第二章　Markov 过程

本章我们先讨论一类参数离散、状态空间离散的特殊随机过程，即参数为 $T=\{0,1,2,\cdots\}=N_0$，状态空间为可列 $S=\{1,2,\cdots\}$ 或有限 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 **Markov** 链。**Markov** 链最初由 **Markov** 于 **1906** 年引入，至今它在自然科学、工程技术、生命科学及管理科学等诸多领域中都有广泛的应用。之后我们将讨论另一类参数连续状态空间离散的随机过程，即研究纯不连续 **Markov** 过程。

1.　Markov 链的定义

定义：设随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 的状态空间为 S（离散），如果对 $\forall n\in N_0$，及 $i_0,i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S$，　$P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}>0$，有：

$$\begin{aligned}&P\{X(n+1)=i_{n+1}\mid X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=\\&=P\{X(n+1)=i_{n+1}\mid X(n)=i_n\}\end{aligned}\qquad \textbf{(A)}$$

则称 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为 **Markov** 链。

注 **1**：随机序列 $\{X(n);n\geq 0\}$ 也可记为 $\{X_n;n\geq 0\}$。

注 **2**：等式（**A**）刻画了 **Markov** 链的特性，称此特性为 **Markov** 性或无后效性（即随机过程将来的状态只与现在的状态有关，而与过去无关），简称为马氏性。**Markov** 链也称为马氏链。

定义：设 $\{X(n);n\geq 0\}$ 为马氏链，状态空间为 S，对于 $\forall i,j\in S$，称

$$P\{X(n+1)=j\mid X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)$$

为马氏链 $\{X(n);n\geq 0\}$ 在 n 时刻的一步转移概率。若对于 $\forall i,j\in S$，有

$$P\{X(n+1)=j\mid X(n)=i\}\triangleq p_{ij}(n)\equiv p_{ij}$$

即上面式子的右边与时刻 n 无关，则称此马氏链为齐次（或时齐的）马氏链。

对于齐次马氏链，我们记 $P=(p_{ij})$，称矩阵 P 为齐次马氏链的一步转移概

率矩阵，简称为转移矩阵。

注 3：对于马氏链$\{X(n);n\geq 0\}$，我们有：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n)=i_n\}=\\
&=P\{X(n)=i_n\mid X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot\\
&\quad\cdot P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}\\
&=P\{X(n)=i_n\mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(0)=i_0,X(1)=i_1,\cdots,X(n-1)=i_{n-1}\}\\
&=\cdots\\
&=P\{X(n)=i_n\mid X(n-1)=i_{n-1}\}\cdot P\{X(n-1)=i_{n-1}\mid X(n-2)=i_{n-2}\}\cdot\cdots\cdot\\
&\quad\cdot P\{X(1)=i_1\mid X(0)=i_0\}\cdot P\{X(0)=i_0\}\\
&=p_{i_{n-1}i_n}(n-1)p_{i_{n-1}i_{n-1}}(n-2)\cdot\cdots\cdot p_{i_0i_1}(0)\cdot P\{X(0)=i_0\}
\end{aligned}
$$

因此，只要得到了马氏链的一步转移概率及初始分布，就可以求得马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。特别地，若马氏链是齐次的，则由转移矩阵及初始分布，就可以得到齐次马氏链的任意前$n+1$维的联合分布。

注 4：一步转移概率满足：

$$p_{ij}(n)\geq 0\quad (i,\ j\in S)$$

$$\sum_{j\in S}p_{ij}(n)=1\quad i\in S$$

注 5：若状态空间是有限的，设状态数为n则一步转移矩阵是n阶方阵，若状态是无限可列的情形，则一步转移矩阵只是形式上的矩阵。

2.　切普曼－柯尔莫哥洛夫（C－K）方程

（一）m步转移概率的定义

定义：称$p_{ij}^{(m)}(n)=P\{X(n+m)=j\mid X(n)=i\}$为马氏链$\{X(n);n\geq 0\}$的$m$步转移概率。在齐次马氏链的情况下，$p_{ij}^{(m)}(n)$与$n$无关，我们记为$p_{ij}^{(m)}$，称

$$P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$$

为齐次马氏链的m步转移（概率）矩阵。

显然有：

$$p_{ij}^{(m)}(n)\ge 0 \qquad (i,j\in S)$$

$$\sum_{j\in S} p_{ij}^{(m)}(n)=1 \quad (i\in S)$$

$m=1$时，即为一步转移矩阵。

规定：
$$p_{ij}^{(0)}(n)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$$

（二）切普曼－柯尔莫哥洛夫（**C－K**）方程

定理：对于m步转移概率有如下的 **C－K** 方程：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=\sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)}(n)\,p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i,j\in S)$$

对于齐次马氏链，此方程为：

$$p_{ij}^{(m+r)}=\sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)}\,p_{kj}^{(r)} \quad (i,j\in S) \qquad \text{（C－K 方程）}$$

证明：由m步转移概率的定义、全概率公式及马氏性，有：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=$$

$$=P\{X(n+m+r)=j \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S} P\{X(n+m+r)=j, X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S} P\{X(n+m+r)=j \mid X(n+m)=k, X(n)=i\}\cdot$$

$$\cdot P\{X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S} P\{X(n+m+r)=j \mid X(n+m)=k\}P\{X(n+m)=k \mid X(n)=i\}$$

$$=\sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)}(n)\,p_{kj}^{(r)}(n+m)$$

对于齐次马氏链的情形：我们可以写成矩阵的形式即有：

$$P^{(m+r)}=P^{(m)}P^{(r)}$$

由此推出：

$$P^{(m)} = P^{(m-1)}P^{(1)} = \cdots = (P)^m = P^m$$

其中：$P^{(1)} = P$

由此可知：对于齐次马氏链，如果知道了它的初始分布$\pi(0)$和一步转移矩阵P，就可以求得$X(n)$的所有有限维概率分布。即有：

$$\begin{aligned} &P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\} = \\ &= \sum_{j\in S} p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})} p_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})} \cdots p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} p_{j i_1}^{(n_1)} P\{X(0)=j\} \end{aligned}$$

上式中各m步转移概率均可由 **C－K** 方程求出，利用一步转移矩阵及初始分布就可以完全确定齐次马氏链的统计性质。

3.　马氏链的例子

- 随机游动：

（1） 无限制的随机游动：

以$X(n)$表示时刻n时质点所处的位置，则$\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$是一齐次马氏链，其状态空间为$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1} = p, & (i\in S, 0<p<1) \\ p_{i\,i-1} = q = 1-p, & (i\in S, 0<p<1) \\ p_{i\,j} = 0, & (i \neq i+1, i-1, \ j\in S) \end{cases}$$

现在求n步转移概率$p_{ij}^{(n)}$：

设n次转移中向右m_1次，向左m_2次，则有

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = n \\ m_1(+1) + m_2(-1) = j-i \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{n+j-i}{2}, \quad m_2 = \frac{n-j+i}{2}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & (n+j-i \text{ 是偶数}) \\ 0, & (n+j-i \text{ 是奇数}) \end{cases}$$

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & (n\text{是偶数}) \\ 0, & (n\text{是奇数}) \end{cases}$$

（2） 带有一个吸收壁的随机游动：

特点：当 $X(n)=0$ 时，$X(n+1)$ 就停留在零状态。

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1} = p & (i \ge 1, i \in S) \\ p_{i\,i-1} = q & (i \ge 1, i \in S) \\ p_{i\,j} = 0 & (j \ne i+1, i-1, i \ge 1, i \in S) \\ p_{0\,0} = 1 \end{cases}$$

注意；i 状态为马氏链的吸收状态的充要条件是：$p_{i\,i} = 1$。

（3） 带有二个吸收壁的随机游动：

此时 $\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，$0, a$ 为两个吸收状态，它的一步转移概率为：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}$$

即有：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (1 \le i \le a-1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; 1 \le i \le a-1) \\
&p_{00} = 1 && \\
&p_{aa} = 1 && \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0) \\
&p_{a\,j} = 0 && (j \ne a)
\end{aligned}
$$

（4） 带有一个反射壁的随机游动：

特点：一旦质点进入零状态，下一步它以概率 p 向右移动一格，以概率 $q=1-p$ 停留在零状态。

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，它的一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
&p_{i\,i+1} = p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,i-1} = q = 1-p && (i \ge 1) \\
&p_{i\,j} = 0 && (j \ne i+1, i-1; i \ge 1) \\
&p_{01} = p && \\
&p_{00} = 1-p = q && \\
&p_{0\,j} = 0 && (j \ne 0,1)
\end{aligned}
$$

（5） 带有二个反射壁的随机游动：

此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，它的一步转移概率矩阵为：

$$
P=\begin{pmatrix}
q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & \cdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q & p
\end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}
$$

即有：

$$
\begin{aligned}
&p_{00} = q = 1 - p \\
&p_{01} = p \\
&p_{aa} = p \\
&p_{a\,a-1} = q = 1 - p \\
&p_{0\,j} = 0 \quad (j \neq 0,1) \\
&p_{a\,j} = 0 \quad (j \neq a, a-1)
\end{aligned}
$$

- 排队模型

（1）　离散排队系统

考虑顾客到达一服务台排队等待服务的情况。

若服务台前至少有一顾客等待，则在单位时间周期内，服务员完成一个顾客的服务后，该顾客立刻离去；若服务台前没有顾客，则服务员空闲。

在一个服务周期内，顾客可以到达，设第 n 个周期到达的顾客数 ξ_n 是一个取值为非负整数的随机变量，且 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 相互独立同分布。在每个周期开始时系统的状态定义为服务台前等待服务的顾客数。若现在状态为 i，则下周期的状态 j 应该为：

$$
j = \begin{cases} (i-1) + \xi, & i \geq 1 \\ \xi, & i = 0 \end{cases}
$$

其中 ξ 为该周期内到达的顾客数。

记第 n 个周期开始的顾客数为 X_n，则 $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$，其中 $a^+ \triangleq \max\{a, 0\}$，根据马氏链的定义，可知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链。

若假设 $P\{\xi_n = k\} = a_k$，$a_k \geq 0$，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
&p_{0\,j} = a_j \qquad j \geq 0 \\
&p_{1\,j} = a_j \qquad j \geq 0 \\
&p_{i\,j} = a_{j+1-i} \quad i > 1, j \geq i-1 \\
&p_{i\,j} = 0 \qquad i > 1, j < i-1
\end{aligned}
$$

易见：当 $E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k>1$ 时，则当 n 充分大后，等待顾客的队伍将无限增大；若 $E\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k<1$，则等待服务的顾客队伍长度趋近某种平衡。

（2） G/M/1 排队系统

略。（见纯不连续马氏过程的内容，以后会讲到。）

- 离散分支过程

考虑某一群体，假定某一代的每一个个体可以产生 ξ 个下一代，其中 ξ 是取值非负整数的离散型随机变量，$P\{\xi=k\}=a_k$，$a_k\ge 0, k\ge 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1$，设某一代各个体产生下一代的个数相互独立同分布且与上一代相互独立。

令：X_n 表示第 n 代个体的数目，则当 $X_n=0$ 时，有 $X_{n+1}=0$；当 $X_n>0$ 时，有：

$$X_{n+1}=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}$$

其中 ξ_i 是第 n 代中第 i 个个体产生下一代的个数。

由此可知，只要给定 X_n，那么 X_{n+1} 的分布就完全决定了，且与以前的 $X_{n-1},X_{n-2},\cdots$ 无关，故 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是一马氏链。把这一类马氏链称为离散的分支过程。由母函数的性质，可以证明一步转移概率为：

$$\begin{aligned}p_{ij}&=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{X_n}=j\mid X_n=i\}\\&=P\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=j\}\\&=\frac{\partial^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^i}{j!\partial x^j}\Big|_{x=0}\end{aligned}$$

注 **1**：母函数的定义：设 $F(s)$ 是随机变量 ξ 的母函数，则 $F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k$；

注 **2**：母函数的性质：（**1**） X 的母函数与其分布率是一一对应的，且有 $p_k=\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$；（2）设非负整值随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，而

$g_1, g_2, \cdots, g_n$ 分别是它们的母函数，则 $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的母函数为：$g_Y(s) = g_1(s) g_2(s) \cdots g_n(s)$。

注 3：显然有：$p_{00} = 1, p_{0k} = 0 \, (k > 0)$，因此，状态 0 是离散分支过程的吸收状态。在离散分支过程模型中，我们最关心的问题是此过程被状态 **0** 吸收的概率，即灭绝概率问题。

- 卜里耶（**Polya**）模型（非齐次马氏链的例子）：

设盒子装有b个黑球，r个红球。从盒子中随机摸出一球，观察颜色后将该球放回并加入与摸出的球同颜色的球c只。如此取放继续，经过n次摸放，研究盒子中的黑球数。

以$X_n, n \geq 1$ 表示第n次摸球后盒子中的黑球数（状态），每取放一次后黑球数或者不变，或者增加c只，因此一步转移概率为：

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} \dfrac{i}{b + r + nc}, & j = i + c \\ 1 - \dfrac{i}{b + r + nc}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意：此过程是一非齐次的马氏链。另外，在研究实际问题时，如何设置过程的状态是非常重要的，考察下面的思考题会有深刻的体会。

思考题：在只装有r个红球和b个黑球的袋子中逐次随机取一球，每次将取出的球记下颜色并放回，同时在袋子中加进c个同色球。令：

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} \end{cases} ; \; k = 1, 2, \cdots$$

