $u(p_1)$ ，因此我们有：

$$= \tilde{v}(p_2) - ie\gamma^\mu u(p_1) \quad (43)$$

2.1.3 $\gamma W^+ W^-$ 顶点因子



$$V_{\alpha\beta\mu} = ie \left[i(k_1 - k_2)_\mu g_{\alpha\beta} + i(q - k_2)_\alpha g_{\beta\mu} + i(k_2 - q)_\beta g_{\mu\alpha} \right] \quad (44)$$

由于 QED 当中的电子光子顶点因子太过于常见，我们没有给出其来源，但是 $\gamma W^+ W^-$ 顶点因子对我而言并不是一个很 trivial 的东西，因此我还是给出一部分原因。

给出 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范动能项：

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (45)$$

其中

1. $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, 此为 $SU(2)$ 的规范场强, 蓝色的部分为 W^+W^- 的动能项, 红色部分为非阿贝尔项, 也导致了三规范玻色子耦合;
2. $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, 此为 $U(1)$ 的规范场强;

这两项便是所有的电弱玻色子的相互作用来源, 这时候我们再引入玻色子

1. $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$
2. $Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu$
3. $A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu$

电磁相互作用耦合常数 (电荷) 为: $e = g \sin\theta_W$

此时, 我们需要计算的是 γW^+W^- 的顶点因子, 需要注意的是我们的三玻色子顶点来源于

$$g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (46)$$

接着代入 A 与 W^\pm , 首先是计算出平方项

$$W_{\mu\nu}^\alpha W^{\alpha\mu\nu} = (\partial_\mu W_\nu^\alpha)^2 + 2g\epsilon^{abc}(\partial_\mu W_\nu^\alpha)W^{b\mu}W^{c\nu} + g^2(\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c)^2$$

事实上, 我们这里计算的是 γW^+W^- 的三顶点因子, 因此我们只取三线性项, 即 $(\partial W W W)$ 。于是, 我们将会取 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范拉格朗日项的三线性项

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3-gauge} &= -\frac{1}{4} \cdot 2g\epsilon^{abc}(\partial_\mu W_\nu^\alpha)W^{b\mu}W^{c\nu} \\ &= -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}(\partial_\mu W_\nu^\alpha)W^{b\mu}W^{c\nu} \\ &= -g\sin\theta_W [(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)W^{-\mu}A^\nu + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)W^{+\mu}A^\nu] \end{aligned}$$

而为了满足规范不变性, 还需要加上 $W^+W^-\partial A$ 项, 即

$$\mathcal{L}_{\gamma WW} = -g\sin\theta_W [(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)W^{-\mu}A^\nu + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)W^{+\mu}A^\nu + W_\mu^+ W_\nu^- (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \quad (47)$$

对于此拉格朗日量的规范对称性也容易验证, 只需 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ 代入即可, 最终可以得到

$$\delta\mathcal{L}_{\gamma WW} = -e[W_\mu^+ W_\nu^- (\partial^\mu \partial^\nu \alpha - \partial^\nu \partial^\mu \alpha)] = 0$$

很显然我们的三玻色子顶点是满足规范不变性的

2.1.4 极化玻色子矢量

3 计算散射截面

在计算之前，先定义几个常用的量

$$1. \ s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$$

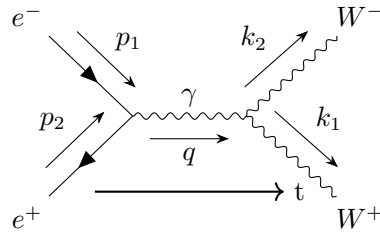
$$2. \ t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2$$

$$3. \ u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2$$

在我们的这个过程当中，存在有这样的关系

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p_2^2 = m_e^2 \\ k_1^2 &= k_2^2 = m_W^2 \\ p_1 \cdot p_2 &= \frac{s - 2m_e^2}{2} \\ k_1 \cdot k_2 &= \frac{s - 2m_W^2}{2} \\ (k_1 - k_2)^2 &= 4m_W^2 - s \\ (p_1 - p_2)^2 &= 4m_e^2 - s \\ p_1 \cdot k_1 &= p_2 \cdot k_2 = \frac{1}{2} (m_e^2 + m_W^2 - t) \\ p_1 \cdot k_2 &= p_2 \cdot k_1 = \frac{1}{2} (m_e^2 + m_W^2 - u) \end{aligned}$$

