第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）

一、　基本概念及 Poisson 过程的一维分布

（1）　独立增量过程

定义：设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ ，$\forall n\in N$，$t_i\in T,\ 1\le i\le n$，有随机过程$X(t)$的增量：

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$是独立增量过程。

注意：若独立增量过程的参数集$T=[a,b),\ a>-\infty$，一般假定$X(a)=0$，则独立增量过程是一马氏过程。特别地，当 $X(0)=0$ 时，独立增量过程$\{X(t), t\ge 0\}$是一马氏过程。证明如下：

形式上我们有：

$$P\{X(t_n)\le x_n \,\big|\, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}=$$
$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$
$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-2})=x_{n-2} \,\big|\, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-2})=x_{n-2} \,\big|\, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

因此，我们只要能证明在已知 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ 条件下，$X(t_n)$ 与 $X(t_j)$，$j=1,2,\cdots,n-2$ 相互独立即可。

由独立增量过程的定义可知，当$a<t_j<t_{n-1}<t_n,\ j=1,2,\cdots,n-2$时，增量 $X(t_j)-X(a)$ 与 $X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立，由于在条件 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ 和 $X(a)=0$下，即有$X(t_j)$与$X(t_n)-x_{n-1}$相互独立。由此可知，在$X(t_{n-1})=x_{n-1}$条件下，$X(t_n)$与$X(t_j)$，$j=1,2,\cdots,n-2$相互独立，结果成立。

（2） 计数过程

定义：在$[0,t)$内出现随机事件A的总数组成的过程$\{N(t), t \ge 0\}$称为计数过程。计数过程满足：

（**a**）$N(t) \ge 0$；

（**b**）$N(t) \in N_0$；

（**c**）$\forall s,t > 0, s < t$，则有：$N(s) \le N(t)$；

（**d**）$\forall s,t > 0, s < t$，$N(t) - N(s)$表示在时间间隔$[s,t)$内事件A出现的次数。

若计数过程在不相交的时间间隔内事件A出现的次数是相互独立的，则称此计数过程为独立增量计数过程。

若计数过程在时间间隔$[t,t+s)$内出现事件A的次数只与时间差s有关，而与起始时间t无关，则称此计数过程为平稳增量计数过程。

（3） Poisson 过程

Poisson 过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于 **1837** 年由法国数学家 **Poisson** 引入，至今仍为应用最为广泛的随机过程之一。

定义：计数过程$\{N(t), t \ge 0\}$称为时齐（齐次）**Poisson** 过程，若满足：

（**a**）$N(0) = 0$；

（**b**）独立增量过程，即任取$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in N$，

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立；

（**c**）增量平稳性，即：

$$\forall s,t>0, n\geq 0,\ P\{N(s+t)-N(s)=n\}=P\{N(t)=n\}$$

（d）对任意$t>0$**，和充分小的**$\Delta t>0$**，有：**

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda>0$**（称为强度常数）。**

定理：（Poisson 过程的一维分布）若$\{N(t), t\geq 0\}$**为时齐 Poisson 过程，则**$\forall s,t>0$**，有：**

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ ,\quad k\in N$$

即$N(s+t)-N(s)$**是参数为**λt**的 Poisson 分布。**

证明：由增量平稳性，记：

$$P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{N(s+t)-N(s)=n\}$$

（I）$n=0$**情形：因为**

$$\{N(t+h)=0\}=\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}, h>0,$$

我们有：

$$\begin{aligned} P_0(t+h)&=P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}= \\ &=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}=P_0(t)P_0(h) \end{aligned}$$

另一方面

$$P_0(h)=P\{N(t+h)-N(t)=0\}=1-(\lambda h+o(h))$$

代入上式，我们有：

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\left(\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}\right)$$

令$h\to 0$**，我们有：**

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1 \end{cases} \Rightarrow \quad P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

（II）$n>0$**情形：因为：**

$$\begin{aligned}\{N(t+h)=n\}&=\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\}\\&\bigcup\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\}\\&\bigcup\left[\bigcup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l, N(t+h)-N(t)=l\}\right]\end{aligned}$$

故有：

$$P_n(t+h)=P_n(t)(1-\lambda h-o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)$$

化简并令 $h\to 0$ 得：

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$，移项后有：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\\P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，有：

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right]=\lambda\,,\ P_1(0)=0\quad\Rightarrow\quad P_1(t)=(\lambda t)e^{-\lambda t}$$

由归纳法可得：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,,\quad n\in N_0$$

注意：$E\{N(t)\}=\lambda t\quad\Rightarrow\quad\lambda=\dfrac{E\{N(t)\}}{t}$，因此 λ 代表单位时间内事件 A 出现的平均次数。

注意：**Poisson** 过程的转移率矩阵（**Q** 矩阵）的表示，并用上一章讲过的方法求解 **Poisson** 过程的一维分布。

二、　**Poisson** 过程与指数分布的关系

设 $\{N(t), t\ge 0\}$ 是一计数过程，记：

$S_0=0$，S_n 表示第 n 个事件发生的时刻（$n\ge 1$），

$X_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 1)$表示第$n-1$个事件与第$n$事件发生的时间间隔。

当$\forall t \geq 0, n \geq 0$时，有以下基本的关系式：

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

因此，我们有关于随机变量S_n的分布函数：

当$t < 0$时，$F_{S_n}(t) = 0$；当$t \geq 0$时，有：

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = 1 - P\{N(t) < n\} = 1 - e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

其概率密度为：

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即$S_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$，其中$\alpha = n, \beta = \lambda^{-1}$。特别地，当$n = 1$时，有：

$$P\{X_1 \leq t\} = P\{S_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即$X_1 \sim Ex(\lambda)$是参数为λ的指数分布。

问题：$X_2, X_3, \cdots, X_n$是否还是服从参数为λ的指数分布？是否独立？我们以下将给出一个重要的定理。

为了更好地理解下面的内容，我们先复习一下求随机变量概率密度的“微元法”以及顺序统计量的分布。

（1）　求随机变量概率密度的“微元法”：

- 一维情形：若随机变量X的概率密度$f(x)$在x点连续，则有：

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P\{x < X \leq x + h\}}{h} \quad \Rightarrow \quad P\{x < X \leq x + h\} = f(x)h + o(h)$$

- 多维情形：若随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处连续，则有：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{h_1,h_2,\cdots,h_n\to 0}\frac{P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}}{h_1h_2\cdots h_n}$$

即：

$$\begin{aligned}&P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}=\\&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)h_1h_2\cdots h_n+o(h_1h_2\cdots h_n)\end{aligned}$$

（2） 顺序统计量的分布

定义：给定(Ω,Σ,P)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其上的随机向量，$\forall\omega\in\Omega$，将试验结果 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 按从小到大顺序重新进行排列，记为$X_{(1)}(\omega)\le X_{(2)}(\omega)\le\cdots\le X_{(n)}(\omega)$，称$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布非负的随机变量，其密度函数为$f(x)$，记$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为相应的顺序统计量，则对于$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，取充分小的$h>0$，使得：

$$0<x_1<x_1+h<x_2<x_2+h<x_3<\cdots<x_{n-1}+h<x_n<x_n+h$$

有

$$\begin{aligned}&\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}=\\&=\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots i_n)}\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}\end{aligned}$$

等式右边的各事件互不相容，因此有：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}P\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}/h^n=\\&=\lim_{h\to 0}n!P\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}/h^n\end{aligned}$$

由此可得顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^n f(x_i), & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

特别地，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$在$[0,t]$上独立同均匀分布，则其顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\le t\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_k\sim Ex(\lambda)$，则其顺序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n)}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

定理：计数过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的时齐 Poisson 过程的充分必要条件是 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

注意：此定理的结论非常重要，它反映了 Poisson 过程的本质特性，也为 Poisson 过程的计算机模拟提供了理论基础。思考：如何进行模拟？

证明：（只证必要性）

（**a**）先求 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度：

令：$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，取充分小的 $h>0$，使得：

$$t_1-\frac{h}{2}<t_1<t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_{n-1}+\frac{h}{2}<t_n-\frac{h}{2}<t_n<t_n+\frac{h}{2}$$

由：

$$\begin{aligned}&\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}\\ &=\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0, N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\right.\\ &\qquad\left.N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)=0,\cdots,N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)=1\right\}\cup H_n\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}H_n=&\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0, N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\cdots,\right.\\ &\left.N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)\ge 2\right\}\end{aligned}$$

我们有：

$$P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}=$$

$$=(\lambda h)^n e^{-\lambda\left(t_n+\frac{h}{2}\right)}+o(h^n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)$$

因此，$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$**的联合概率密度为：**

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}}{h^n}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)}{h^n}=\lambda^n e^{-\lambda t_n}\text{ ，}\quad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

即：

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n}\text{ ，} & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\\ 0\text{，} & \text{其它}\end{cases}$$

（b）求$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$**的联合概率密度：**

由：$X_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 1)$**我们有：**

$$\begin{cases}X_1=S_1\\ X_2=S_2-S_1\\ \vdots\\ X_n=S_n-S_{n-1}\end{cases}\quad \text{令：}\begin{cases}x_1=t_1\ge 0\\ x_2=t_2-t_1\ge 0\\ \vdots\\ x_n=t_n-t_{n-1}\ge 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}t_1=x_1\\ t_2=x_1+x_2\\ \vdots\\ t_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\end{cases}$$

则变换的雅可比行列式为：

$$J=\frac{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=1$$

于是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$**的联合概率密度为：**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\text{，} & x_i\ge 0,1\le i\le n\\ 0\text{，} & \text{其它}\end{cases}$$

由此可得 X_k 的概率密度为 $f_k(x_k)=\lambda e^{-\lambda x_k}$, $x_k\geq 0$, $1\leq k\leq n$，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

由此证明了 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

三、 剩余寿命与年龄

设 $N(t)$ 为在 $[0,t)$ 内事件 **A** 发生的个数，S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，$S_{N(t)}$ 表示在 t 时刻前最后一个事件发生的时刻，$S_{N(t)+1}$ 表示在 t 时刻后首次事件发生的时刻，令：

$$\begin{cases} W(t)=S_{N(t)+1}-t \\ V(t)=t-S_{N(t)} \end{cases}$$

称 $W(t)$ 为事件 **A** 的剩余寿命或剩余时间，$V(t)$ 为事件 **A** 的年龄。

由定义可知：$\forall t\geq 0$, $W(t)\geq 0$, $0\leq V(t)\leq t$ ，我们有以下重要定理。

定理：设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的时齐 **Poisson** 过程，则有：

（**a**）$W(t)$ 与 $\{X_n,n\geq 1\}$ 同分布，即

$$P\{W(t)\leq x\}=1-e^{-\lambda x}\ ,\quad x\geq 0$$

（**b**）$V(t)$ 的分布为“截尾”的指数分布，即

$$P\{V(t)\leq x\}=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}\ , & 0\leq x<t \\ 1, & t\leq x \end{cases}$$

证明：注意到：

$$\{W(t)>x\}=\{N(t+x)-N(t)=0\}$$

以及

$$\{V(t)>x\}=\begin{cases} \{N(t)-N(t-x)=0\}\ , & t>x \\ \varnothing\ , & t\leq x \end{cases}$$

即可得所要的结果。

定理：若$\{X_n, n\geq 1\}$独立同分布，又对$\forall t\geq 0$, $W(t)$与X_n $(n\geq 1)$同分布，分布函数为$F(x)$，且$F(0)=0$，则$\{N(t), t\geq 0\}$为 **Poisson** 过程。

注意：$X_n = S_n - S_{n-1}$表示的是第$n-1$个事件的寿命。

四、　到达时间的条件分布

下面讨论在条件$N(t)=n$下，$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件分布问题。

定理：设$\{N(t), t\geq 0\}$为时齐 **Poisson** 过程，则对$\forall 0<s<t$，有：

$$P\{X_1 \leq s \mid N(t)=1\} = \frac{s}{t}$$

证明：

$$\begin{aligned}
P\{X_1 \leq s \mid N(t)=1\} &= \frac{P\{X_1 \leq s, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}} = \\
&= \frac{P\{N(s)=1, N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{(\lambda s)e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{(\lambda t)e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

定理：设$\{N(t), t\geq 0\}$为齐次 **Poisson** 过程，则在已知条件$N(t)=n$下，事件相继发生的时间$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leq t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明：对$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$，取$h_0 = h_{n+1} = 0$及充分小的$h_i$，使得$t_i + h_i < t_{i+1}$, $1\leq i\leq n$，则有：

$$P\{t_i < S_i \le t_i + h_i\,, 1 \le i \le n \mid N(t) = n\} =$$
$$= \frac{P\{N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \le i \le n\,, N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 0 \le j \le n\}}{P\{N(t) = n\}}$$
$$= \frac{(\lambda h_1)e^{-\lambda h_1}\cdots(\lambda h_n)e^{-\lambda h_n}\cdot e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\cdots-h_n)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n}h_1 h_2 \cdots h_n$$

因此可得定理的结果。

本定理说明：在 $N(t) = n$ 的条件下，事件相继发生的时间 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的条件分布与 n 个在 $[0,t]$ 上相互独立同均匀分布的顺序统计量的分布函数一样。

定理：设 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为计数过程，X_n 为第 n 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \le x\}$，若 $F(0) = 0$ 且对 $\forall 0 < s < t$，有

$$P\{X_1 \le s \mid N(t) = 1\} = \frac{s}{t}, \quad t > 0$$

则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为 **Poisson** 过程。

定理：设 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为计数过程，X_n 为第 n 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \le x\}$，若 $E\{X_n\} < \infty, F(0) = 0$，且对 $\forall 0 < s < t$，有

$$P\{S_n \le s \mid N(t) = n\} = \left(\frac{s}{t}\right)^n, \quad t > 0$$

则 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为 **Poisson** 过程。

例：设到达火车站的顾客流遵循参数为 λ 的 **Poisson** 流 $\{N(t), t \ge 0\}$，火车 t 时刻离开车站，求在 $[0,t]$ 到达车站的顾客等待时间总和的期望值。

解：设第 i 个顾客到达火车站的时刻为 S_i，则 $[0,t]$ 内到达车站的顾客等待时间总和为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)$$

因为：

$$E\{S(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=$$

$$=E\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=nt-E\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid N(t)=n\}$$

$$=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故：

$$E\{S(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E\{N(t)\}=\frac{\lambda}{2}t^2$$

例：设一系统在$[0,t]$内受冲击的次数$\{N(t),t\ge 0\}$是参数为λ的齐次 **Poisson** 过程，第k次受冲击的损失为D_k，其中$\{D_k,k\ge 1\}$是独立同分布并与$\{N(t),t\ge 0\}$独立，且损失随时间按负指数衰减。$t=0$的衰减为D，经t时刻损失为$De^{-\alpha t}$（$\alpha>0$为常数），设损失可加，t时刻的总损失为$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}$，其中$S_k$为第$k$次冲击到达的时刻，试求$E\xi(t)$。

解：由于：

$$E\{\xi(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=E\{\sum_{k=1}^{n}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\{D_k\mid N(t)=n\}E\{e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=ED\cdot e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}E\{e^{\alpha S_k}\mid N(t)=n\}$$

记$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为$[0,t]$上独立同均匀分布的随机变量，则有：

$$\sum_{k=1}^{n} E\{e^{\alpha S_k} \mid N(t)=n\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_{(k)}}\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_k}\} = n\int_0^t e^{\alpha x}\frac{dx}{t} = \frac{n}{\alpha t}[e^{\alpha t}-1]$$

所以有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)=n\} = \frac{n}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

即有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)\} = \frac{N(t)}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

故：

$$E\{\xi(t)\} = E[E\{\xi(t) \mid N(t)\}] = \frac{\lambda\cdot ED}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}]$$

五、 非齐次（时齐）Poisson 过程

定义：一计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$，称它为具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\geq 0\}$的非齐次 **Poisson** 过程，若满足：

（**a**）$N(0)=0$

（**b**）独立增量过程，即任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立；

（**c**）对任意$t>0$，和充分小的$\Delta t>0$，有：

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\} = o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda(t)>0$（称为强度常数）。

记：$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$，则有：

定理：若$\{N(t), t\geq 0\}$为非时齐具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\geq 0\}$的 **Poisson**

过程，则$\forall s,t>0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\frac{\left[m(s+t)-m(s)\right]^n}{n!}e^{-[m(s+t)-m(s)]}\ (n\geq 0)$$

定理：（变换定理）

（**a**）设$\{N(t),t\geq 0\}$为具有强度函数$\{\lambda(t)>0,t\geq 0\}$的非时齐 **Poisson** 过程，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$m^{-1}(t)$是$m(t)$的反函数（由于$m(t)$单调增，反函数一定存在），记$M(u)=N(m^{-1}(u))$，则$\{M(u),u\geq 0\}$是时齐 **Poisson** 过程。

（**b**）设$\{M(u),u\geq 0\}$是时齐 **Poisson** 过程，参数$\lambda=1$。若强度函数$\{\lambda(s)>0,s\geq 0\}$，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$N(t)=M(m(t))$，则$\{N(t),t\geq 0\}$是非时齐的具有强度函数$\{\lambda(s)>0,s\geq 0\}$的 **Poisson** 过程。

六、　复合 Poisson 过程

定义：设$\{Y_i,i\geq 1\}$是独立同分布的随机变量序列，$\{N(t),t\geq 0\}$为 **Poisson** 过程，且$\{N(t),t\geq 0\}$与$\{Y_i,i\geq 1\}$独立，记：

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合 **Poisson** 过程。

物理意义：如$\{N(t),t\geq 0\}$表示粒子流，$N(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子数，Y_i表示第i个粒子的能量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子的总能量。若$\{N(t),t\geq 0\}$表示顾客流，Y_i表示第i个顾客的行李重量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的顾客的行李总重量。若某保险公司买了人寿保险的人在时刻$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$死亡，在时刻$S_n$死亡的人的保险金额是$Y_n$，在$[0,t]$内死亡的人数为$N(t)$，则$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$表示该公司在$[0,t]$内需要支付的赔偿金总额。

我们关心的是复合**Poisson**过程的一些数字特征。

定义：随机变量 X 的矩母函数定义为：

$$\phi(t) \hat{=} E\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$$

若上面的积分存在。

如果 X 的 k 阶中心矩存在，则有：

$$E\{X^k\} = \phi^{(k)}(0)$$

下面求复合**Poisson**过程$\{X(t), t \ge 0\}$的数学期望和方差。

先求 $X(t)$ 的矩母函数：

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(u) = E\{e^{uX(t)}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t)=n\} E\{e^{uX(t)} \,|\, N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)} \,|\, N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n
\end{aligned}$$

