Cálculo Numérico

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
-
DIMAP

Cálculo Numérico
U6 – Integração Numérica

Antonio Carlos Gay Thomé

Cálculo Numérico

Introdução

Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é visto que se ***f(x)*** é uma função contínua em um intervalo [a, b], então ela tem uma primitiva ***F(x)*** neste intervalo. Ou seja:

$$\boxed{\exists F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)}$$

Assim, temos que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Achar ***F(x)*** dado um determinado ***f(x)*** nem sempre é fácil.

Introdução

A ***integração numérica*** é aplicada quando a primitiva da função não é conhecida ou quando só conhecemos a função $f(x)$ num conjunto discreto de pontos.

O objetivo nesta unidade é estudar esquemas numéricos que aproximem a integral definida de uma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$.

Introdução

A ideia básica da integração numérica consiste na substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime razoavelmente bem no intervalo [a, b].

Desta forma, o problema se converte na integração dos termos do polinômio sobre os pontos do intervalo, o que é trivial de ser feito.

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n), \quad x_i \in [a,b], i = 0,1,\ldots,n$$

Esta abordagem é conhecida como Fórmulas de Côtes

Fórmulas de Newton Côtes

As fórmulas de Newton-Côtes são baseadas na estratégia de aproximar a função ***f(x)*** por um *polinômio interpolador* e, então, aproximar a integral pela integral do polinômio.

As aproximações são do tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

onde os pontos são igualmente espaçados, isto é $x_k = x_0 + kh$, com $h = (b - a)/n$, e os coeficientes A_i são determinados pelo polinômio escolhido para aproximar a função $f(x)$.

***Existem fórmulas fechadas** $x \in [a, b]$ **e abertas** $x \in (a, b)$*

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

A Regra do Trapézio é a fórmula de Newton-Côtes que aproxima a função $f(x)$ pelo ***polinômio interpolador de grau 1*** sobre os pontos $x_0 = a$ e $x_1 = b$.

O polinômio interpolador de grau um, na ***forma de Newton (diferenças divididas)*** é dado por:

$$\boxed{p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)}$$

Desta forma vamos aproximar a integral da função $f(x)$ pela integral do polinômio, obtendo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx}$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{x_1} f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)dx \\
&= f(x_0)(x_1-x_0) + f[x_0,x_1]\left(\frac{{x_1}^2}{2} - \frac{{x_0}^2}{2} - x_0(x_1-x_0)\right) \\
&= f(x_0)(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \text{ x } \frac{(x_1-x_0)^2}{2} \\
&= \frac{(x_1-x_0)}{2}(f(x_0)+f(x_1)) \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)),
\end{aligned}$$

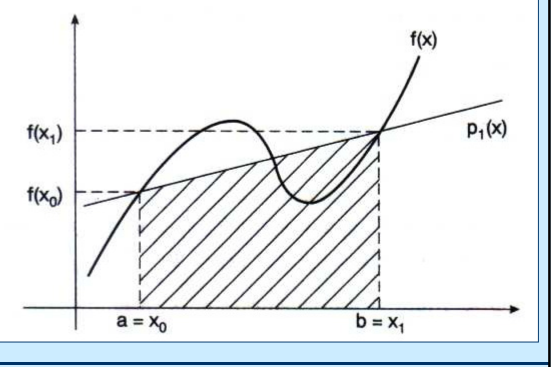
onde $h = x_1 - x_0$.

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

A fórmula: $\boxed{\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))}$

representa a ***área de um trapézio*** que tem $f(x_1)$ e $f(x_0)$ como os valores das bases e h como o valor da altura.



Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Se usarmos a ***fórmula de Lagrange*** ao invés da fórmula de Newton para interpolar, teremos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{-h}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h}f(x_1)\right]dx = I_T.$$

onde $I_T = (h/2)*[f(x_0) + f(x_1)]$

Mesmo resultado anterior!

Que representa a área de um trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Cálculo do Erro

Na unidade de interpolação foi visto que uma função $f(x)$ pode ser representada por:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$$

onde $p_n(x)$ é o polinômio interpolador e $E_n(x)$ o erro na interpolação

Calculando a integral da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ temos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx.}$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Cálculo do Erro

No caso da Regra do Trapézio, o erro é dado por:

$$E_T = \int_a^b E_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi)}{2}dx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Como o erro depende do ponto ξ, que é desconhecido, usa-se na prática a estimativa onde:

$$\boxed{|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|}$$

11 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Exemplo:

Integrar a função $f(x) = e^{-x^2}$ (cuja primitiva é uma função Gaussiana) usando a ***Regra do Trapézio*** no intervalo [0, 1].

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_T = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0} + e^{-1^2}\right) = 0.6839$$

Para estimar o erro *cometido temos que limitar a segunda derivada da função no intervalo* [0, 1].