问$\{R_k\}$是否独立同分布？过程$\{R_k\}$是否是马氏链？

解：由题意，我们有：

$$P\{R_1 = 1\} = \frac{r}{b + r}, \quad P\{R_1 = 0\} = \frac{b}{b + r}$$

$$P\{R_2=1\}=P\{R_2=1\mid R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=1\mid R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{r}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{r}{b+r}$$
$$P\{R_2=0\}=P\{R_2=0\mid R_1=1\}P\{R_1=1\}+P\{R_2=0\mid R_1=0\}P\{R_1=0\}$$
$$=\frac{b}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}+\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r}=\frac{b}{b+r}$$

下面利用归纳法证明 R_k 的分布为：$P\{R_k=1\}=\frac{r}{b+r}$，$P\{R_k=0\}=\frac{b}{b+r}$。

当 $k=1$ 时，结论成立。设当 $k=l$ 时，结论成立，即：

$$P\{R_l=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{b}{b+r}$$

当 $k=l+1$ 时，设在第 l 次取球之前，袋中有 m 只红球，n 只黑球，根据假设有：

$$P\{R_l=1\}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_l=0\}=\frac{n}{m+n}=\frac{b}{b+r}$$

由全概率公式，我们有：

$$P\{R_{l+1}=1\}=P\{R_{l+1}=1\mid R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=1\mid R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{m+c}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}=\frac{r}{b+r}$$
$$P\{R_{l+1}=0\}=P\{R_{l+1}=0\mid R_l=1\}P\{R_l=1\}+P\{R_{l+1}=0\mid R_l=0\}P\{R_l=0\}$$
$$=\frac{n}{m+n+c}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{n+c}{m+n+c}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{n}{m+n}=\frac{b}{b+r}$$

因此，由归纳法可知：

$$P\{R_k=1\}=\frac{r}{b+r},\quad P\{R_k=0\}=\frac{b}{b+r}$$

又因为：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}=P\{R_2=1\mid R_1=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}=\frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r}$$

显然有：

$$P\{R_2=1,R_1=1\}\neq P\{R_2=1\}P\{R_1=1\}$$

因此，$\{R_k\}$ 不是独立的，但同分布。

又有：

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=\frac{r+kc}{b+r+kc}$$

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}=\frac{r+c}{b+r+kc}$$

如果过程$\{R_k\}$是马氏链，我们应该有：

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1|R_k=1\}$$

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}=P\{R_{k+1}=1|R_k=1\}$$

即应该有：

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}=P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}$$

但由上面的计算，当$k>1$时，显然有：

$$P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=1,\cdots,R_1=1\}\neq P\{R_{k+1}=1|R_k=1,R_{k-1}=0,\cdots,R_1=0\}$$

因此，过程$\{R_k\}$不是马氏链。

- 应用例子：

某保密通信系统采用软件无线电，其信号的调制方式有 5 种。若此通信系统一直处于繁忙状态，在任何时刻只能采用其中一种信号调制方式，并且假设每经过一单位时间系统要进行调制方式转换，在转换时，这 5 种不同的调制信号方式被选择的概率分别为 1/5，2/5，1/10，1/10，1/5，且每次转换之间是独立的。ξ_n表示前n次信号转换中采用的信号调制方式为第二种方式的次数，问$\{\xi_n,n\geq 1\}$是否为齐次马氏链？如果是，写出其一步转移概率矩阵。

解：根据题意，此时的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，由于调制方式的每次转换之间是独立的，因此

$$P\{\xi_{n+1}=j|\xi_1=i_1,\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i\}=P\{\xi_{n+1}=j|\xi_n=i\}$$

所以此链是马氏链，且是齐次的，其一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

4.　马尔可夫链状态的分类

（一）　到达与相通

定义：对给定的两个状态i，$j\in S$，若存在正整数$n\geq 1$，使得$p_{ij}^{(n)}>0$，则称从状态i可到达状态j，记作$i\to j$，反之称从状态 i不可到达状态j。

注意：当状态 i不能到达状态j时，对于$\forall n\geq 1$，$p_{ij}^{(n)}=0$，因此

$$P\{\text{到达状态}\ j|X_0=i\}=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=j\Big|X_0=i\right\}$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}P\{X_n=j|X_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=0$$

定义：有两个状态 i和j，如果由 i状态可到达j状态，即$i\to j$，且由j状态也可到达i状态，即$j\to i$，则称状态 i和状态j相通，记作$i\leftrightarrow j$。

定理：可到达和相通都具有传递性。即若$i\to k,k\to j$，则$i\to j$；若$i\leftrightarrow k,k\leftrightarrow j$，则$i\leftrightarrow j$。

证明：如果$i\to k$，$k\to j$，则由定义，存在$r\geq 1$和$n\geq 1$，使得：

$$p_{ik}^{(r)}>0,\quad p_{kj}^{(n)}>0$$

根据 **C－K** 方程，我们有：

$$p_{ij}^{(r+n)}=\sum_{m\in S}p_{im}^{(r)}p_{mj}^{(n)}\geq p_{ik}^{(r)}p_{kj}^{(n)}>0\ \ (k\in S)$$

因此，$i\to j$。同理可以证明相通的情形。

（二）　首达时间和首达概率：

定义：对于任意给定的$i,j\in S$，称随机变量：

$$T_{ij}(\omega) \hat{=} \min\left\{ n : X_0 = i, X_n(\omega) = j, n \geq 1 \right\}$$

为从状态i出发首次到达（进入）状态j的时间（时刻），简称首达时间。

注意：首达时间$T_{ij} : \Omega \to N_\infty \subset R$是一随机变量，它取值于$N_\infty = \left\{ 1, 2, \cdots, \infty \right\}$。

定义：对于任意给定的$i, j \in S$，称：

$$f_{ij}^{(n)} \hat{=} P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\}$$

为系统在 **0** 时从状态i出发，经n步首次到达状态j的概率。

由定义，显然有：

$$f_{ij}^{(n)} = P\left\{ X_n = j; X_m \neq j, m = 1, 2, \cdots, n-1 \middle| X_0 = i \right\}$$

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} = P\left\{ X_1 = j \middle| X_0 = i \right\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\left\{ X_m \neq j, \forall m \geq 1 \middle| X_0 = i \right\}$$

定义：对于任意给定的$i, j \in S$，称：

$$f_{ij} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \leq n < \infty} P\left\{ T_{ij} = n \middle| X_0 = i \right\} = P\left\{ T_{ij} < \infty \right\}$$

为系统在 **0** 时从状态i出发经过有限步转移后迟早到达状态j的概率。

注意：$P\left\{ T_{ij} = \infty \right\} \hat{=} f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}$，它表示系统在 **0** 时从状态$i$出发，经过有限步转移后不能到达状态$j$的概率。

（三）首达概率的基本性质：

（**1**）对于任意的$i, j \in S$，$0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$；

（**2**）对于任意的$i, j \in S$ 及 $1 \leq n < \infty$，有：$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$；

（**3**）对于任意的$i, j \in S$，$f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \to j$；

（4）对于任意的$i, j \in S$，$f_{ij} > 0 \ and \ f_{ji} > 0 \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$；

证明：因为：

$$\{X_0 = i, X_n = j\} = \{X_0 = i, X_n = j\} \cap \left\{\bigcup_{l=1}^{\infty}(T_{ij} = l)\right\}$$

$$= \bigcup_{l=1}^{n}\{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} \cup \left\{\bigcup_{l>n}\{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\}\right\}$$

而

$$\bigcup_{l>n}\{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} = \varnothing$$

于是我们有：

$$\{X_0 = i, X_n = j\} = \bigcup_{l=1}^{n}\{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\}$$

因此，有：

$$P\{X_0 = i\}P\{X_n = j \mid X_0 = i\} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} P\{X_0 = i\}P\{T_{ij} = l \mid X_0 = i\}P\{X_n = j \mid X_0 = i, T_{ij} = l\}$$

因此：

$$P\{X_n = j \mid X_0 = i\} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} P\{T_{ij} = l \mid X_0 = i\}P\{X_n = j \mid X_0 = i, T_{ij} = l\}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} P\{T_{ij} = l \mid X_0 = i\}P\{X_n = j \mid X_0 = i, X_k \neq j, 1 \leq k \leq l-1, X_l = j\}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} P\{X_n = j \mid X_l = j\}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

于是结论（2）成立。

当$i \to j$时，$\exists n > 0$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，取：

$$n' = \min\left\{n : p_{ij}^{(n)} > 0\right\},$$

则有：

$$f_{ij}^{(n')} = P\left\{T_{ij} = n' \,\middle|\, X_0 = i\right\} = p_{ij}^{(n')} > 0$$

因此

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \ge f_{ij}^{(n')} > 0$$

反之，当$f_{ij} > 0$时，$\exists n' > 0$，使得$f_{ij}^{(n')} > 0$，从而$p_{ij}^{(n')} > 0$，得$i \to j$。

因此（3）成立，（4）是（3）的结果。

（四）状态的分类

定义：对于状态$i \in S$，如果$f_{ii} = 1$，则称状态i为常返态（返回态）；如果$f_{ii} < 1$，则称状态i为非常返态（滑过态、瞬时态）。

令条件数学期望：

$$\mu_{ij} \triangleq E\left\{T_{ij} \,\middle|\, X_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

μ_{ij}是从状态i出发，首次到达状态j的平均转移步数（时间）。

注意：特别地，若$i = j$，则$\mu_{ii} \triangleq \mu_i$是从状态$i$出发，首次返回状态$i$的平均转移步数，称为状态$i$的平均返回时间；对应的$f_{ii}$称为状态$i$的返回概率；$f_{ii}^{(n)}$称为从状态$i$出发，经$n$步首次返回状态$i$的概率。

定义：对于常返态 $i \in S$，若$\mu_i < +\infty$，则称状态 i是正常返的；否则，若$\mu_i = \infty$，则称状态 i是零常返的。

（五）常返态和非常返态的判别

（1） 状态$i \in S$是常返的（$f_{ii}=1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$。

（2） 状态$i \in S$是非常返的（$f_{ii}<1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty$。

（3） 如果$j \in S$是非常返的，则对$\forall i \in S$，有$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}<\infty$；$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。

（4） 设$i \leftrightarrow j$，则i和j或者都是正常返的，或者都是非常返的，或者都是零常返的。

证明：对于序列$\left\{ p_{ij}^{(n)}, n\ge 0 \right\}$和$\left\{ f_{ij}^{(n)}, n\ge 1 \right\}$，分别引入其母函数为：

$$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$$

$$F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

上面两个级数当$|s|<1$时，都是绝对收敛的。利用公式：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s)&=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}\right)s^n \\
&=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n}\left(f_{ij}^{(v)} s^v\right)\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&=\delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{n=v}^{\infty}\left(p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}\right) \\
&=\delta_{ij}+\sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{m=0}^{\infty}\left(p_{jj}^{(m)} s^{m}\right) \\
&=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{jj}(s)
\end{aligned}$$

令$j=i$，由上式，有：

$$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_{ii}(s)}$$

在上式中，令 $s \to 1^-$，我们有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

由此可得以上结论的（1）、（2）。

另外，当 j 是非常返态，且 $i \neq j$ 时，由

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)P_{ij}(s)$$

可得：

$$P_{ij}(1) = F_{ij}(1)P_{jj}(1) \leq P_{jj}(1) < \infty$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \text{，且 } \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

由此可得结论（3）。

若 $i \leftrightarrow j$，则存在正整数 k, m，使得

$$p_{ij}^{(k)} > 0, \quad p_{ji}^{(m)} > 0$$

因此对于任意的正整数 r，有：

$$p_{jj}^{(k+r+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)}$$

由此可得：

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)} \geq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)}$$

因此，当 i 是常返态时，可知 j 也是常返态；当 i 是非常返态时，可知 j 也是非常返态。结论（4）成立。

引入随机变量：

$$Y_n(i) = \begin{cases} 1, & X_n = i \\ 0, & X_n \neq i \end{cases};\ n = 1, 2, \cdots$$

令：$Y(i) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(i)$，$Y(i)$ 表示马氏链 $\{X_n; n \geq 1\}$ 处于状态 i 的次数，若 i 是非常返状态，计算：

$$E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n \,\middle|\, X_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\{Y_n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \times P\{Y_n = 1 \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} - 1 < \infty$$

由此可知，若i是非常返状态，则在过程中访问它的平均次数是有限的。

对于$\forall i, j \in S$，将从状态i出发至少到达状态j m次的概率记为$g_{ij}(m)$，即：

$$g_{ij}(m) = P\{Y(j) \geq m \mid X_0 = i\}$$

由于事件$\{Y(j) \geq m\} \supset \{Y(j) \geq m+1\}$，因此$\{g_{ij}(m); m = 1,2,\cdots\}$为单调有界数列，其极限一定存在。记此极限为$g_{ij}$，它表示从状态$i$出发无限次访问状态$j$的概率，即：

$$g_{ij} = \lim_{m \to \infty} g_{ij}(m) = P\{Y(j) = +\infty \mid X_0 = i\}$$

定理：对于$\forall i, j \in S$，有：$g_{ij} = f_{ij} g_{jj}$，$g_{ii} = \lim_{n \to \infty} (f_{ii})^n$。

