Cálculo Numérico

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
-
DIMAP

Cálculo Numérico
U5 – Ajuste de Curvas

Antonio Carlos Gay Thomé

Cálculo Numérico

Introdução

Experimentos em laboratório costumam gerar um conjunto de dados que precisam ser analisados com o objetivo de determinar certas propriedades do fenômeno em análise.

Obter uma função matemática que represente (ou que ajuste) os dados permite fazer simulações, de forma confiável, reduzindo assim repetições de experimentos que podem ser demorados e ter um altos cultos.

Cálculo Numérico

Introdução

Por quê não interpolar?

A ***interpolação*** aproxima uma função, sobre um conjunto finito de pontos dados, porém exige que todos os pontos sejam distintos.

Além disso, o *grau do polinômio interpolador* depende da quantidade de pontos. Logo, para um conjunto de 100 pontos, o polinômio interpolador terá grau ≤ 99, o que não é muito prático se desejamos montar um modelo matemático.

A interpolação é mais indicada para aproximações quantitativas e locais, enquanto que o ajuste de curvas é indicado para aproximações qualitativas.

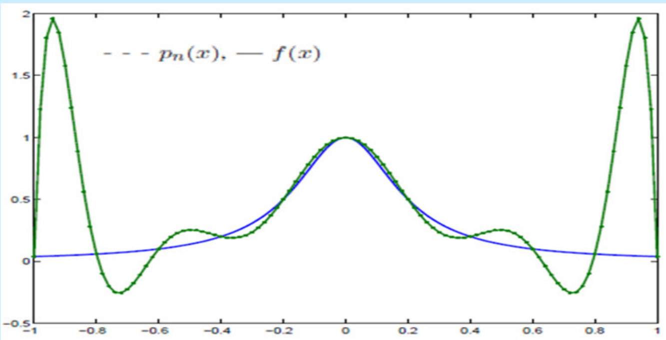
3 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Introdução

Por quê não interpolar?

Outro fato é que a medida que a quantidade de pontos num intervalo [*a, b*] aumenta, tende a ocorrer um fenômeno chamado de Runge, que aumenta o erro nos pontos extremos do intervalo e melhora a aproximação nos pontos centrais.



4 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Introdução

O fenômeno de Runge ocorre em função da fórmula do erro, uma vez que nos pontos extremos do intervalo o fator $(x - x_0)\ldots(x - x_n)$ se torna grande.

Em virtude deste fenômeno, o polinômio interpolador não é indicado para ***extrapolar*** valores, isto é aproximar valores que não pertençam ao intervalo $[x_0, x_n]$.

SOLUÇÃO?

Apelar para técnicas de Ajuste de Curvas.

Introdução

Ajustar Curvas consiste em *combinar linearmente* um conjunto de funções previamente selecionadas (lineares ou não) de tal forma que ela melhor se aproxime da função f(x), *desconhecida*, porém geradora dos dados tabelados.

Assim, dado:

1. Um conjunto de pontos $(x_1,f(x_1))$ ... $(x_m, f(x_m))$ com x_1 ... $x_m \in [a, b]$ e;
2. Um conjunto de **n** funções pré-escolhidas $g_1(x)$ ... $g_n(x)$ contínuas em [a, b]

Ajustar uma Curva aos pontos dados é:

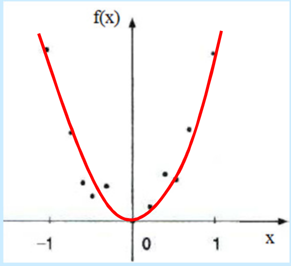
Obter n coeficientes tal que $\Phi(x)= a_1g_1(x) + \ldots + a_ng_n(x)$ se aproxime ao máximo de f(x).

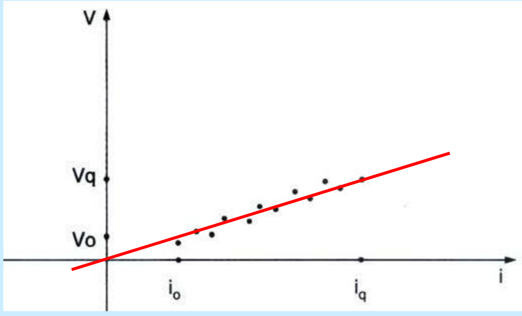
Cálculo Numérico

Introdução

Escolha das funções g(x)

Pode ser feita *observando o gráfico dos pontos tabelados* ou *baseando-se em fundamentos teóricos* sobre o experimento que deu origem aos pontos da tabela.