接下来我们给出三个过程的散射矩阵元，首先给出费曼图：



$$\begin{aligned}
M_\gamma &= \bar{v}(p_1)(ie\gamma^\mu)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}(-ie)\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right](\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^*) \\
&= -\frac{ie^2}{q^2}[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)]g_{\mu\nu}\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= -\frac{ie^2}{q^2}\mathcal{J}_\gamma^\mu g_{\mu\nu}V^{\nu\alpha\beta}\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^* \\
M_Z &= \left[\bar{v}(p_1)\left(-i\frac{g_w}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu(g_V^e - g_A^e\gamma^5)u(p_2)\right)\right]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_Z^2}(-ig_w\cos\theta_W)\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta\right. \\
&\quad \left.+ g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right](\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^*) \\
&= -\frac{ig_w^2}{2(s-m_Z^2)}[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu(g_V^e - g_A^e\gamma^5)u(p_2)]g_{\mu\nu}\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu\right. \\
&\quad \left.+ g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right](\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^*) \\
&= -\frac{ig_w^2}{2(s-m_Z^2)}\mathcal{J}_Z^\mu g_{\mu\nu}V^{\nu\alpha\beta}\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^* \\
M_\nu &=
\end{aligned}$$

非常方便的是，我们可以将后面 $V^{\nu\alpha\beta}\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^*$ 的部分可以进一步化简，变成更为简便的表达式

$$\begin{aligned}
V^{\nu\alpha\beta}\epsilon_{1\alpha}^*\epsilon_{2\beta}^* &= \left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= \left[g^{\nu\alpha}k_2^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu - g^{\beta\nu}k_1^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= [k_2^\nu + 4(k_1-k_2)^\nu - k_1^\nu] - \frac{1}{m_W^2}[k_2^2k_1^\nu + (k_1\cdot k_2)(k_1-k_2)^\nu - k_1^2k_2^\nu] \\
&= \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)^\nu
\end{aligned}$$

3.1 计算 $\sigma_{\gamma\gamma}$

首先我们需要计算 $|M_\gamma|^2$

$$|M_\gamma|^2 = \frac{g_e^4}{s^2}[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)][\bar{u}(p_2)\gamma^\nu v(p_1)]\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)_\mu\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)_\nu$$

接下来我们分别计算前面一部分和后面一部分，首先是前半部分

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2)] [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu v(p_1)] &= \frac{1}{4} \text{Tr} [(p_1 - m_e) \gamma^\mu (p_2 + m_e) \gamma^\nu] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [(\gamma^\sigma p_{1\sigma} - m_e) \gamma^\mu (\gamma^\rho p_{2\rho} + m_e) \gamma^\nu] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu p_{1\sigma} p_{2\rho} + \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu m_e p_{1\sigma} - \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu m_e p_{2\rho} + \gamma^\mu \gamma^\nu m_e^2] \\
&= (g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} - g^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} + g^{\sigma\nu} g^{\mu\rho}) p_{1\sigma} p_{2\rho} + 0 + 0 + m_e^2 g^{\mu\nu} \\
&= p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2 - m_e^2) g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

接下来将我们前面得到的极化求和部分和电子流的部分结合起来，就可以得到完整的散射振幅

$$\begin{aligned}
|M_\gamma|^2 &= \frac{g_e^4}{s^2} [p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2 - m_e^2) g^{\mu\nu}] \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (k_1 - k_2)_\nu (k_1 - k_2)_\mu \\
&= \frac{g_e^4}{s^2} \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 [2 p_1 \cdot (k_1 - k_2) p_2 \cdot (k_1 - k_2) - (p_1 \cdot p_2 - m_e^2) (k_1 - k_2)^2] \\
&= \frac{g_e^4}{s^2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 [(u - t)^2 + (s - 4m_e^2) (s - 4m_W^2)] \\
&= -\frac{g_e^4}{2s^2} \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 [(u - t)^2 + (s - 4m_e^2) (s - 4m_W^2)] \\
&= -\frac{g_e^4}{2s^2} \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (s - 4m_e^2) (s - 4m_W^2) (1 + \cos^2 \theta)
\end{aligned}$$

另外我们的散射截面与散射矩阵元的关系有

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\
&= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\phi d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d\Omega} d(\cos\theta) \\
&= -\frac{1}{32\pi s} \int_{-1}^1 \frac{|p_f|}{|p_i|} |M_\gamma|^2 d(\cos\theta)
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
\frac{|p_f|}{|p_i|} &= \sqrt{\frac{s - 4m_W^2}{s - 4m_e^2}} \\
g_e &= \sqrt{4\pi\alpha}
\end{aligned}$$

通过简单的积分计算，我们得到了

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{2\pi\alpha^2}{3s^3} \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}} (s - 4m_W^2)^{\frac{3}{2}} \quad (48)$$

3.2 计算 σ_{ZZ}

首先是计算 $|M_Z|^2$

$$|M_Z|^2 = \frac{g_w^4}{4(s - m_Z^2)^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu (g_V^e - g_A^e\gamma^5) u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu (g_V^e + g_A^e\gamma^5) v(p_2)] \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu$$

