$e^- + e^+ \to W^- + W^+$ 一阶树图散射截面计算

Kaiser

2025 年 5 月 5 日

目录

1 从拉格朗日量到费曼规则 **2**
1.1 QED 的费曼规则 2
1.2 电弱理论的费曼规则 5
1.2.1 从 QED 的计算当中得到的一些启发 5
1.2.2 电弱理论的拉格朗日量 5
1.2.3 拉格朗日量的展开 6

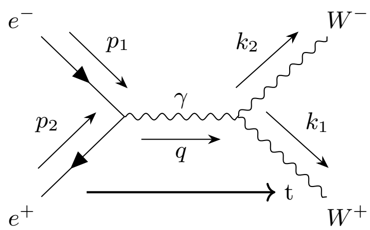
2 计算过程 **8**
2.1 计算 M_γ 8
2.1.1 光子传播子 9
2.1.2 电子光子顶点因子 9
2.1.3 $\gamma W^+ W^-$ 顶点因子 9
2.1.4 极化玻色子矢量 11

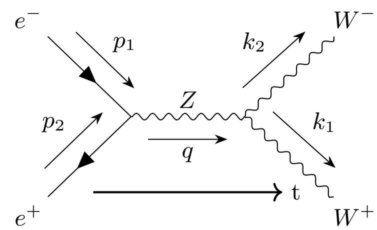
3 计算散射截面 **11**
3.1 计算 $\sigma_{\gamma\gamma}$ 12
3.2 计算 σ_{ZZ} 14

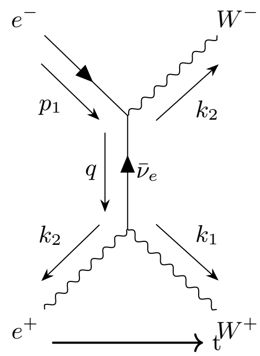
4 计算结果以及可视化 **14**

摘要

这篇文章主要是一次费曼图的计算练习，从而熟悉费曼图的计算方法。计算过程：$e^- + e^+ \to W^+ + W^-$ 计算的是树图，因此一共只有三个过程：







接下来我们将先依次计算他们的散射振幅 $M_\gamma, M_Z, M_{\bar{\nu}_e}$，然后再计算出总散射截面，最终可视化各个过程的散射截面对总散射截面的贡献。

1 从拉格朗日量到费曼规则

1.1 QED 的费曼规则

首先，我们给出带协变规范固定项的 QED 拉格朗日量 [5]：

$$\mathcal{L}_{QED} = \frac{1}{2}A^\mu(x)\left[\Box g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial^\nu\right)\right]A^\nu(x) + \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \tag{1}$$

其中，$A^\mu(x)$ 是光子场，$\psi(x)$ 是电子场，$\Box$ 为达朗贝尔算符，$g_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规，ξ 是规范固定参数，m 是电子质量，e 是电子电荷。

接下来，我们将拉格朗日量转化为费曼规则，首先考虑第一部分：

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}A^\mu(x)\left[\Box g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial^\nu\right)\right]A^\nu(x) \tag{2}$$

首先简写一下，将中间部分定义为一个大的算符 $P_{\mu\nu}(x)$,

$$P_{\mu\nu}(x) = \Box g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial^\nu\right) \tag{3}$$

接着将我们的拉格朗日量通过傅里叶变换进入到动量空间当中,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-iq\cdot x} \tilde{A}_\mu(q) \tag{4}$$

于是我们有:

$$\partial_\mu \to -iq_\mu, \qquad \Box \to -q^2 \tag{5}$$

通过这个变换,我们将可以把 $P_{\mu\nu}(x)$ 写成:

$$P_{\mu\nu}(q) = -q^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) q_\mu q_\nu \tag{6}$$

考虑到,$P_{\mu\sigma}(q)\left(P^{-1}\right)^{\sigma\nu}(q)$ 求得为 $g_\mu^\nu = I$, 因此我们设逆矩阵的形式为

$$(P^{-1})^{\mu\nu} = a(q) g_{\mu\nu} + b(q) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \tag{7}$$

