

Cálculo Numérico



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
-
DIMAP

Cálculo Numérico

Antonio Carlos Gay Thomé

Cálculo Numérico

DIM0404 - CÁLCULO NUMÉRICO

Carga Horária: 4 Créditos
2^{as} e 4^{as}-feiras das 10:50 às 12:30H
Sala 3D6

Professor: Antonio **Thomé**
E-mail: thome@dimap.ufrn.br

2 *Curso de Cálculo Numérico - 2015 / Computação*

DIM0404 - CÁLCULO NUMÉRICO**Logística do Curso****3***Curso de Cálculo Numérico - 2015 / Computação****Objetivos da Disciplina***

Apresentar os conceitos de alguns métodos numéricos conhecidos, sua fundamentação teórica, vantagens e dificuldades de implementação.

Criar condições para que os alunos possam conhecer, calcular, utilizar e aplicar métodos numéricos na solução de problemas reais.

Estudar a construção de métodos numéricos, analisar em que condições se pode ter a garantia de que os resultados encontrados estão próximos dos exatos, baseados nos conhecimentos sobre os métodos.

4*Curso de Cálculo Numérico - 2015 / Computação*

Sumário do Curso

- Introdução
- Representação Numérica e Erros
- Zeros de Função
- Sistemas de Equações Lineares
- Interpolação Polinomial
- Ajuste de Curvas
- Integração Numérica
- Equações Diferenciais Ordinárias

Bibliografia

- *Livro Texto*
 - *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*
 - Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes; Makron Books, 2ª edição, 1996.
- *Bibliografia Complementar*
 - *Cálculo Numérico – Aprendizagem com Apoio de Software*
 - Selma Arenales e Artur Darezzo; Thomson Learning Edições Ltda, 2008.
 - *Análise Numérica*
 - Richard L. Burden e J. Douglas Faires; Cengage Learning Books, 2008.

Dinâmica do Curso

- Aulas teóricas
- Aulas Práticas (MatLab ou Scilab) – Listas de Exercícios
- Trabalhos em Dupla / Apresentações em sala
- Critérios de Avaliação
 - Provas – 03
 - Prova de Recuperação
 - Trabalhos – para ponderar as provas escritas

$$GF = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (0.7 P_i + 0.3 \bar{T}_i)$$

7

Curso de Cálculo Numérico - 2015 / Computação

INTRODUÇÃO

8

Curso de Cálculo Numérico - 2015 / Computação

São métodos que possibilitam resolver, de uma forma aproximada, problemas não solucionáveis analiticamente.

A solução aproximada de um problema implica naturalmente, na *existência de um erro*. Mas isso não significa que seja inútil.

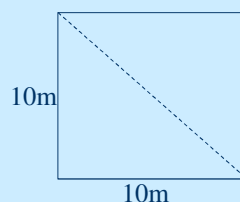
Pelo contrário, muitos problemas matemáticos não têm solução exata ou ela simplesmente é muito custosa.



Na verdade, não existe medida precisa de grandezas no mundo real. Todas as medidas de fenômenos reais contêm, necessariamente, imprecisões a partir de alguma casa decimal.

Imagine a situação de alguém que tem um terreno medindo $10m$ por $10m$ e precisa dividi-lo ao meio por uma cerca passando na diagonal do terreno.

Qual o comprimento da cerca? $10\sqrt{2}$



Qual o 'mais' correto?

$$10\sqrt{2} = 14,1\cdot$$

$$10\sqrt{2} = 14,14213562\cdot$$

$$10\sqrt{2} = 14,142135623730951\cdot$$

É um **ramo da matemática** que estuda métodos que convergem para resultados de problemas matemáticos, resultados estes cuja validade é demonstrada por teoremas convencionais.

Um **método numérico** consiste em uma sucessão de passos que converge para um valor exato. Cada termo dessa sucessão é uma aproximação, que é possível de se calcular com um número finito de operações elementares.

O objetivo da análise numérica é encontrar sucessões que aproximem os valores exatos com um número mínimo de operações elementares.

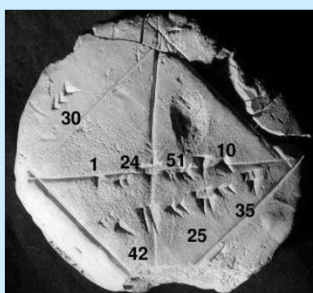
O campo de atuação da análise numérica antecede a invenção do computador em séculos.

Interpolação linear, por exemplo, é usada há mais de 2000 anos.

