Melhorando o Método de Jacobi: O Método de Gauss-Seidel

Método de Jacobi: Simples de implementar, mas com convergência ruim (velocidade, precisão, etc.)

Até agora: Grade 2-D → tamanho L × L.

No. de iterações (p/ uma dada precisão): $N_i \propto L^2$
No. de pontos da grade : $N_p \propto L^2$

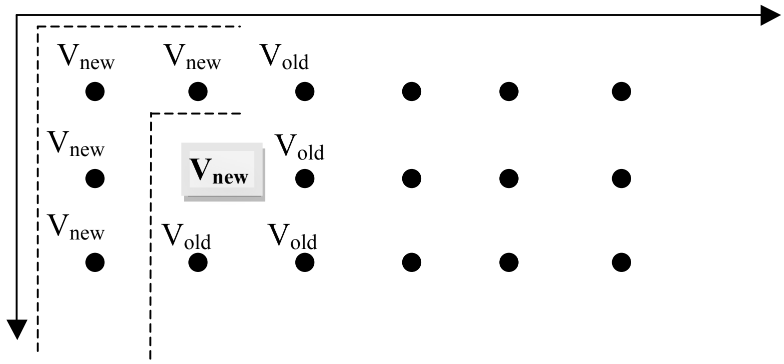
- ⇨ Custo computacional: !!
- ⇨ Se dobrarmos o tamanho do lado L:
  - $C' \propto (2L)^4 \propto 16L^2$ ➔ $C' \propto 16C$
- ⇨ Se aplicarmos o algoritmo para um hiper-cubo de lado L?
  - $\boxed{C \propto L^{2d}}$ com d ≡ dimensão do espaço!

Por isso, o método de Jacobi não é empregado em tarefas de larga escala. Uma opção é o Método de Gauss-Seidel:

Este método usa os novos valores de V(i,j) à medida que eles se tornam disponíveis! A ordem na qual eles se tornam disponíveis depende da forma como se organiza o loop.

Por exemplo, movendo-se na ordem crescente de coluna, começando com a linha do topo, o método de Gauss-Seidel pode ser escrito como:

$$V_{new}(i,j) = \frac{1}{4}[V_{old}(i+1,j) + V_{new}(i-1,j) + V_{old}(i,j+1) + V_{new}(i,j-1)]$$



Vantagem: uma vez que os novos valores podem ser usados assim que forem calculados, não há necessidade de armazenar os valores antigos separadamente!

$$V(i,j) = \frac{1}{4}[V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)]$$

Obviamente, deve-se levar em conta a ordem de execução otimizada para a linguagem, se possível:

Bom F77 (mau C)

```
Dimension Vec(idim, jdim)
Do j = 1, jdim
  Do i = 1, idim
      Ans = Ans + Vec(i,j)*Vec(i,j)
EndDo
```

Performance

O número de iterações necessárias para convergência é menor: $N_i(G.S.) = \frac{1}{2}N_i(J)$, ou seja, reduzimos o tempo total de processamento por um fator de 2.
→ Seria desejável um fator de L !

Sobre-Relaxação Simultânea (SOR)

Gauss-Seidel ou Jacobi: $\Delta V = V_{new}(i,j) - V_{old}(i,j)$, ou

$$V_{new}(i,j) = \Delta V + V_{old}(i,j)$$

SOR:

$$V_{new}(i,j) = \alpha\Delta V + V_{old}(i,j)$$

Onde α é um parâmetro que mede a "sobre-relaxação".

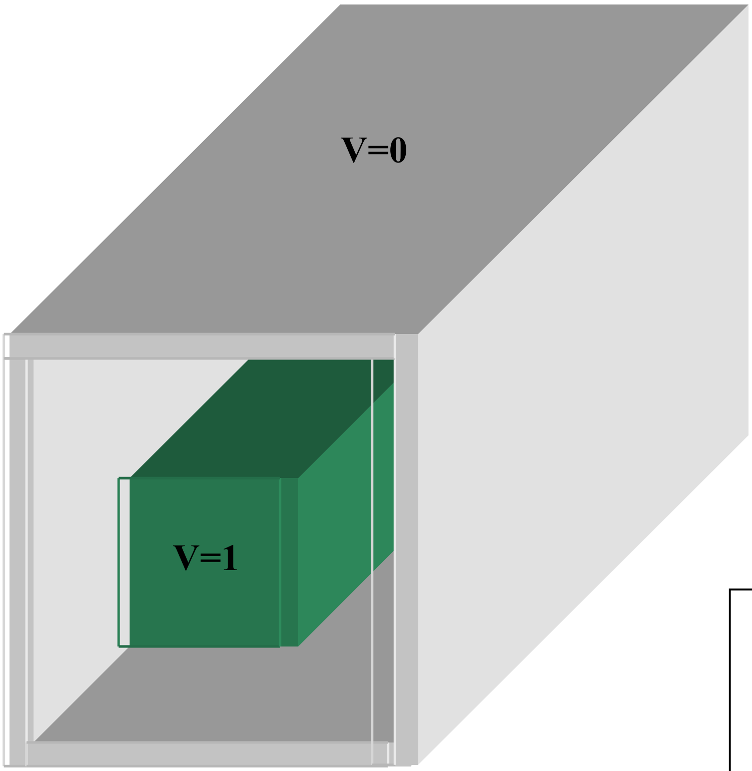
α = 1 → Gauss-Seidel
α ≥ 2 → Não converge
α < 1 → Sub-relaxação

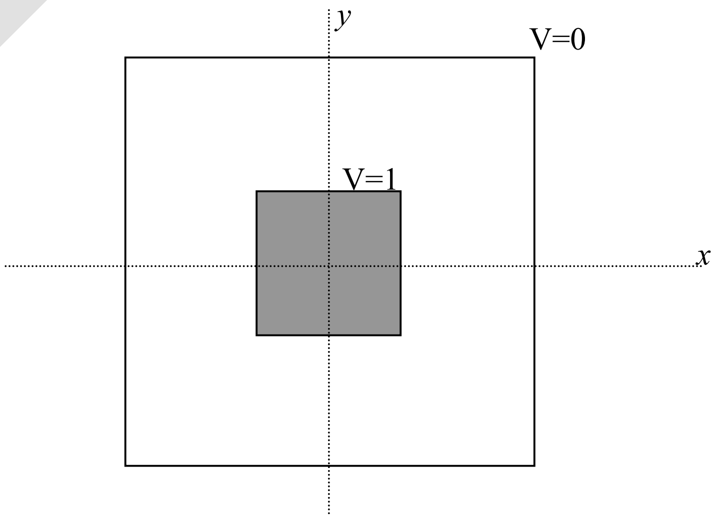
Devemos então ter α entre 1 e 2.

Para uma rede 2-D: $\alpha \approx \frac{2}{1+\frac{\pi}{L}}$, com condições de contorno de Dirichlet.

O Capacitor em forma de Prisma (cabo coaxial quadrado)

Considere agora o prisma de seção reta quadrada, infinitamente longo, feito de material condutor, e no seu interior uma barra metálica, ambos com os potenciais dados:





➔ Calcular o potencial entre a barra e a parede.
Observe a simetria do problema. Podemos fazer uso da mesma para otimizar o tempo de processamento.

O Capacitor Interno

Considere agora o capacitor de placas paralelas interno a um prisma vazado, de seção reta quadrada, ambos infinitamente longos, e feitos de material condutor, com os potenciais dados: