

# 非线性光学习题解答

[李春蕾 (2011111772)]

## 第一章 晶体光学简介 电光效应

1.解答:

由于矢量运算不受坐标系的影响, 只是表示形式不同而已, 不妨在直角坐标系下建立方程, 设

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z, \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{则 } f = \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

$$\text{于是 } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z = i f k_x \vec{e}_x + i f k_y \vec{e}_y + i f k_z \vec{e}_z = i f \vec{k}, \quad \text{问题得证。}$$

$$\text{对于平面波, 设 } \vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] = (E_{x_0} \vec{e}_x + E_{y_0} \vec{e}_y + E_{z_0} \vec{e}_z) \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

$$\text{其中, } E_x = E_{x_0} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad E_y = E_{y_0} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad E_z = E_{z_0} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

$$\nabla \times \vec{E}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &= \vec{e}_x (-i k_y E_z + i k_z E_y) + \vec{e}_y (-i k_z E_x + i k_x E_z) + \vec{e}_z (-i k_x E_y + i k_y E_x) \\ &= i \vec{k} \times \vec{E} \end{aligned}$$

$$\text{同理, } \nabla \times \vec{H} = i \vec{k} \times \vec{H}.$$

2.证明:

在选定主轴坐标系的情况下, 物质方程可以写成

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

同时, 将晶体光学第一基本方程写成分量形式,

$$D_i = \varepsilon_0 n^2 [E_i - k_i (\vec{k} \cdot \vec{E})], \quad i = 1, 2, 3$$

联立两式, 整理得到

$$D_i = \frac{\varepsilon_0 k_i (\vec{k} \cdot \vec{E})}{\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{n^2}}$$

对于对应同一个  $\vec{k}$  的两个电位移矢量  $\vec{D}'$ 、 $\vec{D}''$ , 建立它们的标量积

$$\begin{aligned}
& \bar{D}' \cdot \bar{D}'' \\
&= \varepsilon_0^2 (\bar{k} \cdot \bar{E}') (\bar{k} \cdot \bar{E}'') \left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{(n')^2} \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{(n'')^2} \right] + \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{(n')^2} \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{(n'')^2} \right] + \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{(n')^2} \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{(n'')^2} \right] \right\} \\
&= \varepsilon_0^2 (\bar{k} \cdot \bar{E}') (\bar{k} \cdot \bar{E}'') \frac{(n' n'')^2}{(n')^2 - (n'')^2} \left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{(n')^2} \right] - \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{(n'')^2} \right] + \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{(n')^2} \right] - \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{(n'')^2} \right] + \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{(n')^2} \right] - \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{(n'')^2} \right] \right\} \\
&\text{由 } \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_i^2}} = 0, \text{ 得到大括号中的第一、三、五项之和为零, 第二、四、六项之和为零, 所以}
\end{aligned}$$

$$\bar{D}' \cdot \bar{D}'' = 0$$

即对应同一个  $\bar{k}$  的两个电位移矢量  $\bar{D}'$ 、 $\bar{D}''$  相互垂直。

3. 解答:

$$\sum \frac{k_i^2}{\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{n^2}} = 0 \text{ 是方程 } \varepsilon_i E_i = \varepsilon_0 n^2 [E_i - k_i (\bar{k} \cdot \bar{E})] \text{ 的本征值方程, 设其本征值为 } n_m, \text{ 相应的本征解为}$$

$E^{(m)}$ , 则可以得到,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{E}^{(m)} = \varepsilon_0 n_m^2 [\bar{E}^{(m)} - \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{E}^{(m)})]$$

晶体中可以有二个本征解, 设另一个为  $E^{(n)}$ , 用其点乘上式得到

$$E^{(n)} \cdot [\bar{E}^{(m)} - \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{E}^{(m)})] = \frac{1}{\varepsilon_0 n_m^2} E^{(n)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{E}^{(m)}$$

交换指标  $m$  和  $n$  后可以得到

$$E^{(m)} \cdot [\bar{E}^{(n)} - \bar{k} (\bar{k} \cdot \bar{E}^{(n)})] = \frac{1}{\varepsilon_0 n_n^2} E^{(m)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{E}^{(n)}$$

上两式相减, 考虑到介电常数张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为对称张量, 则可以得到

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{n_n^2} - \frac{1}{n_m^2} \right] E^{(m)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{E}^{(n)} = 0$$

如果  $n_m \neq n_n$ , 则有

$$E^{(m)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \bar{E}^{(n)} = 0$$

如果  $n_m = n_n$ , 显然方程成立。

4. 解答:

如图(??), 对于单轴晶体, 假设  $x_3$  为光轴,  $\vec{E}$ 、 $\vec{D}$ 、 $\vec{s}$ 、 $\vec{k}$  均在主截面  $x_2Ox_3$  平面内,  $\vec{k}$  与  $x_3$  的夹角为  $\theta$ ,  $\vec{s}$  与  $x_3$  的夹角为  $\theta'$ ,  $\vec{k}$  与  $\vec{s}$  的夹角为  $\alpha$ , 在主轴坐标系下,

$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2 = \varepsilon_0 n_o^2 E_2$$

$$D_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3 = \varepsilon_0 n_e^2 E_3$$

根据几何关系:  $\tan \theta = \frac{D_3}{D_2}$ ,  $\tan \theta' = \frac{E_3}{E_2}$

$$\tan \theta' = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta$$

根据离散角的定义,

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \theta') = \frac{\tan \theta - \tan \theta'}{1 + \tan \theta \tan \theta'}$$

于是

$$\tan \alpha = \frac{\tan \theta - \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta \frac{n_o^2}{n_e^2}} = \frac{1}{2} \frac{n_e^2 - n_o^2}{\cos^2 \theta n_e^2 + \sin^2 \theta n_o^2} \sin 2\theta$$

(1) 当  $\vec{k}$  垂直或平行于光轴( $x_3$ )时, 即当  $\theta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  时, 由上式得到  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\vec{E}$ 、 $\vec{D}$ 、 $\vec{s}$ 、 $\vec{k}$  方向相同。

(2) 对于正单轴晶体,  $n_e > n_o$ , 由上式可知  $\alpha > 0$ ; 对于负单轴晶体,  $n_e < n_o$ , 则  $\alpha < 0$ 。

(3) 令  $\tan \theta = s$ , 则上式可以整理成

$$\tan \alpha = \frac{s - \frac{n_o^2}{n_e^2} s}{1 + s^2 \frac{n_o^2}{n_e^2}}$$

即

$$\alpha = \arctan \left( \frac{s - \frac{n_o^2}{n_e^2} s}{1 + s^2 \frac{n_o^2}{n_e^2}} \right)$$

上式左右两边对  $s$  求导,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1 + \left( \frac{s - \frac{n_o^2}{n_e^2} s}{1 + s^2 \frac{n_o^2}{n_e^2}} \right)^2} \left[ \frac{\left( 1 - \frac{n_o^2}{n_e^2} \right) \left( 1 - s^2 \frac{n_o^2}{n_e^2} \right)}{\left( 1 + s^2 \frac{n_o^2}{n_e^2} \right)^2} \right]$$

令  $\frac{d\alpha}{ds} = 0$ ，解得

$$\tan \theta = s = \frac{n_e}{n_o}$$

将  $\tan \theta = \frac{n_e}{n_o}$  代入  $\alpha = \arctan \left( \frac{\tan \theta - \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta \frac{n_o^2}{n_e^2}} \right)$  中，

$$\alpha = \alpha_{\max} = \arctan \left( \frac{1}{2} \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e n_o} \right)$$

5.解答：

(1)折射率椭球：主轴坐标系下， $\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$ ，它表征了晶体折射率(对应某一确定波长)在晶体

空间的各个方向上全部取值分布的几何图形。椭球的三个半轴长分别等于主相对介电常数的平方根，其方向分别与介电主轴方向一致。通过椭球中心的每个矢径方向，代表  $\vec{D}$  的一个振动方向，其长度为  $\vec{D}$  在此方向的折射率，故矢径可以表示为折射率从坐标原点出发，作波法线矢量  $\vec{k}$ ，再过坐标原点作一平面与  $\vec{k}$  垂直，该平面与折射率椭球相交为一椭圆，此椭圆的长短半轴长度等于  $\vec{r} = n\hat{d}$ ，折射率椭球也可以表示为  $(\hat{d}, n)$  曲面。