证明：由于

$$\{Y(j) \geq m+1\} = \{Y(j) \geq m+1\} \cap \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{T_{ij} = k\}\right] =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{Y(j) \geq m+1, T_{ij} = k\}$$

记：k时刻之后（不包括k时刻）访问状态j的次数为$Y^k(j)$，则有：

$$g_{ij}(m+1) = P\{Y(j) \geq m+1 \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y(j) \geq m+1, T_{ij} = k \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y^k(j) \geq m, X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y^k(j) \geq m \mid X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1, X_0 = i\} \times$$

$$\times P\{X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P\{Y(j) \geq m \mid X_k = j\} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} g_{jj}(m) = f_{ij} g_{jj}(m)$$

特别地，$g_{ij}(1) = f_{ij}$，因此有

$$g_{ii}(m+1) = f_{ii} g_{ii}(m) = \cdots = (f_{ii})^m g_{ii}(1) = (f_{ii})^{m+1}$$

因此，一般地有

$$g_{ij}(m+1)=f_{ij}(f_{jj})^m$$

两边令$m\to+\infty$，即有：$g_{ij}=f_{ij}g_{jj}$，$g_{ii}=\lim\limits_{n\to\infty}(f_{ii})^n$。

注意：(**1**) 对于一个常返态i，由$g_{ii}=1$可知，在过程中访问它的次数必然是无限的；(**2**) 对于一个非常返态i，由$g_{ii}=0$可知，在过程中访问它的次数必然是有限的；(**3**) 一个状态有限的马氏链，不可能所有状态都为非常返态。

定理：若i为常返状态，且$i\to j$，则有$i\leftrightarrow j$，且j为常返状态。

例 **1** （赌徒输光问题）赌徒甲有赌资a元，赌徒乙有赌资b元，a,b为不小于1的正整数。两人进行一系列的赌博。每赌一局，输者给赢者1元，没有和局，直赌到两人中有一人输光为止。设在每局中甲赢的概率为p，输的概率为$1-p$，求甲输光的概率。

解：此问题实际上就是状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots a+b\}$的一个马氏链，其中状态0和状态$a+b$为吸收态。甲开始处于状态a，最后它要么到达状态0（输光），要么到达状态$a+b$（将对方赢完），然后就不赌了。求甲输光的概率，实际上就是求甲从状态a首达状态0的概率。理论上有一步转移概率矩阵（很容易写出）就可以求得，但这样求相当麻烦，现在用其它方法来求。

令u_i为甲从状态i出发首达状态0的概率。我们要求的是u_a。因为状态0和状态$a+b$为吸收态，所以$u_0=1,u_{a+b}=0$，用全概率公式，

我们有：

$$u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}\Rightarrow(p+q)u_i=pu_{i+1}+qu_{i-1}$$

因此有：

$$p(u_{i+1}-u_i)=q(u_i-u_{i-1})\Rightarrow(u_{i+1}-u_i)=\frac{q}{p}(u_i-u_{i-1})=$$

$$=\cdots=\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

因此有：

$$\sum_{i=k}^{a+b-1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i(u_1-u_0)$$

$$u_{a+b}-u_k=(u_1-1)\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令$k=0$，利用$u_0=1, u_{a+b}=0$，可得：

$$-1=(u_1-1)\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad \Rightarrow \quad (-1)/\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i=u_1-1$$

代入上面的式子，有

$$u_{a+b}-u_k=\frac{-1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=k}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k=0,1,2,\cdots,a+b$$

令$k=a$，$u_{a+b}=0$，可得：

$$u_a=\frac{1}{\sum_{i=0}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i}\sum_{i=a}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

此即为所要求的结果。

当$p=q=0.5$时，　$u_a=\dfrac{b}{a+b}$

当$p\neq q$时，　$u_a=\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$。

例 2 设有一电脉冲，脉冲的幅度是随机的，其幅度的可取值是$\{1,2,3,\cdots,n\}$，且各幅度出现的概率相同。现用一电表测量其幅度，每隔一单位时间测量一次，从首次测量开始，记录其最大幅值为$X_n\ (n\geq 1)$。（1）证明该过程为一齐次马氏链；（2）写出一步转移概率矩阵；（3）仪器记录到最大值n的期望时间。

解：（1）记：ξ_i是第i（$i=1,2,\cdots$）次记录的幅度值，则ξ_i是相互独立同分布的随机变量序列。X_m是前m次记录幅度的最大值。

则有：

$$\begin{aligned}&P\left\{X_{m+k}=j \middle| X_m=i, X_{m-1}=i_{m-1},\cdots,X_1=i_1\right\}\\&=P\{\max_{m+1\le l\le m+k}\left(\xi_l,i\right)=j\}\\&=P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l,i\right)=j\}\end{aligned}$$

以上用到了ξ_i的相互独立性。

因此：

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(k)}(m)&=P\{X_{m+k}=j \mid X_m=i\}\\&=P\{\max_{1\le l\le m+k}\xi_l=j \mid \max_{1\le l\le m}\xi_l=i\}\\&=P\{\max_{2\le l\le k+1}\left(\xi_l,i\right)=j\}\end{aligned}$$

因此此过程是齐次马氏过程。

（2）一步转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{i}{n}, & j=i\\ \dfrac{1}{n}, & i<j\le n\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

（3）设T_n为仪器记录到最大值n的首达时间，则可以理解为起初在n状态的首次返回时间，则：

$$P\{T_n=k\}=f_{nn}^{(k)}=\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}},$$

因此记录到最大值n的期望为

$$E\{T_n\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}=n$$

由此可知，n状态是正常返态。

例 3 随机游动：

（1） 一维情形：状态空间为$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，都是相通的，因此构成一个类，任意取一个状态$i\in S$，则有：$p_{ii}^{(2n-1)}=0$，　$p_{ii}^{(2n)}=C_{2n}^n p^n q^n$，考虑母函数：

$$
\begin{aligned}
P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n s^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\left(pqs^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\left(-4pqs^2\right)^n \\
&= \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

从而有：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s\to 1-0} P_{ii}(s) = \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \infty, & p=1/2 \\ \text{有限}, & p \neq 1/2 \end{cases}
$$

由此可知，当 $p=1/2$ 时，所有状态为常返状态，当 $p \neq 1/2$ 时，状态为非常返状态，即马氏链是非常返的。

进一步研究当 $p=1/2$ 时，一维随机游动的各个状态是属于零常返还是属于正常返。由上面的结论，我们有：

$$
P_{ii}(s) = \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-s^2\right)^{-\frac{1}{2}}
$$

且有：

$$
P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s)
$$

其中：$F_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$ ，由此我们有：

$$
F_{ii}(s) = 1 - \left(1-s^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{（A）}
$$

因此有：

$$
\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = F_{ii}'(1) = \lim_{s\to 1-} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = \infty
$$

所以，当 $p=1/2$ 时，一维随机游动的所有状态都是零常返的。

注意：将（**A**）式在原点泰勒展开，可以求得首达概率 $f_{ii}^{(n)}$，即：

$$
f_{ii}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{ii}^{(2k)} = \frac{C_{2k}^{k}}{2^{2k}(2k-1)} \quad (k \geq 2), \quad f_{ii}^{(2k-1)} = 0 \quad (k \geq 1)
$$

（2） 二维情形：计算质点经过 $2n$ 步后仍然回到原位置的概率 $p_{ii}^{(2n)}$ 。此时，质

点必须与横坐标平行地向右移k步，向左移k步，向上移l步，向下移l步，并且$k+l=n$，因此有：

$$p_{ii}^{(2n)}=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2}=\frac{1}{4^{2n}}C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=\frac{1}{4^{2n}}\left(C_{2n}^{n}\right)^2\approx\frac{1}{\pi n}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，因此，平面上的对称随机游动也是常返的。

（3）　三维情形：可以证明，空间上的对称随机游动是非常返的（**Polya** 定理）。

A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.

例 4：将小白鼠放在如下的迷宫中，假定小白鼠在其中作随机地移动，即当它处于某一格子中，而此格子又有k条路径通入别的格子，则小白鼠以$1/k$的概率选择任一条路径。如设小白鼠每次移动一个格子，并用X_n表示经n次移动后它所在的格子号码数，试：

（1）　说明$\{X_n;n\ge1\}$构成一个齐次有限马氏链；

（2）　写出它的转移概率；

（3）　分解它的状态空间。

解：由题意可知其状态空间为$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

（1）由马氏链的定义可知，下一时刻小白鼠所处各个状态的概率只与当时小白鼠所处的状态有关，因此$\{X_n;n\ge1\}$ $\{X_n;n\ge1\}$构成一个齐次有限马氏链；

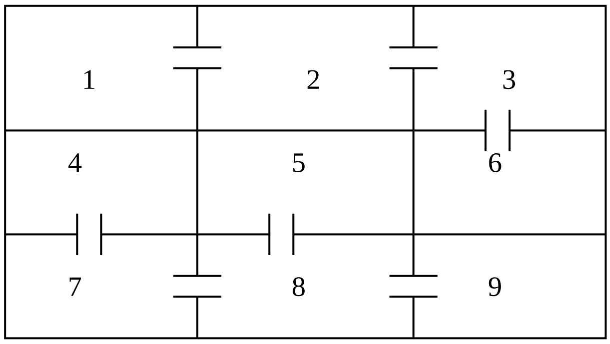
（2）一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1/2&0&1/2&0&0&0&0&0&0\\0&1/2&0&0&0&1/2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1/2&0&0&0&1/2&0\\0&0&0&0&1/3&0&1/3&0&1/3\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

（3）画出状态转移图，状态空间的分解为两个闭集：

$$S_1 = \{1,2,3,6\}$$

$$S_2 = \{4,5,7,8,9\}$$



第二章　Markov 过程

4.　马尔可夫链状态的分类

（六）闭集和状态空间的分解

定义：设C是状态空间S的一个子集，如果从C内任何一个状态i不能到达C外的任何状态，则称C是一个闭集。如果单个状态i构成的集$\{i\}$是闭集，则称状态i是吸收态。如果闭集C中不再含有任何非空闭的真子集，则称C是不可约的。闭集是存在的，因为整个状态空间S就是一个闭集，当S不可约时，则称此马氏链不可约，否则称此马氏链可约。

有关的性质：

（1）C是闭集$\Leftrightarrow$ $p_{ij}=0, \forall i\in C, j\notin C$ $\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{(n)}=0\,(n\geq 1), \forall i\in C, j\notin C$；

（2）C是闭集$\Leftrightarrow \sum\limits_{j\in C} p_{ij}=1, \forall i\in C$；

（3）i为吸收态$\Leftrightarrow$ $p_{ii}=1$；

（4）齐次马氏链不可约$\Leftrightarrow$任何两个状态均互通；

（5）所有常返态构成一个闭集；

（6）在不可约马氏链中，所有状态具有相同的状态类型；

定义：对$i\in S$，若正整数集$\left\{n; n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\right\}$非空，则定义其最大公约数为状态$i$的周期，记为$d_i$，当$d_i=1$时，称该状态无周期。

定义：称非周期正常返状态为遍历态。

注意：一个不可约的、非周期的、有限状态的马氏链一定是遍历的。

（七）常返、非常返、周期状态的分类特性

设$i\leftrightarrow j$，则i和j或者都是非常返态，或者都是零常返态，或者都是正常

返非周期的（遍历），或者都是正常返有周期的且有相同的周期。

$$\text{状态}\begin{cases}\text{非常返态}\\ \text{常返态}\begin{cases}\text{零常返态}\\ \text{正常返态}\begin{cases}\text{有周期}\\ \text{非周期（遍历态）}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

（八）周期状态的判别

（1） 按互通性将状态分类后，在同一类集合中选一个状态判别其周期性即可。

（2） 如有正整数 n，使得 $p_{ii}^{(n)} > 0$，$p_{ii}^{(n+1)} > 0$，则状态 i 无周期。

（3） 如有正整数 m，使得 m 步转移概率矩阵 P^m 中相应某状态 j 的那一列元素全不为零，则状态 j 无周期

（九）分解定理

（1） 齐次马氏链的状态空间 S 可唯一地分解为有限多个或可列多个互不相交的状态子集 $D, C_1, C_2, \cdots$ 之并，即有 $S = D \bigcup C_1 \bigcup C_2 \bigcup \cdots$。

其中：D 是非常返态集，每个 C_n，$n = 1,2,\cdots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通，因此 C_n，$n = 1,2,\cdots$ 中的状态具有相同的状态类型：或者均为零常返；或者均为正常返非周期（遍历）；或者均为正常返有且有相同的周期；而且对于 $i, j \in C_n$，$f_{ij} = 1$。

（2） （周期链分解定理）一个周期为 d 的不可约马氏链，其状态空间 S 可以分解为 d 个互不相交的集 $J_1, J_2, \cdots, J_d$ 之并，即有：

$$S = \bigcup_{r=1}^{d} J_r , \quad J_k \bigcap J_l = \varnothing, k \neq l ,$$

且

$$\sum_{j \in J_{r+1}} p_{ij} = 1, i \in J_r , r = 1,2,\cdots$$

其中约定 $J_{r+1} = J_1$。

（3） 基于上面的（**1**），我们将状态空间 S 中的状态依 $D, C_1, C_2, \cdots$ 的次序从新排列，则转移矩阵具有以下的形式

$$P=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} P_D & P_{D_1} & P_{D_2} & \cdots \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} D \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{array}$$

