第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

（一）　二阶矩过程

1．基本概念

注：以下讨论的随机过程都是复随机过程。

定义：设有随机过程$\{X(t), t \in T\}$，若对$\forall t \in T$，$X(t)$的均值和方差都存在，则称随机过程$\{X(t), t \in T\}$为二阶矩过程。

若$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$存在，我们令$\tilde{X}(t) = X(t) - \mu_X(t)$，则有$E\{\tilde{X}(t)\} = 0$，并且$\tilde{X}(t)$的二阶矩也是存在的，因此我们以后讨论的二阶矩过程一般都假定均值函数为零。

注：二阶矩过程的自协方差函数和自相关函数都是存在的。因为：

$$\mathrm{cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\}$$

因此有：

$$\left|\mathrm{cov}\{X(t_1), X(t_2)\}\right|^2 \le \left\{E\left|[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\right|\right\}^2$$

$$\le E\left|X(t_1) - \mu_X(t_1)\right|^2 \cdot E\left|X(t_2) - \mu_X(t_2)\right|^2$$

$$= D\{X(t_1)\} \cdot D\{X(t_2)\} < \infty$$

2．二阶矩过程相关函数的性质

定理：（共扼对称性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{R_{XX}(t_2, t_1)} \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

当$\{X(t), t \in T\}$是实的二阶矩过程时，有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

定理：（非负定性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，对于$\forall n \in N$，

$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，以及$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in C$，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R_{XX}(t_k, t_m)\lambda_k \overline{\lambda_m} \geq 0$$

（二）　平稳过程

1．严平稳过程

定义：若随机过程$\{X(t), t \in T\}$满足：对于$\forall n \in N$，任选$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,n$，以及任意的$\tau$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

则称此随机过程为严平稳随机过程。其中$F_X(\cdot)$是n维分布函数。

注 1：严平稳随机过程的一维分布函数与时间t无关。因此，如果严平稳随机过程的均值函数存在的话，则是一常数。

注 2：严平稳随机过程的任意二维分布函数只与时间差有关。因此，如果严平稳随机过程的二阶矩存在的话，则自相关函数只与时间差有关。

注 3：若上述的定义中的条件不是对于任意的n满足，而只是对于某个k满足时，即对于任意的$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,k$，任意的$\tau$，有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1, t_2, \cdots, t_k) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_k + \tau)$$

而对于$n > k$时，上述等式不成立，则称它为k级平稳的随机过程。如果过程为k级平稳的，那么当$n < k$时，上面的等式成立。

2．宽平稳随机过程

定义：设随机过程$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，如果它的均值函数是常数，自相关函数只是时间差$\tau = t_2 - t_1$的函数，则称此随机过程为宽平稳随机过程。

注 1：宽平稳随机过程是二阶矩过程，但不一定是严平稳随机过程。

注 2：对于严平稳随机过程，只有它二阶矩存在时，它才是宽平稳过程。

注 3：对于正态随机过程来说，严平稳就是宽平稳。

注 4：以下讨论平稳过程指的是宽平稳随机过程

3．宽平稳随机过程的性质

（1） 我们有：$R_{XX}(t_2-t_1)=\overline{R_{XX}(t_1-t_2)} \quad \forall t_1,t_2\in T$

或：　$R_{XX}(\tau)=\overline{R_{XX}(-\tau)} \quad \tau=t_2-t_1$，

对于实的随机过程，有：　$R_{XX}(\tau)=R_{XX}(-\tau) \quad \tau=t_2-t_1$　（偶函数）

（2） 我们有：$R_{XX}(0)\ge\left|\mu_X\right|^2$

（3） 我们有：$\left|R_{XX}(\tau)\right|\le R_{XX}(0)$，　$\left|C_{XX}(\tau)\right|\le C_{XX}(0)$

（4） 相关函数$R_{XX}(\tau)$具有非负定性，即对于$\forall n\in N \quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，

以及$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in C$，我们有：

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix} R_{XX}(t_1-t_1) & R_{XX}(t_1-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_1-t_n) \\ R_{XX}(t_2-t_1) & R_{XX}(t_2-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_2-t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{XX}(t_n-t_1) & R_{XX}(t_n-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_n-t_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \overline{\lambda_2} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_{XX}(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}\ge 0$$

4．例子：

（1）热（白）噪声：

设$\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一实随机序列，满足：（a）$\{X(n)\}$相互独立；（b）$X(n)\sim N(0,\sigma^2)$。求其均值和相关函数。

解：由：

$$\mu_X(n)=E\{X(n)\}=0$$

$$D_X(n)=E\{X^2(n)\}=\sigma^2$$

$$\begin{cases} E\{X(n+m)X(n)\}=0 & (m\neq 0) \\ E\{X(n+m)X(n)\}=\sigma^2 & (m=0) \end{cases}$$

因此：

$$R_X(m)=\begin{cases} \sigma^2 & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$$

所以它是一平稳随机序列。

（2）滑动平均：

设$\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一标准不相关序列，即满足：

$$E\{X(n)\}=0$$

$$E\{X(n)\overline{X(m)}\}=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

令$Y(n)=a_0X(n)+a_1X(n-1)+\cdots+a_sX(n-s)$，证明$\{Y(n)\}$是一平稳序列。其中$a_0,a_1,\cdots,a_s\in C$。

证明：显然：$\mu_Y(n)=E\{Y(n)\}=0$

$$\begin{aligned} R_Y(m)&=E\{Y(n+m)\overline{Y(n)}\} \\ &=E\left\{\sum_{k=0}^{s}a_kX(n+m-k)\overline{\sum_{i=0}^{s}a_iX(n-i)}\right\} \\ &=\sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}a_k\overline{a_i}E\{X(n+m-k)\overline{X(n-i)}\} \\ &=\sum_{0\le k\le s,0\le k-m\le s}a_k\overline{a_{k-m}} \end{aligned}$$

故$\{Y(n)\}$是一平稳序列。

（3）设有复随机过程$X(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k\ (1\le k\le N)$是相互独立的随机变量，且$\eta_k\sim N(0,\sigma_k^2)$，$\omega_k$为常数。求$X(t)$的均值函数和相关函数，并说明是否是平稳过程？

解：由$\eta_k\ (1\le k\le N)$的独立性及均值为 0，显然有：

$$\mu_X(t)=E\{X(t)\}=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}\right\}$$
$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos\omega_k t+j\cdot\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin\omega_k t\right\}=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}$$
$$=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$
$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_k\overline{\eta_i}e^{j\omega_k t_1-j\omega_i t_2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k\tau}\quad(\tau=t_1-t_2)$$

由此可知 $X(t)$ 是一平稳的随机过程。

（4）设随机过程

$$\xi(t)=\begin{cases}Xt+a & T>t\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中T为一固定常数，随机变量X服从参数为$\lambda>0$的指数分布，a为一常数。求$E\{\xi(t)\xi(s)\}$，其中$t>s$。

解：由于随机变量X服从参数为$\lambda>0$的指数分布，即其分布密度为：

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\quad(x>0)$$

我们有：

$$E\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\lambda$$
$$E\{X^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\lambda^2$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\xi(s)\}=E\{[Xt+a][Xs+a]\}=$$
$$=E\{X^2ts+X(ta+sa)+a^2\}$$
$$=tsE\{X^2\}+(ta+sa)E\{X\}+a^2$$
$$=2ts\lambda^2+(t+s)a\lambda+a^2\quad(t>s)$$