Diagramas de Dispersão

Cálculo Numérico

Introdução

Nesta unidade focaremos somente o esquema de ajuste dado pelo Método dos Mínimos Quadrados aplicado às seguintes situações:

- ✓ Caso Discreto
- ✓ Caso Contínuo
- ✓ Ajuste Não-linear

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Dado um conjunto de pontos $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

O ajuste de curvas consiste em encontrar uma função $\Phi(x)$ tal que o desvio em cada ponto k, definido por:

$$\boxed{d_k = f(x_k) - \Phi(x_k)} \quad \text{seja mínimo}$$

E $\Phi(x)$ seja *uma combinação linear* de funções $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ contínuas dentro do intervalo dos pontos tabelados e escolhidas de acordo com os dados do problema.

$$\boxed{\Phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)}$$

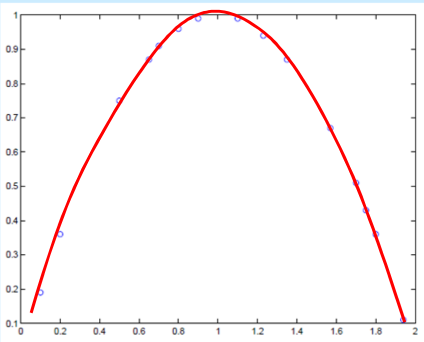
Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Dado a tabela de pontos

x	0.10	0.20	0.50	0.65	0.70	0.80	0.90	1.10	1.23	1.35	1.57	1.70	1.75	1.80	1.94
$f(x)$	0.19	0.36	0.75	0.87	0.91	0.96	0.99	0.99	0.94	0.87	0.67	0.51	0.43	0.36	0.11



Obtém-se o seguinte Diagrama de Dispersão

Que tipo de g(x) melhor se adequa a este diagrama?

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

A análise do gráfico de dispersão mostra que a função que procuramos se comporta como uma parábola.

Logo, se escolhermos as funções
$g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$ teremos:

$$\boxed{\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2}$$

Que representará "todas" as parábolas e com a escolha adequada dos α_i teremos aquela que melhor se ajusta aos pontos da tabela.

11 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

O Método dos Mínimos Quadrados consiste em determinar os α_i de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios em seja mínimo.

Isto é, achar os α_i que minimizam a função:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \overbrace{(\alpha_1 g_1(x_k) + \cdots \alpha_n g_n(x_k))}^{\varphi(x_k)}]^2.$$

F(.) é uma função que satisfaz $F(\alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathrm{R}^m$. Ou seja, *F(.)* é limitada inferiormente e portanto tem um ponto de mínimo. Este ponto pode ser determinado pelo teste da primeira derivada

12 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Pelo teste da primeira derivada temos

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}\right|_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = 0 \qquad i = 1,\dots,n.$$

Que da fórmula original implica em

$$-2\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \cdots \alpha_n g_n(x_k)\right] g_i(x_k) = 0$$

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

O que resulta num sistema de equações dado por

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\alpha_1 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_1(x_k) + \alpha_2 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_2(x_k) + \cdots + \alpha_n \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_n(x_k) & = & \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_1(x_k) \\
\alpha_1 \sum_{k=1}^{m} g_2(x_k) g_1(x_k) + \alpha_2 \sum_{k=1}^{m} g_2(x_k) g_2(x_k) + \cdots + \alpha_n \sum_{k=1}^{m} g_2(x_k) g_n(x_k) & = & \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_2(x_k) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\
\alpha_1 \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_1(x_k) + \alpha_2 \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_2(x_k) + \cdots + \alpha_n \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_n(x_k) & = & \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_n(x_k)
\end{array}\right.$$

com "i" variando de 1 ... n

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo: *O sistema pode ser representado da seguinte forma*

$$\begin{cases} a_{1,1}\alpha_1 & + & a_{1,2}\alpha_2 & + & a_{1,3}\alpha_3 & \cdots & a_{1,n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\alpha_1 & + & a_{2,2}\alpha_2 & + & a_{2,3}\alpha_3 & \cdots & a_{2,n}\alpha_n & = & b_2 \\ a_{3,1}\alpha_1 & + & a_{3,2}\alpha_2 & + & a_{3,3}\alpha_3 & \cdots & a_{3,n}\alpha_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\alpha_1 & + & a_{n,2}\alpha_2 & + & a_{n,3}\alpha_3 & \cdots & a_{n,n}\alpha_n & = & b_n \end{cases}$$

onde $$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k) \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_i(x_k)$$