其中 $P_1, P_2, \cdots$ 均为随机矩阵，他们对应的链是不可约的。称以上形式的转移矩阵为标准形式。

（十）有限状态马氏链的性质

（1） 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集；（无限状态马氏链不一定）
（2） 没有零常返状态；
（3） 必有正常返状态；
（4） 不可约有限马氏链只有正常返态；
（5） 状态空间可以分解为：

$$S=D\bigcup C_1\bigcup C_2\bigcup\cdots\bigcup C_k$$

其中：每个 $C_n, n=1,2,\cdots,k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，D 是非常返态集。

（十一）例子

例 **1** 设有三个状态 $\{0,1,2\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

例 **2** 设有四个状态 $\{0,1,2,3\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：$\{0,1\}$正常返，$\{2\}$非常返，$\{3\}$吸收态。

例 3 设马氏链的状态空间为$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

试分析此链并指出各状态的常返性、周期性及求此链的闭集。

解：画出状态转移图，$S=D\cup C_1\cup C_2=\{4\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,6\}$。

例 4 设马氏链的状态空间为$S=\{1,2,3,\cdots\}$，转移概率为：$p_{11}=1/2$，$p_{i\,i+1}=1/2$，$p_{i1}=1/2, i\in S$，研究各状态的分类。

解：画出状态转移图，可知：

$f_{11}^{(n)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，故 $f_{11}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=1$，故状态 1 是常返的。

又$\mu_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\infty$，故状态 1 是正常返的。

易知状态 1 是非周期的，从而状态 1 是遍历的。

对于其它状态，由于$1\leftrightarrow i, i\in S$，因此也是遍历的。

例 5 设有八个状态$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

讨论其周期性。

解：主对角线为 **0**，它是具有周期性的转移矩阵的标准形式。八个状态可以分为四个子集，$c_1=\{0\}$，$c_2=\{1,2,3\}$，$c_3=\{4,5\}$，$c_4=\{6,7\}$，它们互不相交，它们的并是整个状态空间，该过程具有确定的周期转移，即：$c_1 \to c_2 \to c_3 \to c_4 \to c_1$，周期为 **4**。

例 6 设齐次马氏链的状态空间为$\{1,2,3\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求：（**1**）T_{13}的分布率及ET_{13}，（**2**）$f_{ii}\ (i=1,2,3)$

解：（**1**）画出状态转移图，可得T_{13}的分布率为：

$T_{13}=n$	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	**n**	**…**
$f_{13}^{(n)}=P\{T_{13}=n\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{3^2}{4^3}$	$\frac{3^3}{4^4}$	…	$\frac{3^{n-1}}{4^n}$	…

因此，$ET_{13}=\sum_{n=1}^{\infty} nP\{T_{13}=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{3^{n-1}}{4^n}=4$。

（**2**）由于：

$f_{11}^{(1)}=1/2,\ f_{11}^{(n)}=0\ ,\ n>1$，故 $f_{11}=1/2<1$

$f_{22}^{(1)}=3/4,\ f_{11}^{(n)}=0\ ,\ n>1$，故 $f_{11}=3/4<1$

$f_{33}^{(1)}=1,\ f_{11}^{(n)}=0\,,n>1$，故 $f_{33}=1$

因此，状态 1 和 2 为非常返态，3 为常返态。

例 7 设齐次马氏链的状态空间为$\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：画出状态转移图，可知：

$$f_{44}^{(n)}=0\,(n\ge 1)\Rightarrow f_{44}=0<1$$

$$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3}\,,\ f_{33}^{(n)}=0\,(n>1)\Rightarrow f_{33}=\frac{2}{3}<1$$

故状态 3 和 4 为非常返态。

$$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}+0+\cdots+0+\cdots=1$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1$$

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\infty$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1\times 0+2\times\frac{1}{2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=3<\infty$$

故状态 1 和 2 都是正常返的，易知它们是非周期的，从而是遍历状态。

例 8 设一齐次马氏链的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，其状态转移矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

试讨论此链状态的分类及常返的充分必要条件。

解：画出状态转移图，图中可以看出任意二状态都相通，链是不可约的，因此只要确定任一状态是常返的条件即可。

由状态转移图，可得：

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0\text{；}f_{00}^{(2)}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1\text{；}$$

$$f_{00}^{(3)}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2\text{；}\cdots$$

$$f_{00}^{(n)}=p_0p_1\cdots p_{n-2}-p_0p_1\cdots p_{n-1}\text{；}\cdots$$

因此有：

$$\sum_{n=1}^{N}f_{00}^{(n)}=1-p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

即

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=1-\lim_{N\to\infty}p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

因此此链常返的充分必要条件为：$\lim\limits_{N\to\infty}p_0p_1\cdots p_{N-1}=0$

例 9 设一口袋中装有三种颜色（红、黄、白）的小球，其数量分别为 3、4、3。现在不断地随机逐一摸球，有放回，且视摸出球的颜色计分：红、黄、白分别计 1、0、-1 分。第一次摸球之前没有积分。以 Y_n 表示第 n 次取出球后的累计积分，$n=0,1,\cdots$

（1）Y_n，$n=0,1,\cdots$ 是否齐次马氏链？说明理由。

（2）如果不是马氏链，写出它的有穷维分布函数族；如果是，写出它的一步转移概率 p_{ij} 和两步转移概率 $p_{ij}^{(2)}$。

（3）令 $\tau_0=\min\{n;Y_n=0,n>0\}$，求 $P\{\tau_0=5\}$。

解：（1）是齐次马氏链。

由于目前的积分只与最近一次取球后的积分有关，因此此链具有马氏性且是齐次的。

状态空间为：$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。

（2）$$p_{ij}=P\{Y_{n+1}=j|Y_n=i\}=\begin{cases}0.3, & j=i+1\\ 0.4, & j=i\\ 0.3, & j=i-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$p_{ij}^{(2)} = P\{Y_{n+2} \big| Y_n = i\} = \begin{cases} 0.3^2, & j = i+2 \\ 2\times 0.3\times 0.4, & j = i+1 \\ 0.4^2 + 2\times 0.3^2, & j = i \\ 2\times 0.3\times 0.4, & j = i-1 \\ 0.3^2, & j = i+2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（3）即求首达概率，画状态转移图，我们有：

$$P\{\tau_0 = 5\} = 2\times[3\times 0.3^4\times 0.4 + 0.3^2\times 0.4^3] = 0.03096$$

注意：此题实际上就是直线上的随机游动。

例 10 设有无穷多个袋子，各装红球 r 只，黑球 b 只及白球 w 只。今从第 1 个袋子中随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子中随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续。令：

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

（1） 试求 R_k 的分布；

（2） 试证 $\{R_k; k = 1, 2, \cdots\}$ 为马氏链，并求一步转移概率矩阵。

解：（1）计算得 R_k **的分布列为：**

$$\begin{pmatrix} R_k & 1 & 0 \\ P & \dfrac{r}{r+b+w} & \dfrac{b+w}{r+b+w} \end{pmatrix}$$

（2） R_k **的状态空间为** $S = \{0,1\}$**，一步转移概率矩阵为：**

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{r+1}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w}{r+b+w+1} \\ \dfrac{r}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w+1}{r+b+w+1} \end{bmatrix}$$

例 11 设一具有 3 个状态的马氏链的一步转移矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

试确定此马氏链的状态分类。

附录：转移矩阵估计问题

例：某计算机经常出故障，研究人员每隔一刻钟记录一次计算机的运行状态，收集了 **24** 小时的数据（**97** 次记录），用 **1** 表示正常状态，**0** 表示故障状态，所得数据如下：

1110010011111110011110111111001111111110001101101

111011011010111101110111101111110011011111100111

设 X_n 为第 n 个时段的计算机状态，可以认为此是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1\}$，试确定此马氏链的状态一步转移矩阵。

若已知计算机在某一时段的状态为 **0**，问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 **3** 刻钟的条件概率为多少？

设 $\{X_n; n\geq 0\}$ 为一齐次马氏链，状态空间为 S，我们有此马氏链的一次实现（样本）$x_0,x_1,\cdots,x_N$，而转移矩阵未知，如何用现有数据来估计转移矩阵 P？

记在状态 i 之后首次出现状态 j 的时间为 $n(i,j)$，定义似然函数：

$$L=\prod_{i,j\in S} p_{ij}^{n(i,j)}$$

相应的对数似然函数为：

$$L=\sum_{i,j\in S} n(i,j)\ln p_{ij}=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} n(i,j)\ln p_{ij}$$

利用约束条件 $\sum_{j\in S} p_{ij}=1\ \forall i\in S$，由极大似然估计法（**MLEs**）我们有如下估计式：

$$\hat{p}_{ij}=\frac{n(i,j)}{\sum_{k\in S} n(i,k)}$$

注：此估计为局部最大估计。也可以由以下引理得到以上的估计。

引理：设 $z_i\geq 0\ (i\leq N)$，则在约束条件 $\sum_{i=1}^{N} x_i=1, x_i\geq 0\ (i\leq N)$ 下，函数 $\sum_{i=1}^{N} z_i\ln x_i$ 在 $x_i=\dfrac{z_i}{\sum_{i=1}^{N} z_i}\ (i\leq N)$ 处取得最大。

5．马氏链的极限性态与平稳分布

当一个马氏链系统无限期的运行下去时，我们所关心和需要解决的问题：

（1） 当$n \to \infty$时，$P\{X_n = i\} = \pi_i(n)$的极限是否存在？即当马氏链系统无限期的运行下去时，此链处于各个状态的概率（可能性）分布。

（2） 在什么情况下，一个马氏链是一个平稳序列？

关于第一个问题，由于：$\pi_j(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}$，其中$\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}$，$\{\pi_i(0), i \in S\}$是马氏链的初始分布，因此，问题可以转化为研究$p_{ij}^{(n)}$的极限性质，即研究$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是否存在？存在的话，其极限是否与$i$有关？

关于第二个问题，实际上是一个平稳分布是否存在的问题。

（一）P^n的极限性态

（I）$j \in S$是非常返状态或零常返状态的情形

前面我们已经得到结论：若$j \in S$为非常返状态，则对于任意的$i \in S$，有$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。针对零常返状态的情形，我们要进行详细的讨论。

引理：（**Hardy－Littlewood**）设幂级数$G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$在$0 \le s < 1$上收敛，且系数$a_n$非负，则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{s\to 1-} (1-s) G(s)$$

引理：设非负数列a_n的极限$\lim_{n\to\infty} a_n$存在，则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

定理：设 $j\in S$ 为常返状态，则对于任意的 $i\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

证明：记：$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n$，$F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}s^n$，有

$$P_{jj}(s)=\frac{1}{1-F_{jj}(s)},\quad P_{ij}(s)=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{jj}(s)$$

因此，当 $i\neq j$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\lim_{s\to1-}(1-s)P_{ij}(s)=\lim_{s\to1-}\frac{1-s}{1-F_{jj}(s)}F_{ij}(s)$$

由 $\lim_{s\to1-}F_{ij}(s)=f_{ij}$，$\lim_{s\to1-}F'_{jj}(s)=\mu_j$，以及洛必达法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\lim_{s\to1-}\frac{1-s}{1-F_{jj}(s)}F_{ij}(s)=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

当 $i=j$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}=\lim_{s\to1-}(1-s)P_{ii}(s)=\lim_{s\to1-}\frac{1-s}{1-F_{ii}(s)}=\frac{1}{\mu_i}$$

定理：设 $i\in S$ 是周期为 d 的常返状态，则有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$$

其中 μ_i 为 i 的平均返回时间。

定理：设 $i\in S$ 为常返状态，则有

（1）i 为零常返状态，当且仅当，$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$；

（2）i 为遍历状态，当且仅当，$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}>0$；

（3）若 $j\in S$ 为零常返状态，则对于任意的 $i\in S$，有 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

证明：（1）若 i 为零常返状态，则有上一定理可知 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=0$，由周期性

的定义可知，当n不能被d整除时，有 $p_{ii}^{(n)}=0$，因此有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$。反之，若 $p_{ii}^{(n)}=0$，假设i为正常返状态，则有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\dfrac{d}{\mu_i}>0$，矛盾，故$i$为零常返状态。

（**2**）设$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_i}>0$，由（**1**）可知$i$为正常返状态，且$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\dfrac{d}{\mu_i}$，因此$d=1$，故$i$为遍历状态。反之由上面的定理即得。

（**3**）若 $j\in S$ 为零常返状态，则对于任意的$i\in S$，我们取$m<n$，有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}\le\sum_{l=1}^{m}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}+\sum_{l=m+1}^{n}f_{ij}^{(l)}$$

对上式固定m，令$n\to\infty$，由（**1**）可知上式右边第一项为零，再令$m\to\infty$，由于$\sum\limits_{l=1}^{+\infty}f_{ij}^{(l)}\le 1$，因此上式右边的第二项也为零，故有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

（**II**） $j\in S$ 是非周期正常返的情形

定理（**Markov**）：设有一有限状态的马氏链，若存在一个正整数m，使得对于$\forall i,j\in S$，有 $p_{ij}^{(m)}>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}P^n=\boldsymbol{\pi}$，其中$\boldsymbol{\pi}$是一随机矩阵，且它的各行都相同。

