实　验　报　告

实验地点		学生姓名	WJT
实验日期	2021 年 10 月 18 日　第 78 节	学院	数学与统计学院
实验课程	数值逼近	学号	
实验项目	Lagrange 插值	成绩	

一、实验目的或要求

1、代码实现 lagrange 插值

2、找出创新点

二、实验过程记录

（一）实现 lagrange 插值

1、代码

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def lagrange(x,X,Y):
    if len(X) != len(Y):
        raise ValueError("输入的插值节点X变量与Y变量长度不对应！")
    if type(x)==int:
        x = [x]
    Y = np.array(Y)
    n = len(X)
    y = []
    # 求所有待估计点
    for xi in x:
        # 定义l保存l_1,l_2,...l_n
        l = np.ones(n)
        for i in range(n):
            for ii in range(n):
                if i != ii:
                    l[i] = l[i]*(xi-X[ii])/(X[i]-X[ii])
        yi = Y@l
        y.append(yi)
    y = np.array(y)
    return y
```

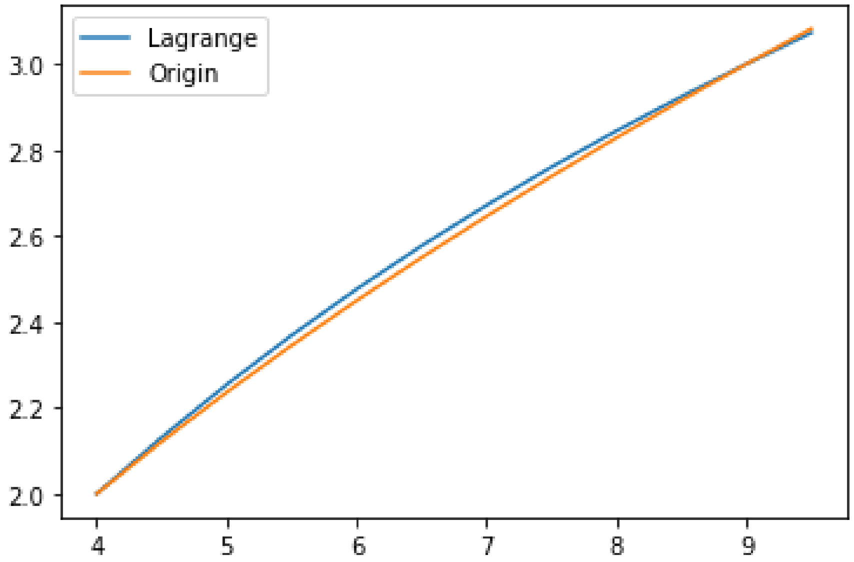
2、运行实例

对 $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9, x_3 = 16; y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4;$ 带入代码中进行插值并带入

$4, 4.5, 5 \ldots 9, 9.5$ 进行求解得到如下结果：

```
print(y)
✓ 0.4s
[2.         2.13125    2.25396825 2.36875    2.47619048 2.57688492
 2.67142857 2.76041667 2.84444444 2.92410714 3.         3.07271825]
```

由于插值节点取值来自函数 $y=\sqrt{x}$ ，因此将插值点与真实点作图，得到如下结果：



（二）我的创新点

1、创新点 1

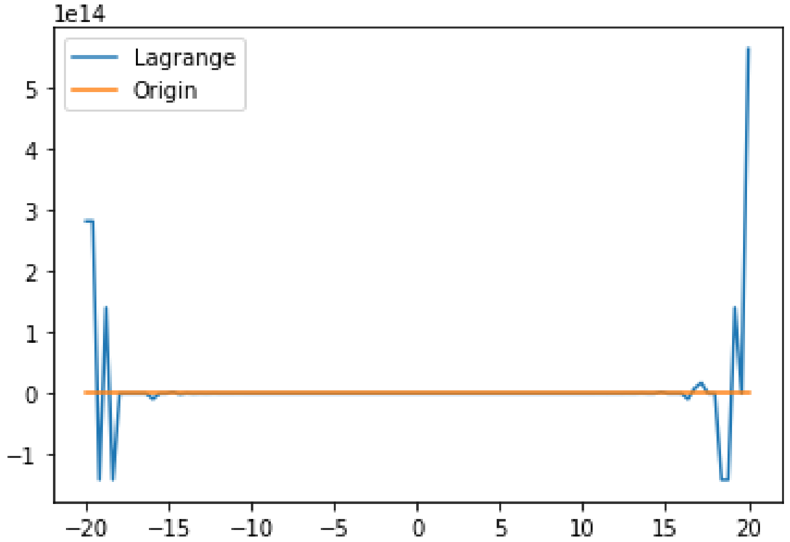
经过多次实验发现：当在插值节点数一定时，插值节点的分散程度越大，最后得到的插值函数的拟合程度越好，并且龙格现象越不易发生。

如：

插值节点数固定为 10

插值节点取点范围为：[-1, 1]均匀取点

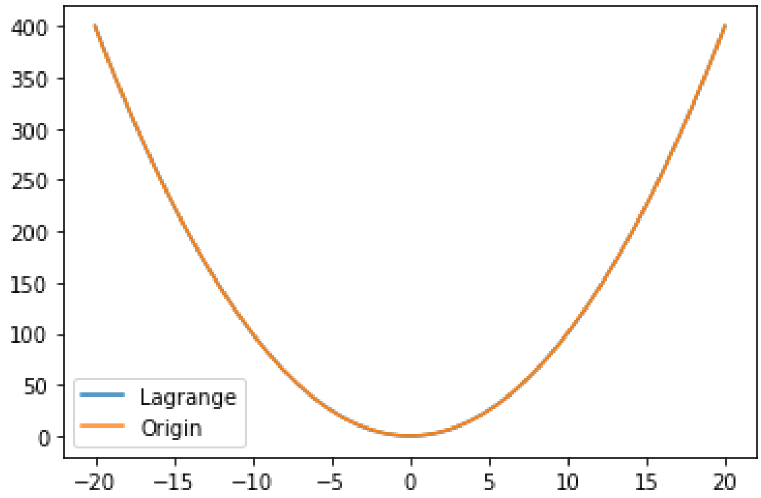
插值结果如下：



插值节点数固定为 10

插值节点取点范围为：[-5, 5]均匀取点

插值结果如下：



可以看到当插值节点在[-5,5]时，插值函数在[-20,20]内与原函数的拟合程度便非常高。

2、创新点 2

如何在插值节点为固定数时，选取满足拟合精度的插值范围呢？

我设计了一个代码，用来判断在插值节点数一定时，如何选取最少的插值节点范围使得它满足拟合精度ε。

①代码