（三）　正交增量过程

定义：设随机过程$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，若$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，有：

$$E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}=0$$

则称该过程为正交增量过程。

独立增量过程与正交增量过程的关系：对于独立增量过程$\{X(t), t\in T\}$，若它还满足：$E\{X(t)\}=a$，$E\{|X(t)|^2\}<\infty$，则该过程为正交增量过程。因为此时若任意取$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，由独立增量性，我们有：

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}\\&=E\{X(t_2)-X(t_1)\}E\{\overline{X(t_4)-X(t_3)}\}=0\end{aligned}$$

因此，均值为常数、存在二阶矩的独立增量过程一定是正交增量过程。反之，我们有非平稳随机过程的例子：

设$\{X(t), t\in[a,b]\}$为正交增量过程，规定$X(a)=0$，取$t_1=a$，$t_2=t_3=s$，$t_4=t\le b$，$t>s$，则由定义，有：

$$E\{X(s)[\overline{X(t)-X(s)}]\}=E\{X(s)\overline{X(t)}\}-E\{X(s)\overline{X(s)}\}=0$$

因此有：

$$E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{X(s)\overline{X(s)}\}=E\{|X(s)|^2\}\hat{=}F(s)$$

由此，我们有：

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(s)\quad(t>s)$$

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(t)\quad(t<s)$$

因此有：

$$R_{XX}(s,t)=F(\min(s,t))$$

这就意味着$\{X(t), t\in[a,b]\}$不是一平稳过程。

另外，当$t>s$时，由：

$$\begin{aligned}E\{|X(t)-X(s)|^2\} &= E\{X(t)\overline{X(t)}\}-E\{X(t)\overline{X(s)}\} \\ &\quad -E\{X(s)\overline{X(t)}\}+E\{X(s)\overline{X(s)}\} \\ &= F(t)-F(s)-F(s)+F(s)=F(t)-F(s)\ge 0\end{aligned}$$

可知，$F(t)$是一不减的函数。

注：设$\{X(t); t\ge 0\}$是一独立增量过程，且$X(0)=0$及它的二阶矩存在，我们令：

$$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$$

则由$\{X(t); t\ge 0\}$是独立增量性，可知$\{Y(t); t\ge 0\}$也具有独立增量性，且有：

$$Y(0)=0,\quad E\{Y(t)\}=0,\quad D_Y(t)=E\{Y^2(t)\}=D_X(t)$$

下面我们求$\{X(t); t\ge 0\}$的协方差函数：若$0\le s<t$

$$\begin{aligned}C_X(s,t) &= E\{Y(s)\overline{Y(t)}\} \\ &= E\left\{[Y(s)-Y(0)]\overline{[Y(t)-Y(s)+Y(s)]}\right\} \\ &= E\{Y(s)-Y(0)\}E\left\{\overline{Y(t)-Y(s)}\right\}+E\{Y^2(s)\} \\ &= D_X(s)\end{aligned}$$

由此可得：对于任意的$s,t\ge 0$，有

$$C_X(s,t)=D_X(\min(s,t))$$

因此，对于强度为λ的齐次 **Poisson** 过程，我们可以得到：

$$C_N(s,t)=\lambda\min(s,t),\quad s,t\ge 0$$

$$R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t),\quad s,t\ge 0$$

同样地，对于非其次 **Poisson** 过程，有：

$$R_N(s,t)=\int_0^{\min(s,t)}\lambda(\tau)d\tau\left[1+\int_0^{\min(s,t)}\lambda(\tau)d\tau\right],\quad s,t\ge 0$$

例：设随机过程$\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$是一正交增量过程，并且有$X(0)=0$，$E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\left\{|X(t)-X(s)|^2\right\}=|t-s|$$

试求：

（1） 证明：$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=\frac{1}{2}(|t|+|s|-|t-s|)$；

（2） 令：$\xi_n(t)=n\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]$，$n=1,2,\cdots$，则对每一个$n$，证明$\{\xi_n(t), -\infty<t<+\infty\}$是一平稳过程。

解：（1）任取$s,t\in R$，由$X(t)$是一正交增量过程，令：$F(t)=E\left\{|X(t)|^2\right\}$，我们有：

（a） 当$s>0, t<0$ 或 $s<0, t>0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=0$$

（b） 当$s>0, t>0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(\min\{s,t\})$$

（c） 当$s<0, t<0$时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(\max\{s,t\})$$

因此，我们有：$R_X(s,t)=R_X(t,s)$。

由题目所给的条件，我们有：

$$\begin{aligned}|t-s| &= E\left\{|X(t)-X(s)|^2\right\}\\ &= E\left\{|X(t)|^2\right\}-E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}-E\left\{X(s)\overline{X(t)}\right\}+E\left\{|X(s)|^2\right\}\\ &= F(t)-R_X(t,s)-R_X(s,t)+F(s)=F(t)-2R_X(s,t)+F(s)\end{aligned}$$

$$|t|=E\left\{|X(t)-X(0)|^2\right\}=E\left\{|X(t)|^2\right\}=F(t)$$

$$|s|=E\left\{|X(s)-X(0)|^2\right\}=E\left\{|X(s)|^2\right\}=F(s)$$

由此可得：

$$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=R_X(t,s)=R_X(s,t)=\frac{1}{2}(|t|+|s|-|t-s|)$$

（2）由题意及（1）的结果，我们有：

$$R_{\xi_n}(t,s)=E\{\xi_{nt}\overline{\xi_{ns}}\}=n^2E\left\{\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]\left[\overline{X\left(s+\frac{1}{n}\right)-X(s)}\right]\right\}$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t+\frac{1}{n}\right|+\left|s+\frac{1}{n}\right|-|t-s|+|t|+|s|-|t-s|-|t|-\left|s+\frac{1}{n}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|t-s-\frac{1}{n}\right|-\left|t+\frac{1}{n}\right|-|s|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|\ \right]$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t-s-\frac{1}{n}\right|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|-2|t-s|\right]$$

$$=\begin{cases} n\left[1-n|t-s|\right], & 0\le|t-s|\le 1/n \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\{\xi_n(t)\}=0$$

由此可知，随机过程$\{\xi_n(t),-\infty<t<+\infty\}$是一平稳过程。

（四）　随机分析

1．　均方极限

定义：设随机序列$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$及随机变量X均存在二阶矩，即$E\{|X_n|^2\}<\infty, E\{|X|^2\}<\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=0$$

则称随机序列$\{X_n\}$均方收敛于X，或序列$\{X_n\}$的均方极限为X，记作

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$$

关于均方极限，具有以下性质

（1）　如果$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$，则有：

（a）$\lim_{n\to\infty}E\{X_n\}=E\{X\}=E\left\{\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n\right\}$

（**b**）$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right|^2\right\}$

（**2**）　如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(aX_n + bY_n) = aX + bY$$

