Universidade Federal do Rio Grande do Norte - DIMAP

Cálculo Numérico
U4 – Interpolação Polinomial

Antonio Carlos Gay Thomé

Introdução

Interpolar uma função ***f(x)*** consiste em aproximar esta função por outra função ***g(x)***, escolhida *a priori* dentre uma classe de funções, que satisfaça algumas propriedades.

A função ***g(x)*** é então usada em substituição à ***f(x)***.

Esta estratégia faz-se necessária, por exemplo, quando:

1. São conhecidos somente os valores numéricos de f(x) para um conjunto de pontos e precisa-se calcular o valor da função em pontos não tabelados;
2. A função f(x) tem uma expressão muito complexa ou mesmo desconhecida.

Introdução

Exemplo:

Suponha que temos uma tabela com os seguintes valores:

Temperatura	20	25	30	35	40	45	50
Calor Específico	0,99907	0,99852	0,99826	0,99818	0,99828	0,99849	0,99878

E precisamos encontrar:

1. O Calor Específico para a temperatura de 32,5ºC e
2. A temperatura onde o Calor Específico seja 0,99837

Conceito de Interpolação

Considerando serem conhecidos (n+1) pontos *distintos* $x_0, x_1 \dots x_n$, *nós da interpolação*, e os correspondentes valores de ***f(x)***.

Interpolar é obter uma função $g(x) \neq f(x)$ tal que:

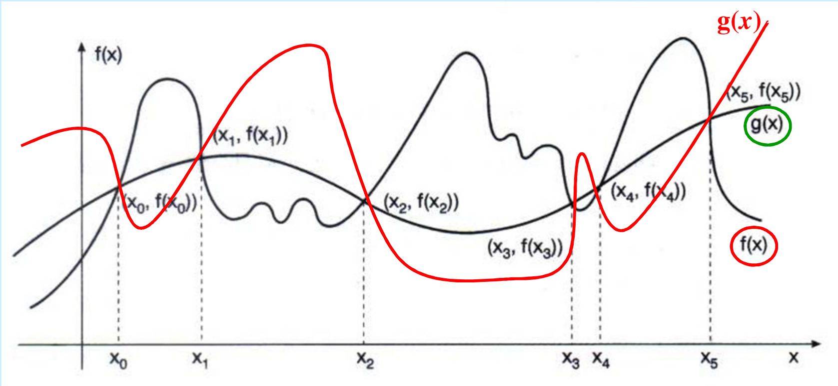
$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Igual a f(x) em cada um dos pontos conhecidos

Cálculo Numérico

Conceito de Interpolação

Exemplo: conhecidos 6 pontos de f(x) podemos ter g(x) como



*Embora **g(x)** possa ser de qualquer tipo, consideraremos apenas os casos em que ela seja do tipo **polinomial**.*

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Dado n+1 pontos de $f(x)$

$$(x_0,f(x_0)),\ (x_1,f(x_1))\ \ldots\ (x_n,f(x_n))$$

g(x) será um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$\boxed{p_n(x_k) = f(x_k),\quad k = 0 \ldots n}$$

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Questões:

1. Existe sempre um polinômio que satisfaça estas condições?
2. Caso exista, ele será único?

Seja $p_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Assim, encontrar $p_n(x)$ é achar os coeficientes

$$\boxed{a_0, a_1, a_2, ..., a_n}$$

Considerando os pontos conhecidos: $x_0 ... x_n$

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Da condição $p_x(x_k) = f(x_k)$ monta-se o seguinte Sistema de Equações Lineares:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

n + 1 equações com n + 1 incógnitas: $a_0 ... a_n$

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Matricialmente temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

"A" é uma matriz de Vandermonde e assim, desde que x_0, x_1, ..., x_n sejam pontos distintos o **det(A) $\neq$ 0** e o

Sistema admite Solução Única

Cálculo Numérico

Matriz de Vandermonde

Matriz de Vandermonde é toda matriz quadrada de ordem n x n, que apresente a seguinte forma geral:

$$M = \begin{pmatrix} a_1{}^0 & a_2{}^0 & a_3{}^0 & \dots & a_n{}^0 \\ a_1{}^1 & a_2{}^1 & a_3{}^1 & \dots & a_n{}^1 \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 & \dots & a_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1{}^{n-1} & a_2{}^{n-1} & a_3{}^{n-1} & \dots & a_n{}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = M^T}$$

onde a primeira linha é unitária, a segunda linha é composta de valores básicos e, a partir desta, as demais são compostas pelos mesmos valores básicos elevados de 2 a n.