令$Y \sim Y_i$的矩母函数为$\phi_Y(u) = E\{e^{uY}\}$，则有：

$$\phi_{X(t)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda t \phi_Y(u)\right]^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\{\lambda t[\phi_Y(u)-1]\}$$

对上式在$u=0$处求导数，有：

$$E\{X(t)\} = \phi'_{X(t)}(0) = \lambda t \cdot E\{Y\}$$

以及

$$D(X(t)) = \lambda t E\{Y^2\}$$

特殊情形：若$\{\rho_i, i \ge 1\}$为独立同分布，取值为正整数的随机变量序列，且与 **Poisson** 过程$\{N(t), t \ge 0\}$独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \rho_i$$

则称$\{X(t), t\ge 0\}$为平稳无后效流。

七、 条件 Poisson 过程

定义：设Λ是一正的随机变量，分布函数为$G(x), x\ge 0$，设$\{N(t), t\ge 0\}$是一计数过程，且在给定条件$\Lambda=\lambda$下，$\{N(t), t\ge 0\}$是一参数为λ的 **Poisson** 过程，即$\forall s, t\ge 0, n\in N_0, \lambda\ge 0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n \mid \Lambda=\lambda\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

则称$\{N(t), t\ge 0\}$是条件 **Poisson** 过程。

注意，条件 **Poisson** 过程不是独立增量过程。由全概率公式我们有：

$$\begin{aligned}
&P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{N(s+t)-N(s)=n \mid \Lambda=\lambda\}f_\Lambda(\lambda)d\lambda\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}f_\Lambda(\lambda)d\lambda\\
&\quad=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda)
\end{aligned}$$

由此可知，条件 **Poisson** 过程是平稳增量过程。但是

$$P\{N(s)=m, N(s+t)-N(s)=n\}=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}dG(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&P\{N(s)=m\}P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\\
&\qquad=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s}dG(\lambda)\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!}e^{-\lambda t}dG(\lambda)
\end{aligned}$$

显然

$$P\{N(s)=m, N(s+t)-N(s)=n\}\ne P\{N(s)=m\}P\{N(s+t)-N(s)=n\}$$

因此，条件 **Poisson** 过程不是独立增量过程。

八、 例子

例：设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为强度为 λ_1 和 λ_2，并且相互独立的 **Poisson** 过程，证明在 $N_1(t)$ 的任一到达时间间隔内，$N_2(t)$ 恰有 k 个事件发生的概率为：

$$p_k = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

证明：根据二中的定理，可以令 X 为 $N_1(t)$ 的任一到达时间间隔并且 $X \sim Ex(\lambda_1)$，即 X 的分布密度为：

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$p_k = P\{N_2(t) = k, t \in [0, X)\} = \int_0^{+\infty} P\{N_2(t) = k \mid X = t\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_2 t)}{k!} e^{-\lambda_2 t} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

例：设 $N(t)$ 是强度为 λ 的 **Poisson** 过程，求在 $[0,t)$ 内发生了 n 个事件的条件下，第 r $(r < n)$ 个事件发生时刻的概率密度。

解：取充分小的 $h > 0$，则有：

$$P\{x < S_r \le x+h \mid N(t) = n\} = \frac{P\{x < S_r \le x+h, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \frac{P\{x < S_r \le x+h, N(t) - N(x+h) = n-r\}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \frac{P\{x < S_r \le x+h\}P\{N(t) - N(x+h) = n-r\}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \frac{f_{S_r}(x)h \cdot \dfrac{[\lambda(t-x-h)]^{n-r}}{(n-r)!} \cdot e^{-\lambda(t-x-h)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}}$$

两边除以h，并令$h\to 0$，我们有：

$$f_{S_r}(x|N(t)=n)=\frac{f_{S_r}(x)\cdot\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

最后我们可以得到结果：

$$f_{S_r}(x|N(t)=n)=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-r}\cdot\frac{1}{t},\quad 0<x<t$$

例：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的 **Poisson** 过程，$f(t)=ke^{-kt}$是一确定性实函数，并且设

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

记S_i是$N(t)$的第i个事件到达的时刻，$A_i,i=1,2,\cdots$是一独立同分布的离散型随机变量序列，其分布率为：

$$P\{A_i=1\}=P\{A_i=-1\}=\frac{1}{2},\quad i=1,2\cdots$$

令$A_0=0$，$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立。现在构造一随机过程：

$$X(t)=A_{N(t)}f(t-S_{N(t)})u(t-S_{N(t)})$$

试画出此随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$的一样本函数并求其均值函数和相关函数。

解：（**1**）求均值函数：

由条件数学期望的性质，我们有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)|N(t)\}\}$$

又有：

$$E\{X(t)|\,N(t)=n\}=E\{A_n ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}$$
$$=E\{A_n\}E\{ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}=0$$