12 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Exemplo: $|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$

$$f''\left(e^{-x^2}\right) = f'(-2xe^{-x^2}) = -\left(2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}\right) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$$

nos extremos do intervalo vale $|f''(0)| = 2 \quad e \quad |f''(1)| = 0.735759$

Para calcular os pontos críticos da f''(x), devemos derivar f''(x) e igualar a zero

$$f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio

Exemplo: $|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$

Como o único ponto crítico pertencente ao intervalo é x = 0

$$\max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = 2$$

E assim: $E_T \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = \frac{1}{6} = 0.166667$

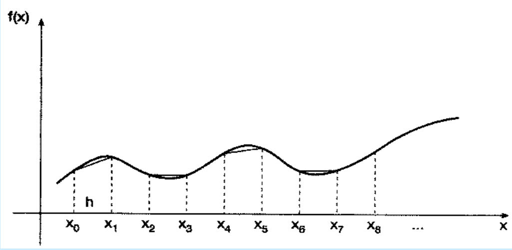
Note que a estimativa do erro informa que a aproximação obtida não garante a primeira casa decimal como exata, pois a solução exata da integral está entre os valores 0.6839397±0.166667.

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio Repetida

A Regra do Trapézio aproxima bem funções suaves onde (**|*f'*(*x*)| << 1**) e/ou em intervalos de integração de ***amplitude pequena***.

Para intervalos grandes pode-se fazer uma subdivisão do intervalo **[*a, b*]** em ***n*** subintervalos ***de mesma amplitude*** e aplicar a Regra do Trapézio em cada subintervalo



Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio Repetida

Assim, com a regra do trapézio repetida temos que:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_k = x_0 + kh \quad \text{com } k = 0, 1, \ldots, n}$$

Aplicando a Regra do Trapézio em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}(f_0+f_1)+\frac{h}{2}(f_1+f_2)+\frac{h}{2}(f_2+f_3)+\cdots+\frac{h}{2}(f_{n-2}+f_{n-1})+\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n) \\ &= \frac{h}{2}\left[f_0+2(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1})+f_n\right] \end{aligned}$$

E o erro cometido é igual a soma dos erros de cada subintervalo:

$$\boxed{|E_{TG}| \le n\frac{h^3}{12}\max_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)|}$$

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio Repetida

Exemplo:

Considerando a função do exemplo anterior $f(x) = e^{-x^2}$ *em [0, 1]*

Determinar o ***número de subintervalos*** *necessários para que a Regra do Trapézio Repetida forneça uma aproximação com* ***pelo menos 3 casas decimais exatas****.*

$$\boxed{|E_{TG}| \leq 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{n\frac{h^3}{12}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| \leq 10^{-4}}$$

onde h = (b – a)/n

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio Repetida

Exemplo: $\boxed{n\frac{h^3}{12}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| \leq 10^{-4}}$

com ***h = 1/n*** *e* ***max f''(x) = 2****, temos:*

$$\begin{aligned} n\frac{h^3}{12}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| \leq 10^{-4} &\Leftrightarrow n\frac{1}{n^3}\frac{1}{12}2 \leq 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 6\times 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow n^2 \geq 1666.666 \\ &\Leftrightarrow n \geq 40.824 \end{aligned}$$

Ou seja, precisamos de, ***no mínimo****,* ***n = 41*** *subintervalos para atingir a precisão desejada.*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra do Trapézio Repetida

Exemplo:

Usando a função ***trapz.m*** do MatLab, com 41 subintervalos obtemos a seguinte resposta:

```
% Exemplo do uso da função trapz(x,y)
% Calcula a integral usando a regra do trapézio
% x=[x0,x1,...,xn]
% f=[f0,f1,...fn]
%
h=1/41;
x=0:h:1;
f=exp(-x.^2);
It=trapz(x, f);
```

$\boxed{It = 0.746787657}$

Resultado anterior: ***0.6839***

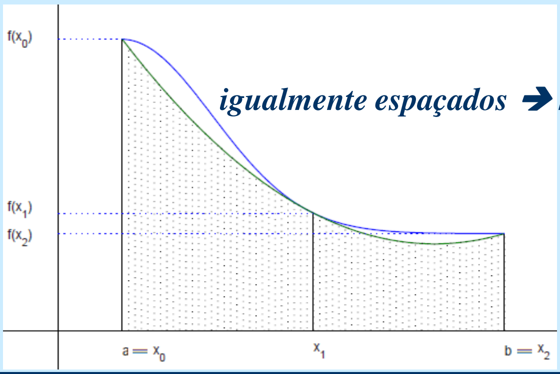
19 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

A Regra de Simpson 1/3 consiste em usar um ***polinômio de grau 2*** para interpolar a função $f(x)$.