代入进行计算,便可以求得 $a(q), b(q)$

$$a(q) = -\frac{1}{q^2}, \qquad b(q) = \frac{1-\xi}{q^2} \tag{8}$$

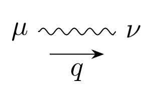
因此我们可以得到

$$\begin{aligned} (P^{-1})^{\mu\nu} &= -\frac{1}{q^2} g^{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{q^4} q^\mu q^\nu \qquad (9) \\ &= \frac{i}{q^2}\left[i g^{\mu\nu} - i(1-\xi)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \qquad (10) \end{aligned}$$

接下来,再乘上一个 i,我们就可以得到光子传播子的费曼规则:

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{q^2}\left[-g^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \tag{11}$$

其费曼图我们表示为



接着我们考虑第二部分:

$$\mathcal{L}_{ee} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) \tag{12}$$

首先我们将拉格朗日量进行傅里叶变换,得到:

$$\mathcal{L}_{ee} = \bar{\tilde{\psi}}(q)\left(\not{q} - m\right)\tilde{\psi}(q) \tag{13}$$

和在计算光子传播子过程一样，我们让

$$\left(\not{q}-m\right)S_F(q)=1 \tag{14}$$

求解并乘上 i 可得费曼传播子

$$S_F(q)=\frac{i}{\not{q}-m}=\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2} \tag{15}$$

而我们的第三项，是一个光子场和两个电子场的耦合项，通过这一项，我们可以得到电子光子相互作用的顶点因子，还是给出这一部分的拉格朗日量

$$\mathcal{L}_{e\gamma}=e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \tag{16}$$

同样的，我们将拉格朗日量进行傅里叶变换，得到：

$$\mathcal{L}_{e\gamma e}=e\int\frac{d^Dp'}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}e^{i(p_2+p_1-q)x}\bar{\tilde{\psi}}(p_2)\gamma^\mu\tilde{A}_\mu(q)\tilde{\psi}(p_1) \tag{17}$$

我们考虑的过程是一个 $e^-+e^+\to\gamma$ 的正负电子对湮灭过程，通过观察一下我们的指数部分，得到动量守恒的条件

$$p_2+p_1=q$$

接下来继续计算一下 $SMatrix$ 矩阵元，

$$S=T\exp\left(\int d^Dx\mathcal{L}_{e\gamma e}(x)\right) \tag{18}$$

我们可以得到其一阶围绕展开部分

$$S^1=i\int d^Dx\mathcal{L}_{e\gamma e}(x)$$

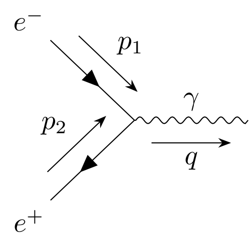
计算可以得到

$$S^1=ie\int\frac{d^Dp'}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}(2\pi)^D\delta^D(p_2+p_1-q)\bar{\tilde{\psi}}(p_2)\gamma^\mu\tilde{A}_\mu(q)\tilde{\psi}(p_1)$$

从中，我们可以得到一个部分，也就是我们的 $e^-\gamma e^+$ 顶点因子

$$\mathcal{V}_\mu=-ie\gamma^\mu \tag{19}$$

其对应的费曼图为



到此我们几乎计算完了我们的 QED 当中的所有的顶点因子。

1.2 电弱理论的费曼规则

1.2.1 从 QED 的计算当中得到的一些启发

在本节的前面一般的部分，我们示例性的计算出来了 QED 的费曼规则，接下来我们需要计算的是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的费曼规则，但在计算前，我们先给一个比较基本的目标（这时我们从计算 QED 的过程当中得到的一些经验）

结构	来源	费曼规则
二次项	规范场的动能项、质量项	传播子
三次项、四次项（甚至更多）	规范场的相互作用项	顶点因子

1.2.2 电弱理论的拉格朗日量

接下来我们给出电弱理论的拉格朗日量，我们将其分成三项，分别是自由动能项、质量项和规范固定项 [1]：

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{20}$$

$$\mathcal{L}_{mass} = m_W^2 W^+_\mu W^{-\mu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \tag{21}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi_W}\mathbf{Re}\left[\left(\partial^\mu W^+_\mu\right)\left(\partial^\nu W^-_\nu\right)\right] - \frac{1}{2\xi_Z}\left(\partial^\mu Z_\mu\right)\left(\partial^\nu Z_\nu\right) - \frac{1}{2\xi_\gamma}\left(\partial^\mu A_\mu\right)\left(\partial^\nu A_\nu\right) \tag{22}$$

