实　验　报　告

实验地点		学生姓名	WJT
实验日期	2021 年 11 月 1 日　第 7、8 节	学院	数学与统计学院
实验课程	数值逼近	学号	
实验项目	Hermite 插值	成绩	

一、实验目的或要求

1、代码复现 Hermite 插值

2、创新点

二、实验过程记录

（一）Hermite 插值的实现

1、基础理论

对于一般 Hermite 插值，给定结点 $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k$ 和大于 1 的正整数 $m_0, m_1, ..., m_k$，求次数不超过 $N = m_0 + m_1 + ... + m_k - 1$ 的多项式 $p(x)$，使它在每个结点 $x_i (i = 0,1,...,k)$ 处，分别满足条件：

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), j = 0,1,...,m_i - 1$$

其插值公式可表示为：

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{A(x)}{(x-x_i)^{m_i}} f^{(j)}(x_i)\frac{(x-x_i)^j}{j!}\left\{\frac{(x-x_i)^{m_i}}{A(x)}\right\}_{x_i}^{(m_i-j-1)}$$

2、代码实现

①泰勒展开函数

```
def taylor_expan(func,xx,num_terms):
        '''
        泰勒展开函数
        func:符号变量函数，自变量为x
        num_terms:展开的次数
        xx:展开的位置
        '''
        x = sym.Symbol('x')
        sums = 0
        for i in range(num_terms+1):
            # 求i次导数
            numerator = func.diff(x,i)
            # 导数在xx点的值（泰勒展开分子）
            numerator = numerator.evalf(subs={x:xx})
            # i的阶乘
            denominator = np.math.factorial(i)
            # 累加项
            sums += numerator/denominator*(x-xx)**i
        return sums
```

② $A(x)$

```python
def A_(x,X,m):
    '''
    x:符号变量
    X:插值节点
    m:给定的mi阶导信息
    '''
    x = sym.Symbol('x')
    out = 1
    for i,mi in enumerate(m):
        out *= (x-X[i])**mi
    return out
```

③Hermite 插值函数

```python
def hermite(x_i,X,Y):
    '''
    x_i:待插值节点
    X:插值节点
    Y:插值节点值
    '''
    x_i = np.array(x_i)
    X = np.array(X)
    Y = np.array(Y)
    # 插值点数
    k = len(X)
    # 给定的mi阶导信息
    flag = np.isnan(Y)==False
    m = flag.sum(axis=0)
    # 求mi-j-1阶泰勒展开
    x = sym.Symbol('x')
    A = A_(x,X,m)
    hermite_out = 0
    for i in range(k):
        for j in range(m[i]):
            func_1 = A/(x-X[i])**m[i]
            func_2 = (x-X[i])**m[i]/A
            taylor = taylor_expan(func_2,X[i],m[i]-j-1)
            fji = Y[j,i]
            hermite_out += func_1*fji*(x-X[i])**j/np.math.factorial(j)*taylor
    out = sym.lambdify('x', hermite_out, "numpy")
    return out(x_i)
```

3、具体实例

对于 $f(x)=e^x+\sin x$，已知在 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$ 处：

$$[f(x_0), f(x_1), f(x_2)]=[3.55975281,\ 8.29835353,\ 20.22665693]$$

$$[f'(x_0), f'(x_1), f'(x_2)]=[3.25858413,\ 6.97290926,\ 19.09554443]$$

$$[f''(x_0), f''(x_1)]=[1.87681084,\ 6.47975867]$$

$$f'''(x_1)=2.17797952$$

则根据此信息对函数在 $[1,7]$ 均匀取 10 个点进行插值得到：

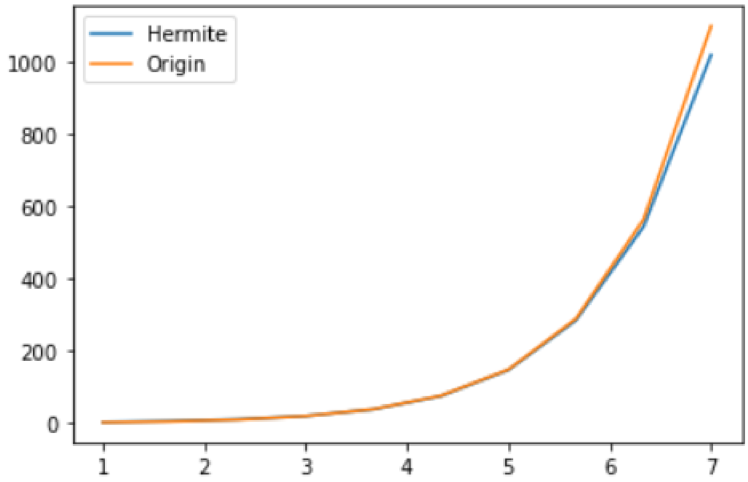
```
[15]: x

[15]: array([1.        , 1.66666667, 2.33333333, 3.        , 3.66666667,
       4.33333333, 5.        , 5.66666667, 6.33333333, 7.        ])

[14]: y

[14]: array([   3.55975281,    6.28989822,   11.0353435 ,   20.22665693,
          38.61797862,   75.21009634,  146.82031493,  284.31310974,
         542.78081779, 1017.23888306])
```

函数作图得到：



其中，黄色线为原函数曲线，蓝色线为插值曲线。

四、实验结果报告及总结

Hermite 插值由于考虑到了导数信息，因此比牛顿插值法效果更优良，但是插值函数的次数增加，复杂度变高。

实验结果反思及讨论：

教师对报告的最终评价和意见: 年　　月　　日