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial – Cálculo de $p_n(x)$

O cálculo de $p_n(x)$ pode ser feito por *qualquer dos métodos* usados para Solução de Sistemas Lineares vistos na unidade anterior e, também, pelas formas de *Lagrange* e de *Newton*, que serão vistas nesta unidade.

A escolha do método depende de condições como a estabilidade do sistema, do custo computacional, do tempo de processamento e etc.

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial – Cálculo de $p_n(x)$

Exemplo:

x	–1	0	2
f(x)	4	1	–1

Temos que $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$;

$p_2(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$
$p_2(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 = 1$
$p_2(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1.$

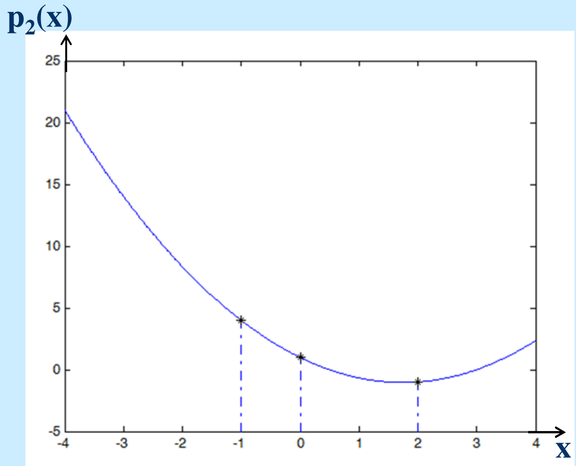
Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$a_0 = 1, \quad a_1 = -7/3 \quad e \quad a_2 = 2/3.$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial – Cálculo de $p_n(x)$



Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial – Cálculo de $p_n(x)$

A resolução do sistema nem sempre é fácil, uma vez que a matriz "A" pode ser *mal condicionada*.

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	–4	–8

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Det(A)} = 1.2*10^{-5}}$

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial – Cálculo de $p_n(x)$

Utilizando aritmética de ponto flutuante com 3 casas decimais e o método de Eliminação de Gauss obtém-se:

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	−4	−8
$p_3(x)$	4.830	12.640	-4.590	-8.880

Erros de arredondamento

Cálculo Numérico

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, \ldots x_n$ $(n + 1)$ pontos distintos e

$y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots n$ os respectivos valores de f(x)

Segundo Lagrange, $p_n(x)$ pode ser obtido a partir de:

$$p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x)$$

onde cada $L_k(x)$ é um polinômio de grau **n** e a condição $p_n(x_i) = y_i$ é satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \ldots + y_nL_n(x_i)$$

Cálculo Numérico

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

A forma mais simples de satisfazer o requisito é fazer:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}$$ e, para isso, definimos $L_k(x)$ por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ \dots\ (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ \dots\ (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ \dots\ (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ \dots\ (x_k - x_n)}$$

É fácil verificar que realmente

$L_k(x_k) = 1$ e
$L_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$.

17 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Uma vez que o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma: $(x - x_i)$, $i = 0 \dots n$, $i \neq k$

então

$L_k(x)$ é um polinômio de grau "n" e, assim, **$p_n(x)$** também é um polinômio de grau igual ou menor que "n"

E, para $x = x_i$ temos: $$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

18 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Polinômio interpolador de ***Lagrange***:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)}$$

"*Embora o método receba o nome de Joseph Louis* ***Lagrange****, que o publicou em* ***1795****, ele foi descoberto em* ***1779*** *por Edward Waring e também é facilmente deduzível a partir de uma fórmula publicada em* ***1783*** *por Leonhard Euler.*"

onde

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Exemplo: Interpolação Linear

A interpolação em dois pontos distintos $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1,f(x_1))$ é chamada de interpolação linear.

Usando a forma de Lagrange, teremos:

$p_1(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$, onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Assim, $p_1(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$, ou seja,

$$\boxed{p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)}}$$

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Exercício:

Pontos dados:

x	0.0	0.2	0.4
$f(x)$	4.00	3.84	3.76

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.6x+0.08)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)} = \frac{-1}{0.04}(x^2-0.4x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)} = \frac{1}{0.08}(x^2-2.6x)$$

$$\boxed{p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)}$$

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Exercício:

$$\boxed{p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)}$$

$$p_2(x) = 4\frac{(x^2 - 0.6x + 0.08)}{0.08} - 3.84\frac{(x^2 - 0.4x)}{0.04} + 3.76\frac{(x^2 - 0.2x)}{0.08}$$

$$0.08p_2(x) = 4x^2 - 2.4x + 0.32 - 7.68x^2 + 3.072x + 3.76x^2 - 0.752x$$

$$\boxed{\mathbf{p_2(x) = x^2 - x + 4}}$$

Cálculo Numérico

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Exemplo: Interpolação

Pontos de f(x)

x	−1	0	2
f(x)	4	1	−1

n = 2

$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\,(x-2)}{(-1-0)\,(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\,(x-2)}{(0+1)\,(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\,(x-0)}{(2+1)\,(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}.$$

Cálculo Numérico

Cálculo de $p_n(x)$ – Método de Lagrange

Exemplo: Interpolação

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right).$$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

(*) Mesma solução encontrada pelo método de Eliminação de Gauss.

Método de Newton

O polinômio interpolador no método de Newton é baseado nos operadores de diferenças divididas.

Operadores de Diferenças Divididas

Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Por definição tem-se que:

Usa o operador de ordem zero

$$f[x_k] = f(x_k)$$

Operador de *ordem zero* em x_k

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_k] - f[x_{k+1}]}{x_k - x_{k+1}}$$

Operador de *ordem um* em x_k e x_{k+1}

Método de Newton

Usa o operador de ordem um

Operadores de Diferenças Divididas

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_k - x_{k+2}}$$

Operador de *ordem dois* em x_k, x_{k+1} e x_{k+2}

E assim, de forma análoga, temos que o operador de ordem n nos pontos $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}$ é dado por:

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}] = \frac{f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-1}] - f[x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}]}{x_k - x_{k+n}}$$

Usa o operador de ordem k+n-1

Método de Newton

Operadores de Diferenças Divididas

A forma de cálculo desses operadores é construtiva, isto é, para obter a diferença dividida de ordem n necessitamos das diferenças divididas de ordem $n - 1$, $n - 2$, . . . , 1, 0.

x	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\cdots$	$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}]$
x_0	f_0				
		$> \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$			
x_1	f_1		$> \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2}$		
		$> \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$			
x_2	f_2		$> \frac{f[x_1,x_2] - f[x_2,x_3]}{x_1 - x_3}$		
		$> \frac{f_2 - f_3}{x_2 - x_3}$			$> \frac{f[x_0,\ldots,x_{n-1}] - f[x_1,\ldots,x_n]}{x_0 - x_n}$
x_3	f_3		$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$				
x_{n-1}	f_{n-1}				
		$> \frac{f_{n-1} - f_n}{x_{n-1} - x_n}$			
x_n	f_n				

Tabela para cálculo

Método de Newton

Construção do polinômio interpolador

Dado o conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, onde se conhece os valores da função $f(x)$, $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

1. Calculando a diferença dividida de <u>*ordem dois*</u> entre os pontos x, x_0 *e* x_1 temos:

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

2. Isolando a diferença de <u>*ordem um*</u> que depende de x temos:

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

Cálculo Numérico

Método de Newton

Construção do polinômio interpolador ...

3. Aplicando a definição de diferença de *ordem um* no primeiro termo temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1].$$

4. Isto implica em:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1] = p_1(x) + E_1(x).}$$

$f(x)$ é igual ao polinômio de grau um, $\mathbf{p_1(x)}$, mais uma função $\mathbf{E_1(x)}$, que depende da diferença dividida de *ordem dois* (podemos dizer que a função $f(x)$ é aproximada por $p_1(x)$ com erro de $E_1(x)$).

Cálculo Numérico

Método de Newton

Construção do polinômio interpolador ...