将前半部分的电子流部分计算出来

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu (g_V^e - g_A^e\gamma^5) u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu (g_V^e + g_A^e\gamma^5) v(p_2)] &= \frac{1}{4} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) \text{Tr} [(p_1 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{4} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) \text{Tr} [(\gamma^\sigma p_{1\sigma} - m_e) \gamma^\mu (\gamma^\rho p_{2\rho} + m_e) \gamma^\nu] \\ &= (g_V^{e2} + g_A^{e2}) [p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2 - m_e^2) g^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

接下来就可以算出完整的散射振幅

$$\begin{aligned} |M_Z|^2 &= \frac{g_w^4}{4(s - m_Z^2)^2} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) [p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2 - m_e^2) g^{\mu\nu}] \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu \\ &= \frac{g_w^4}{4(s - m_Z^2)^2} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 [(u - t)^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_W^2)] \\ &= -\frac{g_w^4}{8(s - m_Z^2)^2} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 [(u - t)^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_W^2)] \\ &= -\frac{g_w^4}{8(s - m_Z^2)^2} (g_V^{e2} + g_A^{e2}) \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (s - 4m_e^2)(s - 4m_W^2)(1 + \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{g_w^4}{8(s - m_Z^2)^2} \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 \theta_W + 4\sin^4 \theta_W\right) \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (s - 4m_e^2)(s - 4m_W^2)(1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

将其代入到公式当中

$$\sigma_{ZZ} = -\frac{1}{32\pi s} \int_{-1}^1 \frac{|p_f|}{|p_i|} |M_Z|^2 d(\cos \theta)$$

将会得到

$$\sigma_{ZZ} = \frac{\pi\alpha^2}{12s(s - m_Z^2)^2} \frac{1 - 4\sin^2 \theta_W + 8\sin^4 \theta_W}{\sin^4 \theta_W} \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2 (s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}} (s - 4m_W^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \cos^2 \theta) \quad (49)$$

3.3 计算 $\sigma_{Z\gamma}$

需要注意的是，这种干涉项的计算很容易将一部分给遗漏了，以 $Z\gamma$ 两个过程的干涉为例，我们的干涉散射振幅为

$$|M_{Z\gamma}|^2 = M_Z^* M_\gamma + M_Z M_\gamma^*$$

3.4 计算 $\sigma_{\nu\nu}$

3.5 计算 $\sigma_{Z\nu}$

3.6 计算 $\sigma_{\gamma\nu}$

4 计算结果以及可视化

经过我们的计算，我们最终可以将结果总结为 [1]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\nu\nu} &= \sigma_1 \\ \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} &= x^2 \sigma_2 \\ \bar{\sigma}_{ZZ} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) \frac{s^2}{(s - m_z^2)^2} \sigma_2 \\ \bar{\sigma}_{Z\gamma} &= 2 \left(\frac{1}{4} - x\right) \frac{s}{(s - m_z^2)} \sigma_2 \\ \bar{\sigma}_{\nu Z} &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{s}{(s - m_z^2)} \sigma_3 \\ \bar{\sigma}_{\gamma\nu} &= -x \sigma_3 \\ \sigma_{tot} &= \frac{\pi\alpha^2}{8x^2} \beta \frac{1}{s} \sum_{ij} \bar{\sigma}_{ij}\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2 \frac{s}{m_W^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{s}{m_W^2}\right)^2 \beta^2 + 4 \left(\frac{1 - 2m_W^2}{s} \frac{L}{\beta} - 1\right) \\ \sigma_2 &= 16 \frac{s}{m_W^2} \beta^2 + \frac{2}{3} \beta^2 \left[\left(\frac{s}{m_W^2}\right)^2 - 4 \frac{s}{m_W^2} + 12 \right] \\ \sigma_3 &= 16 - 32 \frac{m_W^2}{s} \frac{L}{\beta} + 8 \beta^2 \frac{s}{m_W^2} + \frac{1}{3} \beta^2 \left(\frac{s}{m_W^2}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{m_W^2}{s}\right) + 4 \left(1 - 2 \frac{m_W^2}{s}\right) - 16 \left(\frac{m_W^2}{s}\right)^2 \frac{L}{\beta}\end{aligned}$$

其中，我们的 $\beta = \left(1 - 4\frac{m_W^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x = \sin^2 \theta_W$, $L = \ln \left| \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right|$

参考文献

- [1] Eugene D Commins, Philip H Bucksbaum, and William I Weisberger. Weak interactions of leptons and quarks. *American Journal of Physics*, 53(1):92–93, 1985.
- [2] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook. Wiley, 2008.
- [3] E. A. Paschos. *Electroweak Theory*. Cambridge University Press, 2023.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [5] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1994.
- [6] Stefan Weinzierl. Feynman diagrams. 2025.