证明：（**A**）$m=1$时的情形；

此时，由题意可知，存在 $0<\varepsilon<1$，使得 $p_{ij}\ge\varepsilon>0,\ \forall i,j\in S$，

令：$m_j(n)\triangleq\min\limits_{i\in S}p_{ij}^{(n)}$，表示在$n$步转移后在$j$列中最小的一个元素；

令：$M_j(n)\triangleq\max\limits_{i\in S}p_{ij}^{(n)}$，表示在$n$步转移后在$j$列中最大的一个元素；

（**1**） 由 **C－K** 方程，证明 $m_j(n),M_j(n)$（注意：都是有界量）的单调性：

由于对于$\forall\, i\in S$，有：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}p_{kj}^{(n-1)}\ge\sum_{k\in S}p_{ik}m_j(n-1)=m_j(n-1)$$

因此，可得：

$$m_j(n) \geq m_j(n-1)$$

由于对于 $\forall\, i \in S$ ，有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \leq \sum_{k\in S} p_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1)$$

因此，可得：

$$M_j(n) \leq M_j(n-1)$$

（2） 证明 $m_j(n), M_j(n)$ 收敛于同一极限：

令：$p_{i_0 j}^{(n)} = m_j(n) \hat{=} \min\limits_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$； $p_{i_1 j}^{(n-1)} = M_j(n-1) \hat{=} \max\limits_{i\in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$m_j(n) = p_{i_0 j}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_1 j}^{(n-1)} + (p_{i_0 i_1} - \varepsilon) p_{i_1 j}^{(n-1)} + \sum_{k\in S, k\neq i_1} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\geq \varepsilon M_j(n-1) + \left[p_{i_0 i_1} - \varepsilon + \sum_{k\in S, k\neq i_1} p_{i_0 k} \right] m_j(n-1)$$

因此有：

$$m_j(n) \geq \varepsilon M_j(n-1) + (1-\varepsilon) m_j(n-1) \qquad \text{(a)}$$

令：$p_{i_0' j}^{(n)} = M_j(n) \hat{=} \max\limits_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$； $p_{i_2 j}^{(n-1)} = m_j(n-1) \hat{=} \min\limits_{i\in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$M_j(n) = p_{i_0' j}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_2 j}^{(n-1)} + (p_{i_0' i_2} - \varepsilon) p_{i_2 j}^{(n-1)} + \sum_{k\in S, k\neq i_2} p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\leq \varepsilon m_j(n-1) + \left[p_{i_0' i_2} - \varepsilon + \sum_{k\in S, k\neq i_2} p_{i_0' k} \right] M_j(n-1)$$

因此有：

$$M_j(n) \leq \varepsilon m_j(n-1) + (1-\varepsilon) M_j(n-1) \qquad \text{(b)}$$

由（**a**）和（**b**）式，我们有：

$$M_j(n) - m_j(n) \leq (1-2\varepsilon)[M_j(n-1) - m_j(n-1)]$$

由上式递归可得：

$$0 \leq M_j(n) - m_j(n) \leq (1-2\varepsilon)^{n-1}[M_j(1) - m_j(1)] \leq (1-2\varepsilon)^{n-1}$$

由于，$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow -1 < 1-2\varepsilon < 1$，对上式两边令 $n \to +\infty$ 求极限，得：

$$\lim_{n\to+\infty} M_j(n) = \lim_{n\to+\infty} m_j(n) \hat{=} \pi_j$$

由此证明了当$m=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \boldsymbol{\pi}$。

（**B**）$m>1$时的情形；

由于：$\lim\limits_{n\to\infty}[P^{(m)}]^n = \lim\limits_{n\to\infty} P^{(mn)} = \boldsymbol{\pi}$

对于$k=1,2,\cdots,m-1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} P^{(mn+k)} = \lim_{n\to\infty} P^{(k)} P^{(mn)} = P^{(k)}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

至此定理得证。

注意：如果状态空间是无限可列的马氏链，则定理要修改为：

（**1**）　或者是$\boldsymbol{\pi}$中的所有元素都大于零（此时仍为随机矩阵）

（**2**）　或者是$\boldsymbol{\pi}$中的所有元素都等于零

推论 **1**　P^n的极限矩阵$\boldsymbol{\pi}$是唯一的，且满足：

（**1**）$\sum\limits_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \pi_j$，　$\pi_i > 0$，即：$\boldsymbol{\pi}P = \boldsymbol{\pi}$。

（**2**）$\sum\limits_{i\in S}\pi_i = 1$,

推论 **2**　$\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，即$\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\}$所取的值与初始状态的分布无关。

证：由于：

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_{i\in S} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i\in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i\in S} \pi_j P\{X_0 = i\} = \pi_j \sum_{i\in S} P\{X_0 = i\} = \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

即，经过无穷次转移后处于j状态的概率与初始状态无关，与初始状态的分布也

无关。

下面不加证明地给出几个常用的定理。注意：当 j 是正常返时，情况比较复杂，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在，也可能与 i 有关。

定理：若 j 是遍历状态，则对于任意的 $i\in S$，有：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理：对于不可约的遍历链，则对于任意的 $i, j\in S$，有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$。

定理：若马氏链是不可约的遍历链，则 $\left\{\pi_i = \frac{1}{\mu_i}, i\in S\right\}$ 是方程组

$$x_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij}, \quad j\in S$$

满足条件 $x_j \ge 0, j\in S, \sum_{j\in S} x_j = 1$ 的唯一解。

例：设有一状态空间为 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的齐次马氏链，其一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试画出该链的状态转移图，研究各状态的性质及状态的分类，并讨论该链的极限特性。

（二）平稳分布

定义：一个定义在状态空间上的概率分布 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_i,\cdots\}$ 称为马氏链的平稳分布，如有：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$$

即，$\forall j \in S$，有：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

平稳分布也称为马氏链的不变概率测度。对于一个平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$，显然有：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi} P^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi} P^n$$

定理：设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是一马氏链，则 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为平稳过程的充分必要条件是 $\boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_i(0), i \in S)$ 是平稳分布，即有：

$$\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(0) P$$

证明：充分性：记 $\boldsymbol{\pi}(0) \triangleq \boldsymbol{\pi}$，则有：

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0) P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\boldsymbol{\pi}(2) = \boldsymbol{\pi}(1) P = \boldsymbol{\pi}(0) P = \boldsymbol{\pi}, \quad \cdots$$

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) P = \cdots = \boldsymbol{\pi}$$

因此，对于 $\forall i_k \in S$，$t_k \in N$，$n \ge 1$，$1 \le k \le n$，$t \in N$，有：

$$\begin{aligned} P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} &= \pi_{i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \\ &= \pi(t_1 + t) p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \\ &= P\{X_{t_1 + t} = i_1, X_{t_2 + t} = i_2, \cdots, X_{t_n + t} = i_n\} \end{aligned}$$

所以 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是严平稳过程。

必要性：由于 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是平稳过程，因此有：

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) = \cdots = \boldsymbol{\pi}(0)$$

又由 $\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0) P$ 得：

$$\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(0) P$$

即 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 是平稳分布。

定理：不可约的遍历链恒有唯一的平稳分布 $\left\{\pi_i=\dfrac{1}{\mu_i}, i\in S\right\}$，且 $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$。

（三）$\lim\limits_{n\to\infty}\pi_j(n)$ 的存在性

定义：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_j(n)=\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=j\}=\pi_j^*$, $j\in S$ 存在，则称 $\boldsymbol{\pi}^*=\{\pi_1^*,\cdots,\pi_j^*,\cdots\}$ 为马氏链的极限分布。

定理：非周期的不可约链是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就是极限分布。

证明：充分性：设存在平稳分布：$\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_j,\cdots\}$，由此有：

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P=\boldsymbol{\pi}P^2=\cdots=\boldsymbol{\pi}P^n$$

即：

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$$

由于：$\pi_j\geq 0$, $j\in S$, $\sum\limits_{j\in S}\pi_j=1$，

由控制收敛定理，有：

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in S}\pi_i\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\left(\sum_{i\in S}\pi_i\right)\frac{1}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}$$

因为

$$\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_j}=1$$

于是至少存在一个 $\pi_l=\dfrac{1}{\mu_l}>0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}p_{il}^{(n)}=\frac{1}{\mu_l}>0$$

即有：

$$\mu_l < \infty$$

故l为正常返状态，由不可约性，可知整个链是正常返的，且有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0,\ j \in S$$

必要性：由于马氏链是正常返非周期链，即为遍历链，由以上的定理立即可得结果。且有：

$$\pi_j = \pi_j^* = \frac{1}{\mu_j},\ j \in S$$

由此定理可知，对于不可约遍历链，则极限分布$\boldsymbol{\pi}^* = \boldsymbol{\pi}$存在，且就是等于平稳分布。

（四）例子

例 **1** 设$S = \{1,2\}$，且一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

求平稳分布及$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

解：由$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$，解得：

$$\pi_1 = 5/7，\ \pi_1 = 2/7$$

故$\boldsymbol{\pi} = (5/7, 2/7)$，由$\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j}$，故$\mu_1 = 7/5, \mu_2 = 7/2$。

且：$\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$。

例 **2** 在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差，以 **0** 表示误差状态，以 **1** 表示无误差状态。设状态的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

试说明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布（平稳分布）。

解：可以看出一步转移概率矩阵中的元素都大于零，因此可知是遍历的。

（1）　由矩阵的对角化可得：

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

因此有：

$$P^n=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

由此，可得：

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

极限分布为：$\pi=(2/3,1/3)$。

（2）　由 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P$，解得：$\pi=(2/3,1/3)$。

例 **3** 在直线上带有反射壁的随机游动，只考虑质点取 **1**、**2**、**3** 三个点，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{pmatrix}$$

讨论它是否为遍历链。

解：计算得：

$$P^2=\begin{pmatrix}q^2+pq & pq & p^2\\ q^2 & 2pq & p^2\\ q^2 & pq & p^2+pq\end{pmatrix}$$

可以看出其中得元素都大于零，因此可知是遍历的。即 $\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$，与 i 无关。

求极限分布时，只要解方程$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$即可，可以求得：

$$\pi_1 = \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_2 = \frac{p}{q}\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

例 4 限制性酶切片断平均长度的计算。

序列：TACTAATCGGATAACCAAACA…，切点为 AA 和 AC 的情况。

状态空间：$S_1 = \{A, B = C \cup G \cup T, AA\}$ ；$S_2 = \{A, C, G \cup T, AC\}$

X_n **定义为记录原始序列在**n**位置的状态情况。则**$\{X_n; n \ge 1\}$**为一齐次马氏链，转移矩阵分别为：**

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & q & 0 \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad p = p_A, q = p_C + p_G + p_T$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_A & 0 & p_G + p_T & p_C \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得，AA 酶切片断平均长度为：$\dfrac{1}{p_A^2} + \dfrac{1}{p_A}$**；AC 酶切片断平均长度为：**$\dfrac{1}{p_A p_C}$。

6．非常返态分析

由状态空间的分解可知，状态空间 S 可唯一地分解为：

$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots = D \cup C$$

其中：D 是非常返态集，每个 C_n , $n = 1,2,\cdots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通。

（一）　计算从状态 i 出发进入状态子集 C_k 的概率 $P\{C_k \mid i\}$。

若 $i \in C_k$，则有 $P\{C_k \mid i\} = 1$；若 $i \in C_m\ m \neq k$，则有 $P\{C_k \mid i\} = 0$；若 $i \in D$，则有：

$$P\{C_k \mid i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{C_k \mid j\}$$

由此，我们有：

$$P\{C_k \mid i\} - \sum_{j \in D} p_{ij} P\{C_k \mid j\} = \sum_{j \in C_k} p_{ij}\ ,\quad i \in D$$

解上式的线性方程组，即可得概率 $P\{C_k \mid i\}$，称此概率为 C_k 的吸收概率。

（二）　非常返态进入常返态所需的平均时间

设 T 为从状态 $i \in S$ 出发进入常返态类所需的时间，称此时间为吸收时间。T 为取值于 $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$ 的随机变量。

设 $P\{T = n \mid i\}, n = 0,1,2,\cdots$ 为过程经过 n 步转移后由状态 i 进入常返态类的概率，则

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} P\{T = n \mid i\} = P\{T < \infty \mid i\}$$

表示从状态 i 出发迟早进入常返态类的概率。

称：$1 - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} P\{T = n \mid i\} = 1 - P\{T < \infty \mid i\}$ 为过程的亏值（**defect**），它表示过程永远停留在非常返态的概率。

若 $i \in C$，则有：$P\{T = 0 \mid i\} = 1,\ P\{T > 0 \mid i\} = 0$；

若 $i \in S$，我们有：

$$P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S}p_{ij}P\{T=n|j\},\quad n=0,1,2,\cdots$$

因此，若$i\in D$，则由：

$$\begin{cases}P\{T=1|i\}=\sum_{j\in C}p_{ij} \quad (\text{起始条件})\\ P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in D}p_{ij}P\{T=n|j\},\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

可以计算出吸收时间的概率分布。

另外，也可以利用首达概率计算吸收时间的概率分布如下：

$$P\{T=n|i\}=\sum_{j\in C}f_{ij}^{(n)}\quad i\in D,n=1,2,\cdots$$

当亏值为 **0** 时，计算非常返态进入常返态所需的平均时间为：

$$E\{T|i\}=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{T=n|i\}$$

当亏值不为 **0** 时，上式无意义。

我们还可以计算非常返态进入常返态所需的平均时间如下：

由：$P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S}p_{ij}P\{T=n|j\},\quad n=0,1,2,\cdots$