$p_1(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$, nos pontos x_0, x_1, pois satisfaz a condição de interpolação, ou seja:

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= f(x_0) + (x_0 - \cancelto{0}{x_0}) f[x_0, x_1] + (x_0 - \cancelto{0}{x_0})(x - x_1) f[x, x_0, x_1] \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0) f[x_0, x_1] + (x_1 - x_0)(x - \cancelto{0}{x_1}) f[x, x_0, x_1] \\ &= f(x_0) + (x_1 - x_0) \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \\ &= f(x_1) \end{aligned}$$

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

Método de Newton

Construção do polinômio interpolador ...

De forma análoga, podemos calcular a diferença dividida de ordem n, sobre os pontos x, x_0, x_1, . . . , x_n, obtendo:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x).$$

onde

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \\ &\quad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1 \ldots, x_n] \\ E_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

$p_n(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ sobre os pontos x_0, x_1, . . . x_n e o erro é dado por $E_n(x)$.

Método de Newton

Exemplo:

x	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	0.0000	1.1487	2.7183	4.9811

Montando a tabela das diferenças divididas

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, .., x_{k+2}]$	$f[x_k, .., x_{k+3}]$
0.0	<u>0.0000</u>			
		<u>2.2974</u>		
0.5	1.1487		<u>0.8418</u>	
		3.1392		<u>0.36306</u>
1.0	2.7183		1.3864	
		4.5256		
1.5	4.9811			

e

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) + x - x_0 f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &= 0.00 + (x - 0.0)2.2974 + (x - 0.0)(x - 0.5)0.8418 + (x - 0.0)(x - 0.5)(x - 1.0)0.36306 \\ &= 2.05803x + 0.29721x^2 + 0.36306x^3 \end{aligned}$$

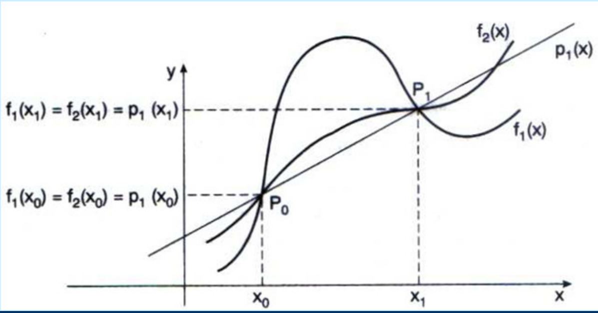
Cálculo Numérico

Método de Newton - Estudo do Erro

Ao se aproximar uma função f(x) por um polinômio interpolador de grau ≤ n, comete-se um erro.

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x) \ \forall x \in [x_0, x_n]}$$

O estudo do erro é importante para sabermos quão próximo $p_n(x)$ está de $f(x)$.

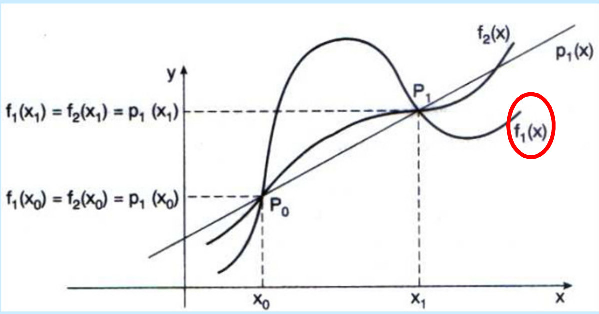


Aproximação linear.

Observe que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ passam pelos pontos P_0 e P_1.

Cálculo Numérico

Método de Newton - Estudo do Erro



Visualmente observa-se que o ERRO na aproximação de $f_1(x)$ é maior que no de $f_2(x)$.

Observa-se que, no caso, o erro depende da concavidade das curvas, ou seja, $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$

Cálculo Numérico

Método de Newton - Estudo do Erro

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

Se $f(\boldsymbol{x}) \approx p_n(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in [x_0, x_n]$, o erro será dado por $E_n(\boldsymbol{x})$.

Porém este erro depende da diferença dividida $f[\boldsymbol{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n]$, que por sua vez, depende do valor de $f(\boldsymbol{x})$.

Como a função $f(x)$ é tabelada, não há como calcular este valor.

Estimativas para o erro podem ser obtidas se conhecemos algumas propriedades da função.