其中，

1. $W^a_{\mu\nu} = \partial_m u W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^a{}_{bc}W^b_\mu W^c_\nu$, 此为 $SU(2)$ 的规范场强，蓝色的部分为 W^+W^- 的动能项，红色部分为非阿贝尔项，也导致了三规范玻色子耦合；
2. $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, 此为 $U(1)$ 的规范场强；

这两项便是所有的电弱玻色子的相互作用来源，这时候我们再引入玻色子（也就是我们在质量项和规范固定项当中所提到的）

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) && (23) \\ Z_\mu &= \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu && (24) \\ A_\mu &= \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu && (25) \end{aligned}$$

电磁相互作用耦合常数（电荷）为：$e = g\sin\theta_W$

1.2.3 拉格朗日量的展开

接下来我们需要做的，将拉格朗日量当中的指标缩并给展开（这是真让人头大，算了我小半天终于展开完了，不难，但是小细节挺多的，一停下来就忘了自己刚刚算到哪儿了）。

第一步，我们将规范场 $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu$ 给转化为规范玻色子的形式（即 $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu, A_\mu$），通过式 (23)，(24)，(25) 可以得到：

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^- + W_\mu^+\right) && (26) \\ W_\mu^2 &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(W_\mu^- - W_\mu^+\right) && (27) \\ W_\mu^3 &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu \cos\theta_W && (28) \\ B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W && (29) \end{aligned}$$

这也就有

$$\begin{aligned} \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) + \left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\right] && (30) \\ \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left[\left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) - \left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\right] && (31) \end{aligned}$$

第二步，我们需要将我们刚刚得到的式 (30)、(31)、(28)、(29) 代入到拉格朗日量当中，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kinetic}^{W^{\pm}} &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2\right)^2 \\
&= -\frac{1}{8}\left[\left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) + \left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\right]\left[\left(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}\right) + \right. \\
&\quad \left.\left(\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+}\right)\right] + \frac{1}{8}\left[\left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) - \right. \\
&\quad \left.\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\right]\left[\left(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}\right) - \left(\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right)\left(\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+}\right) + \left(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}\right)\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\left(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}\right)
\end{aligned}$$

接着再添加上我们的规范固定项和质量项，就可以得到 $W^{\pm}$ 玻色子的自由拉格朗日量

$$\mathcal{L}_{free}^{W^{\pm}} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right)\left(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}\right) + \frac{1}{2\xi_W}\mathbf{Re}\left[\left(\partial^\mu W_\mu^+\right)\left(\partial^\nu W_\nu^-\right)\right] + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \tag{32}$$

与计算 QED 时一样，我们将拉格朗日量转化到动量空间当中，主要的变换关系为

$$\partial_\mu \to -ip_\mu, \qquad \partial^\mu \to -ip^\mu \tag{33}$$

首先是将 $W^{\pm}$ 的场变换到动量空间当中

$$\begin{aligned}
W_\mu^+ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \tilde{W}_\mu^+(p) \\
W_\mu^- &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \tilde{W}_\mu^-(p)
\end{aligned}$$