故有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)|\,N(t)\}\}=0$$

（2）求相关函数：

由相关函数的定义，有：

$$R_X(t,t+\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}$$
$$=E\{A_{N(t)}ke^{-k(t-S_{N(t)})}u(t-S_{N(t)})\times$$
$$\times A_{N(t+\tau)}ke^{-k(t+\tau-S_{N(t+\tau)})}u(t+\tau-S_{N(t+\tau)})\}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)=j\}\cdot E\{A_i ke^{-k(t-S_i)}u(t-S_i)\times$$
$$\times A_j ke^{-k(t+\tau-S_j)}u(t+\tau-S_j)\}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)-N(t)=0\}\times$$
$$\times E\{A_i^2k^2e^{-2k(t-S_i)-k\tau}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立性，及$E\{A_i^2\}=1$，我们可得：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由上面的例子可知，在条件$N(t)=i$下，S_i的条件分布密度为：

$$f_{S_i}(x)=\frac{ix^{i-1}}{t^i},\quad 0<x<t$$

因此我们有：

$$E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}=\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

即：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}\frac{ix^{i-1}}{t^i}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}\frac{ix^{i-1}}{t^i}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda e^{\lambda x}e^{-\lambda t}\right\}dx=e^{-\lambda\tau-k\tau}\frac{k^2\lambda}{2k+\lambda}\left[1-e^{-\lambda t-2kt}\right]$$

注：Γ分布的定义：

称随机变量X服从参数为$\alpha>0$、$\beta>0$的Γ分布，如果其分布密度函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

记为：$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$；其中$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$。

当α取整数时，$\Gamma(n)=(n-1)!$

第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）

九、更新过程

（1） 概念及基本性质

定义：设$\{X_k, k \ge 1\}$是独立同分布，取值非负的随机变量，分布函数为$F(x)$，且$F(0)<1$。令$S_0 = 0, S_1 = X_1, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，对$\forall t \ge 0$，记：

$$N(t) = \sup\{n : S_n \le t\}$$

则称$\{N(t), t \ge 0\}$为更新过程。

更新过程是一计数过程，并有：

$$\{N(t) \ge n\} = \{S_n \le t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\} = \{S_n \le t\} - \{S_{n+1} \le t\}$$

记：$F_n(s)$为S_n的分布函数，由$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，易知：

$$F_1(x) = F(x)$$

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u) \quad (n \ge 2)$$

证明：由全概率公式有：

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P\{S_n \le x\} = P\{S_{n-1} + X_n \le x\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\{S_{n-1} \le x-u \mid X_n = u\} f_{X_n}(u)du \\
&= \int_0^{\infty} P\{S_{n-1} \le x-u\} dF(u) \\
&= \int_0^{x} P\{S_{n-1} \le x-u\} dF(u) \\
&= \int_0^{x} F_{n-1}(x-u) dF(u) = (F_{n-1} * f)(x) = (f * F_{n-1})(x)
\end{aligned}$$

即$F_n(x)$是$F(x)$的n重卷积，记作：$F_n = F_{n-1} * F$。

另外，记：

$$m(t)=E\{N(t)\}$$

称 $m(t)$ 为更新函数。关于更新函数，有以下重要的定理。

定理：对于 $\forall t\geq 0$，有：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

证明：根据以上的关系式，计算得：

$$\begin{aligned}
m(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}nP\{N(t)=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{N(t)=n\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}P\{N(t)=n\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}P\{N(t)=n\}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}P\{N(t)\geq k\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P\{S_n\leq t\}
\end{aligned}$$

即有：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

推论：若对 $\forall t\geq 0$， $F(t)<1$，则有：

$$m(t)\leq F(t)(1-F(t))^{-1}$$

下面是重要的更新方程。

定理：$\forall t\geq 0$， $m(t)$ 满足下列更新方程：

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-u)dF(u)$$

证明：由 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$，得：

$$m(t)=F(t)+\sum_{n=2}^{\infty}F_n(t)$$

将 $F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(t-u)dF(u)\quad(n\geq 2)$ 代入上式，即有所要的结果。

令：

$$\tilde{m}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dm(t)$$

$$\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

则有：

$$\tilde{m}(s)=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)},\quad \tilde{F}(s)=\frac{\tilde{m}(s)}{1+\tilde{m}(s)}$$

证明：记：$\lambda(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$（称为更新强度函数），由 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$，可得：

$$\lambda(t)=\frac{dm(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dF_n(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

两边取 **Laplace** 变换，有：

$$\int_0^\infty \lambda(t)e^{-st}dt=\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)$$