其中 a, b 为任意的复数。

（**3**）　如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$ 则有：

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X\overline{Y}\}$$

证明：由均方极限的定义，考虑

$$\begin{aligned}
&\left|E\{X_n\overline{Y_m}\} - E\{X\overline{Y}\}\right| = \left|E\{X_n\overline{Y_m} - X\overline{Y}\}\right| \\
&= \left|E\{X(\overline{Y_m - Y}) + (X_n - X)\overline{Y} + (X_n - X)(\overline{Y_m - Y})\}\right| \\
&\le \left|E\{X(\overline{Y_m - Y})\}\right| + \left|E\{(X_n - X)\overline{Y}\}\right| + \left|E\{(X_n - X)(\overline{Y_m - Y})\}\right| \\
&\le [E\{|X|^2\}E\{|Y_m - Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} + [E\{|X_n - X|^2\}E\{|Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + [E\{|X_n - X|^2\}E\{|Y_m - Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty,\, m\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X\overline{Y}\}$$

（**4**）　均方极限是唯一的。即，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$ 及 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = Y$，则有

$$X = Y$$

（**5**）　（柯西准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 X）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{|X_n - X_m|^2\} = 0$$

（**6**）　（列维 **Loeve** 准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 X）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{X_m}\} = c$$

其中 c 为复常数

（7） 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$f(u)$ 是一确定性函数，并且满足 **Lipschitz** 条件，即

$$|f(u) - f(v)| \le M|u - v|$$

其中 M 是正常数。又假设 $f(X_n)$，$f(X)$ 的二阶矩都存在，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, f(X_n) = f(X)$$

（8） 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，则对于任意有限的 t，有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \exp\{jtX_n\} = \exp\{jtX\}$$

2. 二阶矩过程的均方连续

定义：设二阶矩过程 $\{X(t); t \in T\}$，$t_0 \in T$，若有：

$$\lim_{h\to 0} E\{|X(t_0 + h) - X(t_0)|^2\} = 0$$

即

$$X(t_0) = \underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t_0 + h)$$

则称 $X(t)$ 在 $t = t_0$ 点均方意义下连续。若对于 $\forall t \in T$，$X(t)$ 均在均方意义下连续，则称过程 $\{X(t); t \in T\}$ 在均方意义下连续，或称过程具有均方连续性。

定理：设有二阶矩过程 $\{X(t); t \in T\}$，$R(s,t)$ 为其自相关函数，则 $\{X(t); t \in T\}$ 在 $t = t_0 \in T$ 上均方连续的充分必要条件是：自相关函数 $R(s,t)$ 在点 $(t_0, t_0) \in T \times T$ 处连续。

证明：充分性：设 $R(s,t)$ 在 $(s = t_0, t = t_0), t_0 \in T$ 处连续，则有

$$\begin{aligned} E\{|X(t_0 + h) - X(t_0)|^2\} &= R(t_0 + h, t_0 + h) - R(t_0 + h, t_0) - \\ &\quad - R(t_0, t_0 + h) + R(t_0, t_0) \end{aligned}$$

当 $h \to 0$ 时，上式右边趋于 **0**，所以

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t_0 + h) = X(t_0)$$

必要性：若$\{X(t);t\in T\}$在$t=t_0\in T$上均方连续，则由以下推导

$$
\begin{aligned}
&\left|R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0)\right|=\left|E\{X(t_0+h)\overline{X(t_0+k)}\}-E\{X(t_0)\overline{X(t_0)}\})\right|\\
&=\left|E\{[X(t_0+h)-X(t_0)]\overline{X(t_0+k)}\}+E\{X(t_0)[\overline{X(t_0+k)}-\overline{X(t_0)}]\})\right|\\
&\le\left|E\{\left|X(t_0+h)-X(t_0)\right|\left|\overline{X(t_0+k)}\right|\}+E\{\left|X(t_0)\right|\left|\overline{X(t_0+k)}-\overline{X(t_0)}\right|\})\right|\\
&\le[E\{\left|X(t_0+h)-X(t_0)\right|^2\}E\{\left|X(t_0+k)\right|^2\}]^{\frac{1}{2}}+\\
&\qquad+[E\{\left|X(t_0)\right|^2\}E\{\left|X(t_0+k)-X(t_0)\right|^2\}]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

可知，当$h\to 0,k\to 0$时

$$\left|R(t_0+h,t_0+k)-R(t_0,t_0)\right|\to 0$$

即

$$\lim_{h\to 0,k\to 0}R(t_0+h,t_0+k)=R(t_0,t_0)$$

所以，$R(s,t)$在点$(t_0,t_0)\in T\times T$处连续。

另外，若$R(s,t)$在$(t,t)\in T\times T$上二元连续，则$X(t)$在$t_0\in T,s_0\in T$上均方连续，即

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m}\,X(t)=X(t_0),\quad \underset{s\to s_0}{l.i.m}\,X(s)=X(s_0)$$

于是由均方极限的性质（3），我们有

$$\lim_{t\to t_0,s\to s_0}E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{X(s_0)\overline{X(t_0)}\}$$

即有

$$\lim_{t\to t_0,s\to s_0}R(s,t)=R(s_0,t_0)$$

因此，如果$R(s,t)$在对角线$s=t\in T$上连续，则在整个$T\times T$上连续。

定理：若二阶矩过程$\{X(t);t\in T\}$在均方意义下连续，则对于$\forall t\in T$，有：

$$\lim_{h\to 0}E\{X(t+h)\}=E\{X(t)\}$$

定理：设$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$是宽平稳过程，则以下各条件是等价的：

（a）$\{X(t)\}$均方连续；

（**b**）$\{X(t)\}$在点$t=0$处均方连续；

（**c**）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在$-\infty<\tau<+\infty$上连续；

（**d**）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau=0$处连续。

即：宽平稳过程$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$均方连续的充分必要条件为：自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau=0$处连续。

3． 均方导数

（**1**）定义

定义：设有随机过程$\{X(t);t\in T\}$，$\{Y(t);t\in T\}$，如果

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}=Y(t_0)$$

其中$t_0,t_0+h\in T$，则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$在$t=t_0\in T$处均方可导，并称$Y(t_0)$为过程$\{X(t);t\in T\}$在$t=t_0$处的均方导数，记作$X'(t_0)\hat{=}Y(t_0)$。若对于$\forall t\in T$，$X(t)$均在均方意义下可导，即有：

$$\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2\right\}=0$$

则称$Y(t)=X'(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$为随机过程$X(t)$在均方意义下的导数。

利用柯西准则，我们有：

定义：设有随机过程$\{X(t);t\in T\}$，$\{Y(t);t\in T\}$，如果对于$\forall t\in T$，有：

$$\lim_{h\to 0,\,k\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+k)-X(t)}{k}\right|^2\right\}=0$$

则称$X(t)$在均方意义下导数存在（可以求导）。记

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\dot{X}(t)$$

称此为 $X(t)$ 在 t 处的均方导数或均方微商。

（2）均方可导的判定准则

定理：设二阶矩过程 $X(t)$，它的自相关函数为 $R(s,t)$，则 $X(t)$ 在点 $t=t_0\in T$ 处具有均方导数的充分必要条件为：

$$\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

在点 (t_0,t_0) 附近存在且在点 (t_0,t_0) 处连续。若二阶矩过程 $X(t)$ 在 T 内均方可导，则其均方导数的相关函数为：

$$R_{X'}(s,t)=E\{X'(s)X'(t)\}=\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