当知道晶体的介电张量后，就可以做出折射率椭球，然后用作图法得到与传播方向对应的  $n'$  和  $n''$ ，以及  $\vec{D}$  对应的两个方向  $\vec{D}'$  和  $\vec{D}''$ ，比起菲涅耳方程求解，既方便又直观。

(2)折射率曲面：主轴坐标系下， $\frac{k_1^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{k_2^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{k_3^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0$ ，矢径  $\vec{r} = n\hat{k}$ ，其方向平行于给

定的波法线方向  $\vec{k}$ ，长度则等于与该  $\vec{k}$  相对应的两个波的折射率，记作  $(\hat{k}, n)$  曲面。

折射率椭球可以确定与波法线方向  $\vec{k}$  相应的两个特许线偏振光的折射率，但它需要通过作图实现；折

射率曲面则直接给出了  $\bar{k}$  相应的两个折射率，但不能表示出相应的两个偏振方向。

(3)菲涅耳椭球：主轴坐标系下， $\frac{x_1^2}{v_{r1}^2} + \frac{x_2^2}{v_{r2}^2} + \frac{x_3^2}{v_{r3}^2} = 1$ ，对任意给定的波射线方向  $\bar{s}$ ，过菲涅耳椭球中心

作垂直于  $\bar{s}$  的平面，该平面与菲涅耳椭球相交，截线为椭圆，椭圆的长短轴方向表示与  $\bar{s}$  方向对应的线偏振光电场强度  $\bar{E}$  的振动方向，半轴长度表示光线速度。菲涅耳椭球可记为  $(\hat{e}, v_r)$ 。

(4)射线曲面：主轴坐标系下， $\frac{s_1^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{s_2^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{s_3^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_3^2}} = 0$ ，矢径  $\bar{r} = v_r \hat{s}$ ，其方向平行于给定

的波射线方向  $\bar{s}$ ，长度则等于与该  $\bar{s}$  相对应的两个光线速度  $v_r$ ，记作  $(\hat{s}, v_r)$  曲面。

6.解答：

GaAs 晶体为立方晶体，其光学性质是各向同性的，在未加外电场的情况下，其折射率椭球旋转球面，即

$$\frac{1}{n_0^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

它的线性电光系数为

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{41} \end{bmatrix}$$

在外加电场后，折射率椭球方程变为

$$\frac{1}{n_0^2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2\gamma_{41}(E_1 yz + E_2 xz + E_3 xy) = 1$$

(1)若外加电场为  $\bar{E} = (0, 0, E_3)$ ，则上式变为

$$\frac{1}{n_0^2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2\gamma_{41}E_3 xy = 1$$

为消去交叉相，将三个主轴方向绕  $x_3$  轴逆时针旋转  $45^\circ$ ，得到新的主轴坐标系，坐标变换为

$$\begin{aligned} x &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ y &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \\ z &= z' \end{aligned}$$

折射率椭球方程变为

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + \gamma_{41}E\right)x'^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} - \gamma_{41}E\right)y'^2 + \frac{1}{n_0^2}z'^2 = 1$$

从而得到新的主轴坐标系下的主折射率

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_0(1 + n_0^2\gamma_{41}E)^{-1/2} \approx n_0 - \frac{1}{2}n_0^3\gamma_{41}E \\ n'_2 &= n_0(1 - n_0^2\gamma_{41}E)^{-1/2} \approx n_0 + \frac{1}{2}n_0^3\gamma_{41}E \\ n'_3 &= n_0 \end{aligned}$$

可以看出晶体的光学性质由各向同性变为了双轴晶体。

(2)如果晶片作相位调制器，光必须沿  $x'$  或  $y'$  方向偏振，外加电压引起的相位变化为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2}n_0^3\gamma_{41}E \cdot L = \frac{\pi}{\lambda}n_0^3\gamma_{41}EL$$

由半波电压定义，知

$$V_\pi = \frac{\lambda}{n_0^3\gamma_{41}}$$

(3)如果晶片作振幅调制器，光沿  $x$  方向偏振，进入晶体中后，可以分解为分别沿  $x'$  和  $y'$  两个方向的偏振光，其产生的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n'_2 - n'_1)L = \frac{2\pi}{\lambda}n_0^3\gamma_{41}EL = \frac{2\pi}{\lambda}n_0^3\gamma_{41}EL$$

由半波电压定义，知

$$V_\pi = \frac{\lambda}{2n_0^3\gamma_{41}}$$

(4)无解

7.解答：

(1)在参考文献[1]中提到，KDP 晶体的二阶轴并不具有对称性，实际上，由于在不同坐标系下选取二阶轴时，其电光张量的矩阵也是不同的，由此得到的折射率椭球方程也因此不同，而在旋转操作时，一个是逆时针旋转  $45^\circ$ ，一个是顺时针旋转  $45^\circ$ ，所以造成最终的主轴坐标系却是完全一样的。

(2)降低外加直流偏压的方法之一是将  $N$  个 KDP 晶体串联起来，通过延长晶体长度( $V = EL$ )，达到降低直流偏压的效果；方法之二是在光线从晶体射出之后，通过一个  $1/4$  波片，以使  $x'$ 、 $y'$  之间补偿一个  $\frac{\pi}{2}$  的相位延迟。

(3)亚里夫的《量子电子学》书中的电光张量是按第一种坐标系选取定义的[1]，而在书中的图 14.4 中的快慢轴  $x'$ 、 $y'$  却是由顺时针旋转  $45^\circ$  得到的(应该是逆时针旋转  $45^\circ$ )。最终结果使电光调制点移到了负线性区，造成调制信号与输出信号反相。

## 第二章 光波在非线性介质中传播

1.解答:

Kleinman 指出当参与二次非线性作用的各频率  $\omega_s$ 、 $\omega_n$ 、 $\omega_m$  都位于同一透明区域内, 且色散可以忽略的情况下,  $\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m)$  的脚标  $i$ 、 $j$ 、 $k$  可以任意交换而其值不变, 即

$$\begin{aligned} & \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{jik}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{kij}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{kji}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) \end{aligned}$$

由此可得到

$$(1) \chi_{xxx};$$

$$(2) \chi_{yyy};$$

$$(3) \chi_{zzz};$$

$$(4) \chi_{xyy} = \chi_{yxy} = \chi_{yyx};$$

$$(5) \chi_{xzz} = \chi_{zxz} = \chi_{zzx};$$

$$(6) \chi_{yxx} = \chi_{xyx} = \chi_{xxy};$$

$$(7) \chi_{yzz} = \chi_{zyz} = \chi_{zzy};$$

$$(8) \chi_{zxx} = \chi_{xzx} = \chi_{xxz};$$

$$(9) \chi_{zyy} = \chi_{yzy} = \chi_{yyz};$$

$$(10) \chi_{xyz} = \chi_{xzy} = \chi_{yxz} = \chi_{yzx} = \chi_{zxy} = \chi_{zyx}.$$

因此得到 10 个相互独立的元素  $\{\chi_{xxx}, \chi_{yyy}, \chi_{zzz}, \chi_{xyz}, \chi_{xxy}, \chi_{xxz}, \chi_{yyx}, \chi_{yyz}, \chi_{zzx}, \chi_{zzy}\}$ .

2.解答:

4 阶旋转反演操作为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\chi_{ijk}^{(2)}$  的变换操作为

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \sum_{lmn} T_{il} T_{jm} T_{kn} \chi_{lmn}^{(2)}$$

因此可以得到

$$\chi'_{112}^{(2)} = T_{12} T_{12} T_{21} \chi_{221}^{(2)} = \chi_{221}^{(2)} = \chi_{112}^{(2)}$$

以及

$$\chi'_{221}^{(2)} = T_{21} T_{21} T_{12} \chi_{112}^{(2)} = -\chi_{112}^{(2)} = \chi_{221}^{(2)}$$

从而可得到  $\chi_{112}^{(2)} = 0$ .

$$\chi'_{123}^{(2)} = T_{12} T_{21} T_{33} \chi_{213}^{(2)} = \chi_{213}^{(2)} = \chi_{123}^{(2)}$$

以及

$$\chi'_{213}^{(2)} = T_{21} T_{21} T_{33} \chi_{123}^{(2)} = \chi_{123}^{(2)} = \chi_{213}^{(2)}$$

因此可得  $\chi_{123}^{(2)} = \chi_{213}^{(2)} \neq 0$

3.解答:

对于基频非线性极化强度

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, \omega_1) &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\omega_n + \omega_m = \omega_1} \chi^{(2)}(-\omega_1, \omega_n, \omega_m) : \vec{E}(\vec{r}, \omega_n) \vec{E}(\vec{r}, \omega_m) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_1, -\omega_1, 2\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \end{aligned}$$

其分量形式为

$$\begin{aligned} P_i^{(2)}(\vec{r}, \omega_1) &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, -\omega_1, 2\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{kj} \chi_{ikj}^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1) \end{aligned}$$

由本征置换对称性,  $\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_s, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(-\omega_s, \omega_m, \omega_n)$

$$P_i^{(2)}(\vec{r}, \omega_1) = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1)$$

即

$$\vec{P}^{(2)}(\vec{r}, \omega_1) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, 2\omega_1) \vec{E}(\vec{r}, -\omega_1)$$

倍频非线性极化强度

$$\vec{P}^{(2)}(\vec{r}, 2\omega_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-2\omega_1, \omega_1, \omega_1) : \vec{E}(\vec{r}, \omega_1) \vec{E}(\vec{r}, \omega_1)$$

不具备这样的对称性, 所以基频非线性极化强度系数是倍频非线性极化强度系数的 2 倍.