两边各乘以n，有：

$$(n+1)P\{T=n+1|i\}-P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S}n\cdot p_{ij}P\{T=n|j\}$$

上式对$n=0,1,2,\cdots$求和，我们有

$$E\{T|i\}-\sum_{n=1}^{\infty}P\{T=n|i\}=\sum_{j\in S}E\{T|j\}p_{ij} \tag{A}$$

如果$j\in C$，则$E\{T|j\}=0$；

若过程的亏值为 **0**，则有$\sum_{n=1}^{\infty}P\{T=n|i\}=1$，由（**A**）可得：

$$E\{T|i\}-\sum_{j\in D}E\{T|j\}p_{ij}=1,\quad i\in D$$

由上面的方程组即可计算非常返态进入常返态所需的平均时间。

例（网球比赛）：网球一局比赛在两个选手（发球者和接发球者）之间进行，网球的记分制是：**15**、**30**、**40**、和 **60** 分。平分是指第五球后双方分数相同。平分后，从第六球开始，如果发球者得分/失分，则此时发球者占先/接发球者占先。

如果发球者在发球占先后再得分，则发球者赢得该局。如果接发球者在接发球后占先后再得分，则接发球者赢得该局。若发球者发一球获胜的概率为 p，输的概率为 q， $p+q=1$，试回答以下问题：

（1） 试用马氏链建模网球一局比赛过程，确定其状态，画出状态转移图；

（2） 分析各状态的性质；

（3） 试确定一局网球比赛发球者获胜的概率；

（4） 试确定一局比赛平均需要发几个球才能结束。

解：课堂中详细板书讲解。

第二章　Markov 过程

7. 参数连续状态离散的马氏过程

（一）参数连续状态离散的马氏过程的转移概率

定义：设$\{X(t), t \ge 0\}$是取值于状态空间S的随机过程，S是有限或无限可列的，如果对于任意的正整数n，任意的$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$，及任意的状态$i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1} \in S$，均有：

$$\begin{aligned} &P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_n) = i_n\} \\ &\quad = P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n\} \end{aligned}$$

则称此随机过程为参数连续状态离散的马氏过程（纯不连续马氏过程）。

对于纯不连续马氏过程，有：

$$P\{X(t_2) = j \mid X(t'), 0 \le t' \le t_1\} = P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\} \quad t_1 \le t_2, i, j \in S$$

记：

$$p_{ij}(t_1, t_2) \hat{=} P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\}$$

称此条件概率为纯不连续马氏过程的转移概率。

显然有：

$$\begin{cases} p_{ij}(t_1, t_2) \ge 0 \\ \sum\limits_{j \in S} p_{ij}(t_1, t_2) = 1 \quad i \in S \end{cases}$$

如果$p_{ij}(t_1, t_2)$仅为时间差$t = t_2 - t_1$的函数，而与t_1和t_2的值无关，则称此纯不连续马氏过程为齐次的。此时

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(t_1, t_2) \hat{=} P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\} \quad t = t_2 - t_1$$

$$\begin{cases} p_{ij}(t) \ge 0 & i, j \in S, t \ge 0 \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 & i \in S, t \ge 0 \end{cases}$$

以下我们主要讨论齐次纯不连续马氏过程。

纯不连续马氏过程的 **C－K** 方程：

一般情形：

$$P\{X(t_3) = j \mid X(t_1) = i\} =$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X(t_3) = j \mid X(t_2) = k\} P\{X(t_2) = k \mid X(t_1) = i\}$$

$$(t_1 < t_2 < t_3, \quad i, j \in S)$$

齐次情形：

$$p_{ij}(t+\tau) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(\tau), \quad (i, j \in S, t > 0, \tau > 0)$$

连续性条件：

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

满足连续性条件的马氏过程称为随机连续的马氏过程。

注：i, j 固定时，可以证明齐次纯不连续，并且随机连续的马氏过程的转移概率 $p_{ij}(t)$ 是关于 t 的一致连续函数，并且是可微的。

（二）无穷小转移率 q_{ij} 及转移率矩阵（Q 矩阵）

取任意充分小的 $\Delta t > 0$，由连续性条件及上面的注，我们有：

$$p_{ij}(\Delta t) = p_{ij}(0) + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) = \delta_{ij} + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$

即：

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

我们称 q_{ij} 为从状态 i 到状态 j 的无穷小转移率或跳跃强度，显然有：

$$q_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, & i\neq j\\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}, & i=j\end{cases}$$

即有：

$$q_{ij}\geq 0,(i\neq j),\quad q_{ij}\leq 0,(i=j)$$

由$\sum\limits_{j\in S}p_{ij}(\Delta t)=1$及上面的式子，有：

$$1=1+\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)\Delta t+\sum_{j\in S}o(\Delta t)\Rightarrow\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)=\sum_{j\in S}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

两边求极限，即有：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

当状态有限的时候，我们可以定义一个矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix}q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

称Q为转移率矩阵或Q矩阵。

注：当状态为无限可列时，也可以定义形式上的Q矩阵。

（三）Kolmogrov—Feller 前进方程

由 **C－K** 方程，取任意充分小的$\Delta t>0$，有：

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)=$$

$$=p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)+\sum_{k\in S,k\neq j}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)\quad(i\in S)$$

由：

$$\begin{cases} p_{kj}(\Delta t) = q_{kj}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq j \\ p_{jj}(\Delta t) = 1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

有：

$$p_{ij}(t+\Delta t) =$$

$$= p_{ij}(t)[1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{k\in S, k\neq j} p_{ik}(t)[q_{kj}\Delta t + o(\Delta t)]$$

即有：

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k\in S} p_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，我们有：

$$\frac{d\, p_{ij}(t)}{d\, t} = \sum_{k\in S} p_{ik}(t) q_{kj} \quad i, j \in S, t \geq 0$$

由初始条件：

$$\begin{cases} p_{ij}(0) = 0 & i \neq j \\ p_{ii}(0) = 1 \end{cases}$$

即可求解上面的方程组。

当状态有限时，我们令：

$$\Gamma_i(t) = \left(p_{i0}(t), p_{i1}(t), \cdots, p_{in}(t)\right)$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\Gamma_i(t)}{d\,t} = \Gamma_i(t) Q & i = 0,1,2,\cdots,n \\ \Gamma_i(0) = (0,0,\cdots,1,\cdots 0) \end{cases}$$

进一步，若记：

$$P(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \vdots \\ \Gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0n}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0}(t) & p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P(t)}{d\,t} = P(t)Q \\ P(0) = I_{(n+1)\times(n+1)} \end{cases}$$

此即为 Kolmogrov—Feller 前进方程。

（四）Kolmogrov—Feller 后退方程

根据 C－K 方程，取任意充分小的$\Delta t > 0$，有：

$$p_{ij}(t+\Delta t) = p_{ij}(\Delta t + t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) =$$
$$= p_{ii}(\Delta t)p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) \quad (i \in S)$$

由：

$$\begin{cases} p_{ik}(\Delta t) = q_{ik}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq i \\ p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

得：

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = q_{ii}p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t \to 0$，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t} = \sum_{k\in S} q_{ik}p_{kj}(t) \quad i, j \in S, t \geq 0$$

当状态有限时，记：

$$S_j(t) = \begin{pmatrix} p_{0j}(t) \\ p_{1j}(t) \\ \vdots \\ p_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

则有：

$$\frac{d\,S_j(t)}{d\,t} = Q S_j(t) \quad j = 0,1,2,\cdots,n$$

初始条件为：

$$S_j(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j+1)$$

上面的方程组即为 **Kolmogrov—Feller** 后退方程

（五）Fokker-Planck 方程

讨论有限状态的情形，令： $p_j(t) = P\{X(t) = j\}$

过程的初始分布为：

$$\vec{p}(0) = \left(p_0(0), p_1(0), \cdots, p_n(0) \right)$$

设在 t 时刻时，过程所处各状态的概率分布为：

$$\vec{p}(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t) \right)$$

则有：

$$p_0(t) = p\{X(t) = 0\} = \sum_{j=0}^{n} P\{X(t) = 0 \mid X(0) = j\} P\{X(0) = j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} p_{j0}(t) p_j(0) = \sum_{j=0}^{n} p_j(0) p_{j0}(t)$$

即有：

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) P(t)$$

即有：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t} = \vec{p}(0) \frac{d\,P(t)}{d\,t} = \vec{p}(0) P(t) Q = \vec{p}(t) Q$$

因此，得：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t} = \vec{p}(t) Q$$

此即为 **Fokker-Planck** 方程，其初始条件为

$$\vec{p}(0)=\left(p_0(0),p_1(0),\cdots,p_n(0)\right)$$

解此方程可得任意时刻该过程的一维概率分布。

（六）例子

例 **1** 假设某服务台有一部电话，如果在t时刻电话正被使用，置$X(t)=1$，否则置$X(t)=0$，因此$\{X(t);t\geq 0\}$为一纯不连续马氏过程。假设此过程的转移概率矩阵为：

$$P(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1+7e^{-8t}}{8} & \dfrac{7-7e^{-8t}}{8}\\ \dfrac{1-e^{-8t}}{8} & \dfrac{7+e^{-8t}}{8}\end{pmatrix}$$

初始分布为：

$$q_0=P\{X(0)=0\}=1/10;\quad q_1=P\{X(0)=1\}=9/10$$

（**1**） 计算矩阵$P(0)$；

（**2**） 计算概率：$P\{X(0.2)=0\}$；$P\{X(0.2)=0|\,X(0)=0\}$；

$P\{X(0.1)=0,X(0.6)=1,X(1.1)=1|\,X(0)=0\}$；

$P\{X(1.1)=0,X(0.6)=1,X(0.1)=0\}$；

（**3**） 计算t时刻的一维分布；

（**4**） 计算t时刻的转移率矩阵；

例 **2** 设有参数连续、状态离散的马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$，状态空间为：$S=\{1,2,\cdots,m\}$，当 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m$ 时，$q_{ij}=1$，$q_{ii}=-(m-1)$，$i=1,2,\cdots,m$，求$p_{ij}(t)$。

解：由 **K－F** 前进方程，可知：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+\sum_{k\neq j\,k\in S}p_{ik}(t)$$

由

$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t)=1$$

可知

$$\sum_{k\neq j\, k\in S} p_{ik}(t)=1-p_{ij}(t)$$

因此，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+[1-p_{ij}(t)]=1-m\,p_{ij}(t)\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

解此微分方程，得：

$$p_{ij}(t)=ce^{-mt}+\frac{1}{m}\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

利用初始条件：

$$p_{ii}(0)=1,\quad p_{ij}(0)=0\quad (i\neq j)$$

可得：

$$p_{ii}(t)=\left(1-\frac{1}{m}\right)e^{-mt}+\frac{1}{m}\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{m}(1-e^{-mt})\quad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m)$$

注意：关于指数分布（Exponential distribution）的性质

定义：若连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $X\sim Ex(\lambda)$。

性质：若 $X\sim Ex(\lambda)$，则 $E(X)=1/\lambda$

性质（无记忆性）：对于 $\forall s,t>0$，我们有：

$$P\{X>s+t\,|\,X>s\}=P\{X>t\}$$

例 3（排队问题）设有一服务台，$[0,t)$ 内到达服务台的顾客数是服从 **Poission** 分布的随机变量。单位时间到达服务台的平均人数是 λ。服务台只有一个服务员，对顾客服务时间是按负指数分布的随机变量，平均服务时间为 $1/\mu$。如果服务台空闲时，到达的顾客立刻得到服务；如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客到达时发现已经有二人在等候，则他就离开不再回来。设 $X(t)$ 代表在 t 时刻系统内顾客人数（包括正在被服务的顾客和排队等候的顾客）。假设系统在 $t=0$ 时处于零状态，即服务人员空闲。求 t 时刻系统处于状态 j 的无条件概率 $p_j(t)$ 所满足的微分方程。

解：（**1**）写出状态空间：$S=\{0,1,2,3\}$

（**2**）求 Q 矩阵：

（**a**）当 $X(t)=0$ 时，在 $[t,t+\Delta t)$ 内到达一个顾客的概率为：

$$p_{01}(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

在 $[t,t+\Delta t)$ 内到达二个或二个以上的顾客的概率为：

$$p_{0j}(\Delta t)=o(\Delta t)\quad j=2,3$$

因此

$$q_{01}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{01}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

$$q_{0j}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{0j}(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

由：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

可得：

$$q_{00}=-\lambda$$

（**b**）当 $X(t)=1$ 时，表示在 t 时刻有一个顾客正在被服务。由指数分布的无记忆性，可知，在 $[t,t+\Delta t)$ 内完成服务的概率为：

$$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

由此可知，在Δt时间内系统由 1 状态转入到 0 状态的概率为：

$$p_{10}(\Delta t)=[\mu\Delta t+o(\Delta t)][1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{10}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{10}(\Delta t)}{\Delta t}=\mu$$

在Δt时间内系统由 1 状态转入到 2 状态的概率为：

$$p_{12}(\Delta t)=[1-\mu\Delta t+o(\Delta t)][\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{12}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{12}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

同理：

$$q_{13}=0$$

$$q_{11}=-(\lambda+\mu)$$

$$q_{20}=0$$

$$q_{21}=\mu$$

$$q_{23}=\lambda$$

$$q_{22}=-(\lambda+\mu)$$

（c）当$X(t)=3$时，系统不再接受新顾客，此时，状态只可转到 2 或仍在 3。

当$X(t)=3$时，在Δt时间内完成服务的概率为：$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$