接着便可得到动量空间的拉格朗日量

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kinetic}^{W^{\pm}}(p) &= \frac{1}{2}\left(p_\mu p^\mu \tilde{W}_\nu^+ \tilde{W}^{-\nu} - p_\mu p^\nu \tilde{W}_\nu^+ \tilde{W}^{-\mu} - p_\nu p^\mu \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\nu} + p_\nu p^\nu \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu}\right) \\
&= p^2 g^{\mu\nu} \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}_\nu^- - \left(p\cdot\tilde{W}^+\right)\left(p\cdot\tilde{W}^-\right) \\
\mathcal{L}_{mass}^{W^{\pm}} &= m_W^2 \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu} = m_w^2 \tilde{W}_\mu^+ g^{\mu\nu} \tilde{W}_\nu^- \\
&= g^{\mu\nu} m_w^2 \tilde{W}_\mu^+ \tilde{W}_\nu^- \\
\mathcal{L}_{gauge}^{W^{\pm}} &= -\frac{1}{2\xi_W} 2\left(-ip_\mu \tilde{W}_\mu^+\right)\left(-ip^\nu \tilde{W}^{-\nu}\right) \\
&= \frac{1}{\xi_W}\left(p\cdot\tilde{W}^+\right)\left(p\cdot\tilde{W}^-\right) \\
\mathcal{L}_{free}^{W^{\pm}} &= \mathcal{L}_{kinetic}^{W^{\pm}} + \mathcal{L}_{mass}^{W^{\pm}} + \mathcal{L}_{gauge}^{W^{\pm}} \\
&= -\tilde{W}_\mu^+\left[-\left(p^2 - m_W^2\right) g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_W}\right) p^\mu p^\nu\right] \tilde{W}_\nu^-
\end{aligned}$$

和之前在计算 QED 的时候一样，我们可以得到 $W^{\pm}$ 的传播子

$$D_{\mu\nu}^{W^{\pm}}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_W^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - m_W^2\xi}(\xi_W - 1)\right] \tag{34}$$

同理，我们还可以计算得出 Z 玻色子的传播子以及电弱理论的光子的自由拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_{free}^{Z}(p) = -\tilde{Z}_\mu^+\left[-\left(p^2 - m_Z^2\right)g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_Z}\right)p^\mu p^\nu\right]\tilde{Z}_\nu^- \tag{35}$$

$$\mathcal{L}_{free}^{\gamma}(p) = -\tilde{A}_\mu^+\left[-p^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_\gamma}\right)p^\mu p^\nu\right]\tilde{A}_\nu^- \tag{36}$$

接着也仍然是一样的步骤，这里便不再赘述，直接给出答案（太难算了，写了好几页，实在是没力气敲下去了）

$$D_{\mu\nu}^{Z}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_Z^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - m_Z^2\xi}(\xi_Z - 1)\right] \tag{37}$$

$$D_{\mu\nu}^{\gamma}(p) = -\frac{i}{p^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2\xi}(\xi_\gamma - 1)\right] \tag{38}$$

当然，这里通过电弱理论得到的光子传播子和 QED 的光子传播子是一样的，这也说明了其正确性（当然，其实一开始我们知道有 $U(1)$ 对称性时我们就应该知道，光子场的形式一定是不变的）

这里一般有三种规范 [2]

1. Feynman 规范（$\xi = 1$）
2. Landau 规范（$\xi = 0$）
3. Coulomb 规范（$\xi \to \infty$）

我们正常用的都是 Feynman 规范，所以传播子一般都是（分母一般还会加上一个 $i\epsilon$，这代表着这些玻色子的衰变率）

$$D_{\mu\nu}^{W^{\pm}}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon}g_{\mu\nu} \tag{39}$$

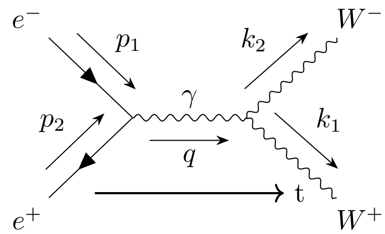
$$D_{\mu\nu}^{Z}(p) = -\frac{i}{p^2 - m_Z^2 + i\epsilon}g_{\mu\nu} \tag{40}$$

$$D_{\mu\nu}^{\gamma}(p) = -\frac{i}{p^2}g_{\mu\nu} \tag{41}$$

2 计算过程

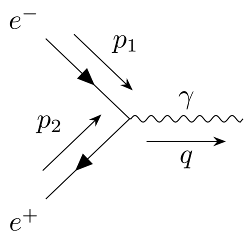
2.1 计算 M_γ

首先我们需要计算 M_γ，我们可以通过计算 M_γ 的各个部分来得到 M_γ，首先给出费曼图:



然后，我们给出其顶点因子以及传播子等:

