Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Física Téorica e Experimental
Disciplina: Física Computacional II (2012.2)
Exercícios - Números aleatórios

1 Geração de números aleatórios

Um dos métodos mais comuns de geração de números aleatórios é o método congruente linear, onde uma sequência de números $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ sobre o ontervalo $[0, M-1]$ pode ser garada de maneira iterativa usando a equação

$$r_j = (ar_{i-1} + c) \bmod M = \text{resto da divisão} \left(\frac{ar_{i-1} + c}{M} \right) \quad (1)$$

O valor r_1 (semente) é normalmente fornecido pelo usuário ou pelo tempo em segundos marcado pelo computador e mod indica o resto da divisão entre dois inteiros. A sequência acima irá gerar números inteiros entre 0 e M, se desejarmos números entre 0 e 1, basta dividir a sequência por M. Observe que pode ocorrer que nem todos os inteiros sejam gerados e além disso, se um inteiro se repetir, toda a sequência se repitirá novamente de maneira que esse gerador tem um período. Que é o número de passos para que um dado inteiro ocorra novamente. Assim, para obtermos sequência com períodos longos, a e M devem ser grandes, mas não tão grande para que o produto ar_{i-1} não seja maior que o valor máximo permitido para o inteiro não seja ultrapassado.

2 implementação de uma sequência pseudo-aleatória

Em trabalhos científicos ;e recomendável utilizarmos geradores aleatóriso disponíveis em bibliotecas numéricas e bem testados. Para verificarmos isso, vamos realizar alguns testes

1 Escreva um programa simples para gerar uma sequência de números usando o método congruente linear, Eq. (1).

2 Para propósitos pedagógicos, tente essa combinação $(a, c, M, r_1) = (57, 1, 256, 10)$. Determine o período, ou seja, quantos números aleatórios serão gerados antes que a sequência se repita.

3 Faça um gráfico da sequência de números gerados acima em pares $(x_i, y_i) = (r_{2i-1}, r_{2i}), i = 1, 2, \ldots$ (não conecte os pontos com linhas). Você deve observar correlações, o que significa que você não deve usar esse gerador em trabalhos científicos.

4 Teste um outro gerador (disponível em alguma biblioteca gráfica), fazendo um gráfico como o acima.

5 Teste agora o método congruente linear com valores $M = 111233$ e $a = 9999$ e $c = 11$ fazendo um gráfico semelhante ao do item acime a compare os gráficos.

3 Testes com geradores

Abaixo seguem alguns testes que você pode implementar para verificar a aleatoriedade e uniformidade do seu gerador de números aleatórios.

1 Um teste simples de uniformidade é calcular o k-ésimo momento da distribuição

$$\langle x^k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \tag{2}$$

Se os números aleatóriso são distribuídos com uma distribuição de probabilidades uniforme $P(x)$ então, a Eq. (2) é aproximadamente o momento de $P(x)$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \approx \int_0^1 dx x^k P(x) + \mathrm{O}(1/\sqrt{N}) \approx \frac{a}{k+1} \tag{3}$$

Se a Eq. (3) for válida, então você pode considerar que a distribuiçào é uniforme. Se o desvio da Eq. (3) varia com $1\sqrt{N}$, então a distribuição é aleatória.

2 Um outro teste simples determina se existem correlações entre vizinhos próximos, calculando

$$C(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i x_{i+k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Se os números aleatórios x_i e x_{i+k} são distribuídos com uma distribuição $P(x_i, x_{i+k}$ e são independentes e uniformes, então a Eq. (4) pode ser aproximada pela integral

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i x_{i+k} \approx \int_0^1 dx \int_0^1 dy xy P(x, y) = \frac{1}{4} \tag{5}$$

Se a equação acima é válida para seus números aleatórios, então voc6e pode dizer que eles não são corrlacionados. Se o desvio de (5) varia com $1/\sqrt{N}$, então eles também são aleatórios.

Faça agora dois programas para testar seu gerador:

1 Teste o gerador usando a Eq. (3) para $k = 1, 3, 7$ e $N = 100, 10.000, 100.000$. Em cada caso imprima

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^{N} x_i^k - \frac{a}{k+1} \right| \tag{6}$$

e verifique se ele é da ordem de 1.

2 Repita o teste acima, agora usando e Eq. (5). Novamente imprima o desvio do valor esperado e verifique se ele é da ordem de 1.