1、证：(1) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = ik_x f + ik_y f + ik_z f = i\vec{k} f$

(2) $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]}$ $\quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]} & E_y e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]} & E_z e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x\, i e^{[-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]} \left[(k_y E_z - k_z E_y)\vec{e}_x + (k_z E_x - k_x E_z)\vec{e}_y + (k_x E_y - k_y E_x)\vec{e}_z\right]$$

$$= i\vec{k} \times \vec{E}$$

1.2 ~~设 D_0', D_0'' 是~~

设 D', D'' 是对应同一个 $\vec{k}$ 的两个电磁波解

设原式 $= \vec{D}' \cdot \vec{D}''$ 即要证 $\vec{D}' \cdot \vec{D}'' = D_x' D_x'' + D_y' D_y'' + D_z' \cdot D_z''$

由 $D_i = \varepsilon_i E_i$ $\quad\therefore$ 原式 $= \varepsilon_x^2 E_x' E_x'' + \varepsilon_y^2 E_y' E_y'' + \varepsilon_z^2 E_z' E_z''$

又 $\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 [\vec{E} - \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E})]$ $\quad\therefore$ 即 $E_i = \frac{n^2 k_i (\vec{k}\cdot\vec{E})}{n^2 - n_i^2}$ （n 取 n' 或 n''）

因此原式 $= \frac{(n')^2 (n'')^2 n_x^4 k_x^4 (\vec{k}\cdot\vec{E}')\cdot(\vec{k}\cdot\vec{E}'')}{(n'^2 - n_x^2)(n''^2 - n_x^2)} + \underbrace{(\ \cdots\ )}_{\text{与前面的式子同理，将角标x换成y和z即可}}$

由菲涅耳方程我们知

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_i^2}} = 0$$

因此将原式 $= \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{\frac{1}{n''^2} - \frac{1}{n_i^2}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_i^2}}\right] (\vec{k}\cdot\vec{E}')(\vec{k}\cdot\vec{E}'') \left[\frac{n'^2 n''^2}{n''^2 - n'^2}\right]$

不难发现 $\left\{\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{\frac{1}{n''^2} - \frac{1}{n_i^2}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_i^2}}\right\}$ 这一项为 0

因此 原式 $= \vec{D}' \cdot \vec{D}'' = 0$

$\therefore D' \perp D''$

3、菲涅耳方程为 $\varepsilon_i E_i = \varepsilon_0 n_i^2 E_i = \varepsilon_0 n^2 [E_i - k_i(\vec{k}\cdot\vec{E})]$

整理有 $\frac{n^2 k_i(\vec{k}\cdot\vec{E})}{n^2 - n_i} = E_i$ 　　同乘 k_i

有 $\frac{n^2 k_i^2}{n^2 - n_i^2}(\vec{k}\cdot\vec{E}) = k_i E_i$

同时取 $i = 1, 2, 3$ 相加，有 $\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{n^2 - n_i^2} = \frac{1}{n^2}$

~~有~~ $\sum_{i=1}^{3} k_i E_i = \vec{k}\cdot\vec{E}$

对 $\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{n^2 - n_i^2} = \frac{1}{n^2}$ 是一个二次方程，

因此有两个解（最多），即两折射率 n'，n''

∴ n' 和 n'' 是两个本征值

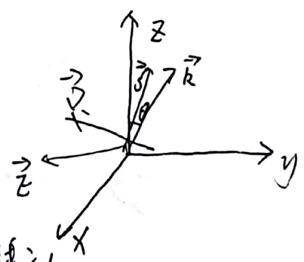
将 n' 和 n'' 代回 $\varepsilon_i E_i = \varepsilon_0 n^2 [E_i - k_i(\vec{k}\cdot\vec{E})]$ 中去

不难得到两个解 $\begin{cases} E_1' & E_2' & E_3' \\ E_1'' & E_2'' & E_3'' \end{cases}$ 　由 $D_i = \varepsilon_i E_i$

有 $\begin{cases} \vec{D}' = (D_1', D_2', D_3') \\ \vec{D}'' = (D_1'', D_2'', D_3'') \end{cases}$