4.解答:

设参与三次非线性相互作用的四个光波频率为  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ，满足  $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ，它们都沿  $z$  方向传播，波矢量表达式可以表示为

$$\vec{E}_1(z, \omega_1) = \hat{e}_1 A_1(z) e^{ik_1 z}$$

$$\vec{E}_2(z, \omega_2) = \hat{e}_2 A_2(z) e^{ik_2 z}$$

$$\vec{E}_3(z, \omega_3) = \hat{e}_3 A_3(z) e^{ik_3 z}$$

$$\vec{E}_4(z, \omega_4) = \hat{e}_4 A_4(z) e^{ik_4 z}$$

其中  $\hat{e}_i (i=1, 2, 3, 4)$  代表四个波的偏振方向单位矢量。与各个频率相应的极化强度为

$$\vec{P}^{(3)}(z, \omega_1) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \vec{\chi}^{(3)}(-\omega_1, \omega_4, -\omega_2, -\omega_3) : \vec{E}_4(z, \omega_4) \vec{E}_2^*(z, \omega_2) \vec{E}_3^*(z, \omega_3)$$

$$\vec{P}^{(3)}(z, \omega_2) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \vec{\chi}^{(3)}(-\omega_2, \omega_4, -\omega_1, -\omega_3) : \vec{E}_4(z, \omega_4) \vec{E}_1^*(z, \omega_1) \vec{E}_3^*(z, \omega_3)$$

$$\vec{P}^{(3)}(z, \omega_3) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \vec{\chi}^{(3)}(-\omega_3, \omega_4, -\omega_2, -\omega_1) : \vec{E}_4(z, \omega_4) \vec{E}_2^*(z, \omega_2) \vec{E}_1^*(z, \omega_1)$$

$$\vec{P}^{(3)}(z, \omega_4) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \vec{\chi}^{(3)}(-\omega_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3) : \vec{E}_1(z, \omega_1) \vec{E}_2(z, \omega_2) \vec{E}_3(z, \omega_3)$$

由于  $\frac{\partial A_n(z)}{\partial z} = i \frac{\omega_n}{2\varepsilon_0 c n_n} \hat{e}_n \cdot \vec{P}_{NL}(z, \omega_n) e^{-ik_n z}$ ，所以我们可以得到

$$\frac{\partial A_1(z)}{\partial z} = i \frac{3\omega_1}{4cn_1} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_4(z) A_2^*(z) A_3^*(z) e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{\partial A_2(z)}{\partial z} = i \frac{3\omega_2}{4cn_2} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_4(z) A_1^*(z) A_3^*(z) e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{\partial A_3(z)}{\partial z} = i \frac{3\omega_3}{4cn_3} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_4(z) A_1^*(z) A_2^*(z) e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{\partial A_4(z)}{\partial z} = i \frac{3\omega_4}{4cn_4} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_1(z) A_2(z) A_3(z) e^{i\Delta k z}$$

其中

$$\Delta k = k_4 - k_1 - k_2 - k_3$$

$$\begin{aligned} \chi_{\text{eff}}^{(3)} &= \hat{e}_1 \cdot [\vec{\chi}^{(3)}(-\omega_1, \omega_4, -\omega_2, -\omega_3) : \hat{e}_4 \hat{e}_2 \hat{e}_3] \\ &= \hat{e}_2 \cdot [\vec{\chi}^{(3)}(-\omega_2, \omega_4, -\omega_1, -\omega_3) : \hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_3] \\ &= \hat{e}_3 \cdot [\vec{\chi}^{(3)}(-\omega_3, \omega_4, -\omega_1, -\omega_2) : \hat{e}_4 \hat{e}_1 \hat{e}_2] \\ &= \hat{e}_4 \cdot [\vec{\chi}^{(3)}(-\omega_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3) : \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3] \end{aligned}$$

5.解答:

在本题推到中, 以  $\vec{E}(\Omega)$  表示外加低频或直流电场, 其频率  $\Omega \ll \omega$ , 以示与光电场  $\vec{E}(\omega)$  的区别.

在外加电场为零时, 在主轴坐标系下, 晶体的介电张量是对角化的, 即

$$\vec{\epsilon}^{(2)0} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r^{(2)0} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{r1}^0 & & \\ & \epsilon_{r2}^0 & \\ & & \epsilon_{r3}^0 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_{10}^2 & & \\ & n_{20}^2 & \\ & & n_{30}^2 \end{bmatrix}$$

逆介电张量为

$$\vec{B}^{(2)0} = (\vec{\epsilon}^{(2)0})^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^0 & & \\ & B_{22}^0 & \\ & & B_{33}^0 \end{bmatrix}$$

有外加电场时, 逆介电张量变为

$$\vec{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

逆介电张量的变化  $\Delta \vec{B}$ , 将其展开为外电场的级数

$$\Delta \vec{B}^{(2)} = \vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(2)0} = \vec{\gamma}^{(3)} \cdot \vec{E} + \vec{h}^{(4)} : \vec{E}\vec{E}$$

现仅考虑线性电光效应, 即

$$\Delta \vec{B}^{(2)} = \vec{\gamma}^{(3)} \cdot \vec{E}(\Omega)$$

写成分量形式为

$$\Delta B_{ij}^{(2)} = \gamma_{ijk}^{(3)} \cdot E_k(\Omega)$$

在未加电场前, 晶体的极化强度为

$$\vec{P}^0 = \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} \cdot \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 (\vec{\epsilon}_r^{(2)0} - \vec{I}^{(2)}) \cdot \vec{E}(\omega)$$

加入电场  $\vec{E}(\Omega)$  后,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r^{(2)} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 (\Delta \vec{\epsilon}_r^{(2)} + \vec{\epsilon}_r^{(2)0}) \cdot \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 (\Delta \vec{\epsilon}_r^{(2)} - \vec{I}^{(2)} + \vec{\epsilon}_r^{(2)0}) \cdot \vec{E}(\omega)$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{P} - \vec{P}^0 = \epsilon_0 (\Delta \vec{\epsilon}_r^{(2)} - \vec{I}^{(2)} + \vec{\epsilon}_r^{(2)0}) \cdot \vec{E}(\omega) - \epsilon_0 (\vec{\epsilon}_r^{(2)0} - \vec{I}^{(2)}) \cdot \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 \Delta \vec{\epsilon}_r^{(2)} \cdot \vec{E}(\omega)$$

$\Delta \vec{P}$  与  $\Delta \vec{B}^{(2)}$  的关系可以通过介电张量和逆介电张量求的, 在未加外电场前,

$$\vec{B}^{(2)0} \cdot \vec{\epsilon}_r^{(2)0} = \vec{I}^{(2)}$$

加入外电场后, 有

$$\vec{B}^{(2)} \cdot \vec{\epsilon}_r^{(2)} = (\vec{B}^{(2)0} + \Delta \vec{B}^{(2)}) \cdot (\vec{\epsilon}_r^{(2)0} + \Delta \vec{\epsilon}_r^{(2)}) = \vec{I}^{(2)}$$