2.1.1 光子传播子



$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \tag{42}$$

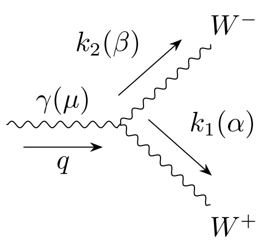
其中 $q = p_1 + p_2$, 此为系统的总动量

2.1.2 电子光子顶点因子

这是标准 QED 顶点，其为 $-ie\gamma^\mu$，我们的正电子旋量为 $\tilde{v}(p_2)$, 电子旋量为 $u(p_1)$，因此我们有:

$$= \tilde{v}(p_2) - ie\gamma^\mu u(p_1) \tag{43}$$

2.1.3 γW^+W^- 顶点因子



$$V_{\alpha\beta\mu} = ie\left[i(k_1 - k_2)_\mu g_{\alpha\beta} + i\left(q - k_2\right)_\alpha g_{\beta\mu} + i\left(k_2 - q\right)_\beta g_{\mu\alpha}\right] \tag{44}$$

由于 QED 当中的电子光子顶点因子太过于常见，我们没有给出其来源，但是 γW^+W^- 顶点因子对我而言并不是一个很 trival 的东西，因此我还是给出一部分原因。

给出 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范动能项:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{45}$$

其中

1. $W_{\mu\nu}^a = \partial_m u W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_n u^c$, 此为 $SU(2)$ 的规范场强, 蓝色的部分为 W^+W^- 的动能项，红色部分为非阿贝尔项，也导致了三规范玻色子耦合；

2. $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, 此为 $U(1)$ 的规范场强；

这两项便是所有的电弱玻色子的相互作用来源，这时候我们再引入玻色子

1. $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$

2. $Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu$

3. $A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu$

电磁相互作用耦合常数（电荷）为：$e = g\sin\theta_W$

此时，我们需要计算的是 γW^+W^- 的顶点因子，需要注意到的是我们的三玻色子顶点来源于

$$g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \tag{46}$$

接着代入 A 与 $W^\pm$，首先是计算出平方项

$$W_{\mu\nu}^\alpha W^{\alpha\mu\nu} = \left(\partial_\mu W_\nu^\alpha\right)^2 + 2g\epsilon^{abc}\left(\partial_\mu W_\nu^\alpha\right) W^{b\mu} W^{c\nu} + g^2\left(\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c\right)^2$$

事实上,我们这里计算的是 γW^+W^- 的三顶点因子,因此我们只取三线性项,即 (∂WWW)。于是，我们将会取 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范拉格朗日项的三线性项

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3-gauge} &= -\frac{1}{4}\cdot 2g\epsilon^{abc}\left(\partial_\mu W_\nu^\alpha\right) W^{b\mu} W^{c\nu} \\
&= -\frac{g}{2}\epsilon^{abc}\left(\partial_\mu W_\nu^\alpha\right) W^{b\mu} W^{c\nu} \\
&= -g\sin\theta_W\left[\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right) W^{-\mu} A^\nu + \left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) W^{+\mu} A^\nu\right]
\end{aligned}$$

而为了满足规范不变性，还需要加上 $W^+W^-\partial A$ 项，即

$$\mathcal{L}_{\gamma WW} = -g\sin\theta_W\left[\left(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+\right) W^{-\mu} A^\nu + \left(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-\right) W^{+\mu} A^\nu + W_\mu^+ W_\nu^-\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\right] \tag{47}$$

对于此拉格朗日量的规范对称性也容易验证，只需 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$ 代入即可，最终可以得到

$$\delta\mathcal{L}_{\gamma WW} = -e\left[W_\mu^+ W_\nu^-\left(\partial^\mu\partial^\nu\alpha - \partial^\nu\partial^\mu\alpha\right)\right] = 0$$

很显然我们的三玻色子顶点是满足规范不变性的

2.1.4 极化玻色子矢量

3 计算散射截面

在计算之前，先定义几个常用的量

1. $s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$

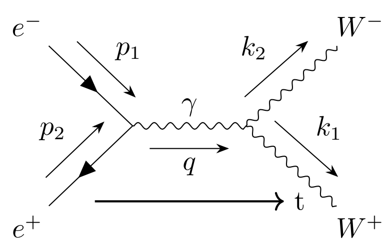
2. $t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2$