Este sistema terá solução única se as funções $g_i(x)$ forem linearmente independentes.

Obs.: para um sistema $n \times n$, será necessário calcular $(n^2 + n)/2$ elementos

Cálculo Numérico

Dependência x Independência Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores em V e a equação vetorial

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$

Obviamente o vetor zero sempre pode ser escrito como CL dos vetores pois

$$0.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_n = 0$$

será sempre verdadeira para quaisquer que sejam os vetores dados. A solução $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ é chamada **solução trivial**.

A resposta à pergunta "A solução trivial de (1) é única? Se for:

a) **Sim**, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes (LI)
b) **Não**, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes (LD)

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Tomando então $\mathbf{g_1(x) = 1}$, $\mathbf{g_2(x) = x}$ *e* $\mathbf{g_3(x) = x^2}$
e expandindo a tabela para cada $g_i(x)$ *nos pontos* x_k *temos:*

x	0.10	0.20	0.50	0.65	0.70	0.80	0.90	1.10	1.23	1.35	1.57	1.70	1.75	1.80	1.94
$f(x)$	0.19	0.36	0.75	0.87	0.91	0.96	0.99	0.99	0.94	0.87	0.67	0.51	0.43	0.36	0.11
$g_1(x)$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$g_2(x)$	0.10	0.20	0.50	0.65	0.70	0.80	0.90	1.10	1.23	1.35	1.57	1.70	1.75	1.80	1.94
$g_3(x)$	0.01	0.04	0.25	0.42	0.49	0.64	0.81	1.21	1.51	1.82	2.46	2.89	3.06	3.24	3.76

O passo seguinte é calcular os coeficientes $a_{i,j}$ *e os termos independentes* b_i

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Cálculo dos coeficientes $a_{i,j}$ *e os termos independentes* b_i

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} &= \sum_{k=1}^{15} g_1(x_k) * g_1(x_k) = 15 \\
a_{1,2} &= \sum_{k=1}^{15} g_1(x_k) * g_2(x_k) = 16.29 = a_{2,1} \\
a_{1,3} &= \sum_{k=1}^{15} g_1(x_k) * g_3(x_k) = 22.62 = a_{3,1} \\
a_{2,2} &= \sum_{k=1}^{15} g_2(x_k) * g_2(x_k) = 22.62
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2,3} &= \sum_{k=1}^{15} g_2(x_k) * g_3(x_k) = 34.92 = a_{3,2} \\
a_{3,3} &= \sum_{k=1}^{15} g_3(x_k) * g_3(x_k) = 57.09 \\
b_1 &= \sum_{k=1}^{15} f(x_k) * g_1(x_k) = 9.91 \\
b_2 &= \sum_{k=1}^{15} f(x_k) * g_2(x_k) = 10.28 \\
b_3 &= \sum_{k=1}^{15} f(x_k) * g_3(x_k) = 12.66
\end{aligned}
$$

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Chegamos assim ao seguinte sistema de equações

$$15.00\alpha_1 + 16.29\alpha_2 + 22.62\alpha_3 = 9.91$$
$$16.29\alpha_1 + 22.62\alpha_2 + 34.92\alpha_3 = 10.28$$
$$22.62\alpha_1 + 34.92\alpha_2 + 57.09\alpha_3 = 12.66$$

que pode ser resolvido por qualquer dos esquemas numéricos vistos no curso, chegando ao resultado:

$$\alpha_1 = 0.00, \quad \alpha_2 = 1.99, \quad \alpha_3 = -0.99$$

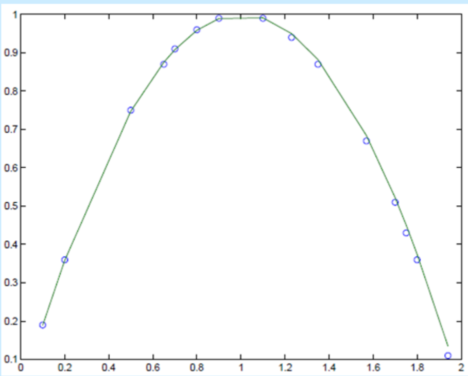
Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Exemplo:

Finalmente chegamos à função $\Phi(x)$ final que é dada por

$$\varphi(x) = 1.99x - 0.99x^2$$



Através da função $\Phi(x)$ podemos:

- ✓ *determinar valores de máximo ou mínimos;*
- ✓ *Determinar valores aproximados para a derivada;*
- ✓ *aproximar valores de f em pontos que não pertencem a tabela.*

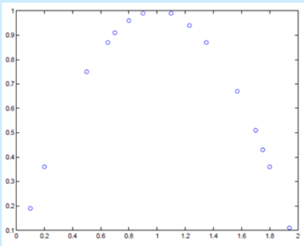
← ***Diagrama de dispersão***

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Considerações:

No exemplo ajustamos os dados a uma parábola, mas outras funções bases $g_i(x)$ poderiam ter sido usadas.

Poderíamos imaginar que os dados representassem o primeiro meio ciclo de uma função senoidal e não uma parábola.



Neste caso poderíamos tomar $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = \text{sen}(\pi x/2)$.

Qual proporcionaria o melhor ajuste?

Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Considerações:

O desvio fornece uma medida que pode ser usada como parâmetro de comparação entre ajustes diferentes. No caso do ajuste pela parábola temos que o desvio é dado por:

$$D = \sum_{k=1}^{15} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 = 0.0019$$

Se o ajuste feito pela função senoidal tiver um desvio menor, então este representaria melhor os dados.

Outro ponto a observar é a dimensão do sistema linear que depende do número de funções bases usadas. No caso da parábola foram três funções bases e um sistema 3 × 3. No caso da função senoidal o sistema será 2 × 2.

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

No caso contínuo temos uma função $f(x)$ dada num intervalo $[a, b]$ e não mais uma tabela de pontos.

O procedimento é análogo ao caso discreto.

Escolhidas as funções bases $g_i(x)$ devemos determinar a função

$$\boxed{\Phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)}$$

de modo que o desvio seja mínimo, onde

$$D = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx$$

23 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Neste caso os α_i também são determinados pela resolução de um sistema de equações.

De forma semelhante ao caso Discreto, os elementos $a_{i,j}$ são obtidos por intermédio do produto interno entre as funções $g_i(x)$ e $g_j(x)$ e os elementos b_i pelo produto interno entre $f(x)$ e $g_i(x)$.

$$a_{i,j} = \int_a^b g_i(x) g_j(x) dx \quad \text{e} \quad b_i = \int_a^b f(x) g_i(x) dx$$

24 Curso de Cálculo Numérico - 2015

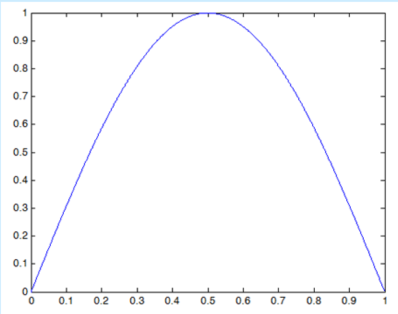
Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Determinar a parábola que melhor se ajuste a função $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ *no intervalo* $[0, 1]$.