展开后，考虑到  $\vec{\Delta B}^{(2)} \cdot \vec{\Delta \varepsilon}_r^{(2)} \ll \vec{B}^{(2)0} \cdot \vec{\varepsilon}_r^{(2)0}$ ，可以得到

$$\vec{B}^{(2)0} \cdot \vec{\Delta \varepsilon}_r^{(2)} = -\vec{\varepsilon}_r^{(2)0} \cdot \vec{\Delta B}^{(2)}$$

上式两边同时左乘  $\vec{\varepsilon}_r^{(2)0}$ ，得到

$$\Delta \vec{\varepsilon}_r^{(2)} = -\vec{\varepsilon}_r^{(2)0} \cdot \vec{\Delta B}^{(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_r^{(2)0}$$

将上式展开分量形式为

$$(\Delta \varepsilon_r^{(2)})_{ij} = \varepsilon_{ii}^0 \varepsilon_{jj}^0 \Delta B_{ij}^{(2)}$$

将上式代入到  $\Delta \vec{P}$  中，可以得到

$$\Delta P_i = \varepsilon_0 (\Delta \varepsilon_r^{(2)})_{ij} \cdot E_j(\omega) = -\varepsilon_0 \varepsilon_{ii}^0 \varepsilon_{jj}^0 \Delta B_{ij}^{(2)} \cdot E_j(\omega)$$

将  $\Delta \vec{B}_{ij}^{(2)} = \vec{\gamma}_{ijk}^{(3)} \cdot \vec{E}_k(\Omega)$  代入，

$$\Delta P_i = -\varepsilon_0 \varepsilon_{ii}^0 \varepsilon_{jj}^0 \vec{\gamma}_{ijk}^{(3)} : E_j(\omega) \vec{E}_k(\Omega)$$

对比  $P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} : E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$ ，得知

$$\gamma_{ijk} = -\frac{\chi_{ijk}^{(2)}}{\varepsilon_{ii}^0 \varepsilon_{jj}^0}$$

补充题：我们通常所说的正常色散发生在透明区域，反常色散发生在吸收带附近，光纤通信书中讲的  $1.55\mu\text{m}$  在普通单模光纤的反常色散区，损耗还有  $0.2\text{dB/km}$ ，怎么解释这两种说法的矛盾？为什么光纤零色散波长在  $1.27\mu\text{m}$ ？

光学中把这种不同波长(频率)的光在同一介质中具有不同折射率的现象称为色散.色散率的定义为  $v = \frac{dn}{d\lambda}$ , 只要  $n = n(\lambda)$  或是  $n = n(\omega)$ ，即  $\frac{dn}{d\lambda} \neq 0$  或  $\frac{dn}{d\omega} \neq 0$ ，则存在光学色散。光学中把色散分成正常色散和反常色散.正常色散指折射率随着波长增加(或光频率的减少)而减小，即  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  ( $\frac{dn}{d\omega} > 0$ )。反常色散指的是当外来频率与介质固有频率相当时，介质出现共振吸收，此时称为反常色散，即  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$  ( $\frac{dn}{d\omega} < 0$ )。由洛伦兹提出的建立在经典理论基础上的电子论振动模型得到的  $n-\omega$  曲线中[1]，正常色散区远离共振吸收区，色散率的绝对值亦随波长的增加而减小。反常色散出现在共振吸收区。

光纤中的色散主要是说光脉冲在光纤中传播时，随着传输距离的增加，光脉冲将展宽。光纤的色散按其起因来说大体上可分为四类[2]：

(1)材料色散：由于光纤材料本身其折射率随频率或波长变化而变化，于是光的各频率分量的群速也就不同，由此脉冲展宽而出现的色散。

(2)波导色散：这是传播模式本身的一种色散，即对于光纤某一传播模式本身，在不同频率下传播常数

口不同，从而使群速不同，由此引起的色散。

(3)模间色散：光纤内多模传输时，即使在同一频率下，光纤各传输模的传播常数 $\beta$ 也不同，而使群速不同，由此产生了色散。(模间色散只存在多模光纤中)

(4)偏振色散：单模光纤中存在两个正交模式( $HE_{11x}$ 和 $HE_{11y}$ )。若光纤的结构为完全的轴对称，则这两个正交偏振模在光纤中的传播速度相同，光纤无色散。实际的光纤存在轴不对称性，因而两正交模传输速度不同，由此引起色散。

在参考文献[3]中，提到光学中的色散实际上是这里所说的材料色散。光纤通信中正常色散与反常色散

定[4],[5]义如下： $\frac{dv_g}{d\omega} < 0, \beta_0'' > 0, D < 0$ 时为正常色散； $\frac{dv_g}{d\omega} > 0, \beta_0'' < 0, D > 0$ 。

由此可知光纤通信中所说正常色散及反常色散都在光学中的正常色散区，所以 $1.55\mu\text{m}$ 附近的损耗还有 $0.2\text{dB/km}$ 是可以理解的。光纤光学中，把 $D = 0$ 时，对应的波长定义为零色散波长，普通光纤的零色散波长为 $1.27\mu\text{m}$ 。

参考文献：

[1]张晓光. 非线性光学(上)[M]. 内部讲义, 2005.

[2]顾畹仪, 等. 光纤通信[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

[3]于丽, 杨伯君, 张晓光. 关于色散问题的讨论[J]. 物理与工程副刊, 2001.

[4] Govind P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics[M]. San Diego: Academic Press, 2007.

[5] (美)Govind P. Agrawal. 非线性光纤光学原理及应用[M]. 贾东方, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2002.

### 第三章 二次谐波

1.解答:

设非线性介质中基频波  $\omega_1$  以及二次谐波  $\omega_2 = 2\omega_1$  的光场分别为

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(z, \omega_1) &= \hat{e}_1 A_1(z) e^{ik_1 z} \\ \vec{E}_2(z, 2\omega_1) &= \hat{e}_2 A_2(z) e^{ik_2 z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据式(2.3.11)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1(z)}{\partial z} &= i \frac{\omega_1}{2\varepsilon_0 c n_1} \hat{e}_1 \cdot \vec{P}^{(2)}(z, \omega_1) e^{-ik_1 z} \\ \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} &= i \frac{\omega_1}{2\varepsilon_0 c n_2} \hat{e}_2 \cdot \vec{P}^{(2)}(z, 2\omega_1) e^{-ik_2 z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中二次非线性极化强度分别为

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}^{(2)}(z, \omega_1) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_1, 2\omega_1, -\omega_1) : \hat{e}_2 \hat{e}_1 A_2(z) A_1^*(z) \exp[i(k_2 - k_1)z] \\ \vec{P}^{(2)}(z, 2\omega_1) &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-2\omega_1, \omega_1, \omega_1) : \hat{e}_1 \hat{e}_1 A_1^2(z) \exp[i2k_1 z] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

习惯上引入倍频极化张量

$$\mathbf{d}(-2\omega_1, \omega_1, \omega_1) = \frac{1}{2} \chi^{(2)}(-2\omega_1, \omega_1, \omega_1) \quad (4)$$

相应定义有效倍频极化系数

$$d_{\text{eff}} = \hat{e}_2 \cdot [\mathbf{d}(-2\omega_1, \omega_1, \omega_1) : \hat{e}_1 \hat{e}_1] = \frac{1}{2} \chi_{\text{eff}}^{(2)} \quad (5)$$

则由(2)式以及(3)式得到基频波与二次谐波之间的耦合波方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1(z)}{\partial z} &= i \frac{\omega_1}{c n_1} d_{\text{eff}} A_2(z) A_1^*(z) e^{-i\Delta k z} \\ \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} &= i \frac{\omega_1}{c n_2} d_{\text{eff}} A_1^2(z) e^{-i\Delta k z} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\Delta k = 2k_1 - k_2$  为相位适配因子

当相位匹配  $\Delta k = 0$  满足时, 即  $2k_1 = k_2$ , 由  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ , 可以得到

$$n_1(\omega_1) = n_2(2\omega_1) \quad (7)$$

耦合波方程式(6)变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1(z)}{\partial z} &= i K A_2(z) A_1^* \\ \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} &= i K A_1^2(z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$K = \frac{\omega_1 d_{\text{eff}}}{cn_1} = \frac{\omega_1 d_{\text{eff}}}{cn_2} \quad (9)$$

令

$$\left. \begin{aligned} A_1(z) &= A_{10}(z) \exp[i\varphi_1(z)] \\ A_2(z) &= A_{20}(z) \exp[i\varphi_2(z)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