1.4. 假设 z 轴是光轴，$\vec{k}$ 与 z 轴的夹角为 θ

$\vec{S}$ 与 z 夹角 θ'



由 $\begin{cases} \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} & \text{能流密度：波射线方向} \\ \vec{D}\times\vec{H} = \frac{H^2}{w}\vec{k} & \text{波法线方向} \end{cases}$

因此 $\vec{E}$ 与 xy 平面的夹角是 θ'，$\vec{D}$ 与 xy 平面的夹角是 θ

因此有 $\begin{cases} \tan\theta = \frac{D_x}{\sqrt{D_y^2 + D_z^2}} \\ \tan\theta' = \frac{E_z}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \end{cases}$

对单轴晶体 有 $D_i=\varepsilon_0 n_i^2 E_i$

对单轴晶体，用折射率椭球法我们知 $\frac{x^2+y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1$

$\therefore \cancel{\frac{D_z}{\sqrt{D_x^2+D_y^2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2(n_z^4 E_z^2)}{\varepsilon_0^2(n_x^4 E_x^2+n_y^4 E_y^2)}} = \frac{n_e^2 E_z}{n_o^2\sqrt{E_x^2+E_y^2}}$ $\therefore \tan\theta=\tan\theta'\frac{n_o^2}{n_e^2}$

$$\tan\alpha=\tan(\theta-\theta')=\frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'}$$ (二角和差)

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{n_o^2\sin\theta}{n_e^2\cos\theta}}{1-\frac{n_o^4}{n_e^4}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\left(\frac{n_e^2-n_o^2}{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}\right)(\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n_e^2-n_o^2}{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}\sin2\theta$$ (倍角公式)

(1) ① $\hat{k}$ // 光轴，有 $\theta=0$ $\tan\alpha=0$ $\therefore \theta=\theta'+k\pi$ $\therefore \vec{D}$ 平行 $\vec{E}$

② $\hat{k}\perp$ 光轴，有 $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \tan\alpha=0$ $\therefore \theta=\theta'+k\pi$ $\therefore \vec{D}$ 平行于 $\vec{E}$

(2) 由于 θ 为 $\hat{k}$ 与光轴的夹角，$\therefore \theta\in[0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \sin2\theta\in[0,1]$

又 $\frac{1}{2(n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta)}\geq0$ $\therefore \tan\alpha$ 的正负性与 $(n_e^2-n_o^2)$ 一致

$\therefore$ 对正单轴晶体 $(n_o<n_e)$ $n_e^2-n_o^2>0$ $\therefore \tan\alpha>0$ $\therefore \alpha>0$

对负单轴晶体 $(n_o>n_e)$ $n_e^2-n_o^2<0$ $\therefore \tan\alpha<0$ $\therefore \alpha<0$

(3) 令 $f(\theta)=\frac{1}{2}\frac{n_e^2-n_o^2}{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}\sin2\theta$ (三角证明方法见背面)

当 $\theta=\arctan\frac{n_e}{n_o}$ 时，$f'(\theta)=0$，且 $\begin{cases} f'(\theta)>0 & (\theta<\arctan\frac{n_e}{n_o}) \\ f'(\theta)<0 & (\theta>\arctan\frac{n_e}{n_o}) \end{cases}$

因此当 $\tan\theta=\frac{n_e}{n_o}$ 时，$\alpha=\alpha_{max}=\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{n_e^2-n_o^2}{n_on_e}\right)$

① 对石英：$\alpha_{max}=\arctan\left[\frac{1}{2}\times\frac{1.553^2-1.544^2}{1.553\times1.544}\right]=0.0058$ 正单轴晶体

② 对方解石：$\alpha_{max}=\arctan\left[\frac{1}{2}\times\frac{1.486^2-1.658^2}{1.486\times1.658}\right]=-0.1093$ 负单轴晶体

5. (1) 惠更斯作图法

用途：用惠更斯原理来描述光在晶体中的双折射现象

(2) 折射率椭球——图示法

利用折射率椭球判断折射率本征值，以及寻求两个特征的偏振方向

各向同性：$\frac{x^2+y^2+z^2}{n^2}=1$ (球)