（3）均方导数的性质

（**a**）设 $X(t),Y(t)$ 为两个均方可导的随机过程，$a,b\in C$ 为复常数，则 $aX(t)+bY(t)$ 也均方可导，并且有：

$$\frac{d}{dt}\left[aX(t)+bY(t)\right]=a\frac{dX(t)}{dt}+b\frac{dY(t)}{dt}$$

（**b**）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，$f(t)$ 为一确定性函数，则 $f(t)X(t)$ 也是均方可导的随机过程，且有：

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)X(t)\right]=\frac{df(t)}{dt}X(t)+f(t)\frac{dX(t)}{dt}$$

（**c**）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，则 $X'(t)$ 的均值函数为：

$$E\{X'(t)\}=\frac{dE\{X(t)\}}{dt}$$

（4）平稳随机过程的均方导数

若 $\{X(t);t\in T\}$ 为平稳随机过程，则有

$$R_{XX}(t,s)=R_{XX}(t-s)=R_{XX}(\tau),\quad \tau=t-s$$

若 $R''_{XX}(\tau)$ 存在，$\tau\in T$，而且在 $\tau=0$ 处 $R''_{XX}(\tau)$ 连续，则 $\{X(t);t\in T\}$ 均方可导，且

$$E\{X'(t)\overline{X'(s)}\}=-R''_{XX}(\tau)$$

这是因为：

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)=-R''_{XX}(\tau)$$

当 $t=s$ 时，$\tau=0$，此时

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}\Big|_{t=s}=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)\Big|_{\tau=0}=-R''_{XX}(0)$$

因为平稳过程为实的随机过程时，有 $R_{XX}(\tau)=R_{XX}(-\tau)$。若平稳随机过程 $X(t)$ 存在均方导数，则要求 $R(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处连续，$R'(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，因此 $R'(0)=0$。

对于平稳随机过程，因为均值函数为常数，因此：

$$E\{X'(t)\}=\frac{d}{dt}E\{X(t)\}=0$$

（5）高阶导数

若二阶矩过程 $X(t)$ 的自相关函数有 $2n$ 阶导数，且在对角线 $t=s$ 上连续，则 $X(t)$ 有均方意义下的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)=\dfrac{d^nX(t)}{dt^n}$ 存在。且有：

$$R_{X^{(n)}}(t,s)=E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(n)}(s)}\}$$

$$=\frac{\partial^{2n}}{\partial t^n\partial s^n}R_X(t,s)$$

$$E\left\{\frac{d^n}{dt^n}X(t)\right\}=\frac{d^n}{dt^n}E\{X(t)\}$$

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(t,s)=E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(m)}(s)}\}$$

$$=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m}R_X(t,s)$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程，则有：

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(\tau)=E\{X^{(n)}(t+\tau)\overline{X^{(m)}(t)}\}=(-1)^m\frac{d^{(n+m)}}{d\tau^{(n+m)}}R_X(\tau)$$

如果 $X(t),Y(t)$ 为两个二阶矩过程，则它们的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(t,s)=E\{X(t)\overline{Y(s)}\}$$

我们有：

$$R_{X'Y}(t,s)=E\{X'(t)\overline{Y(s)}\}=\frac{\partial}{\partial t}R_{XY}(t,s)$$

$$R_{X^{(n)}Y^{(m)}}(t,s)=E\{X^{(n)}(t)\overline{Y^{(m)}(s)}\}=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m}R_{XY}(t,s)$$

（6）泰勒级数展开

若 $\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$ 为平稳随机过程，其自相关函数为 $R_X(\tau)$，如果 $R_X(\tau)$ 是解析的，即 $R_X(\tau)$ 存在各阶导数，且

$$R_X(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}R_X^{(n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$$

则 $X(t)$ 可以进行泰勒展开，即有：

$$X(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

其中 $X^{(n)}(t)$ 为随机过程 $X(t)$ 的 n 阶均方导数。

4.　随机积分

（1）随机积分的定义

定义：设$\{X(t);t\in[a,b]\}$为二阶矩过程，$h(t,\tau)$是定义在$[a,b]$上的以τ为参数的确定性函数，对$[a,b]$进行任意n划分：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

记：

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},i=1,2,\cdots,n,\quad \hat{t}_i\in[t_{i-1},t_i],\quad \lambda=\max_i\{\Delta t_i\}$$

作和式：

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

如果存在随机变量$Y(\tau)$，对于任意的划分，任意的$\hat{t}_i\in[t_{i-1},t_i]$，都有：

$$\lim_{\lambda\to0,\,n\to\infty}E\left\{\left|Y(\tau)-S_n(\tau)\right|^2\right\}=0$$

或

$$\lim_{\lambda\to0,\,n\to\infty}E\left\{\left|Y(\tau)-\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i\right|^2\right\}=0$$

则称$S_n(\tau)$均方收敛于$Y(\tau)$，并称$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积，记$S_n(\tau)$的均方极限为$\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$，即有：

$$Y(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt=\underset{\lambda\to0,\,n\to\infty}{l.i.m}\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

并称

$$Y(\tau)=\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$$

为$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上的均方积分。

（2）均方可积的准则

定理：$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分必要条件为：

$$\int_a^b\int_a^b h(t,\tau)\overline{h(u,\tau)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

存在。

由均方可积的定义可知，$Y(\tau)$ 是以 τ 为参数的随机过程，因此可以求其均值函数和相关函数，我们有：

$$\mu_Y(\tau)=E\{Y(\tau)\}=E\left\{\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt\right\}=\int_a^b h(t,\tau)E\{X(t)\}dt$$

$$=\int_a^b h(t,\tau)\mu_X(t)dt$$

$$R_{YY}(\tau_1,\tau_2)=E\{Y(\tau_1)\overline{Y(\tau_2)}\}$$

$$=E\left\{\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}X(t)\overline{X(u)}dtdu\right\}$$

$$=\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

（3）均方积分的性质

（a）若 $\{X(t);t\in T\subset[a,b]\}$ 为均方连续随机过程，则对于 $\forall t\in T$，有：

$$E\left\{\int_a^t X(u)du\overline{\int_a^t X(v)dv}\right\}=E\left\{\left|\int_a^t X(u)du\right|^2\right\}$$

$$\le(t-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

$$\le(b-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

证明：第二个不等式显然。下面证明第一个不等式。由于

$$E\left\{\left|\int_a^t X(u)du\right|^2\right\}=E\left\{\int_a^t\int_a^t X(u)\overline{X(v)}dudv\right\}=\int_a^t\int_a^t E\{X(u)\overline{X(v)}\}dudv$$

又

$$E\left\{\left|\int_a^t X(u)du\right|^2\right\}\le E\left\{\int_a^t\int_a^t\left|X(u)\overline{X(v)}\right|dudv\right\}=\int_a^t\int_a^t\left|E\{X(u)\overline{X(v)}\}\right|dudv$$

$$\le\int_a^t\int_a^t[E\{|X(u)|^2\}E\{|X(v)|^2\}]^{\frac{1}{2}}dudv$$

$$=\left[\int_a^t[E\{|X(u)|^2\}]^{\frac{1}{2}}\right]^2\le\int_a^t 1^2dv\int_a^t E\{|X(u)|^2\}du$$

$$=(t-a)\int_a^t E\{|X(u)|^2\}du$$

（**b**）设随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，则有：

$$\left[E\left\{\left|\int_a^b X(u)du\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \le \int_a^b \{E|X(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du$$