```
num_cha = 100
range_cha = 1
X = np.linspace(-range_cha,range_cha,num_cha)
Y = X**2
x = np.linspace(-20,20,100)
y = lagrange(x,X,Y)
y_real = x**2
error_max = abs(y-y_real).max()
for num in range(100):
    range_cha=20
    for rg in range(20):
        X = np.linspace(-(range_cha-rg),range_cha-rg,num_cha-num)
        Y = X**2
        y = lagrange(x,X,Y)
        error_max = abs(y-y_real).max()
        if error_max>0.1:
            print('插值节点数：',num_cha-num,'插值节点范围：',range_cha-rg)
            break
```

②实现的结果

在对于将插值点数初始化为某一较大的值，对每一个插值点数，进一步分析：

从插值节点的取值范围为总定义区间开始，在满足我们要求的拟合精度的情况下递减两侧区间，当区间递减为再递减就不满足精度的时候，此区间为我们所允许的拟合精度下的最小插值区间。这里，拟合精度指插值函数与原函数在定义区间内的最大差值，即：

$$\varepsilon = \max\{|y - y_{real}|\}$$

其中，y为带入插值函数得到的值，y_{real}为真实值。

以对函数$y = x^2$为例，将函数的值插值节点从 50 递减，待插值点的取值范围为[-20,20]，则在满

足精度$\varepsilon < 0.1$的前提下，插值点的最小取值范围[-a,a]如下：

```
插值节点数： 50 a： 19
插值节点数： 49 a： 19
插值节点数： 48 a： 19
插值节点数： 47 a： 19
插值节点数： 46 a： 19
插值节点数： 45 a： 19
插值节点数： 44 a： 18
插值节点数： 43 a： 18
插值节点数： 42 a： 18
插值节点数： 41 a： 18
插值节点数： 40 a： 17
插值节点数： 39 a： 17
插值节点数： 38 a： 17
插值节点数： 37 a： 17
插值节点数： 36 a： 16
插值节点数： 35 a： 16
插值节点数： 34 a： 16
插值节点数： 33 a： 15
插值节点数： 32 a： 15
插值节点数： 31 a： 14
插值节点数： 30 a： 14
插值节点数： 29 a： 13
插值节点数： 28 a： 13
插值节点数： 27 a： 13
插值节点数： 26 a： 11
插值节点数： 25 a： 11
插值节点数： 24 a： 11
插值节点数： 23 a： 10
插值节点数： 22 a： 9
插值节点数： 21 a： 8
插值节点数： 20 a： 8
插值节点数： 19 a： 7
插值节点数： 18 a： 6
插值节点数： 17 a： 5
插值节点数： 16 a： 4
插值节点数： 15 a： 3
插值节点数： 14 a： 3
插值节点数： 13 a： 2
插值节点数： 12 a： 1
插值节点数： 11 a： 1
插值节点数： 2 a： 20
插值节点数： 1 a： 20
```

实验结果反思及讨论：

1、实现了基本的 lagrange 函数的插值工作；

2、讨论了何时会出现龙格现象以及如何避免龙格现象的产生；

3、在插值节点数一定的情况下量化给出了最小插值节点的取值坐标范围；

4、存在的问题是，在取值范围内的插值节点是平均选取的，在实际中可能并不能均匀选取。
教师对报告的最终评价和意见: 年　　月　　日