Grandes matemáticos do passado trabalharam com análise numérica, o que é percebido pelo nome de importantes algoritmos como: *Método de Newton*, *Polinômio de Lagrange*, *Eliminação Gaussiana* e *Método de Euler*.

Para facilitar os cálculos manuais, grandes livros foram produzidos, com **fórmulas e tabelas de dados** como pontos de interpolação e coeficientes de funções.

Um dos escritos matemáticos mais antigos é o *tablet* babilônico YBC 7289, que fornece uma aproximação sexagesimal do comprimento da diagonal de um quadrado unitário.



Embora a *análise numérica* tenha sido concebida antes dos computadores, tal como o entendemos hoje, o assunto é interdisciplinar relacionando *matemática* e *tecnologia da informação*.

Atualmente o termo *análise numérica* é confundido e muito referido com o nome de *cálculo numérico*

O que é Cálculo Numérico?

Cálculo Numérico tem por objetivo estudar métodos numéricos (algoritmos numéricos computacionais) para resolução de problemas que possam ser representados por um *modelo matemático*.

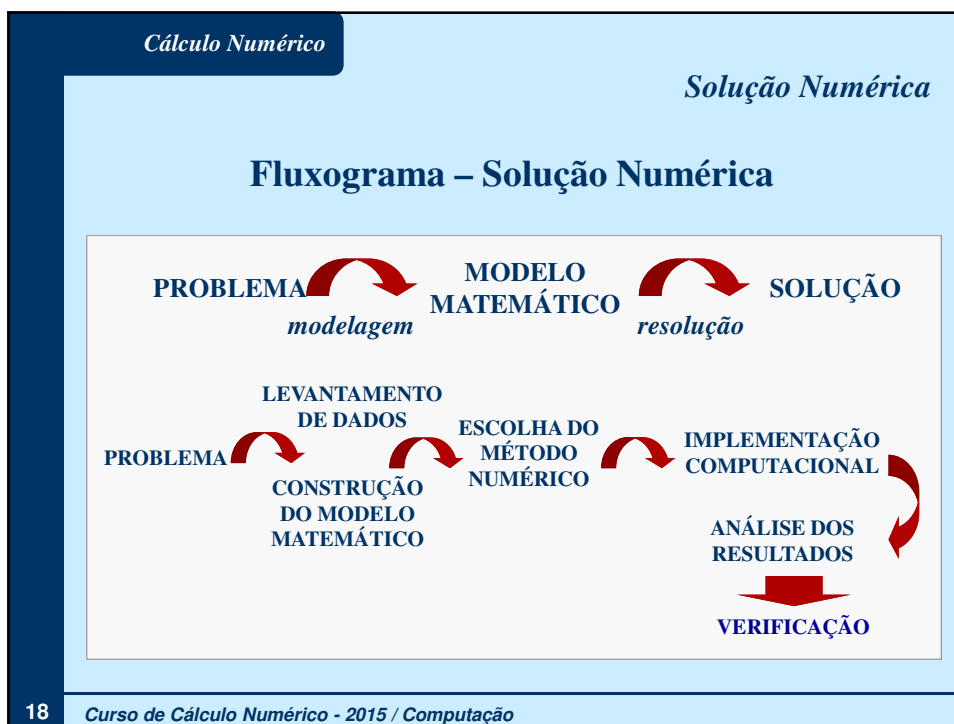
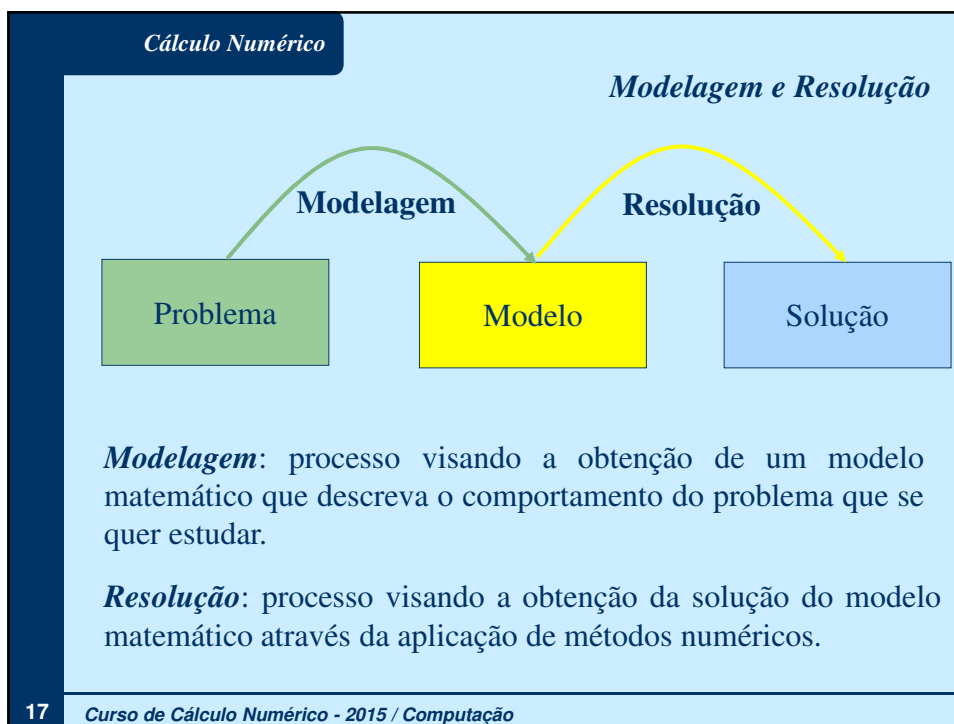
Qual sua eficiência?