证明：由于 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，则 $R_X(u,v)=E\{X(u)\overline{X(v)}\}$ 为连续函数，于是 $R_X(u,v)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 可积，故 $\int_a^b X(u)du$ 存在。

由于

$$\left[E\left\{\left|\int_a^b X(u)du\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[E\left\{\left|\underset{n\to+\infty}{l.i.m}\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[E\left\{\left|\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

利用

$$E\left\{\left|\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i \overline{\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X(\hat{u}_i)\overline{X(\hat{u}_j)}\Delta u_i\Delta u_j\right\}$$

$$\le E\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|X(\hat{u}_i)\overline{X(\hat{u}_j)}\right|\Delta u_i\Delta u_j\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E\left|X(\hat{u}_i)\overline{X(\hat{u}_j)}\right|\Delta u_i\Delta u_j$$

$$\le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n [E|X(\hat{u}_i)|^2 E|X(\hat{u}_j)|^2]^{\frac{1}{2}}\Delta u_i\Delta u_j$$

$$=\left[\sum_{i=1}^n [E|X(\hat{u}_i)|^2]^{\frac{1}{2}}\Delta u_i\right]^2$$

由上式，可知

$$\left[E\left\{\left|\int_a^b X(u)du\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[E\left\{\left|\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i)\Delta u_i\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^n \left(E\left\{|X(\hat{u}_i)|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta u_i\right] = \int_a^b \{E|X(u)|^2\}^{\frac{1}{2}}du$$

不等式得证。

（**c**）设 $X(t),Y(t)$ 在 $[a,c]$ 上均方可积，α,β 为复常数，则有：

$$\int_a^c [\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt=\alpha\int_a^c X(t)dt+\beta\int_a^c Y(t)dt$$

若 $a\le b\le c$，则有：

$$\int_a^c X(t)dt=\int_a^b X(t)dt+\int_b^c X(t)dt$$

（**d**）若随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，记

$$Y(t)\hat{=}\int_a^t X(u)du \quad (a\le t\le b)$$

则 $Y(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，均方可导，且有：

$$Y'(t)=X(t)$$

证明：$Y(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方连续是显然的，下证均方可导性。由于

$$E\left\{\left|\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}-X(t)\right|^2\right\}=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}X(u)du-X(t)\right|^2\right\}$$

$$=E\left\{\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[X(u)-X(t)]du\right|^2\right\}$$

$$\le\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(E|X(u)-X(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\le\left[\underset{|u-t|\le h}{Max}\left(E|X(u)-X(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

当 $h\to 0$ 时，上式趋向于 **0**，所以 $Y(t)$ 均方可导，且有

$$Y'(t)=X(t)$$

（**e**）若随机过程 $X(t)$ 均方可导，且 $X'(t)$ 均方连续，则有：

$$X(b)-X(a)=\int_a^b X'(t)dt$$

例 1：设有平稳随机过程 $X(t)$，它的相关函数为 $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$，其中 α,σ 为常数，求 $Y(t)=a\dfrac{dX(t)}{dt}$（a 为常数）的自协方差函数和方差函数。

解：略。

例 2：设 N_t，$t\ge 0$ 是零初值、强度 $\lambda>0$ 的泊松过程。写出过程的转移函数，并问在均方意义下，$Y_t=\int_0^t N_s ds, t\ge 0$ 是否存在，为什么？

解：泊松过程的转移函数为：

$$p(s,t,i,j)=P\{N_t=j|N_s=i\}=\frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}\,,\quad t>s,\ j\ge i$$

其相关函数为：

$$R_N(s,t)=\lambda\min\{s,t\}+\lambda^2 st$$

由于在 $\forall\, t$，$R_N(t,t)$ 连续，故均方积分存在。

例 3：设 N_t，$t\ge 0$ 是零初值、强度 $\lambda=1$ 的泊松过程。

（1） 求它的概率转移函数 $p(s,t,i,j)=P\{N_t=j|N_s=i\}$；

（2） 令 $X_t=N_t-t, t\ge 0$，说明 $Y=\int_0^1 X_t dt$ 存在，并求它的二阶矩。

解：（1）由上例，有：

$$p(s,t,i,j)=P\{N_t=j|N_s=i\}=\frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}=\frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-(t-s)}$$

（2）先求相关函数，由 $\lambda=1$，得：

$$R_X(t,s)=E\{(N_t-t)(N_s-s)\}=\lambda\min\{t,s\}+\lambda^2 st+st(1-2\lambda)=\min\{t,s\}$$

对任意的 t，在 (t,t) 处 $R_X(t,t)$ 连续，故 X_t 均方连续，因此均方可积，$Y=\int_0^1 X_t dt$ 存在。

$$E\{Y^2\}=E\left\{\left[\int_0^1 X_t dt\right]^2\right\}=E\left\{\int_0^1 X_t dt\int_0^1 X_s ds\right\}=E\left\{\int_0^1\int_0^1 X_t X_s dtds\right\}$$

$$=\int_0^1\int_0^1 R_X(t,s)dtds=\int_0^1\int_0^1\min\{t,s\}dtds=\int_0^1 dt\int_t^1 tds+\int_0^1 dt\int_0^t sds=\frac{1}{3}$$

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

（四） 随机分析（续）

5．随机微分方程初步

设$\{Y(t); t\in T\}$是一均方连续的二阶矩过程，X_0是一存在一、二阶矩的随机变量，假设$\{Y(t); t\in T\}$和X_0是独立的，考虑以下随机微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = Y(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

试研究$\{X(t); t\in T\}$的统计特性。

解：方程两边在均方意义下积分，有：

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(u)du$$

并且该解是唯一的。由于：

$$E\{X(t)\} = E\{X(t_0)\} + \int_{t_0}^{t} E\{Y(u)\}du$$

所以，当$E\{Y(t)\}=0$时，

$$E\{X(t)\} = E\{X_0\}$$

又相关函数为：

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\} \\ &= E\{|X_0|^2\} + E\{X_0\}\int_{t_0}^{t_2} E\{\overline{Y(u)}\}du + E\{\overline{X_0}\}\int_{t_0}^{t_1} E\{Y(u)\}du \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1} R_Y(u,v)dudv \end{aligned}$$

所以，当$E\{Y(t)\}=0$时，有：

$$R_X(t_1,t_2) = E\{|X_0|^2\} + \int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1} R_Y(u,v)dudv$$

设有一阶线性微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t) + Y(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

其中 $a(t), t \in T$ 是一确定性函数，$\{Y(t); t \in T\}$ 是一均方连续的实二阶矩过程，X_0 是存在一、二阶矩的随机变量，则此线性方程有唯一的解：

$$X(t) = X_0 \exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} Y(v)\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