由 $\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$ 及 $F_n=F_{n-1}*F$，根据卷积的 **Laplace** 变换的性质，有：

$$\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)=[\tilde{F}(s)]^n$$

因此，我们有：

$$\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-st}dF_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{F}(s)]^n=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$$

（2） 极限性质

令：$\mu=E\{X_n\}$，由 $F(0^+)<1$，可知 $\mu>0$，下面给出几个极限定理。

定理：$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=\mu\right\}=1$

推论：$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty\right\}=1$

推论：$\forall t\geq 0$，有：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)<\infty$$

记：$N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$，则有：

定理：$P\left\{N(\infty)=\infty\right\}=1$。

定理：$P\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$

证明：由于：

$$S_{N(t)}\le t<S_{N(t)+1}\quad\Rightarrow\quad\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\le\frac{t}{N(t)}<\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}$$

由以上的定理，两边取极限，我们可以得到：

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$$

由此定理，我们称$\frac{1}{\mu}$为更新过程的速率。

定理：（基本更新定理）若$\mu=E\{X_n\}<\infty$，则有：$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$。

（3）　例子

例 1：设某更新过程$N(t)$的时间间隔$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是独立同分布，非负取值的随机变量，且有：

$$P\{X_n=i\}=p(1-p)^{i-1}\quad i\ge 1$$

试求$P\{N(t)=n\}$。

解：由于

$$\{N(t)=n\}=\{S_n\le t<S_{n+1}\}=\{S_n\le t\}-\{S_{n+1}\le t\}$$

因此

$$P\{N(t)=n\}=P\{S_n\le t\}-P\{S_{n+1}\le t\}$$

根据题意，此更新过程的时间间隔X_n服从几何分布，因此有

$$P\{S_n=k\}=\begin{cases}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}, & k\ge n\\ 0, & k<n\end{cases}$$

最后得到

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=n}^{[t]}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}C_{k-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

例 2：某更新过程的更新强度为：

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda\,, & t\geq 0,\lambda>0\\ 0\,, & t<0\end{cases}$$

求该更新过程$\{N(t),t\geq 0\}$的时间间隔X_n的概率密度。

十、过滤的 Poisson 过程

定义：设有一 **Poisson** 分布的冲激脉冲串经过一线性时不变滤波器，则滤波器输出是一随机过程$\{\xi(t),t\geq 0\}$，即

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}h(t-S_i)\qquad (*)$$

其中$h(t)$是滤波器的冲激响应，S_i是第i个冲激脉冲出现的时刻，$N(T)$是$[0,T]$内进入滤波器输入端冲激脉冲的个数，它服从 **Poisson** 分布，即：

$$P\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

λ是单位时间内的平均脉冲数。我们称由（*）代表的随机过程为过滤的 **Poisson** 过程。

设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$是独立同分布的随机变量，并且$Y_1\sim U(0,T)$，由上节课的内容我们知道，在$N(T)=k$的条件下，$S_1,S_2,\cdots,S_k$的分布与$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$的顺序统计量$Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(k)}$的分布是一样的。

给定关于过滤的 **Poisson** 过程的一些基本假设：（**a**）T比$h(t)$的脉冲持续时间τ_a大得多，即$T>>\tau_a$；（**b**）$h(t)$是具有因果性的滤波器响应，即$t<S_i$时，$h(t-S_i)=0$；（**c**）被研究的时刻t大于$h(t)$的脉冲持续时间τ_a，即$t>\tau_a$。

下面研究过滤的 **Poisson** 过程的一些统计特性。

（1）$\xi(t)$ **的均值**

$$
\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\{\xi(t) \mid N(T)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\left\{\sum_{i=1}^{k} h(t-S_i)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\big[h(t-S_i)\big]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\big[h(t-Y_i)\big]\right\}
\end{aligned}
$$

下面求 $E[h(t-Y_i)]$**：利用过滤的 Poisson 过程的基本假设，有：**

$$
E[h(t-Y_i)] = \frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} h(y)dy = \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy
$$

因此，我们有：

$$
\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\big[h(t-Y_i)\big]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \frac{k}{T}\int_0^T h(y)dy \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \lambda T \\
&= \lambda \int_0^T h(y)dy
\end{aligned}
$$

（2）$\xi(t)$ **的相关函数** $R_{\xi\xi}(t,t+\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t,t+\tau) &= E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-S_i) \sum_{j=1}^{N(T)} h(t+\tau-S_j)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} \sum_{j=1}^{N(T)} h(t-S_i) h(t+\tau-S_j)\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $t<T, t+\tau<T$ **。**

利用条件数学期望，我们有：

$$R_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot E_{S_iS_j}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\}$$