Para isto vamos tomar como funções bases $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ *e* $g_3(x) = x^2$



f(x) no intervalo [0, 1]

03 funções bases

Sistema 03 equações

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando os termos do sistema linear temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{1,1} = \int_0^1 g_1(x).g_1(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$a_{1,2} = \int_0^1 g_1(x).g_2(x)dx = \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} = a_{2,1}$$

$$a_{1,3} = \int_0^1 g_1(x).g_3(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} = a_{3,1}$$

$$a_{22} = \int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx = \int_0^1 x.xdx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$a_{23} = \int_0^1 g_2(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x.x^2dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4} = a_{32}$$

$$a_{33} = \int_0^1 g_3(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^4dx = \frac{x^5}{5} = \frac{1}{5}$$

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando os termos b_i:

$$b_1 = \int_0^1 f(x).g_1(x)dx = \int_0^1 sen(\pi x)dx = \left.\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right|_0^1 = 0.636$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x).g_2(x)dx = \int_0^1 x.sen(\pi x)dx$$

$$u = \pi x \Rightarrow du = \pi dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{u}{\pi} sen(u)\frac{du}{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 usen(u)du = \frac{1}{\pi^2}\left(-u\cos(u) - \int_0^1 \cos(u)du\right)$$

$$\int_0^1 \cos(u)du = sen(u)$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 usen(u)du = \frac{1}{\pi^2}(-u\cos(u) - sen(u))_0^1$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi^2}(-\pi x\cos(\pi x) - sen(\pi x))_0^1 = \frac{1}{\pi} = 0.3183$$

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando os termos b_i:

$$b_3 = \int_0^1 f(x).g_3(x)dx = \int_0^1 x^2.sen(\pi x)dx$$

$$u = \pi x \Rightarrow du = \pi dx \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 sen(u)\frac{du}{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi^3}\int_0^1 u^2 sen(u)du = \frac{1}{\pi^3}\left(-u^2\cos(u)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 u\cos(u)du\right)$$

$$\int_0^1 u\cos(u)du = usen(u) + \int_0^1 sen(u)$$

$$\int_0^1 sen(u) = -\cos(u)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 sen(u)\frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi^3}\left(-u^2\cos(u) - 2(usen(u) - \cos(u))\right)_0^1$$

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando os termos b_i:

$$\int_0^1 x^2 sen(\pi x)dx = \frac{1}{\pi^3}\left(-(\pi x)^2\cos(\pi u) - 2((\pi x)sen(\pi x) - \cos(\pi x))\right)\Big|_0^1$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 2(1+1)\right) = 0.189$$

$$\boxed{b_1 = 0.636 \;/\; b_2 = 0.318 \;/\; b_3 = 0.189}$$

Com os valores de a_{ij} e b_i podemos calcular os coeficientes α_i e a função $\Phi(x)$

29 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando os termos α_i:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6366 \\ 0.3183 \\ 0.1893 \end{bmatrix}$$

Usando Eliminação de Gauss temos:

```
1.0000    0.5000    0.3333    0.6366
     0    0.0833    0.0833         0
     0    0.0000    0.0056   -0.0229
```

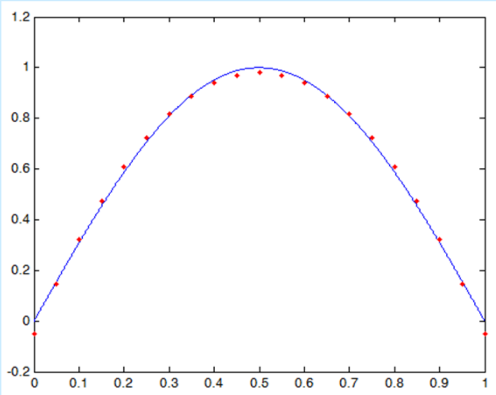
α_1	α_2	α_3
-0.0504	4.1220	-4.1220

30 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Exemplo:

Calculando a função $\Phi(x)$: $\Phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x)$



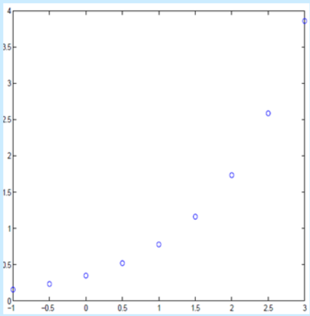
$$\boxed{\Phi(x) = -0.0504 + 4.1220x - 4.1220x^2}$$

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

Existem casos, onde o diagrama de dispersão de uma função indica que os dados devem ser ajustado por uma função que não seja linear com relação aos α_i.

Exemplo:

x	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	0.157	0.234	0.350	0.522	0.778	1.162	1.733	2.586	3.858



Olhando o diagrama, podemos considerar que $f(x)$ apresenta um comportamento exponencial. Isto é, $f(x) \approx \Phi(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x}$.

