

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析 习题

- 1、设 $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)$ ，其中 σ_k 和 α_k 为正常数， $U_k \sim U(0, 2\pi)$ ，且相互独立， $k = 1, 2, \dots, N$ ，试计算 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 的均值函数和相关函数，并说明其是否是平稳过程。
- 2、设有随机过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \pi \eta(t))$ ，其中 $\omega > 0$ 为常数， $\{\eta(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程， A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量，且 $P\{A = -1\} = P\{A = 1\} = 1/2$ 。
 - (1) 试画出此过程的样本函数，并问样本函数是否连续？
 - (2) 试求此过程的相关函数，并问该过程是否均方连续？
- 3、设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程，且 $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$ 。令 $Y(t) = 2X(t) - 1, t \geq 0$ 。试求过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s, t)$ 。
- 4、设有随机过程 $X(t) = 2Z \sin(t + \Theta)$ ， $-\infty < t < +\infty$ ，其中 Z 、 Θ 是相互独立的随机变量， $Z \sim N(0, 1)$ ， $P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = 1/2$ 。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程？说明理由。
- 5、设随机过程 $\xi(t) = X \cos 2t + Y \sin 2t$ ， $-\infty < t < +\infty$ ，其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。
 - (1) 如果 $X \sim U(0, 1)$ ，问过程 $\xi(t)$ 是否平稳过程？说明理由；
 - (2) 如果 $X \sim N(0, 1)$ ，问过程 $\xi(t)$ 是否均方可微？说明理由。
- 6、设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一实正交增量过程，并且 $E\{X(t)\} = 0$ ，及满足：

$$E\{[X(t) - X(s)]^2\} = |t - s|, \quad -\infty < s, t < +\infty;$$
 令： $Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$ ，试证明 $Y(t)$ 是平稳过程。
- 7、设 $\xi(t) = X \sin(Yt); t \geq 0$ ，而随机变量 X 、 Y 是相互独立且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程，是否连续、可导？
- 8、设 $\{X(t), t \in R\}$ 是连续平稳过程，均值为 m ，协方差函数为 $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$ ，其中： $\tau \in R, a, b > 0$ 。对固定的 $T > 0$ ，令 $Y = T^{-1} \int_0^T X(s) ds$ ，证明： $E\{Y\} = m$ ， $Var(Y) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]$ 。
- 9、设 $(X, Y) \sim N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ，令 $X(t) = X + tY$ ，以及 $Y(t) = \int_0^t X(u) du$ ， $Z(t) = \int_0^t X^2(u) du$ ，对于任意 $0 \leq s \leq t$ ，

- (1) 求 $E\{X(t)\}$, $E\{Y(t)\}$, $E\{Z(t)\}$, $Cov(X(s), X(t))$, $Cov(Y(s), Y(t))$;
- (2) 证明 $X(t)$ 在 $t > 0$ 上均方连续、均方可导;
- (3) 求 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的均方导数。

10、 设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后, 其输出为 $Y(t) = |X(t)|$, 试求:

- (1) 随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$, 并说明其是否为平稳过程;
- (2) 随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差;
- (3) 随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$ 。