下面研究其均值函数和相关函数

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$$

$$= E\{X_0\}\exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} E\{Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$= E\{X_0^2\}\exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(v)dv\}$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_2} E\{X_0Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_2} a(u)du\}dv$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_1} E\{X_0Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_1} a(u)du\}dv$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} R_Y(v_1,v_2)\exp\{\int_{v_1}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{v_{21}}^{t_2} a(u)du\}dv_1dv_2$$

（五）　各态历经性

1．　各态历经性

本节主要讨论根据试验记录（样本函数）确定平稳过程的均值和相关函数的理论依据和方法。

一般地，计算平稳过程的均值和相关函数有各种不同的方法，例如：

$$\mu_X(t_1) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)$$

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1 - t_2) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)\overline{x_k(t_2)}$$

这样的计算需要对一个平稳过程重复进行大量地观察，以便获取数量很多的样本函数 $x_k(t)$，而这在实际当中是非常困难的，有时甚至是不可能的。但是根据平稳过程的统计特性是不随时间的推移而变化，于是自然希望在很长时间内观察得到一个样本函数，可以作为得到这个过程的数字特征的充分依据。本节给出的各态历经性定理指出：对平稳过程而言，只要满足一些较宽的条件，那么集平均（均值函数和相关函数）实际上可以用一个样本函数在整个时间轴上的时间平均值来代替。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，如果它沿整个时间轴上的平均值（时间平均）$\langle X(t)\rangle$ 存在，即

$$\langle X(t)\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

存在，而且

$$P\left\{\langle X(t)\rangle = E\{X(t)\} = \mu_X\right\}=1$$

则称该随机过程的均值具有各态历经性。

注：$\mu_X = E\{X(t)\}$ 表示该随机过程的集平均或统计平均。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，且对于固定的 τ，$X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 也是连续平稳随机过程，$\left\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\right\rangle$ 表示 $X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 沿整个时间轴上的时间平均，即

$$\left\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\right\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

若 $\left\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\right\rangle$ 存在，称 $\left\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\right\rangle$ 为 $X(t)$ 的时间相关函数。若

$$P\left\{\left\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\right\rangle = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\} = R_X(\tau)\right\}=1$$

则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

定义：如果 $X(t)$ 是一均方连续平稳随机过程，且其均值和相关函数均具有各态历经性，则称该随机过程具有各态历经性，或者说 $X(t)$ 是各态历经的，或是遍历的。

例：计算随机正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\theta)$ 的时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 和时间相关函数 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$，其中 $\theta\sim U(0,2\pi)$，a,ω 为常数。

例：设有平稳随机过程 $X(t)=\eta$，η 是一异于零的随机变量，问该过程是否各态历经？

引理 1：车贝雪夫不等式：设 X 是一随机变量，若 $DX<\infty$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，有：$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$。

引理 1：设 X 是一随机变量，则有：$DX=0 \quad\Leftrightarrow\quad P\{X=EX\}=1$，即：

$$DX=0 \quad\Leftrightarrow\quad X=EX \quad a.e$$

定理 1：（均值各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充分必要条件是：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau=0$

证明：由于 $\langle X(t)\rangle$ 是一随机变量，计算 $\langle X(t)\rangle$ 的均值和方差：

$$E\{\langle X(t)\rangle\}=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{X(t)\}dt=\mu_X$$

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=E\{|\langle X(t)\rangle-\mu_X|^2\}=E\{|\langle X(t)\rangle|^2\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}\overline{X(t_2)}dt_2\right\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2\right]dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

其中$C_X(t_1-t_2)=R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2$是$X(t)$的自协方差函数。

作变换：

$$\begin{cases} t_1-t_2=\tau \\ t_1+t_2=u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=(\tau+u)/2 \\ t_2=(u-\tau)/2 \end{cases} \quad -T\le t_1,t_2\le T$$

变换的雅可比行列式为：

$$J=\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau,u)}\right|=\frac{1}{2}$$

于是有：

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}\frac{1}{2}C_X(\tau)dud\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\left[2T-|\tau|\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau\right\}$$

由引理 2，即可得定理的结论。

如果随机过程是实过程，则$C_X(-\tau)=C_X(\tau)$，$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$，对于实平稳过程$X(t)$，均值满足各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-\mu_X^2\right]d\tau=0$$

推论：若平实稳随机过程$X(t)$的自协方差函数$C_X(\tau)$满足：

$$\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$$

则平稳随机过程$X(t)$的均值具有各态历经性。

推论：设随机序列$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是平稳序列，则

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k=\mu_X\right\}=1$$

的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)C_X(k)=0$$

定理 2：（自相关函数各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

定理 3：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间平均

$$\langle X(t)\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

和集平均 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 依概率 1 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

定理 4：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间相关函数

$$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle \hat{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

和集相关函数 $R_X(\tau)=E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}$ 依概率 1 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\,\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\left[B(u)-R_X^2(\tau)\right]du=0$$

例：设$\{x(k)\}$是均值为零的实平稳随机序列，令：

$$\bar{x}_t=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}x(k)$$

则有：

$$Var\{\bar{x}_t\}=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]$$

其中：$R_x(l)$是$\{x(k)\}$的自相关函数。

证明：由于随机序列的均值为零，则：

$$\begin{aligned}Var\{\bar{x}_t\}&=E\left\{\frac{1}{L^2}\sum_{k=1}^{L}x(k)\sum_{p=1}^{L}x(p)\right\}\\&=\frac{1}{L^2}\left[LR_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}(L-l)R_x(l)\right]\\&=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]\end{aligned}$$

2．联合平稳随机过程

定义：设$X(t),Y(t)$是两个平稳随机过程，若其互相关函数$E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}$和$E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}$仅为其时间差$\tau$的函数，而与$t$无关，则称两个随机过程$X(t),Y(t)$是联合平稳随机过程。即有：

$$R_{XY}(t+\tau,t)\triangleq E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}=R_{XY}(\tau)$$

$$R_{YX}(t+\tau,t)\triangleq E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}=R_{YX}(\tau)$$

显然有：

$$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$$

注意：若设 $X(t),Y(t)$ 是联合平稳随机过程，则 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 也是平稳随机过程，且有：

$$R_{ZZ}(\tau)=R_{XX}(\tau)+R_{YY}(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

联合平稳随机过程的性质

（1）$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$，若是实过程，则 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$

（2）若设 $X(t),Y(t)$ 是实平稳随机过程，且联合平稳，则有：

$$[R_{YX}(\tau)]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$[R_{XY}(\tau)]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$[C_{YX}(\tau)]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

$$[C_{XY}(\tau)]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

由不等式：

$$E\{[X(t)+\lambda Y(t+\tau)]^2\}\ge 0 \quad \forall\lambda$$

即可证明以上的结果。

（六）　各态历经性的应用

遍历转换技术：

（1）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的均值

遍历转换技术是近年来发展起来的用于测量某些对象的数字特征，如均值、相关函数等的一项方法。其特点是对模拟量的测量对象不需要采用乘法器和积分器就可以得到数字特征，在精度上可以达到较高的程度，而且稳定性、可靠性都较高。其基本原理分析如下：