单轴晶体 $\frac{x^2+y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1$ (旋转椭球)

双轴晶体 $\frac{x^2}{n_1^2}+\frac{y^2}{n_2^2}+\frac{z^2}{n_3^2}=1$

折射率椭球用法：当给定传播方向 $\hat{k}$，做通过椭球中心与传播方向垂直的平面(相交椭圆)，此相交椭圆的长短轴半轴等于特征折射率 n' 和 n''，长短轴的方向即为偏振方向 $\vec{D'}$ 和 $\vec{D''}$ 方向

(3) 折射率曲面——图示法

任给一个传播方向 $\hat{k}(\theta,\phi)$，定义 $\vec{r}=n(\theta,\phi)\hat{k}$ 端点构成的曲面，这应该是双层曲面

对于单轴晶体，折射率曲面：

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)}=\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}$$

6、由题目我们知，GaAs是立方晶系，其线性电光系数为：

$$(\gamma_{mk})=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\gamma_{41}&0&0\\0&\gamma_{41}&0\\0&0&\gamma_{41}\end{bmatrix}$$

GaAs晶体折射率椭球为球形

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{n^2}=1 \quad 或 \quad B_{11}^0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=1$$

当施加外电场 $\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)^T$ 后，晶体逆介电张量发生改变

$$\begin{bmatrix}\Delta B_1\\\Delta B_2\\\Delta B_3\\\Delta B_4\\\Delta B_5\\\Delta B_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\gamma_{41}&0&0\\0&\gamma_{41}&0\\0&0&\gamma_{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\E_1\gamma_{41}\\E_2\gamma_{41}\\E_3\gamma_{41}\end{bmatrix}$$

则折射率椭球方程变为：

$$B_{11}^0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2\gamma_{41}E_1x_2x_3+2\gamma_{41}E_2x_1x_3+2\gamma_{41}E_3x_1x_2=1 \quad ①$$

式中有了交叉项，说明主轴发生了变化——

现讨论GaAs晶体正向电光效应，外电场变为 $\vec{E}=(0,0,E_3)$，①式变为

$$B_{11}^0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2\gamma_{41}E_3x_1x_2=1 \quad ②$$，交叉项仍存在

我们现寻找新的主轴 $x_1'-x_2'-x_3'$，绕 x_3 轴逆时针 $45°$ 得到
（迎 x_3 轴看）

$$\begin{cases}x_1=x_1'\cos\frac{\pi}{4}-x_2'\sin\frac{\pi}{4}\\x_2=x_1'\sin\frac{\pi}{4}+x_2'\cos\frac{\pi}{4}\\x_3=x_3'\end{cases}$$

代入②式有 $(B_{11}^0+\gamma_{41}E_3)x_1'^2+(B_{11}^0-\gamma_{41}E_3)x_2'^2+B_{11}^0x_3'^2=1$

可以看到已经没有交叉项了，$x_1'-x_2'-x_3'$ 就新主轴，可以写成

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2}+\frac{x_2'^2}{n_2'^2}+\frac{x_3'^2}{n_3'^2}=1$$

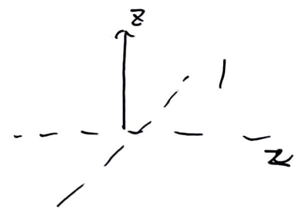
其中
$$\begin{cases} \frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n^2} + \gamma_{41} E_3 = \frac{1}{n^2}(1+n^2\gamma_{41}E_3) \\ \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n^2} - \gamma_{41} E_3 = \frac{1}{n^2}(1+n^2\gamma_{41}E_3) \\ \frac{1}{n_3'^2} = \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

又 $\gamma_{41} =$ $n =$ 所以 $n^2\gamma_{41}E \ll 1$，近似有

$$\begin{cases} n_1' = n(1+n^2\gamma_{41}E_3)^{-\frac{1}{2}} = n - \frac{1}{2}n^3\gamma_{41}E_3 \\ n_2' = n(1-n^2\gamma_{41}E_3)^{-\frac{1}{2}} = n + \frac{1}{2}n^3\gamma_{41}E_3 \\ n_3' = n \end{cases}$$