35 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Método de Newton - Estudo do Erro

Teorema (prova no livro de Márcia Ruggiero)

✓ *Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos.*
✓ *Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$.*
✓ *Se $f(x)$ for $n+1$ vezes diferençável em $[x_0, x_n]$.*

então
para qualquer $\boldsymbol{x} \in [x_0, x_n]$ *o erro será dado por:*

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad com\ \varepsilon \in [x_0, x_n]$$

Na prática é usado um limitante para o erro, sendo:

$$|E_n(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \max_{x\in[x_0,x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

36 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Escolha dos Pontos

Uma das características da interpolação é que ela pode fornecer uma aproximação local, isto é, sem a necessidade de usarmos todos os dados disponíveis.

Exemplo:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

Podemos achar uma aproximação para $f(0.44)$, usando um polinômio de grau 2 e não 5.

A melhor escolha será tomar: $x_0 = 0.34$, $x_1 = 0.4$ e $x_2 = 0.52$.

$$|E_n(0.44)| \leq |(0.44-0.34)(0.44-0.4)(0.44-0.52)| \max_{x\in[x_0,x_2]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} = 0.00032 \max_{x\in[x_0,x_2]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

(*) Se tivesse escolhido quaisquer outros pontos o erro seria maior.

Cálculo Numérico

Interpolação Inversa

Imagine que se tenha uma tabela de pontos (x_k, f_k) e um número $y \in [f_0, f_n]$.

Suponha que se Deseje achar o valor de x tal que $f(x) = y$.

Existem 2 formas de resolver o problema:

1. Calcular o polinômio interpolador de $f(x)$ e resolver a equação $p_n(x) = y$.
2. Fazer uma interpolação inversa.

Interpolação Inversa

Alternativa 1: calcular $p_n(x)$

Em geral a equação $p_n(x) = y$ tem mais de uma solução e, se o grau do polinômio for maior que 2, não temos um procedimento analítico que determine as soluções.

Alternativa 2: interpolação inversa

Se $f(x)$ for invertível num intervalo contendo y, então se pode interpolar a função inversa, isto é, considerarmos o conjunto de dados $x = f^{-1}(y)$ e acharmos o polinômio interpolador de $f^{-1}(y)$.

Interpolação Inversa

A condição para que uma função seja invertível é que esta seja *monótona decrescente ou crescente*.

$$\boxed{f_0 < f_1 < \cdots < f_n \quad \textbf{ou} \quad f_0 > f_1 > \cdots > f_n}$$

Exemplo:

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	0.587	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.587

Problema

*Deseja-se uma aproximação de **x** de tal forma que **f(x) = 0.9**, usando uma interpolação quadrática na forma de Newton.*

Cálculo Numérico

Interpolação Inversa

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	0.587	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.587

1º Passo:

- *determinar em que intervalo pode ocorrer* $f(x) = 0.9$.

temos duas possibilidades: $x \in [0.3, 0.4]$ *ou* $x \in [0.6, 0.7]$.

2º Passo:

- *verificar se a função* $f(x)$ *admite inversa.*

$f(x)$ *é crescente no intervalo* $[0.2, 0.5]$ ➔ *admite inversa.*

$f(x)$ *é decrescente no intervalo* $[0.5, 0.8]$ ➔ *admite inversa.*

41 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Interpolação Inversa

Como desejamos uma interpolação quadrática temos que ter no mínimo três pontos e nos dois casos temos quatro pontos. Portanto é possível achar as duas aproximações.

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	0.587	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.587

1 – transcrição da tabela

y	0.587	0.809	0.951	1.000
$f^{-1}(y)$	0.2	0.3	0.4	0.5

Para um polinômio de grau 2, precisamos de três pontos e ***a melhor escolha*** *são aqueles mais próximos do valor a ser aproximado.*

2 – escolha dos pontos

$y = 0.9$ $(y_0 = 0.809,\ y_1 = 0.951$ *e* $y_2 = 1.000)$

42 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Interpolação Inversa

3 – calculando as diferenças divididas

y	f^{-1}	ordem 1	ordem 2
0.809	0.3		
		0.704	
0.951	0.4		6.999
		2.040	
1.000	0.5		

4 – calculando p(y)

$$\begin{aligned} p(y) &= 0.3 + (y - 0.809)0.704 + (y - 0.951)(y - 0.809)6.999 \\ &= 5.115 - 11.605y + 6.994y^2 \end{aligned}$$

5 – calculando x

$$\boxed{x = f^{-1}(0.9) \approx p(0.9) = 0.3315.}$$

43 Curso de Cálculo Numérico - 2015