设 $Y(t)$ 是一具有均匀分布的严平稳遍历的随机过程，$X(t)$ 是被测的输入平

稳遍历随机信号，且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 独立，我们设计一转换器，转换器中有一时钟，它给出取样的时刻 t_k，在时刻 t_k 对输入随机信号取样，得到 $X(t_k)$。$Y(t)$ 作为参考电压，在 t_k 诸取样时刻比较 $X(t_k)$ 和 $Y(t_k)$ 的值，记比较后的输出 $Z(t_k)$ 为：

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

由此，输入信号 $X(t)$ 从模拟信号转换到了数字信号。即 $X(t_k)\to Z(t_k)$，这一转换称为遍历转换，在一定的条件下，经过遍历转换后，$\{Z(t_k)\}$ 保留了随机信号 $X(t)$ 的某些数字特征。

定理：设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相互独立的两个遍历平稳的随机过程，$Y(t)$ 的一维概率分布密度为 $(0,\alpha)$ 上的均匀分布，其中取 α 足够大，使得 $P\{X(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。$X(t)>0$，t_k 是取样时刻，且有 $t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，令

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

若 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 存在，则有：

（**a**）$P\{Z(t_k)=1\}=\dfrac{1}{\alpha}E\{X(t)\}=\dfrac{\mu_X}{\alpha}$

（**b**）$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}Z(t_k)$

证明：（**a**）由 $Z(t_k)$ 的定义，我们有：

$$P\{Z(t_k)=1\}=P\{X(t_k)>Y(t_k)\}=\iint\limits_{x>y}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx$$

由于 $X(t)>0$，$Y(t)>0$，及 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的独立性，我们有：

$$P\{Z(t_k)=1\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x}f_{X(t_k)}(x)f_{Y(t_k)}(y)dydx$$

$$=\int_{0}^{\infty}[\,f_{X(t_k)}(x)\int_{0}^{x}\frac{1}{\alpha}dy]dx=\frac{1}{\alpha}\cdot\int_{0}^{\infty}xf_{X(t_k)}dx=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\frac{\mu_X}{\alpha}$$

（**b**）由于 $Z(t_k)$ 是数字信号，只能取 **0** 或 **1**，而：

$$P\{Z(t_k)=1\}=\frac{\mu_X}{\alpha}$$

$$P\{Z(t_k)=0\}=1-P\{Z(t_k)=1\}=1-\frac{\mu_X}{\alpha}$$

由于 $X(t)$ 是一平稳过程，均值函数与 t 无关，$\{Z(t_k)\}$ 是一平稳遍历的随机过程。因此：

$$E\{Z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 **1** 相等。于是有：

$$E\{Z(t_k)\}=1\times P\{Z(t_k)=1\}=P\{Z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，有：

$$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 **1** 相等。

（**2**）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的相关函数

利用遍历转换技术，我们可以求两个遍历严平稳（联合平稳）随机过程的互相关函数，相应的可以得到一个严平稳过程的自相关函数。做法简述如下：

设输入信号为 $X_1(t),X_2(t)$，它们是两个遍历严平稳随机过程，且是联合平稳的和都存在二阶矩，用两个噪声器产生两个相互独立的参考电压 $Y_1(t),Y_2(t)$，它们都均匀分布于 $(0,\alpha)$，其中取 α 足够大，使得 $P\{X_1(t_k)>\alpha\}$ 和 $P\{X_2(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。且 $Y_1(t),Y_2(t)$ 都是严平稳的。$X_1(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 独立，$X_2(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 也独立。那么：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=E\{X_1(t)X_2(t-\tau)\}$$

设 $X_1(t)>0, X_2(t)>0$，取：

$$Z_1(t_k)=\begin{cases}1, & X_1(t_k)>Y_1(t_k)\\ 0, & X_1(t_k)\le Y_1(t_k)\end{cases}$$

$$Z_2(t_k)=\begin{cases}1, & X_2(t_k)>Y_2(t_k)\\ 0, & X_2(t_k)\le Y_2(t_k)\end{cases}$$

令：

$$Z(t_k)=Z_1(t_k)Z_2(t_k-\tau)$$

则有：

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X_1(t_k)>Y_1(t_k),\ X_2(t_k-\tau)>Y_2(t_k-\tau)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}P\{Z(t_k)=1\}&=P\{X_1(t_k)>Y_1(t_k),\ X_2(t_k-\tau)>Y_2(t_k-\tau)\}\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^{x_1}\frac{1}{\alpha}dy_1\right)\left(\int_0^{x_2}\frac{1}{\alpha}dy_2\right)f_{X_1(t_k)X_2(t_k-\tau)}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2f_{X_1(t_k)X_2(t_k-\tau)}(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=\frac{1}{\alpha^2}R_{X_1X_2}(t_k,t_k-\tau)\\&=\frac{1}{\alpha^2}R_{X_1X_2}(\tau)\end{aligned}$$

由 $\{Z(t_k)\}$ 的遍历性，我们有：

$$E\{Z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)\quad \text{（依概率 1 相等）}$$

而

$$E\{Z(t_k)\}=1\times P\{Z(t_k)=1\}=P\{Z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{R_{X_1X_2}(\tau)}{\alpha^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

故：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)=\alpha^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，只要在遍历转换器输出端接一个计数器，对$Z(t_k)$进行计数，就可以得到$X_1(t)$和$X_2(t)$的互相关函数。若$X_1(t)=X_2(t)$，则得到自相关函数。

（七） 典型例子

例 1：设随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta), -\infty<t<\infty$，其中$\omega_0$是常数，$A$与$\Theta$是相互独立的随机变量，$\Theta\sim U(,0,2\pi)$，$A$服从瑞利分布，即其分布密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（a） 试证$X(t)$是平稳过程。

（b） 若将$X(t)$写成$X(t)=B\cos\omega_0 t+C\sin\omega_0 t$，其中$B=A\cos\Theta$，$C=-A\sin\Theta$，试证$B$和$C$独立同分布于$N(0,\sigma^2)$。

解：（a）计算得：

$$\mu_X(t)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)\}=E\{A\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\}$$
$$=\int_0^\infty\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\phi)d\phi=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$
$$=E\{A^2\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$
$$=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

因此$X(t)$是平稳过程。

（c） 由分布函数的定义

$$F_{B,C}(b,c)=P\{B\le b, C\le c\}=P\{A\cos\Theta\le b, -A\sin\Theta\le c\}$$

$$=\iint_{x\cos\Theta\le b,\ -x\sin\Theta\le c} f_A(x)f_\Theta(\phi)\,dxd\phi$$

作变换：

$$\begin{cases} u=x\cos\phi \\ v=-x\sin\phi \end{cases}$$

雅克比行列式为：

$$J=\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{x}$$

因此有：

$$F_{B,C}(b,c)=\iint_{u\le b,\ v\le c}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}dudv$$

即有：

$$f_{B,C}(b,c)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}=f_B(b)\cdot f_C(c)$$

因此B和C独立且同分布于$N(0,\sigma^2)$。

例 2：设有一相位调制信号$X(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))}, -\infty<t<\infty$，其中$\omega>0$为常数，$\theta(t)$为一二阶严平稳随机过程，设$\Psi_{t_1,t_2}(u_1,u_2)$是随机过程$\theta(t)$的二维特征函数，同时对于任意的$-\infty<t<\infty$，$\Psi_{0,t}(1,0)=0$，试证明随机过程$X(t)$是一宽平稳过程，并求其相关函数。