上面的等式中，当 $i=j$ 时，一共有 k 项，有：

$$\begin{aligned}&E_{S_iS_i}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_i)\right]=\\&=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)h(t+\tau-x)dx\\&=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}h(y)h(y+\tau)dy=\frac{1}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy\end{aligned}$$

当 $i\neq j$ 时，一共有 k^2-k 项，利用独立性和假设条件，每项为：

$$\begin{aligned}&E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(t+\tau-x)dx\\&=\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\end{aligned}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t,t+\tau)&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\\&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k^2-k}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\\&=\frac{E\{N(T)\}}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\frac{E\{[N(T)]^2-N(T)\}}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\\&=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\lambda^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\end{aligned}$$

其中我们利用了：

$$E\{N(T)\}=\lambda T\text{，}\quad E\{[N(T)]^2-N(T)\}=\lambda T+(\lambda T)^2-\lambda T=(\lambda T)^2$$

同时我们得到：

$$C_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy=C_{\xi\xi}(\tau)$$

（3）$\xi(t)$ 的特征函数

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi(t)}(v)&=E\left\{e^{jv\xi(t)}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{e^{jv\xi(t)}\,\middle|\,N(T)=k\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-S_i)\right]\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}\end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}&E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}=E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_i)\right]\right\}\\&=\prod_{i=1}^{k}E\left\{\exp\left[jvh(t-Y_i)\right]\right\}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T\exp\left[jvh(t-x)\right]dx\right]^k\\&=\left[\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right]^k\end{aligned}$$

代入计算，有：

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi(t)}(v)&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k\\&=e^{-\lambda T}\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}=\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\}\end{aligned}$$

由于 $h(t)$ 具有因果性，其持续时间 $\tau_a<<T$，同时认为 $t>\tau_a$，因此，在 $(t-T,0)$ 和 (t,T) 内，有 $h(t)=0$。因此我们得到：

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\}\qquad (**)$$

注意：在给定的假设条件下，随机过程 $\xi(t)$ 的特征函数与 t 无关，也就是说 $\xi(t)$ 的一维概率密度与时间 t 无关，这样的随机过程称为一级严平稳过程，同理可以证明，任取 $n\in N,\ 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ $\ \xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$ 的联合概率密度仅与时间差 $t_2-t_1,t_3-t_2,\cdots,t_n-t_{n-1}$ 有关，具有这样性质的随机过程称为严平稳过程，过滤的 **Poisson** 过程就是严平稳过程。

另外，利用（**）式，我们有：

$$\frac{d\Phi_{\xi(t)}}{dv}\Big|_{v=0} = j\lambda\int_0^T h(y)dy$$

由特征函数与随机变量数字特征的关系，我们有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^T h(y)dy$$

$$D\{\xi(t)\} = Var\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^T [h(y)]^2 dy$$

这些结果与（1）、（2）中所获得的结果是一致的。

（4）　当 $\lambda \to \infty$ 时，特征函数的极限形式

我们记：

$$\alpha = \int_0^T h(y)dy\,,\quad \beta^2 = \int_0^T [h(y)]^2 dy$$

则有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda\alpha\,,\quad Var\{\xi(t)\} = \lambda\beta^2$$

作随机变量标准化变换，令：

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - \lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}$$

则有：

$$E\{\eta(t)\} = 0\,,\quad Var\{\eta(t)\} = 1$$

下面求随机过程 $\{\eta(t), t \ge 0\}$ 的特征函数。

$$\begin{aligned}
\Phi_{\eta(t)}(v) &= E\left\{e^{jv\eta(t)}\right\} \\
&= E\left\{\exp\left[jv\cdot\frac{\xi(t)-\lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot E\left\{\exp\left[j\cdot\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}\cdot\xi(t)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy\right\}
\end{aligned}$$

以上用到了特征函数的性质。两边求对数，我们有：

$$\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy$$

$$=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\frac{jv}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)-\frac{v^2}{2\lambda\beta^2}h^2(y)-\frac{jv^3}{6\lambda^{3/2}\beta^3}h^3(y)+\cdots\right]dy$$

$$=-\frac{jv\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\frac{jv\sqrt{\lambda}}{\beta}\int_0^T h(y)dy-\frac{v^2}{2\beta^2}\int_0^T[h(y)]^2dy-$$

$$-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+\cdots$$

$$=-\frac{v^2}{2}-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

上式中令 $\lambda\to\infty$，我们得到：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-\frac{v^2}{2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_{\eta(t)}(v)=\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}$$

由特征函数与分布函数唯一确定性，我们知道当 $\lambda\to\infty$ 时，$\eta(t)$ 是服从标准正态分布的随机变量。因此可知 $\xi(t)$ 也是服从正态分布的随机变量。即单位时间内出现的平均脉冲数无限增大时，$\xi(t)$ 的极限分布是正态分布，这符合中心极限定理。