Um método numérico é considerado eficiente quando apresenta soluções dentro de uma precisão desejada e com um custo computacional (tempo de execução + memória) baixo.

Cálculo Numérico?

O Cálculo Numérico vem se tornando uma ferramenta cada vez mais importante na modelagem matemática de problemas aplicados, na medida em que computadores fazem contas numéricas com grande velocidade, desde que se admitam pequenos erros de arredondamento em cada operação.





Por quê Solução Numérica?

Porque um problema de Matemática pode ser resolvido **analiticamente**, mas esse método pode se tornar impraticável:

- 1) Com o aumento do *tamanho* do problema ou;
- 2) Com o aumento da complexidade do modelo matemático.

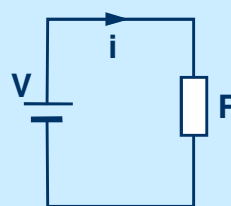
Exemplo Prático

Circuito elétrico composto de uma fonte de tensão e um resistor.

$$V - R \cdot i = 0$$

$$i = \frac{V}{R}$$

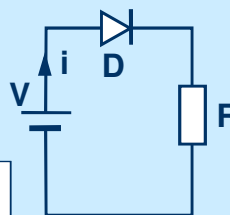
Solução exata



Introdução de um diodo no circuito:

$$v(i) = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) \quad V - R \cdot i - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) = 0$$

Solução utilizando métodos numéricos



A escolha do método mais eficiente deve considerar:

- a) A precisão desejada para os resultados;
- b) A capacidade do método em convergir para os resultados desejados (velocidade de convergência);
- c) O esforço computacional (tempo de processamento, memória necessária para a resolução).

A solução numérica envolve:

- 1) A *elaboração de um algoritmo*, que é a descrição sequencial dos passos que caracterizam o método numérico;
- 2) A *codificação do programa*, que é quando implementamos o algoritmo numa linguagem de programação escolhida;
- 3) O *processamento do programa*, que é quando o código gerado é convertido para um formato que possa ser executado pelo computador.

Toda solução numérica implica na obtenção da solução por meio de sucessivas aproximações e o resultado é obtido com uma margem aceitável de erro.

Os erros cometidos nesta aproximação são decorrentes de dois fatores:

1. A discretização do problema, ou seja a forma de passar do modelo matemático para o esquema numérico;
2. A forma de representar dados numéricos em sistemas computacionais.

Duas ideias são frequentes em cálculo numérico, a de iteração e a de aproximação local:

Iteração. Significa a repetição sucessiva de um processo. Um método iterativo se caracteriza por envolver os seguintes passos:

- 1) *Aproximação inicial*: consiste em uma primeira aproximação para a solução do problema numérico.
- 2) *Teste de parada*: é o instrumento por meio do qual o procedimento iterativo é finalizado.
- 3) *Nova Aproximação*: novo passo buscando reduzir o erro da aproximação anterior.
- 4) *Retorno ao passo 2*.

Aproximação local.

A ideia é aproximar uma função por outra que seja de tratamento mais simples.

Por exemplo: aproximar uma função não linear por uma função linear em um determinado intervalo do domínio da função.

A importância do Cálculo Numérico está na possibilidade de resolver problemas complexos ou mesmo impossíveis de solução exata, com erros aceitáveis no contexto do problema.

Influência do Erro na Solução do problema (exemplo):

25/02/1991 – Guerra do Golfo – Lançamento do míssil Patriot

**Limitação na representação
numérica (24 bits)**



**Erro de 0,34s no cálculo do
tempo da trajetória**

Alguns desastres causados por erros de cálculo numérico
<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/>