因此

$$q_{32}=\mu$$

$$q_{30}=0$$

$$q_{31}=0$$

$$q_{33}=-\mu$$

于是可得Q矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

（3）写出方程

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t}=-\lambda\,p_0(t)+\mu\,p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{d\,t}=\lambda\,p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+\mu\,p_2(t) \\ \dfrac{d\,p_2(t)}{d\,t}=\lambda\,p_1(t)-(\lambda+\mu)p_2(t)+\mu\,p_3(t) \\ \dfrac{d\,p_3(t)}{d\,t}=\lambda\,p_2(t)-\mu\,p_3(t) \end{cases}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} p_0(0)=1 \\ p_j(0)=0 \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

8．纯不连续马氏链的极限性质

（一）纯不连续马氏过程的 $h-$ 离散骨架

记 $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$，$\forall\ j\in S$，称 $\vec{p}(t)=(p_i(t),\forall i\in S)$，为纯不连续马氏过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 在 t 时刻的分布，称 $\vec{p}(0)=(p_i(0),\forall i\in S)$ 为初始分布。

注意：任意 n 个时刻的联合分布率可由 $\vec{p}(0)$ 和 $P(t)$ 唯一确定，且有关系：

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)P(t)$$

定义：对于纯不连续马氏过程 $\{X(t),t\geq 0\}$，任取 $h>0$，记：

$$X_n(h)=X(nh),\quad n\geq 0$$

则$\{X(nh),n\geq 0\}$是一离散时间的马氏链，称为以h为步长的$h-$离散骨架，简称h骨架。它的n步转移概率矩阵为$P(nh)$。

对于满足连续性条件的齐次纯不连续马氏过程，有以下结论：

命题：$\forall\, t\geq 0,i\in S$，有$p_{ii}(t)>0$。

证明：由$p_{ii}(0)=1>0$，及连续性条件$\lim\limits_{t\to 0}p_{ii}(t)=\delta_{ii}=1$，可知：对任意固定的$t>0$，当$n$充分大时，有$p_{ii}(t/n)>0$，由 **C－K** 方程有：

$$p_{ii}(s+t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s)p_{ki}(t)\geq p_{ii}(s)p_{ii}(t)$$

因此可得：

$$p_{ii}(t)\geq[p_{ii}(t/n)]^n>0$$

由此命题可知：对所有的$h>0$及正整数n，及$\forall\, i\in S$，有$p_{ii}(nh)>0$，这意味着对每一个离散骨架$\{X(nh),n\geq 0\}$，每一个状态都是非周期的。因此对于纯不连续的马氏过程，无需引入周期的概念。

定义：若存在$t>0$，使得$p_{ij}(t)>0$，则称由状态i可达状态j，记为$i\to j$；若对一切$t>0$，有$p_{ij}(t)=0$，则称由状态i不可达状态j；若$i\to j$且$j\to i$，则称状态i与j相通，记作$i\leftrightarrow j$。

由上面的命题可知，$i\leftrightarrow i$，因此相通是一等价关系，从而可以相通关系对状态空间分类。相通的状态组成一个状态类。若整个状态空间是一个状态类，则称该纯不连续马氏过程是不可约的。

定义：（**1**）若$\int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$，则称状态$i$为常返状态；否则称状态$i$为非

常返状态。

（2）设 i 为常返状态，若 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) > 0$，则称状态 i 为正常返状态；若 $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) = 0$，则称状态 i 为零常返状态。

（3）若概率分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i, i \in S)$，满足：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P(t), \quad \forall t \geq 0$$

则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的平稳分布。

（4）若对 $\forall i \in S$，$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \pi_i^*$ 存在，则称 $\boldsymbol{\pi}^* \triangleq \{\pi_i^*, i \in S\}$ 为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的极限分布。

与马氏链的讨论类似，我们有：

定理：不可约纯不连续马氏过程是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时的平稳分布就是极限分布。

下面讨论 $p_j(t)$ 和 $p_{ij}(t)$ 的极限性质，讨论状态空间有限且各状态都相通的情形。状态无限可列的情形有类似的结果。

（二）极限性质

命题：当 $t \to \infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限的充分必要条件是 $p_{ij}(t)$ 对任何状态 i 趋于同一极限。

证明：设初始分布为 $\vec{p}(0) = (P\{X(0) = i\} = p_i(0), \forall i \in S)$，由全概率公式有：

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\} = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t), \quad (j \in S)$$

“$\Rightarrow$”：若 $t \to \infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限，即当 $t \to \infty$ 时，

$$p_j(t) \to p_j, \quad j \in S$$

特别地取一种初始分布 $p_i(0)=1,\ p_k(0)=0,\ k\in S,\ k\neq i$，我们有：

$$p_j(t)=p_{ij}(t),\quad (i,j\in S)$$

因此有：

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty} p_j(t)=p_j,\quad i,j\in S\qquad \text{（极限与 } i \text{ 无关）}$$

“$\Leftarrow$”：若 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j,\quad i,j\in S$，则对于任意的 $\vec{p}(0)=(p_i(0),\forall i\in S)$，有：

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in S}p_i(0)p_{ij}(t)=\sum_{i\in S}p_i(0)p_j=p_j$$

定理：（Markov 定理）对于状态有限的纯不连续马氏过程，若 $\exists t_0$ 使得对于 $\forall i,r\in S$ 有 $p_{ir}(t_0)>0$，那么极限 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j$ 存在且与 i 无关 $(i,j\in S)$。

证明：令：$M_j(t)\hat{=}\max_{i\in S} p_{ij}(t)$，$m_j(t)\hat{=}\min_{i\in S} p_{ij}(t)$

则有：
$$0\le M_j(t),m_j(t)\le 1,\quad \forall\, t\ge 0$$

（1） 证明 $M_j(t),m_j(t)$ 的单调性：

由 **C－K** 方程，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\le M_j(t)\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)=M_j(t)$$

因此有：

$$M_j(t+\tau)\le M_j(t)$$

同理，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\ge m_j(t)\sum_{k\in S}p_{ik}(\tau)=m_j(t)$$

因此有：

$$m_j(t+\tau)\ge m_j(t)$$

由此可知当 $t\to+\infty$ 时，$M_j(t),m_j(t)$ 的极限存在。

（2） 证明 $\lim_{t\to+\infty} M_j(t)=\lim_{t\to+\infty} m_j(t)\hat{=}p_j$

证明的思路与离散的情形类似，见 **P168－P170**。

由上面的定理和命题可知，对于纯不连续马氏过程，如果存在一个t_0，使得对于$\forall i,r\in S$有$p_{ir}(t_0)>0$，则$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=p_j$， $i,j\in S$。

此时，我们有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=0\,,\ i,j\in S,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_j(t)}{d\,t}=0\,,\ j\in S$$

根据 **K－F** 前进方程

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}$$

两边求极限，有：

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}=\sum_{k\in S}p_k q_{kj}=0$$

因此，解以下的联立方程组：

$$\begin{cases}\sum\limits_{k\in S}p_k q_{kj}=0\\ \sum\limits_{k\in S}p_k=1\end{cases}$$

即可求得当$t\to\infty$时过程取各个状态的极限概率p_j。

（三）例子

例 **1**：（机器维修问题）设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，它的平均正常工作时间为$1/\lambda$；它损坏后修复时间也是一负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为$1/\mu$。如果该机器在$t=0$时是正常工作的，问在$t=10$时该机器处于正常工作状态的概率是多少？长时间工作下去，机器处于正常状态的概率如何？

解：（**1**）写出状态空间：记机器处于正常工作状态为 **0**，处于维修状态为 **1**，则状态空间为$\{0,1\}$。（**2**）求出Q矩阵：由指数分布的“无记忆性”，可求得Q矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

（**3**）写出前进或后退方程及初始条件：

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) \\ p'_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) \\ p_{10}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{00}(0) \\ p_{10}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P\{X(0)=0\} = p_0(0) = 1$$

$$P\{X(0)=1\} = p_1(0) = 0$$

（4）求解上面的微分方程：

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

由：

$$P\{X(t)=j\} = p_j(t) = \sum_{i\in S} p_i(0)\, p_{ij}(t) = p_0(0)\, p_{0j}(t)$$

可求得：

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_0(10) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-10(\lambda+\mu)}$$

（5）极限性态：根据以上所求，求极限即有：

$$\lim_{t\to\infty} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \mathrel{\hat{=}} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \mathrel{\hat{=}} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \mathrel{\hat{=}} p_0$$

另外：根据上面极限性态的讨论，由：

$$\begin{cases} \sum_{k\in S} p_k q_{kj} = 0 \\ \sum_{k\in S} p_k = 1 \end{cases}$$

同样可以求得：

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

例 2 求解第 **7** 节中各个例子的极限问题。

9．应用问题

（一） 几种重要的纯不连续马氏过程

（**1**） **Poission** 过程（专门讲解）

（**2**） 纯增殖过程（人口问题）

纯增殖过程的转移概率为：

$$P\{X(t+\Delta t)=k \mid X(t)=n\} = \begin{cases} \lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t), & k=n+1 \\ o(\Delta t), & k\neq n, n+1, k>n \\ 1-\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t), & k=n \end{cases}$$

即在纯不连续增殖过程中，如果在$[0,t)$内出现n个个体$X(t)=n$的条件下，在$[t,t+\Delta t)$内出现一个新个体的概率为$\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$，出现二个或二个以上新个体的概率为$o(\Delta t)$，没有出现新个体的概率为$1-\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$。

纯增殖过程的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，表示群体某时所拥有的个体数目。

关心的问题是：在t时刻，系统具有n个个体的概率是多少，即要求：

$$P\{X(t)=n\} = p_n(t) = ? \quad n\in S$$

假定初始（$t=0$）时系统有m个个体，$m\in S$，即$P\{X(0)=m\} = p_m(0)=1$，并假定$\lambda_n(t)=\lambda_n$（与t无关），我们来求$p_n(t) = P\{X(t)=n\}$。

我们注意到：在$[0,t+\Delta t)$内出现n $(n>m)$个个体可以等价于下列不相容的情况之和：（**a**）在$[0,t)$内出现n个个体，在$[t,t+\Delta t)$内出现 **0** 个个体；（**b**）在

$[0,t)$ 内出现 $n-1$ 个个体，在 $[t,t+\Delta t)$ 内出现 **1** 个个体；（**c**）在 $[0,t)$ 内出现 $n-2$ 个个体或 $n-2$ 个体以下，在 $[t,t+\Delta t)$ 内出现 **2** 个个体或 **2** 个个体以上，因此有：

$$\begin{aligned} p_n(t+\Delta t) &= p_n(t)p_0(\Delta t) + p_{n-1}(t)p_1(\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= p_n(t)[1-\lambda_n \Delta t] + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t) \qquad (n>m) \end{aligned}$$

因此有：

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \qquad n>m$$

同理，有：

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)[1-\lambda_0 \Delta t] + o(\Delta t) \qquad (m=0) \\ p_m(t+\Delta t) &= p_m(t)[1-\lambda_m \Delta t] + o(\Delta t) \qquad (m\neq 0) \end{aligned}$$

即有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t), \quad m=0 \\ \dfrac{d\,p_m(t)}{dt} = -\lambda_m p_m(t), \quad m\neq 0 \end{cases}$$

用 **Laplace** 变换解此微分方程可得：

$$p_n(t) = (-1)^{n-m}\lambda_m \cdots \lambda_{n-1} \sum_{i=m}^{n} \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{j=m,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

（**3**）　生灭过程

定义：纯不连续马氏过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 如果满足：

（**a**）　过程中状态转移仅限于从一个状态向其邻近状态转移；

（**b**）　若 $X(t)=n$，则在 $[t,t+\Delta t)$ 内产生由 n 状态转移到 $(n+1)$ 状态的概率为：$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$；产生由 n 状态转移到 $(n-1)$ 状态的概率为：$\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$；

（**c**）　若 $X(t)=n$，则在 $[t,t+\Delta t)$ 内转移二个或二个以上状态的概率为 $o(\Delta \mathrm{t})$。

则称此纯不连续马氏过程$\{X(t), t\geq 0\}$为生灭过程。

状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$

由定义，可得生灭过程的Q（生灭矩阵）矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & -(\lambda_n+\mu_n) & \lambda_n & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

在条件$\lambda_i>0, i\geq 0$，$\mu_i>0, i\geq 1$，（$\mu_0=0$）下，有：

$$i-1\leftrightarrow i\leftrightarrow i+1\,(i\geq 1)$$

因此，可知对$\forall\, i, j\in S$，有$i\leftrightarrow j$，从而这样的生灭过程是不可约的。

由生灭矩阵可以写出 **K－F** 前进方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_{00}(t)}{dt}=-\lambda_0 p_{00}(t)+\mu_1 p_{01}(t) \\ \dfrac{d\,p_{0n}(t)}{dt}=\lambda_{n-1}p_{0n-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{0n}(t)+\mu_{n+1}p_{0n+1}(t) \quad n\geq 1 \\ \dfrac{d\,p_{i0}(t)}{dt}=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t) \\ \dfrac{d\,p_{in}(t)}{dt}=\lambda_{n-1}p_{in-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{in}(t)+\mu_{n+1}p_{in+1}(t) \quad n\geq 1 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