解：由定义可知：

$$\mu_X(t)=E\{e^{j(\omega t+\theta(t))}\}=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(t)}\}=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x,t)$$

由于$\theta(t)$是一二阶严平稳过程，故分布函数与时间无关，即有：

$$\mu_X(t)=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x)=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(0)}\}$$

由：

$$\Psi_{0,t}(1,0)=E\{e^{j\theta(0)}\}=0$$

所以

$$\mu_X(t)=0$$

另外：

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{e^{j(\omega s+\theta(s))}\overline{e^{j(\omega t+\theta(t))}}\}\\&=e^{j\omega(s-t)}E\{e^{j(\theta(s)-\theta(t))}\}=e^{j\omega(s-t)}\int e^{j(x-y)}dF_\theta(x,y;s-t)\\&=R_X(s-t)\end{aligned}$$

故随机过程 $X(t)$ 是一平稳过程。

例 **3**：设 $\{N(t);t\geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 **Poission** 过程，记 $X(t)=\dfrac{dN(t)}{dt}$，试求随机过程 $X(t)$ 的均值和相关函数。

解：$\mu_X(t)=\dfrac{dE\{N(t)\}}{dt}=(\lambda t)'=\lambda$

$$R_X(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[\lambda^2 ts+\lambda\min\{t,s\}]=\lambda^2+\lambda\delta(t-s)$$

例 **4**：设 $X(t)$ 是一实正态分布平稳过程，它的均值为零，定义：

$$Y(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right]$$

试证明

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}[-k_X(\tau)]$$

其中 $k_X(\tau)=C_X(\tau)/\sigma_X^2$，$C_X(\tau)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数，$\sigma_X^2=C_X(0)$ 是 $X(t)$ 的方差。

解：为了解此题，先看下面的引理：

引理：设 X,Y 是服从正态分布的二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则 X 和 Y 取不同符号的概率为：

$$P\{XY<0\}=\frac{\cos^{-1}r}{\pi}$$

引理的证明：

$$P\{XY<0\}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}f(x,y)dxdy$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$P\{XY<0\}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dvdu$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dvdu$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}RdR\int_{-\arccos r}^{0}\exp\{-\frac{R^2}{2}\}d\theta=\frac{\arccos r}{\pi}$$

以上式子用了变换：

$$\begin{cases}\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}=R\cos\theta\\ v=R\sin\theta\end{cases}$$

下面给出例 4 的解：

由：

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right\}\right]$$

因此只要求：

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right\}= \\
&=1\times P\{X(t)X(t+\tau)\ge 0\}+(-1)\times P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2\frac{\arccos r}{\pi}
\end{aligned}
$$

因此有：

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+1-2\frac{\arccos r}{\pi}\right]=1-\frac{\arccos r}{\pi}=\frac{1}{\pi}\arccos(-r)$$

由于此时：

$$r=k_X(\tau)$$

我们即可得到结论。

例 5：设随机振幅、随机相位正弦波过程 $X_t=V\sin(t+\Theta), t\ge 0$，其中随机变量$V$和$\Theta$相互独立，且有分布：

$$\Theta\sim U[0,2\pi],\ V\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$$

令：$Y_t=\begin{cases}1, & 如|X_t|>\sqrt{2}/2\\ 0, & 反之\end{cases}, t\ge 0$，试求过程$Y_t, t\ge 0$的均值函数。

解：由定义，随机过程$\{Y(t); t\ge 0\}$的均值函数为：

$$
\begin{aligned}
\mu_Y(t)&=E\{Y(t)\}=1\times P\{Y(t)=1\}+0\times P\{Y(t)=0\}\\
&=P\{Y(t)=1\}=P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}=P\{|V\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}\\
&\quad=P\{|(-1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=-1\}+P\{|0\times\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=0\}+\\
&\qquad+P\{|(1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=1\}\\
&\quad=\frac{1}{2}P\{|\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}\\
&\quad=\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)>\sqrt{2}/2\}+\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)<-\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

由于当$\Theta \sim U(0,2\pi)$时，随机变量$\xi(t)=\sin(t+\Theta)$的分布密度为：

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le +1\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

因此有：

$$P\left\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\right\}=\frac{1}{4}$$

即：

$$\mu_Y(t)=\frac{1}{4}$$

例六：设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的实平稳正态过程。设$X(t)$通过线性半波检波器后的输出为：

$$Y(t)=\begin{cases}X(t), & X(t)\ge 0\\ 0, & X(t)<0\end{cases}$$

试求：

（1）　随机过程$Y(t)$的相关函数$R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2）　随机过程$Y(t)$的均值和方差；

（3）　随机过程$Y(t)$的一维概率分布密度函数$f_Y(y)$。

解：（1）由题意及条件数学期望公式，有：

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\{E\{Y(t)Y(t+\tau)\mid X(t)X(t+\tau)\}\}\\&=\iint E\{Y(t)Y(t+\tau)\mid X(t)X(t+\tau)\}f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy\\&=\iint\limits_{x\ge 0,y\ge 0}xyf_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

其中：

$$f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=R_X(0),\quad r=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此可得：

$$R_Y(\tau)=\iint\limits_{x\ge 0,y\ge 0} xyf_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令：

$$u=\frac{x}{\sigma_1}\text{，}\quad v=\frac{y}{\sigma_2}$$

则有：

$$R_Y(\tau)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}=R\cos\theta\text{，}\quad v=R\sin\theta$$

得变换：

$$u=\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta,\quad v=R\sin\theta$$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)}=R\sqrt{1-r^2}\quad\Rightarrow\quad dudv=R\sqrt{1-r^2}dRd\theta$$

则有：

$$R_Y(\tau)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{\arccos(-r)}R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta\right]\exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\}RdRd\theta$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^{\arccos(-r)}\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta+r\sin\theta\right]d\theta$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}r\theta-\frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_0^{\arccos(-r)}\right\}$$
$$=\frac{R_X(0)}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi+\cos\varphi\right]$$

其中： $\sin\varphi = r = \dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$， $|\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$**。结合以下（2）的结果可知是平稳的。**

（2）由条件数学期望的计算公式，有：

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{E\{Y(t) \mid X(t)\}\}$$

$$= \int_0^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\} dx = \sqrt{\frac{R_X(0)}{2\pi}}$$

$$E\{Y^2(t)\} = R_Y(0) = \frac{R_X(0)}{2}$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m_Y^2 = R_Y(0) - m_Y^2 = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{R_X(0)}{2}$$

（3）当 $y < 0$ **时，** $F_{Y(t)}(y) = 0$**；当** $y \ge 0$ **时，我们有：**

$$F_{Y(t)}(y) = P\{Y(t) \le y\} =$$

$$= P\{Y(t) \le y \mid X(t) \ge 0\} P\{X(t) \ge 0\} + P\{Y(t) \le y \mid X(t) < 0\} P\{X(t) < 0\}$$

$$= \int_0^y f_{X(t)}(x)dx + \frac{1}{2}$$

由此可得 $Y(t)$ **的一维概率分布密度为：**

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\right\} U(y)$$