3. $u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2$

在我们的这个过程当中，存在有这样的关系

$$
\begin{aligned}
p_1^2 &= p_2^2 = m_e^2 \\
k_1^2 &= k_2^2 = m_W^2 \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{s - 2m_e^2}{2} \\
k_1 \cdot k_2 &= \frac{s - 2m_W^2}{2} \\
(k_1 - k_2)^2 &= 4m_W^2 - s
\end{aligned}
$$

接下来我们给出三个过程的散射矩阵元，首先给出费曼图：



$$
\begin{aligned}
M_\gamma &= \bar{v}(p_1)(ie\gamma^\mu)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}(-ie)\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left(\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta}\right) \\
&= -\frac{ie^2}{q^2}\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\right]g_{\mu\nu}\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= -\frac{ie^2}{q^2}\mathcal{J}^\mu_\gamma g_{\mu\nu}V^{\nu\alpha\beta}\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta} \\
M_Z &= \left[\bar{v}(p_1)\left(-i\frac{g_w}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu\left(g^e_V - g^e_A\gamma^5\right)u(p_2)\right)\right]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2-m_Z^2}(-ig_w\cos\theta_W)\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta\right. \\
&\quad \left.+g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left(\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta}\right) \\
&= -\frac{ig_w^2}{2\left(s-m_Z^2\right)}\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu\left(g^e_V - g^e_A\gamma^5\right)u(p_2)\right]g_{\mu\nu}\left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu\right. \\
&\quad \left.+g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left(\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta}\right) \\
&= -\frac{ig_w^2}{2\left(s-m_Z^2\right)}\mathcal{J}^\mu_Z g_{\mu\nu}V^{\nu\alpha\beta}\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta} \\
M_\nu &=
\end{aligned}
$$

非常方便的是，我们可以将后面 $V^{\nu\alpha\beta}\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta}$ 的部分可以进一步化简，变成更为简便的表达

$$
\begin{aligned}
V^{\nu\alpha\beta}\epsilon^*_{1\alpha}\epsilon^*_{2\beta} &= \left[g^{\nu\alpha}(q-k_1)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu + g^{\beta\nu}(k_2-q)^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= \left[g^{\nu\alpha}k_2^\beta + g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\nu - g^{\beta\nu}k_1^\alpha\right]\left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_{1\alpha}k_{2\beta}}{m_W^2}\right] \\
&= \left[k_2^\nu + 4(k_1-k_2)^\nu - k_1^\nu\right] - \frac{1}{m_W^2}\left[k_2^2k_1^\nu + (k_1\cdot k_2)(k_1-k_2)^\nu - k_1^2k_2^\nu\right] \\
&= \left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)^\nu
\end{aligned}
$$

3.1 计算 $\sigma_{\gamma\gamma}$

首先我们需要计算 $|M_\gamma|^2$

$$
|M_\gamma|^2 = \frac{g_e^4}{s^2}\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma^\nu v(p_1)\right]\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)_\mu\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)(k_1-k_2)_\nu
$$

接下来我们分别计算前面一部分和后面一部分，首先是前半部分

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma^\nu v(p_1)\right] &= \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m_e\right)\gamma^\nu\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left[\left(\gamma^\sigma p_{1\sigma} - m_e\right)\gamma^\mu\left(\gamma^\rho p_{2\rho} + m_e\right)\gamma^\nu\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left[\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu p_{1\sigma}p_{2\rho} + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu m_e p_{1\sigma} - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu m_e p_{2\rho} + \gamma^\mu\gamma^\nu m_e^2\right] \\
&= \left(g^{\sigma\mu}g^{\rho\nu} - g^{\sigma\rho}g^{\mu\nu} + g^{\sigma\nu}g^{\mu\rho}\right)p_{1\sigma}p_{2\rho} + 0 + 0 + m_e^2 g^{\mu\nu} \\
&= p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - \left(p_1\cdot p_2 - m_e^2\right)g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