Fokker-Planck 方程：

$$\begin{cases} p_0^{\prime}(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \\ p_j'(t)=\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_j(t)+\mu_{j+1}p_{j+1} \end{cases}$$

其中$i=0,1,2,\cdots$, $j=1,2,\cdots$。以上的λ_n, μ_n（$n=0,1,2,\cdots$）均可以是t的函数。

如果$\{X(t), t\geq 0\}$的极限分布存在，即$p_j=\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$，且与$i$无关，则有

$p_j'(t)=0\,(t\to\infty)$，因此在 **Fokker-Planck** 方程中令 $t\to\infty$，有：

$$\begin{cases}-\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1=0\\ \lambda_{j-1}p_{j-1}-(\lambda_j+\mu_j)p_j+\mu_{j+1}p_{j+1}=0 \quad j\ge 1\end{cases}$$

解以上代数方程组得：

$$p_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0,\quad p_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0,\cdots,\quad p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0$$

利用：$\sum_{k\in S}p_k=1$，我们有：

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}$$

由此可知，当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$$

时，$0<p_0<1, 0<p_k<1\quad(k\ge 1)$，因此可得以下定理：

定理：设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是生灭过程，$\lambda_i>0, i\ge 0$，$\mu_i>0, i\ge 1$，$\mu_0=0$，则 $\{X(t),t\ge 0\}$ 存在唯一的平稳分布（它就等于极限分布）的充要条件为：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$$

且

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}\qquad p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0$$

注：离散参数的生灭过程：

设有马氏链，它的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，且设当 $|i-j|>1$ 时，$p_{ij}=0$，在其它的 i,j 时 p_{ij} 是任意的正数，对于每个 $j>0$，满足：

$$p_{j\,j-1}+p_{jj}+p_{j\,j+1}=1$$

当 $j=0$ 时，满足：

$$p_{00}+p_{01}=1$$

试求该链为正常返的条件。

解：由式子 $p_{j,j-1}+p_{j,j}+p_{j,j+1}=1$ 可知各状态都相通，画出状态转移图，利用平衡原理，我们有：

$$\begin{cases} \pi_0 p_{01}=\pi_1 p_{10} \\ \pi_1(p_{10}+p_{12})=\pi_0 p_{01}+\pi_2 p_{21} \\ \cdots \\ \pi_j(p_{jj-1}+p_{jj+1})=\pi_{j-1}p_{j-1j}+\pi_{j+1}p_{j+1j} \\ \vdots \end{cases}$$

由此解得：

$$\pi_1=\frac{p_{01}}{p_{10}}\pi_0,\ \pi_2=\frac{p_{01}p_{12}}{p_{10}p_{21}}\pi_0,\cdots,\pi_j=\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}\pi_0,\cdots$$

由 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$，利用正常返和极限分布的关系，我们有：当

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}<\infty$$

时，此马氏链的极限分布存在，因此是正常返的。

给定起始状态 $X(0)=i\in S$，就可以求得过程在 t 时刻的转移概率 $p_{in}(t)$ 及处于状态 n 的概率 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$，初始条件分别为：

$$p_{in}(0)=\delta_{in}=\begin{cases}1, & n=i \\ 0, & n\neq i\end{cases},\quad p_j(0)=P\{X(0)=j\}=1,\quad j=i$$

如果 λ_n,μ_n 均是 t 的函数，则上述过程称为非齐次生灭过程；

如果 λ_n,μ_n 均是 t 的线性函数，则称为非齐次线性生灭过程；

如果 λ_n,μ_n 均与 t 的无关，则上述过程称为齐次生灭过程。

特别地，假设 $\lambda_n=n\lambda(t),\mu_n=n\mu(t)$，此时过程是非齐次生灭过程，关于此情况时的微分方程（**A**）的解法（用母函数求解法）可以参看 **P179**（课后阅读）。

当$\lambda_n = n\lambda, \mu_n = n\mu$（与$t$无关），此时过程是齐次线性生灭过程，对于此时，我们可以求$E\{X(t)\}$，具体求法如下：

此时的生灭矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & n\mu & -n(\lambda+\mu) & n\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt} = \mu\, p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{dt} = -(\mu+\lambda)\,p_1(t) + 2\mu\, p_2(t) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{dt} = (n-1)\lambda\, p_{n-1}(t) - n(\mu+\lambda)\,p_n(t) + (n+1)\mu\, p_{n+1}(t) \end{cases}$$

令：$M_X(t) = E\{X(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n(t)$

则有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{d\,p_n(t)}{dt} =$$

$$= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\,p_{n-1}(t) - (\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,p_n(t) + \mu\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,p_{n+1}(t)$$

由于：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\,p_{n-1}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)\,p_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)\,p_m(t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,p_{n+1}(t) = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)mp_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)mp_m(t)$$

因此：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_n(t)-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)np_n(t)$$

$$=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

即有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

利用初始条件：$M_X(0)=i\times1=i$，即可求得：

$$M_X(t)=E\{X(t)\}=ie^{(\lambda-\mu)t}\quad t\geq0$$

由上面求解过程可以看到，一般来说，解前进方程、后退方程和福克－普朗克方程是比较困难的，有时根本无法求得其解析解。但是，如果只研究$t\to\infty$时的极限情况，我们就可以利用上面 **8**（二）中提到的方法，将微分方程求极限后，转化为解线性代数方程组，下面通过例子说明具体的求法。

例：（电话交换问题）某电话总机有n条线路。在某一呼唤来到时如有空闲线路，则该呼唤占用其中某一条空闲线路，并开始通话。如果通话结束，则该线路使用完毕而成为空闲线路，等待下一次呼唤。如果呼唤来到时遇到n条线路均被占用，则该呼唤遭到拒绝而消失。设有按 **poission** 分布的呼唤流，即在$[t,t+\Delta t)$内来到一次呼唤的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，来到二次或二次以上的呼唤的概率为$o(\Delta t)$；并设如果某一线路在某时刻$t$被占用，而在$[t,t+\Delta t)$内这条线路空闲出来的概率为$\mu\Delta t+o(\Delta t)$，即通话时间按负指数分布。求总机在$t$时刻有$k$条线路被占用的概率所满足的微分方程；以及当$t\to\infty$时，有$k$条线路被占用的概率。

解：此时的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，并且是一生灭过程，生灭矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (n-1)\mu & -[\lambda+(n-1)\mu] & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

写出福克—普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad (0<k<n) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t) \end{cases}$$

令：$t\to\infty$，我们有：

$$\begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0 \quad (0<k<n) \\ \lambda p_{n-1}-n\mu p_n=0 \end{cases}$$

设：$g_k=\lambda p_{k-1}-k\mu p_k$，则有：

$$g_k=\lambda p_{k-1}-k\mu p_k=\lambda p_k-(k+1)\mu p_{k+1}=g_{k+1}$$
$$g_0=0$$
$$g_n=0$$

因此 $g_i=0 \quad i=0,1,2,\cdots,n$

故有：

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_k = \dfrac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{cases}$$

利用：$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \Rightarrow p_0\left[1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$

可得：

$$p_k = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad 0 \le k \le n$$

画出转移率转移图，注意用极限平衡原理求解。

几种特殊的生灭过程：

- 有迁入的线性增长模型：此时 $\lambda_n = n\lambda + a$, $\mu_n = n\mu$，（见习题 **17**）；
- 纯生过程（**Yule** 过程）：此时 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = 0$；
- 纯灭过程：此时 $\lambda_n = 0$, $\mu_n = \mu$，（见习题 **18**）；

（二） 排队和服务问题

任何排队过程都由 **3** 个历程组成：顾客到达过程、排队和服务过程。根据这三个历程不同可以建立不同的概率模型，如 **M / M / 1** 和 **M / M / s** 及一般的 **G_1 /G_2 / s** 模型，对于排队和服务问题，我们所关心的是：

（**1**） 服务系统中顾客的平均数；

（**2**） 排队等候的顾客平均数；

（**3**） 顾客在系统中所花费时间的平均值；

（**4**） 顾客花在排队等候的时间平均值。

下面通过例子讨论以上几个问题。

例 无容量限制的 **M / M / 1** 排队系统，该系统的顾客到达服从 **Poission** 分布，只有一个服务员，服务时间服从负指数分布，且都是独立的。

解：考虑系统进入平稳分布情况。此时是$\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$情况的生灭过程。

此时状态空间为：$S = \{0,1,2,\cdots\}$；生灭矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

根据上面的解法，令：$t \to \infty$，我们有：

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \qquad \cdots \\ (\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \end{cases}$$

解上面的方程，有：

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,, \quad n = 1,2,\cdots$$

利用 $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$，我们有：

当$\lambda < \mu$时，有平稳分布，且平稳分布为：

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

（1） 系统中顾客的平均数为：

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

（2） 排队等候的顾客平均数为：

当系统中有 n 个人，其中一人被服务，$n-1$ 人排队等候，排队等候的顾客平均数为：

$$L_Q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n-\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

（3） 顾客在系统中所花费时间的平均值：

若顾客 A 到达服务点时系统中已有 n 人，其中一人在被服务，$n-1$ 人在排队等候；由服务时间是负指数分布（无记忆性）和每个顾客的服务时间之间的独立性，故顾客 A 到达服务点后需要等候平均时间 n/μ 后才能得到服务，本人的平均服务时间为 $1/\mu$，因此有：

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\,\big|\,\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

（4） 顾客花在排队等候的时间平均值

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客}A\text{排队等候的时间}\,\big|\,\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

例 有容量限制 M / M / 1 排队系统：即如果顾客到达时发现系统容量已满（N 人），则该顾客就不再排队而离开。此时有 N+1 个状态，其它假设和上例一样。

解：此时的状态空间为：$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$；生灭矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

画出转移率图，建立系统到达平稳分布后相应的平衡方程组：

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda+\mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ (\lambda+\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} \quad (1 \le k \le N-1) \\ \quad \cdots\cdots \\ \mu p_N = \lambda p_{N-1} \end{cases}$$

解此方程组得：

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \quad k = 1,2,\cdots,N$$

由：

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

可以求得：

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \qquad k = 0,1,2,\cdots,N$$

因此，在容量有限的 **M / M / 1** 排队系统中，不用假设 $\lambda < \mu$。

（1）　计算系统中顾客的平均数：

$$L = \sum_{k=0}^{N} k p_k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1 + N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} - (N-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

（2）　计算等候的顾客平均数：

$$L_Q = \sum_{k=1}^{N}(k-1) p_k = \sum_{k=1}^{N} k p_k - \sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} k p_k - (1-p_0) = L - (1-p_0)$$

（3）　顾客在系统中所花费时间的平均数：

注意：此时有两种不同的计算方式。

一种是将所有到过系统的人都计算在内，此时有：

$$W^{(1)}=\sum_{n=0}^{N}E\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\,|\,\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)\frac{1}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{N-1}np_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{N-1}p_n=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu}$$

另一种只计算进入系统的顾客在系统中所花费时间的平均数，此时有：

$$W^{(2)}=\sum_{n=0}^{N-1}E\left\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\,\middle|\,\text{系统中非N状态下}A\text{到达时系统有}n\text{个顾客}\right\}\frac{p_n}{1-p_N}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(n+1)}{\mu}\cdot\frac{p_n}{1-p_N}=\frac{W^{(1)}}{1-p_N}=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu(1-p_N)}$$

其中 $\dfrac{p_n}{1-p_N}$ **表示一条件概率，即已知系统的状态为非** N **时系统处于状态** n **的条件概率，** $n=0,1,2,\cdots,N-1$**。即：**

$$P\left\{A\text{到达时系统中有}n\text{个顾客}\right\}=$$
$$=P\left\{A\text{到达时系统中有 }n\text{个顾客}\,\middle|\,A\text{到达时系统的状态为非N}\right\}\times$$
$$\times P\left\{A\text{到达时系统的状态为非N}\right\}$$

（三）机器维修问题

设有一具有 M **台机器的系统，机器在运行过程中的任何时候都可能发生故障而需要维修。每台机器从开始工作到需要维修的时间间隔是服从负指数分布的随机变量，且机器在时刻** t **处于工作状态，而在** $[t,t+\Delta t)$ **内需要维修的概率为** $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$**；反之，每台机器维修的时间也服从负指数分布，且机器在时刻** t **处于维修状态，而在** $[t,t+\Delta t)$ **内机器维修完成恢复工作状态的概率为** $\mu\Delta t+o(\Delta t)$**。**

如果为了管理此系统仅配备一名维修工，那么当有一台机器发生故障时，该机器立刻得到维修；当维修工正在维修某一台机器时而另外有一机器发生故障，新发生故障的机器排队等候维修。若发生故障的机器有 n **台，则其中一台正在被维修，** $n-1$ **台参与排队等候维修。此时称该系统处于状态** n**；若所有机器处于工作状态，则称该系统处于 0 状态。**

因此系统的状态空间为：$S = \{0,1,2,\cdots,M\}$。它是一生灭过程，其中：

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & (n \le M) \\ 0 & (n > M) \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu$$

画出状态转移率图，类似的可以讨论系统不工作机器的平均数、等待维修的机器的平均数等问题。

另外，如果维修人员不是一个，而是多人的情况时，也可以类似地讨论，还可以考虑同一系统用几个维修人员比较合理的问题，等等。（见书 **P211－217**，课后阅读）