Diagrama de dispersão

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

$$\boxed{f(x) \approx \Phi(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x}}$$

Observe que o parâmetro α_2 permite que a função seja ajustada no seu fator de crescimento. E, assim, a aproximação não linear pode permitir uma flexibilidade maior no ajuste da função.

Esta abordagem é diferente do caso linear, onde
$f(x) \approx \Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 e^x$
cujo o fator de crescimento é fixo.

A abordagem não-linear requer um processo de linearização para que seja possível aplicar o Método dos Mínimos Quadrados.

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

O conceito de linearização está relacionado com a ideia de função inversa, pois se:

$$\boxed{f(x) = y, \text{ então } h(x) = f^{-1}(f(x)) = x}$$

Isto é, a inversa de uma função (quando existe) aplicada nela própria resulta numa reta.

No nosso exemplo temos uma exponencial, cuja inversa é a função *ln(x)*. Logo podemos proceder da seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x} \rightarrow z = ln(f(x)) = \ln(\alpha_1) + \alpha_2 x.}$$

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

$\boxed{f(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x} \rightarrow z = ln(f(x)) = \ln(\alpha_1) + \alpha_2 x.}$

fazendo $\beta_1 = ln(\alpha_1)$ e $\beta_2 = \alpha_2$

$\boxed{z = \beta_1 + \beta_2 x}$

O problema passa a consistir em ajustar os dados de z por uma reta.

Para isto podemos tomar: $\mathbf{g_1(x) = 1}$ e $\mathbf{g_2(x) = x}$.

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

Calculando z, $g_1(x)$ e $g_2(x)$, expandimos a tabela da seguinte forma:

x	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	0.157	0.234	0.350	0.522	0.778	1.162	1.733	2.586	3.858
$z = \ln(f(x))$	-1.851	-1.452	-1.049	-0.650	-0.251	0.150	0.549	0.950	1.350
$g_1(x)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$g_2(x)$	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0

O passo seguinte é calcular os termos a_{ij} e b_i

$$a_{1,1} = \sum_{k=1}^{9} g_1(x_k) * g_1(x_k) = 9$$
$$a_{1,2} = \sum_{k=1}^{9} g_1(x_k) * g_2(x_k) = 9 = a_{2,1}$$
$$a_{2,2} = \sum_{k=1}^{9} g_2(x_k) * g_2(x_k) = 24$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{15} z(x_k) * g_1(x_k) = -2.254$$
$$b_2 = \sum_{k=1}^{15} z(x_k) * g_2(x_k) = 9.749$$

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

O passo seguinte é calcular os β_i

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.254 \\ 9.749 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\beta_1 = -1.050 \text{ e } \beta_2 = 0.800}$$

O passo seguinte é calcular os α_i

$$\boxed{\alpha_1 = e^{\beta 1} = 0.349 \text{ e } \alpha_2 = \beta_2 = 0.800}$$

Finalmente calculamos $\Phi(x)$

$$\boxed{\Phi(x) = \alpha_1 e^{\alpha 2x} = 0.349 e^{0.800x}}$$

37 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Mínimos Quadrados – Caso Não-Linear

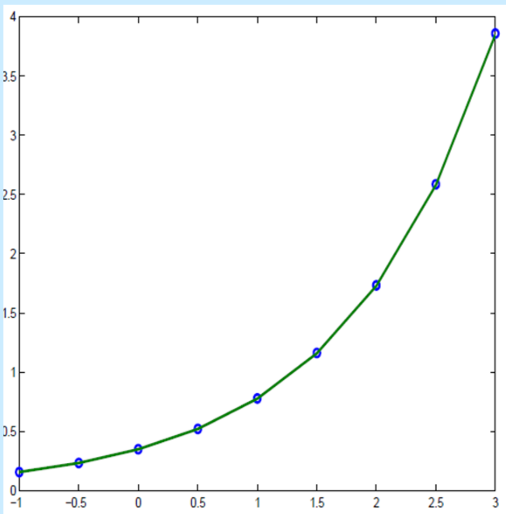


Diagrama de Dispersão e o Gráfico da $\Phi(x)$

38 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*