可见，GaAs晶体加纵向电场后，由立方晶体变为了双轴晶体

7.(1) 两个二阶轴在电光效应中不对称



若令 1轴为x轴，2轴为y轴，其纵向电光系数为 γ_{63}

若令 2轴为x轴，1轴为y轴，其纵向电光系数为 γ_{63}'

以上两种坐标轴假设可以通过

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 来变换，同时，

电光张量的矩阵元也应做相应的变~~换~~换，由张量变换关系

$\chi'_{ijk} = T_{il} T_{jm} T_{kn} \chi_{lmn}$，有

$$\gamma_{63}' = -\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_1'\varepsilon_1'}\chi'_{123} = -\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_2\varepsilon_1}(T_{11}T_{22}T_{33}\chi_{123} + T_{12}T_{21}T_{33}\chi_{213})$$

$$= \frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_2\varepsilon_1}\chi_{213} = -\gamma_{63}$$

则我们会得到，若x-y轴采用第二种选取会有

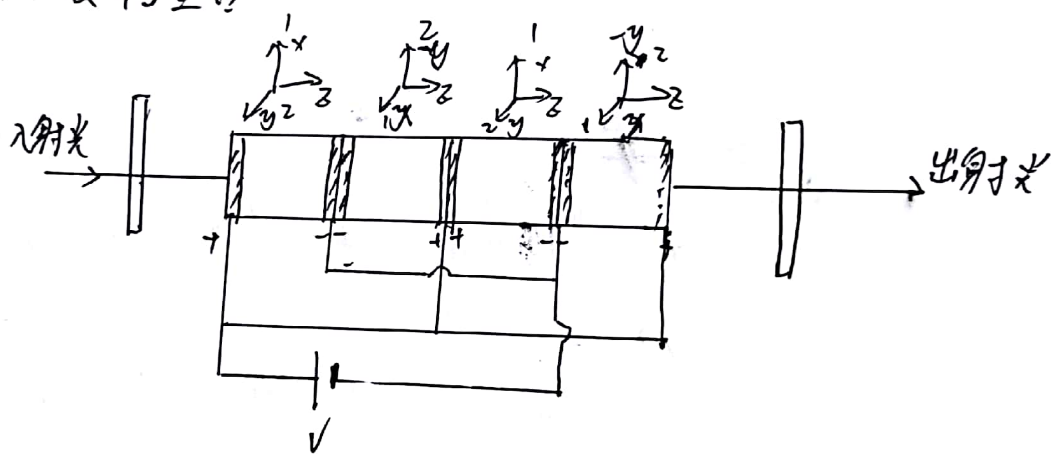
$$\frac{x^2+y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}-2\gamma_{63}E_{xy}=1$$

令 $\alpha=45°$ 顺时针旋转，经计算得：

在z轴正向加电场E后，快轴是z轴顺时针旋转45°得到的

详谬得解，其两个二阶轴是不对称的

(2) 解决方法之一就是将N个KDP晶体串联起来，以1/N倍的外电加电压可以获得同样的x′,y′间相位延迟。由于晶体的两个二阶轴的地位不对等，在串联时应注意将相邻晶体相同的二阶轴成90°角放置，如图所示，这样加压后才能使各晶体的快、慢轴重合



(3) 书中电光调制装置中，其中1/4波片的作用在于：为了使此装置能在透射系数的线性区(图中b点)进行电光调制又不希望加直流偏置电压 $V_\pi/2$，等效地可以加个1/4波片以补偿一个 $\pi/2$ 的相位延迟使总相位延迟 $\Gamma=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi V}{V_\pi}$。但由于书中快慢轴是错误的，相位补偿延迟为 $-\frac{\pi}{2}$，总相位延迟为 $\Gamma=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi V}{V_\pi}$，电光调制点移到了透射系数的线性区b点，造成调制电压与输出信号反相。