代入式(8)中，可以得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{10} + i\dot{\varphi}_1 A_{10} &= iKA_{10}A_{20} \exp[-i(2\varphi_1 - \varphi_2)] \\ \dot{A}_{20} + i\dot{\varphi}_2 A_{20} &= iKA_{10}^2 \exp[i(2\varphi_2 - \varphi_1)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

令

$$\theta(z) = 2\varphi_1 - \varphi_2 \quad (12)$$

将式(11)的实部与虚部分开写成方程，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_{10}}{dz} &= KA_{10}A_{20} \sin \theta \\ \frac{dA_{20}}{dz} &= -KA_{10}^2 \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d}{dz} [\ln(A_{10}^2 A_{20})] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2.解答：

匹配类型	I类		II类	
	偏振方式	匹配公式	偏振方式	匹配公式
正晶体	$\mathbf{e} + \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{o}$	$n_{\mathbf{e}}^{\omega}(\theta_{\mathbf{m}}) = n_{\mathbf{o}}^{2\omega}$	$\mathbf{o} + \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{o}$	$\frac{1}{2}[n_{\mathbf{o}}^{\omega} + n_{\mathbf{e}}^{\omega}(\theta_{\mathbf{m}})] = n_{\mathbf{o}}^{2\omega}$
负晶体	$\mathbf{o} + \mathbf{o} \rightarrow \mathbf{e}$	$n_{\mathbf{e}}^{2\omega}(\theta_{\mathbf{m}}) = n_{\mathbf{o}}^{\omega}$	$\mathbf{e} + \mathbf{o} \rightarrow \mathbf{e}$	$\frac{1}{2}[n_{\mathbf{o}}^{\omega} + n_{\mathbf{e}}^{\omega}(\theta_{\mathbf{m}})] = n_{\mathbf{e}}^{2\omega}(\theta_{\mathbf{m}})$

参考资料：

[1]石顺祥，等．非线性光学[M]．西安：西安电子科技大学出版社，2003．

3.解答：

$\text{LiIO}_3$  晶体为负单轴晶体，所以其第一类匹配的匹配方式为  $\mathbf{o} + \mathbf{o} \rightarrow \mathbf{e}$ ，第二类匹配的匹配方式为

$\mathbf{e} + \mathbf{o} \rightarrow \mathbf{e}$ 。

对于第一类相位匹配由习题 2 中我们得知，匹配公式为

$$n_{\mathbf{e}}^{2\omega}(\theta_{\mathbf{m}}) = n_{\mathbf{o}}^{\omega} \quad (1)$$

又由非常光折射率  $n_{\mathbf{e}}(\theta)$  与方向  $\theta$  的关系为

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (2)$$

所以对于二次谐波有

$$\frac{1}{[n_e^{2\omega}(\theta)]^2} = \frac{\cos^2 \theta}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^{2\omega})^2} \quad (3)$$

将式(1)代入上式，即当满足相位匹配条件时，有

$$\frac{1}{(n_o^\omega)^2} = \frac{\cos^2 \theta_m}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta_m}{(n_e^{2\omega})^2} \quad (4)$$

求解式(4)，得到负单轴晶体第一类相位匹配角的计算公式

$$\theta_m^I = \arcsin \left[ \left( \frac{n_e^{2\omega}}{n_o^\omega} \right)^2 \frac{(n_o^{2\omega})^2 - (n_o^\omega)^2}{(n_o^{2\omega})^2 - (n_e^{2\omega})^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

对于第二类相位匹配的匹配公式为

$$\frac{1}{2} [n_o^\omega + n_e^\omega(\theta_m)] = n_e^{2\omega}(\theta_m) \quad (6)$$

将其代入到式(3)得到

$$\left[ \frac{\cos^2 \theta_m^I}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta_m^I}{(n_e^{2\omega})^2} \right]^{-1/2} = \frac{1}{2} \left\{ n_o^\omega + \left[ \frac{\cos^2 \theta_m^I}{(n_o^\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta_m^I}{(n_e^\omega)^2} \right]^{-1/2} \right\} \quad (7)$$

对于  $\text{LiIO}_3$  晶体，由色散公式利用Matlab程序计算可求得  $n_o^2(1.55) = 3.4231$ ， $n_o^2(0.775) = 3.4918$ ，

$n_e^2(1.55) = 2.9292$ ， $n_e^2(0.775) = 2.9775$ ，将这些数值代入到式(4)中，得到  $\text{LiIO}_3$  晶体第一类相位匹配

角  $\theta_m^I = 0.3477$ 。

4.解答：

第一章中我们已经得到离散角公式

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{n_e^2 - n_o^2}{\cos^2 \theta n_e^2 + \sin^2 \theta n_o^2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \left( \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-1} \quad (1)$$

对于负单轴晶体的第一类相位匹配，将习题3中的式(4)代入到式(1)中，即可求得

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\theta_m \left( n_o^\omega \right)^2 \left( \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{1}{(n_e^{2\omega})^2} \right) \quad (2)$$

对于正单周晶体的第一类相位匹配，由匹配公式

$$n_e^\omega(\theta_m) = n_o^{2\omega} \quad (3)$$

和非常光折射率  $n_e(\theta)$  与方向  $\theta$  的关系式

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (4)$$

所以对于二次谐波,当满足相位匹配条件时

$$\frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} = \frac{\cos^2 \theta_m}{(n_o^\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta_m}{(n_e^\omega)^2} \quad (5)$$

代入式(1)可得

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\theta_m (n_o^{2\omega})^2 \left( \frac{1}{(n_o^\omega)^2} - \frac{1}{(n_e^\omega)^2} \right) \quad (6)$$

注：课后题目中公式有误，建议修改。

5.解答：

利用习题3、4的结果很容易求得LiIO<sub>3</sub>晶体第一类相位匹配下倍频离散角  $\tan \alpha$ ，利用Matlab程序计算得到

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\theta_m (n_o^\omega)^2 \left( \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{1}{(n_e^{2\omega})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2 \times 0.1164) \times 3.4231 \times \left( \frac{1}{3.4918} - \frac{1}{2.9775} \right) \\ &= -1.736 \end{aligned}$$

离散长度

$$L = \frac{D}{\tan \alpha} = 0.288\text{m}$$

6.解答：

在只对于单轴晶体的讨论中，我们选定  $z$  为晶体光轴方向，对于o光的单位矢量

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

e光的单位矢量

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

这样  $[F_\mu]$  有三种组合  $[a_i a_j]$ ， $[b_i b_j]$ ， $[a_i b_j]$



$$[a_i a_j] = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \\ 2a_2 a_3 \\ 2a_1 a_3 \\ 2a_1 a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix}, [b_i b_j] = \begin{bmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ 2b_2 b_3 \\ 2b_1 b_3 \\ 2b_1 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \\ \sin^2 \theta \\ -\sin 2\theta \sin \varphi \\ -\sin 2\theta \cos \varphi \\ \cos^2 \theta \sin 2\varphi \end{bmatrix}, [a_i b_j] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \\ a_3 b_2 + b_3 a_2 \\ a_1 b_3 + b_1 a_3 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

相应于两种相位匹配形式，四种作用过程的有效非线性光学系数的具体算式为

(1) 负单轴晶体，第一类相位匹配( $\text{o} + \text{o} \rightarrow \text{e}$ )

$$d_{\text{eff}} = [b_i]' [d_{i\mu}] [a_j a_k] \\ = [-\cos \theta \cos \varphi \quad -\cos \theta \sin \varphi \quad \sin \theta] [d_{i\mu}] \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

(2) 负单轴晶体，第二类相位匹配( $\text{e} + \text{o} \rightarrow \text{e}$ )

$$d_{\text{eff}} = [b_i]' [d_{i\mu}] [a_j b_k] \\ = [-\cos \theta \cos \varphi \quad -\cos \theta \sin \varphi \quad \sin \theta] [d_{i\mu}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (5)$$

(3) 正单轴晶体，第一类相位匹配( $\text{e} + \text{e} \rightarrow \text{o}$ )

$$d_{\text{eff}} = [a_i]' [d_{i\mu}] [b_j b_k] \\ = [\sin \varphi \quad -\cos \varphi \quad 0] [d_{i\mu}] \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \\ \sin^2 \theta \\ -\sin 2\theta \sin \varphi \\ -\sin 2\theta \cos \varphi \\ \cos^2 \theta \sin 2\varphi \end{bmatrix} \quad (6)$$