Para isto são necessários três pontos x_0, x_1 e x_2



igualmente espaçados ➔ ***h = (b – a)/2.***

20 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

Para obter a aproximação da integral através de um polinômio interpolador ***na forma de Newton*** temos:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2].$$

Assim, a integral da função $\boldsymbol{f(x)}$ será aproximada por:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \end{aligned}$$

21 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

De forma análoga a Regra do Trapézio, obtemos a fórmula do erro, integrando o erro cometido na interpolação.

$$E_S = \int_a^b E_2(x)dx = \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!}dx = -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Na prática a estimativa para o erro é dada por:

$$|E_S| \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)|$$

22 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

Exemplo:

***It* = 0.746787657**

Resultado anterior: ***0.6839***

Seja a função do exemplo anterior $f(x) = e^{-x^2}$ *no intervalo* [0, 1].

Para usar a Regra de Simpson temos que ter três pontos.

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

E a aproximação é dada por:

Trapézio: Simples: 0.6839; Repetido: 0.74678

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) = 0.74718$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

Exemplo:

A limitação do erro da aproximação fica em:

$$|E_S| \le \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)|$$

$$f^{(iv)}(x) = f^{(iv)}(e^{-x^2}) = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$$

Calculando a 4ª derivada nos extremos do intervalo e nos pontos críticos temos:

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

Exemplo:

Nos pontos extremos:

$$|f^{(iv)}(0)| = 12 \quad e \quad |f^{(iv)}(1)| = 0.735759$$

Nos pontos críticos da 4ª derivada:

$$f^{(v)}(x) = (-32x^5 + 160x^3 - 120x)e^{-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \ ou \\ x = \pm 0.958572 \ ou \\ x = \pm 2.02018 \end{cases}$$

Como somente o 0 e 0.958572 pertencem [0, 1], temos:

$$|f^{(iv)}(0.958572)| = 7.41948 \quad \text{e} \quad \boxed{\max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)| = 12}$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson de 1/3

Exemplo:

Finalmente:

$$\boxed{E_S = \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)| = 0.00416667}$$

Conclusão: Garante-se que valor da integral aproximada

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) = 0.74718}$$

No intervalo [0, 1] ***está correto*** *com uma* ***precisão de duas casas decimais****.*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson Repetida

Da mesma forma que na Regra do Trapézio, a Regra de Simpson pode fornecer resultados mais precisos sendo aplicada repetidas vezes.

A Regra de Simpson necessita de três pontos, logo a regra se aplica a cada dois subintervalos da forma $[x_s, x_{s+2}]$, o que implica que n deve ser um número par.

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_s = x_0 + sh, \quad \text{para} \quad s = 0, 1, \ldots, n$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson Repetida

Aplicando a Regra de Simpson em cada subintervalo $[x_s, x_{s+2}]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{h}{3}(f_{n-4} + 4f_{n-3} + f_{n-2}) + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\underbrace{(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1})}_{\text{ímpares}} + 2\underbrace{(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2})}_{\text{pares}} + f_n\right]$$

E o erro é a soma dos erros em cada um dos n/2 subintervalos $[x_s, x_{s+2}]$, ficando limitado em:

$$|E_{SR}| \leq n \frac{h^5}{180} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(iv)}(\xi)|.$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Regra Simpson Repetida

Exemplo:

Usando a mesma função $f(x)=e^{-x^2}$, *no intervalo* [0, 1], *determinar o número de subintervalos necessários para obter uma aproximação com três casas decimais exatas.*

Para isto assume-se:

$$\boxed{|E_{SR}| \leq 10^{-4}}$$

tem-se que:

$$h = (b-a)/n \qquad \max_{\xi\in[0,1]} |f^{(iv)}(\xi)| = 12$$

$$n\,\frac{h^5}{180}\max_{\xi\in[a,b]}|f^{(iv)}(\xi)| \leq 10^{-4} \;\Leftrightarrow\; n\,\frac{1}{n^5}\,\frac{12}{180} \leq 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{n^4} \leq 15\times 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow\; n^4 \geq 666.66666$$

$$\Leftrightarrow\; n \geq 5.0813274$$

O menor valor de ***n*** *que garante a precisão é* ***n = 6***. *Note que a Regra de Simpson necessita de bem menos subintervalos que a Regra do Trapézio (**n = 41**).*

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Observações

1. *As fórmulas de Newton-Côtes são obtidas aproximando a função por um polinômio interpolador.*
2. *Na interpolação polinomial, quanto maior o grau do polinômio, maiores são os erros nos extremos.*
3. *Logo, deve-se evitar usar polinômios de grau muito alto para aproximar as funções.*
4. *Assim, a melhor estratégia é usar as fórmulas repetidas, que permitem obter aproximação com uma precisão desejada, e polinômios de baixo grau.*

Fórmulas de Newton Côtes
Segunda Regra de Simpson

A função a ser integrada é aproximada por um polinômio interpolador de ***grau 3***.