接下来将我们前面得到的极化求和部分和电子流的部分结合起来，就可以得到完整的散射振幅

$$\begin{aligned}
|M_\gamma|^2 &= \frac{g_e^4}{s^2}\left[p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - \left(p_1\cdot p_2 - m_e^2\right)g^{\mu\nu}\right]\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2(k_1-k_2)_\nu(k_1-k_2)_\mu \\
&= \frac{g_e^4}{s^2}\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2\left[2\ p_1\cdot(k_1-k_2)p_2\cdot(k_1-k_2) - \left(p_1\cdot p_2 - m_e^2\right)(k_1-k_2)^2\right] \\
&= \frac{g_e^4}{s^2}(-\frac{1}{2})\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2\left[(u-t)^2 + \left(s - 4m_e^2\right)\left(s - 4m_W^2\right)\right] \\
&= -\frac{g_e^4}{2s^2}\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2\left[(u-t)^2 + \left(s - 4m_e^2\right)\left(s - 4m_W^2\right)\right] \\
&= -\frac{g_e^4}{2s^2}\left(3 - \frac{s}{2m_W^2}\right)^2\left(s - 4m_e^2\right)\left(s - 4m_W^2\right)\left(1 + \cos^2\theta\right)
\end{aligned}$$

另外我们的散射截面与散射矩阵元的关系有

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma} &= \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \\
&= \int\frac{d\sigma}{d\Omega}sin\theta d\phi d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{d\Omega}d(\cos\theta) \\
&= -\frac{1}{32\pi s}\int_{-1}^{1}\frac{|p_f|}{|p_i|}|M_\gamma|^2 d(\cos\theta)
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
\frac{|p_f|}{|p_i|} &= \sqrt{\frac{s-4m_W^2}{s-4m_e^2}} \\
g_e &= \sqrt{4\pi\alpha}
\end{aligned}$$

通过简单的积分计算，我们得到了

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{2\pi\alpha^2}{3s^3}\left(3-\frac{s}{2m_W^2}\right)^2\left(s-4m_e^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(s-4m_W^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{48}$$

3.2 计算 σ_{ZZ}

4 计算结果以及可视化

经过我们的计算，我们最终可以将结果总结为 [1]

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\nu\nu} &= \sigma_1 \\
\bar{\sigma}_{\gamma\gamma} &= x^2\sigma_2 \\
\bar{\sigma}_{ZZ} &= \left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)\frac{s^2}{\left(s-m_z^2\right)^2}\sigma_2 \\
\bar{\sigma}_{Z\gamma} &= 2\left(\frac{1}{4}-x\right)\frac{s}{\left(s-m_z^2\right)}\sigma_2 \\
\bar{\sigma}_{\nu Z} &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{s}{\left(s-m_z^2\right)}\sigma_3 \\
\bar{\sigma}_{\gamma\nu} &= -x\sigma_3 \\
\sigma_{tot} &= \frac{\pi\alpha^2}{8x^2}\beta\frac{1}{s}\sum_{ij}\bar{\sigma}_{ij}
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2\frac{s}{m_W^2}+\frac{1}{12}\left(\frac{s}{m_W^2}\right)^2\beta^2+4\left(\frac{1-2m_W^2}{s}\frac{L}{\beta}-1\right) \\
\sigma_2 &= 16\frac{s}{m_W^2}\beta^2+\frac{2}{3}\beta^2\left[\left(\frac{s}{m_W^2}^2-4\frac{s}{m_W^2}+12\right)\right] \\
\sigma_3 &= 16-32\frac{m_W^2}{s}\frac{L}{\beta}+8\beta^2\frac{s}{m_W^2}+\frac{1}{3}\beta^2\left(\frac{s}{m_W^2}\right)^2\left(1-2\frac{m_W^2}{s}\right)+4\left(1-2\frac{m_W^2}{s}\right)-16\left(\frac{m_W^2}{s}\right)^2\frac{L}{\beta}
\end{aligned}$$

其中，我们的 $\beta=\left(1-4\frac{m_W^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x=\sin^2\theta_W$, $L=\ln\left|\frac{1+\beta}{1-\beta}\right|$

参考文献

[1] Eugene D Commins, Philip H Bucksbaum, and William I Weisberger. Weak interactions of leptons and quarks. *American Journal of Physics*, 53(1), 1985.

[2] E. A. Paschos. *Electroweak Theory*. Cambridge University Press, 2023.

[3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.

[4] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1994.

[5] Stefan Weinzierl. Feynman diagrams. 2025.