(4) 正单周晶体，第二类相位匹配( $\text{o} + \text{e} \rightarrow \text{o}$ )

$$d_{\text{eff}} = [a_i]^T [d_{i\mu}] [a_j b_k]$$

$$= [\sin \varphi \quad -\cos \varphi \quad 0] [d_{i\mu}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\varphi \\ 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于KDP晶体，对称性为  $\bar{4}2m$ ，其倍频极化张量形式为

$$d_{i\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(8)分别代入式(4)、(5)中，分别得到KDP晶体的第一类、第二类相位匹配有效非线性系数

$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = -d_{36} \sin \theta \sin 2\varphi \quad (9)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = \frac{1}{2} (d_{14} + d_{36}) \sin 2\theta \cos 2\varphi \quad (10)$$

考虑Kleinman对称性后，可得

$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = -d_{14} \sin \theta \sin 2\varphi \quad (11)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = d_{14} \sin 2\theta \cos 2\varphi \quad (12)$$

对于LiNbO<sub>3</sub>晶体，对称性为  $3m$ ，其倍频极化张量形式为

$$d_{i\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将式(13)分别代入式(4)、(5)中，分别得到LiNbO<sub>3</sub>晶体的第一类、第二类相位匹配有效非线性系数

$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi \quad (14)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi \quad (15)$$

考虑Kleinman对称性后，可得

$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi \quad (16)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi \quad (17)$$

对于LiIO<sub>3</sub>晶体，对称性为  $6$ ，其倍频极化张量形式为

$$d_{i\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

将式(18)分别代入式(4)、(5)中，分别得到LiIO<sub>3</sub>晶体的第一类、第二类相位匹配有效非线性系数

$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = d_{31} \sin \theta \quad (19)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = \frac{1}{2} d_{41} \sin 2\theta \quad (20)$$

考虑Kleinman对称性后，可得

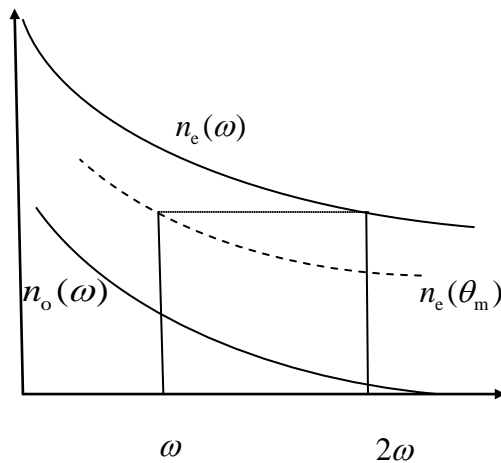
$$d_{\text{eff}}^{\text{I}} = d_{15} \sin \theta \quad (21)$$

$$d_{\text{eff}}^{\text{II}} = 0 \quad (22)$$

结果如下表所示

	晶体	KDP晶体( $\bar{4}2m$ )	LiNbO <sub>3</sub> (3m)	LiIO <sub>3</sub> (6)
不考虑Kleinman近似	第I类匹配条件	$-d_{36} \sin \theta \sin 2\varphi$	$d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{31} \sin \theta$
	第II类匹配条件	$\frac{1}{2}(d_{14} + d_{36}) \sin 2\theta \cos 2\varphi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi$	$\frac{1}{2} d_{41} \sin 2\theta$
考虑Kleinman近似	第I类匹配条件	$-d_{14} \sin \theta \sin 2\varphi$	$d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{15} \sin \theta$
	第II类匹配条件	$d_{14} \sin 2\theta \cos 2\varphi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi$	0

7.解答：



## 第四章 光学参量放大和光学参量振荡

1.解答:

在相位匹配条件下, 即  $\Delta k = 0$ , 耦合波方程的最终解可以简化为

$$\left. \begin{aligned} A_1(z) &= \cosh(gz)A_1(0) + i\frac{1}{g}K_1A_3(0)A_2^*(0)\sinh(gz) \\ A_2(z) &= \cosh(gz)A_2(0) + i\frac{1}{g}K_2A_3(0)A_1^*(0)\sinh(gz) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

同时得到  $g^2 = \Gamma^2 = K_1K_2|A_3(0)|^2$

$$\begin{aligned} |A_1(z)|^2 &= \cosh^2(\Gamma z)|A_1(0)|^2 + \frac{K_1}{K_2}\sinh(\Gamma z)|A_2|^2 \\ |A_2(z)|^2 &= \cosh^2(\Gamma z)|A_2(0)|^2 + \frac{K_2}{K_1}\sinh(\Gamma z)|A_1|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

从而推得

$$\frac{|A_1(z)|^2 - |A_1(0)|^2}{K_1} = \sinh^2(\Gamma z) \left( \frac{|A_1(0)|^2}{K_1} + \frac{|A_2(z)|^2}{K_2} \right) = \frac{|A_2(z)|^2 - |A_2(0)|^2}{K_2} \quad (3)$$

2.解答:

双共振参量振荡器的阈值电流表达式为

$$I_{th} = \frac{2cn_1n_2n_3}{\mu_0\omega_1\omega_2(\chi_{eff}^{(2)})^2L^2}(1-R_1)(1-R_2)$$

将已知条件给出的数值代入, 在  $L = 1\text{ cm}$  时, 计算得到

$$I_{th} = 1.814 \times 10^3 \text{ W/cm}^2$$

在  $L = 10\text{ cm}$  时, 计算得到

$$I_{th} = 18.14 \text{ W/cm}^2$$

单共振参量振荡器的阈值电流的表达式为

$$I_{th} = \frac{4cn_1n_2n_3}{\mu_0\omega_1\omega_2(\chi_{eff}^{(2)})^2L^2}(1-R_2)$$

将已知条件给出的数值代入, 在  $L = 1\text{ cm}$  时, 计算得到

$$I_{th} = 1.814 \times 10^5 \text{ W/cm}^2$$

在  $L = 10\text{ cm}$  时, 计算得到

$$I_{th} = 1.814 \times 10^3 \text{ W/cm}^2$$

3.解答:

产生振荡的信号光与闲频光必须满足相位匹配条件，在三波共线传播的条件下，相位匹配条件为

$$n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \quad (1)$$

在负单轴晶体第一类相位匹配条件下，泵浦光  $\omega_3$  为 e 光，信号光  $\omega_2$  和闲频光  $\omega_1$  为 o 光，匹配方式为

$e_3 \rightarrow o_1 + o_2$ ，则相位匹配条件可改写为

$$n_{3e}(\theta)\omega_3 = n_{1o}\omega_1 + n_{2o}\omega_2 \quad (2)$$

假定一开始晶体取向为  $\theta_0$ ，满足相位匹配而使频率  $\omega_{10}$  和  $\omega_{20}$  产生振荡，相应的折射率为  $n_{1o}$  和  $n_{2o}$ ，则

$$n_{3e}(\theta_0)\omega_3 = n_{1o}\omega_{10} + n_{2o}\omega_{20} \quad (3)$$

晶体转动  $\Delta\theta$  要求还有满足相位匹配条件，即

$$\omega_3(n_{3e}(\theta_0) + \Delta n_3) = (\omega_{10} + \Delta\omega_1)(n_{1o} + \Delta n_1) + (\omega_{20} + \Delta\omega_2)(n_{2o} + \Delta n_2) \quad (4)$$

结合式(3)，并忽略二阶小量，得到

$$\Delta\omega_2 = \frac{\omega_3\Delta n_3 - \omega_{10}\Delta n_1 - \omega_{20}\Delta n_2}{n_{2o} - n_{1o}} \quad (5)$$

由于泵浦光  $\omega_3$  为 e 光，且频率不变，折射率  $n_3$  只随  $\theta$  变化

$$\Delta n_3 = \left. \frac{\partial n_{3e}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} \Delta\theta \quad (6)$$

信号光  $\omega_2$  和闲频光  $\omega_1$  为 o 光，折射率  $n_1$  和  $n_2$  与  $\theta$  无关，只与频率有关

$$\left. \begin{aligned} \Delta n_1 &= \left. \frac{\partial n_{1o}}{\partial \omega} \right|_{\omega_{10}} \Delta\omega_1 \\ \Delta n_2 &= \left. \frac{\partial n_{2o}}{\partial \omega} \right|_{\omega_{20}} \Delta\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入到式(5)中，注意到  $\Delta\omega_2 = -\Delta\omega_1$ ，得到