São necessários, portanto, 4 pontos para interpolação.

$$p_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right)$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Segunda Regra de Simpson

De forma análoga, obtemos a fórmula do erro integrando o erro cometido na interpolação.

$$E_{s_2} = \int_a^b E_3(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{f^{iv}(\xi)}{4!}dx = -\frac{3h^5}{80}f^{iv}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_3]$$

Na prática a estimativa para o erro é dada por:

$$\left|E_{s_2}\right| \le \frac{3h^5}{80}\max_{x\in[x_0,x_3]}\left|f^{iv}(x)\right|$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Segunda Regra de Simpson Repetida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} p_3(x)dx + \ldots + \int_{x_{k-3}}^{x_k} p_3(x)dx \quad (x_0 = a, x_k = b)$$
$$= \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) +$$
$$\frac{3h}{8}\left(f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right) + \ldots$$

E o erro é a soma dos erros em cada um dos n/3 subintervalos [x_s, x_{s+3}], ficando limitado em:

$$\left|E_{s_2}\right| \leq \frac{nh^5}{80} \max_{x \in [x_0, x_3]} \left|f^{iv}(x)\right|$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes
Para Integração Dupla

Seja a integral dupla tabelada nos intervalos [x_0,x_m] e [y_0,y_n]

$$I = \int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x,y)dydx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_m} dx \int_{y_0}^{y_n} f(x,y)dy$$

$$G(x) = \int_{y_0}^{y_n} f(x,y)dy \quad \textbf{(a)}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_m} G(x)dx \quad \textbf{(b)}$$

Onde (a) e (b) são integrais simples e podem ser resolvidas pelos métodos já vistos

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes Para Integração Dupla

$$I = \int_{x_0}^{x_m} G(x)dx \Rightarrow I = c_x \sum_{i=0}^{m} a_i G(x_i)$$

$$G(x) = \int_{y_0}^{y_n} f(x,y)dy \Rightarrow G(x_i) = c_y \sum_{j=0}^{n} b_j f(x_i, y_j)$$

Finalmente temos:

$$\boxed{I = c_x.c_y \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_i b_j f(x_i, y_j)}$$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes Para Integração Dupla

Exemplo:

$$Sendo\ f(x,y) = \frac{sen(x.y)}{x^2 + y}$$

$$Estime\ I = \int_{0.1}^{0.9} \int_{0.2}^{0.5} f(x,y)dydx$$

$$considere\ h_x = 0.2\ e\ h_y = 0.1$$

Passo 1: cálculo do número de subintervalos

$m = \dfrac{0.9-0.1}{0.2} = 4$ ➔ 5 pontos ➔ Simpson grau 2 $[\overbrace{0\quad 1\quad 2}^{}\ \ \underbrace{\ 3\quad 4}_{}]$ *repetido*

$n = \dfrac{0.5-0.2}{0.1} = 3$ ➔ 4 pontos ➔ Simpson grau 3 $[\underbrace{0\quad 1\quad 2\quad 3}_{}]$

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes Para Integração Dupla

$$I = c_x . c_y \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_i b_j f(x_i, y_j)$$

ai x bj

$f(x_i, y_j)$

Exemplo: Construção da Tabela

$$m = \frac{0.9 - 0.1}{0.2} = 4$$

$$n = \frac{0.5 - 0.2}{0.1} = 3$$

		j	0	1	2	3
		y(j)	0.2	0.3	0.4	0.5
i	x(i)	ai \ bj	1	3	3	1
0	0.1	1	(1) 0.0952	(3) 0.0968	(3) 0.0975	(1) 0.0980
1	0.3	4	(4) 0.2068	(12) 0.2305	(12) 0.2443	(4) 0.2533
2	0.5	2	(2) 0.2219	(6) 0.2717	(6) 0.3056	(2) 0.3299
3	0.7	4	(4) 0.2022	(12) 0.2639	(12) 0.3105	(4) 0.3464
4	0.9	1	(1) 0.1773	(3) 0.2403	(3) 0.2911	(1) 0.3322
					Soma:	24.0722

Cálculo Numérico

Fórmulas de Newton Côtes Para Integração Dupla

$$I = c_x . c_y \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_i b_j f(x_i, y_j)$$

➔ 5 pontos ➔ Simpson grau 2 ➔ $c_x = h_x / 3$

➔ 4 pontos ➔ Simpson grau 3 ➔ $c_y = 3.h_y / 8$

Finalmente:

$$I = \left(\frac{0.2}{3}\right) . \left(\frac{0.3}{8}\right) . (24.0722) = 0.0602$$