第二章　Markov 过程习题

1、 设$\{\xi_n, n \ge 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n = 1\} = p > 0, \quad P\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p > 0$$

定义随机序列$\{X_n, n \ge 2\}$和$\{Y_n, n \ge 2\}$如下：

$$X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1; \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1; \end{cases} \qquad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \text{其它}; \end{cases}$$

试问随机序列$\{X_n, n \ge 2\}$和$\{Y_n, n \ge 2\}$是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

2、 天气预报模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），试将此问题归纳为马尔可夫链，并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率是 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。试求此马氏链的转移概率矩阵。

3、 设$\{X_n; n \ge 0\}$是一齐次马氏链，状态空间为$S = \{0,1,2\}$，它的初始状态的概率分布为：$P\{X_0 = 0\} = 1/4$，$P\{X_0 = 1\} = 1/2$，$P\{X_0 = 2\} = 1/4$，它的一步转移转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率：$P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}, p_{12}^{(3)}$。

4、 某通信系统由n个中继站组成，从上一站向下一站传送数字信号 **0** 或 **1** 时，接收的正确率为 p。如用 X_0 表示初始站发出的数字信号，用 X_k 表示第k个中继站接收到的数字信号，试证：$\{X_k; 0 \le k \le n\}$是一个马氏链，且有

$$P\{X_0 = 1 | X_n = 1\} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中：$\alpha = P\{X_0 = 1\}$，$q = 1 - p$。请说明上述条件概率的实际意义。

5、 设有一个三个状态 $S = \{0,1,2\}$ 的齐次马氏链，它一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求：

（1）$f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$；

（2）确定状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。

6、 试确定下列齐次马氏链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移矩阵为：

（1）$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$；

（2）$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$；

（3）$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

7、 设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

（a）　求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$；

（b）　写出三个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

8、 设 $\{X_n; n = 0,1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其初始分布为

$$P\{X_0 = 0\} = p_0, P\{X_0 = 1\} = p_1, P\{X_0 = 2\} = p_2, P\{X_0 = 3\} = p_3$$

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

（1）试求概率 $P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}$；

（3）试求首达概率 $f_{00}^{(n)},\ n=1,2,3,\cdots$；

（4）写出四个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

9、 考虑三个状态的齐次马氏链，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中：$p,q,r>0,\ p+q+r=1$，

（a） 假定过程从状态 **1** 出发，试求过程被状态 **0**（或 **2**）吸收的概率；

（b） 试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

10、 设齐次马氏链 $\{X_n,n\ge 0\},\ S=\{1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵如下：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）写出切普曼－柯尔莫哥洛夫方程（**C**－**K** 方程）；

（2）求 n 步转移概率矩阵；

（3）试问此马氏链是平稳序列吗？ 为什么？

11、 某车间有两台独立工作的机器，每台机器有两种状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b，其中 $0<a,b<1$。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数，试求：

（1）证明 $\{X_n;n=1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，并写出其一步转移概率矩阵；

（2）此马氏链是否存在极限分布？存在的话，计算其平稳分布；

（3）若车间里有 m 台独立工作的机器，假设条件不变，问其平稳分布是什么？

12、 设 $\{X_n;n\ge 0\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $\bar{S}=S_0\cup S$，其中：$S=\{1,2,\cdots,m\}$ 为瞬时态集，$S_0=\{0\}$ 为吸收态集，且转移矩阵为 $\tilde{P}=\begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $P_0=(I-P)\cdot\vec{e}$，

$\vec{e}=(1,1,\cdots 1)^{\tau}$。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为：

$$\tau=\inf\{n:n\geq 0, X_n\in S_0\}\text{。}$$

令：$\vec{\pi}(0)=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 为马氏链的初始分布，记：$\vec{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，且满足：

$$\alpha_k\geq 0\ (k=0,1,\cdots,m)\text{，}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k=1\text{。}$$

令：$g_k=P\{\tau=k\}$（称为 **Phase-Type** 分布），$G(\lambda)=E\{\lambda^{\tau}\}=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k\lambda^k$。

试证明：

（**a**）　对于任意 $k\in N$，有：$g_0=\alpha_0$，$g_k=\vec{\alpha}P^{k-1}P_0=\vec{\alpha}P^{k-1}(I-P)\vec{e}$；

（**b**）　对于任意 $0\leq\lambda\leq 1$，有：$G(\lambda)=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}$。

13、　设有一生灭过程 $\{\xi(t);t\geq 0\}$，其中参数 $\lambda_n=\lambda,\mu_n=n\mu$，$\lambda$ 和 μ 均为大于零的常数，其起始状态为 $\xi(0)=0$。试求：

（**a**）　该过程的 Q 矩阵；

（**b**）　列出福克－普朗克微分方程；

（**c**）　其均值函数 $M_{\xi}(t)=E\{\xi(t)\}$；

（**d**）　证明 $\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\exp\{-\lambda/\mu\}$。

14、　有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌，并不会死去。假设在长为 Δt 的一段时间内，一个细菌分裂为两个，即产生新细菌的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，令 $X(t)$ 表示时刻 t 的细菌群体的大小。

（**a**）　试说明 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是生灭过程；

（**b**）　试证 $\lambda_i=i\lambda$，$\mu_i=0$，并列出其前进方程和后退方程；

（**c**）　验证 $p_{kj}(t)=C_{j-1}^{j-k}(e^{-\lambda t})^k(1-e^{-\lambda t})^{j-k}$，$j\geq k\geq 1$ 是上述方程的解，并计算

$$E\{X(s+t)-X(s)\,|\,X(s)=m\}\text{。}$$

15、　在一个线性生灭过程中，假定人口中每个人在间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内以概率 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ 生一个儿女，假定这些人是统计独立的，则如果在时刻 t 人口中有 n 个人，在 $(t,t+\Delta t)$ 中出生的概率是 $n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。同样地，如果在 $(t,t+\Delta t)$ 内一个人死亡的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，则如果在 t 时刻有 n 个人活着，在 $(t,t+\Delta t)$ 内死亡的概率是 $n\mu\Delta t+o(\Delta t)$，$X(t)$ 表示 t 时刻人口的数目，且已知 $X(0)=n_0$，则 $X(t)$ 是一马氏过程。

（a）　试写出过程的状态空间及 Q 矩阵，求 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$ 满足的微分方程；

（**b**）　试导出 $m_X(t)=E\{X(t)\}$ 满足的微分方程；

（**c**）　求解 $m_X(t)$ 。

16、　　一条电路供给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现假设（1）若一焊工在 t 时刻用电，而在 $(t,t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$；（2）若一焊工在 t 时刻没有用电，而在 $(t,t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ 。每一焊工的工作情况是相互独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时刻正在用电的焊工数。

（a）　试写出此过程的状态空间及 Q 矩阵；

（**b**）　设 $\xi(0)=0$，写出福克－普朗克方程；

（**c**）　当 $t\to+\infty$ 时，求极限分布 P_n 。