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} = \frac{\omega_3 \frac{\partial n_{3e}(\theta)}{\partial \theta}}{(n_{2o} - n_{1o}) + \left[ \omega_{20} \left( \frac{\partial n_{2o}}{\partial \omega} \right) - \omega_{10} \left( \frac{\partial n_{1o}}{\partial \omega} \right) \right]} \quad (8)$$

根据折射率椭球方程

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (9)$$

可以得到

$$\frac{\partial n_{3e}(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n_{3e}^3(\theta)}{2} \sin 2\theta \left[ \frac{1}{n_{3e}^2} - \frac{1}{n_{3o}^2} \right] \quad (10)$$

将式(10)代入到式(8)中得到角度调谐公式

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} = -\frac{\frac{1}{2} \omega_3 n_{3e}^3(\theta) \sin 2\theta \left[ \frac{1}{n_{3e}^2} - \frac{1}{n_{3o}^2} \right]}{(n_{2o} - n_{1o}) + \left[ \omega_{20} \left( \frac{\partial n_{2o}}{\partial \omega} \right) - \omega_{10} \left( \frac{\partial n_{1o}}{\partial \omega} \right) \right]} \quad (11)$$

4.解答:

对于由于温度引起的折射率的变化温度调谐作用, 理论推导分析仍然可以得到习题3中式(5)的结论, 折射率的变化

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= \left. \frac{\partial n_{1o}}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T \\ \Delta n_2 &= \left. \frac{\partial n_{2o}}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T \\ \Delta n_3 &= \left. \frac{\partial n_{3e}(\theta)}{\partial n_{3o}} \frac{\partial n_{3o}}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T + \left. \frac{\partial n_{3e}(\theta)}{\partial n_{3e}} \frac{\partial n_{3e}}{\partial T} \right|_{T_0} \Delta T \end{aligned}$$

将上式带入到习题3中式(5)中, 得到温度调谐公式

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial T} = \frac{\omega_3 \left[ \cos^2 \theta \left( \frac{n_{3e}(\theta)}{n_{3o}} \right)^3 \frac{\partial n_{3o}}{\partial T} + \sin^2 \theta \left( \frac{n_{3e}(\theta)}{n_{3e}} \right)^3 \frac{\partial n_{3e}}{\partial T} \right] - \omega_{10} \frac{\partial n_{1o}}{\partial T} - \omega_{20} \frac{\partial n_{2o}}{\partial T}}{(n_{2o} - n_{1o})}$$

5.解答:

(1) 对于第一类相位匹配的匹配公式为

$$n_e^{2\omega}(\theta_m) = n_o^\omega \quad (1)$$

又由非常光折射率  $n_e(\theta)$  与方向  $\theta$  的关系为

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (2)$$

所以对于二次谐波有

$$\frac{1}{[n_e^{2\omega}(\theta)]^2} = \frac{\cos^2 \theta}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^{2\omega})^2} \quad (3)$$

将式(1)代入上式, 即当满足相位匹配条件时, 有

$$\frac{1}{(n_o^\omega)^2} = \frac{\cos^2 \theta_0}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta_0}{(n_e^{2\omega})^2} \quad (4)$$

求解式(4), 得到负单轴晶体第一类相位匹配角的计算公式

$$\theta_0 = \arcsin \left[ \left( \frac{n_e^{2\omega}}{n_o^\omega} \right)^2 \frac{(n_o^{2\omega})^2 - (n_o^\omega)^2}{(n_o^{2\omega})^2 - (n_e^{2\omega})^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

对于KDP晶体，由色散公式利用Matlab程序计算可求得  $n_o^2(0.6944) = 2.2651$ ， $n_o^2(0.3472) = 2.3492$ ， $n_e^2(0.6944) = 2.1472$ ， $n_e^2(0.3472) = 2.2115$ ，将这些数值代入到式(4)中，得到KDP晶体第一类相位匹配角  $\theta_0 = 0.8822 \text{ rad} = 50.5480^\circ$ 。

## 第五章 四波混频与相位共轭

1. 光纤中的四波混频耦合波方程为

$$\frac{\partial A_3(z)}{\partial z} = i \frac{\omega_3}{8cn_3} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_p^2(0) A_4^*(z) \exp(-i\Delta kz)$$

$$\frac{\partial A_4(z)}{\partial z} = i \frac{\omega_4}{8cn_4} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_p^2(0) A_3^*(z) \exp(-i\Delta kz)$$

试求解此方程。

解答：在完全相位匹配条件下，即  $\Delta k = 0$ ，对耦合波方程各式两边再进行一次微商，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_3(z)}{\partial z^2} &= i \frac{\omega_3}{8cn_3} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_p^2(0) \frac{\partial A_4^*(z)}{\partial z} \\ &= \frac{\omega_3 \omega_4}{64c^2 n_3 n_4} \left| \chi_{\text{eff}}^{(3)} \right|^2 A_p^4(0) A_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_4(z)}{\partial z^2} &= i \frac{\omega_4}{8cn_4} \chi_{\text{eff}}^{(3)} A_p^2(0) \frac{\partial A_3^*(z)}{\partial z} \\ &= \frac{\omega_3 \omega_4}{64c^2 n_3 n_4} \left| \chi_{\text{eff}}^{(3)} \right|^2 A_p^4(0) A_4 \end{aligned}$$

令

$$K^2 = \frac{\omega_3 \omega_4}{n_3 n_4} \left| \frac{\chi_{\text{eff}}^{(3)} A_p^2(0)}{8c} \right|^2$$

则上两式可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2} - K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0$$

考虑边界条件  $A_3(0)$ ， $A_4(0)$

$$? \quad A_3(z) = ae^{kz} + be^{-kz}$$

$$? \quad A_4(z) = ce^{kz} + de^{-kz}$$

2. 人用相位共轭镜照着脸时将看到什么？

解答：相比于平面镜，相位共轭镜成像为左右互换，图像更为清晰。

[参考资料]：沉元壤. 非线性光学原理[M].

3. 试比较简并四波混频与全息术之间的异同点。

解答：简并四波混频相互作用可以理解为如下全息过程：三个入射光波中两个相互干涉，形成一个稳



定光栅，光栅中， $\vec{k}_1$  与  $\vec{k}_i$  光形成的光栅衍射光波  $\vec{k}_1'$ ，产生波矢为  $\vec{k}_s = \vec{k}_1' \pm (\vec{k}_1 - \vec{k}_i)$  的输出光波； $\vec{k}_1'$  与  $\vec{k}_i$  光形成的光栅衍射光波  $\vec{k}_1$ ，产生波矢为  $\vec{k}_s = \vec{k}_1 \pm (\vec{k}_1' - \vec{k}_i)$  的输出光波； $\vec{k}_1$  与  $\vec{k}_1'$  光形成的光栅衍射光波  $\vec{k}_i$ ，产生波矢为  $\vec{k}_s = \vec{k}_i \pm (\vec{k}_1 - \vec{k}_1')$  的输出光波。但是它们有根本区别。首先，普通全息记录过程是通过参考光和信号光干涉、对记录介质曝光，并调制其透明度实现的，所以参考光和信号光必须同频率，否则就会形成不稳定的运动光栅，在曝光过程中会将全息图擦除掉。而在四波混频中，相互作用的光波则不一定同频率。其次，在四波混频中，对光波的偏振状态没有特殊要求，而全息过程为了产生空间相干性，要求记录光同偏振。

可以将四波混频过程看作是一种实时的全息过程。在这种情况下，不仅要考虑全息光栅对再现参考光的衍射作用，而且还要考虑再现参考光、衍射光对全息光栅参量的影响。

[参考资料]石顺祥．非线性光学[M]．西安：西安电子科技大学出版社，2003．

#### 4.试说明相位共轭镜补偿单模光纤材料色散引起的脉冲展宽的机制。

解答：在反常色散光纤中传输的脉冲将在传输过程中产生负脉冲啁啾，即低频分量传输速度慢，将位于脉冲后沿，而高频分量则位于脉冲前沿。如果在整个光纤线路中点，利用FWM产生色散展宽脉冲的相位共轭脉冲，则获得的脉冲具有正的啁啾，其高频分量将位于脉冲后沿而低频分量位于前沿，该脉冲在经过另一半反常色散光纤传输后，其宽度将重新恢复到输入端水平。

## 第六章 受激光散射

1. 证明Raman增益  $g$  的谱宽(FWHM)  $\Delta\nu = \gamma/2\pi$

证明:

$$g(\omega_v) = \frac{\omega_s N \left( \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \right)^2}{8c^2 m \varepsilon_0^2 n_l n_s \omega_v} \frac{\gamma/2}{[\omega_v - (\omega_p - \omega_s)]^2 + \gamma^2/4}$$

令  $A = \frac{\omega_s N \left( \frac{\partial \alpha}{\partial Q} \right)^2}{8c^2 m \varepsilon_0^2 n_l n_s \omega_v}$ ,  $\omega_p - \omega_s = \omega_0$ , 则  $g(\omega_v)$  表达式化为

$$g(\omega_v) = A \frac{\gamma/2}{[\omega_v - \omega_0]^2 + \gamma^2/4}$$

很明显地看出  $g(\omega_v)$  为洛伦兹线形, 当  $\omega_v = \omega_0$  时,  $g(\omega_v)$  处在峰值处

$$g(\omega_0) = A \frac{2}{\gamma}$$

令

$$g(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega) = A \frac{\gamma/2}{(\frac{1}{2}\Delta\omega)^2 + \gamma^2/4} = \frac{1}{2} g(\omega_0) = A \frac{1}{\gamma}$$

则可以推出

$$\Delta\omega = \gamma$$

即

$$\Delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi}$$

2. 证明受激拉曼散射Stokes光和泵浦光的光强随距离变化的规律为

$$I_s(z) = \frac{K\omega_s}{1 + \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{I_p(0)}{I_s(0)} \exp(-g\omega_p Kz)}$$

$$I_p(z) = \frac{K\omega_p}{1 + \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{I_s(0)}{I_p(0)} \exp(g\omega_p Kz)}$$

其中  $K = \frac{I_p(0)}{\omega_p} + \frac{I_s(0)}{\omega_s}$

证明:

通过推导得到受激拉曼散射的耦合波方程为

$$\frac{\partial I_s(z)}{\partial z} = g I_p(z) I_s(z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial I_p(z)}{\partial z} = -\frac{\omega_p}{\omega_s} g I_p(z) I_s(z) \quad (2)$$

推导过程不再赘述。

将式(1)两边同时除以  $\omega_s$ , 将式(2)两边同时除以  $\omega_p$ , 后将两式相加得到

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I_p(z)}{\omega_p} + \frac{I_s(z)}{\omega_s} \right) = 0$$

从而得到光子数守恒关系

$$\frac{I_p(z)}{\omega_p} + \frac{I_s(z)}{\omega_s} = \frac{I_p(0)}{\omega_p} + \frac{I_s(0)}{\omega_s} = K \quad (3)$$

其中  $K$  为常数。

令  $\frac{I_p(z)}{\omega_p} = A$ ,  $\frac{I_s(z)}{\omega_s} = B$ , 将式(1)、(2)进一步变形为

$$\frac{\partial B}{\partial z} = g \omega_p A B \quad (4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -g \omega_p A B \quad (5)$$

解出(4)、(5)式得到

$$B = C_1 \exp(g \omega_p \int A dz) \quad (6)$$

$$A = C_2 \exp(-g \omega_p \int B dz) \quad (7)$$

其中  $C_1$ ,  $C_2$  为待定常数, 式(6)除以式(7)得到

$$\frac{B}{A} = C \exp(g \omega_p \int (A + B) dz) = C \exp(g \omega_p K z) \quad (8)$$

其中  $C = \frac{C_1}{C_2}$  为待定常数, 联系式(3), 得到

$$A = \frac{K}{1 + C \exp(g \omega_p K z)}$$

$$B = \frac{K}{1 + C' \exp(-g \omega_p K z)}$$

并且解得  $C = \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{I_s(0)}{I_p(0)}$ ,  $C' = \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{I_p(0)}{I_s(0)}$ 。将  $\frac{I_p(z)}{\omega_p} = A$ ,  $\frac{I_s(z)}{\omega_s} = B$  代入得到

$$I_s(z) = \frac{K\omega_s}{1 + \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{I_p(0)}{I_s(0)} \exp(-g\omega_p Kz)}$$

$$I_p(z) = \frac{K\omega_p}{1 + \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{I_s(0)}{I_p(0)} \exp(g\omega_p Kz)}$$

3.解释受激拉曼散射反斯托克斯光产生的两阶段理论。解释为什么反斯托克斯光产生必须满足相位匹配条件。

解答：一个泵浦光子与介质作用产生一个斯托克斯光子，介质处于振动激发态，另一个泵浦光子刺激介质跃迁回基态，同时产生一个反斯托克斯光子。受激拉曼散射是参量过程，要求满足相位匹配。

4.证明受激拉曼散射反斯托克斯光散射锥角公式

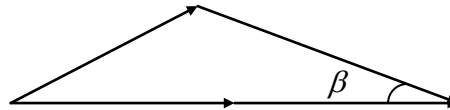
$$\beta = \left\{ \frac{1}{n_p} \frac{\omega_s}{\omega_p} \left[ n_{as} - n_s + \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_p} (n_{as} + n_s - 2n_p) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

证：

反斯托克斯光只有满足相位匹配条件下

$$\Delta \vec{k} = 2\vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_{as}$$

如图所示，



由图的矢量关系可得

$$\cos \beta = \frac{(2k_p)^2 + (k_{as})^2 - (k_s)^2}{4k_p k_{as}}$$

则根据  $k = \frac{n}{c} \omega$

$$\cos \beta = \frac{(2n_p \omega_p)^2 + (n_{as} \omega_{as})^2 - (n_s \omega_s)^2}{4n_p \omega_p n_{as} \omega_{as}}$$

又根据能量守恒定律

$$2\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_{as}$$

对于小角度

将  $\omega_{as} = 2\omega_p - \omega_s$  带入，并假设

5.对受激布里渊散射，由公式  $\Delta\omega = 2\omega_p \frac{n_p v_a}{c} \sin \frac{\theta}{2}$ ，散射频移  $\omega_p - \omega_s$  决定于泵浦光频率和散射角，而受

激拉曼散射频移相对固定，试解释之。

受激拉曼散射是由于分子内部的相对运动导致分子感生电偶极矩随时间产生周期性的调制，分子感生极化特性随时间周期性的变化，其频移量与分子内部结果有关，所以相对固定。受激布里渊散射是介质电质伸缩效应引起的声波引起介质折射率周期性调制

6.证明受激布里渊散射Stokes光和泵浦光的光强随距离的变化规律为

$$I_s(z) = \frac{K'}{\frac{I_p(0)}{I_s(0)} \exp(gK'z) - 1}$$

$$I_p(z) = \frac{K'}{1 - \frac{I_s(0)}{I_p(0)} \exp(-gK'z)}$$

其中  $K' = I_p(0) - I_s(0)$ 。

证明：

通过推导得到受激拉曼散射的耦合波方程为

$$\frac{\partial I_s(z)}{\partial z} = -gI_p(z)I_s(z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial I_p(z)}{\partial z} = -gI_p(z)I_s(z) \quad (2)$$

推导过程不再赘述。

将两式相减得到

$$\frac{\partial}{\partial z}(I_p(z) - I_s(z)) = 0$$

从而由  $\omega_s \approx \omega_p$  得到光子数守恒关系

$$I_p(z) - I_s(z) = I_p(0) - I_s(0) = K' \quad (3)$$

其中  $K'$  为常数。

解出得到

$$I_s(z) = C_2 \exp(-g \int I_p(z) dz) \quad (4)$$

$$I_p(z) = C_1 \exp(-g \int I_s(z) dz) \quad (5)$$

其中  $C_1$ ,  $C_2$  为待定常数, 式(4)除式(5)得到

$$\frac{I_p(z)}{I_s(z)} = C \exp(-g \int (I_s(z) - I_p(z)) dz) = C \exp(gK'z) \quad (6)$$

其中  $C = \frac{C_1}{C_2}$  为待定常数, 联系式(3), 得到

$$I_s = \frac{K'}{C \exp(gK'z) - 1}$$

$$I_p = \frac{K'}{1 - C' \exp(-gKz)}$$

并且解得  $C = \frac{I_p(0)}{I_s(0)}$ ,  $C' = \frac{I_s(0)}{I_p(0)}$ , 带入得到

$$I_s(z) = \frac{K'}{\frac{I_p(0)}{I_s(0)} \exp(gK'z) - 1}$$

$$I_p(z) = \frac{K'}{1 - \frac{I_s(0)}{I_p(0)} \exp(-gK'z)}$$