MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Semana da Matemática

Amélia Novais

(contato: amelia@ime.unicamp.br)

DMA / IMECC / UNICAMP

Campinas (SP)

Introdução:

- Equações diferenciais como modelos matemáticos

Introdução:

- Equações diferenciais como modelos matemáticos
  - **Formulação:** Princípios conservativos (de energia, de massa, etc)
    Leis da natureza

Introdução:

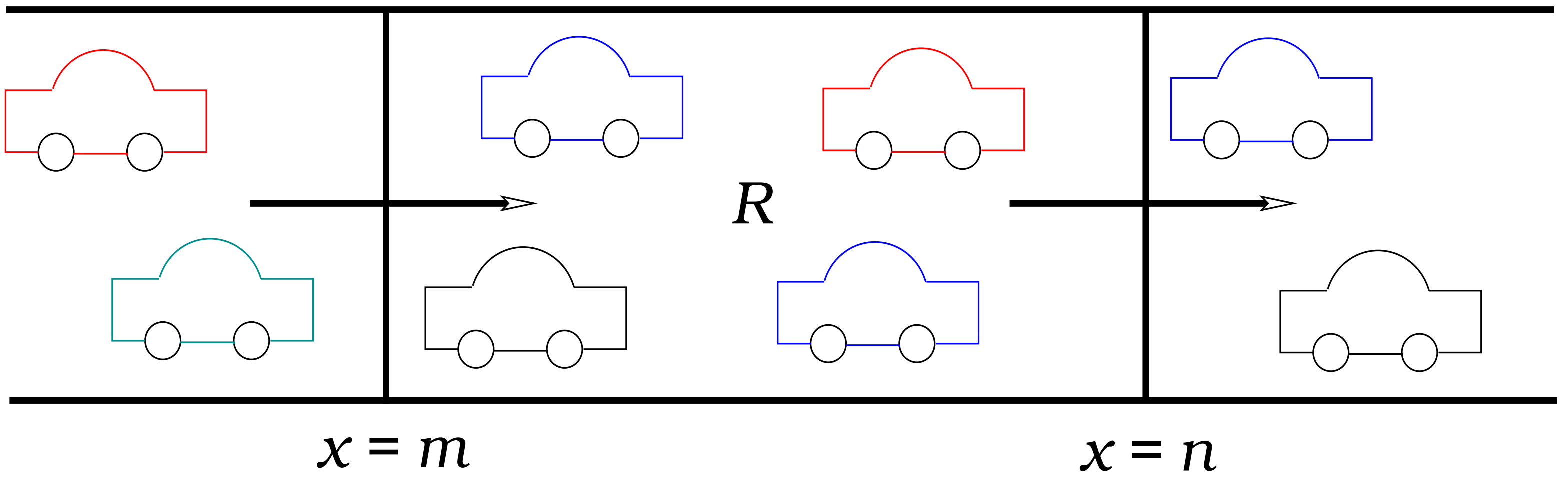
- Equações diferenciais como modelos matemáticos
  - **Formulação:** Princípios conservativos (de energia, de massa, etc)
    Leis da natureza
  - **Solução:** Técnicas Matemáticas (analítica) ou Numéricas (aproximações)

Introdução:

- Equações diferenciais como modelos matemáticos
  - **Formulação:** Princípios conservativos (de energia, de massa, etc)
    Leis da natureza
  - **Solução:** Técnicas Matemáticas (analítica) ou Numéricas (aproximações)
  - **Interpretar resultados:** Validação do modelo (laboratório...)

Modelo: Leis de conservação

o tráfego numa avenida



$f(m,t)$ = fluxo de carros que entram em R

$f(n,t)$ = fluxo de carros que saem de R

$u(x,t)$ = densidade de carros = $\dfrac{\text{número de carros}}{\text{unidade de comprimento}}$

taxa de acumulação de carros em $R = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_m^n u(x,t)\,dx$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_m^n u(x,t)dx \quad \text{ou} \quad f(m,t)-f(n,t)=-\int_m^n \frac{\partial f}{\partial x}dx.$$

$$\frac{d}{dt}\int_m^n u(x,t)dx=-\int_m^n \frac{\partial f}{\partial x}dx.$$

Desta forma

$$\int_m^n \left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\right\}dx=0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Expressões para o fluxo:

$$f(u) = au\,, \qquad f(u) = au(1-u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Expressões para o fluxo:

$$f(u) = au\,, \qquad f(u) = au(1-u)$$

- Equação Hiperbólica de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Expressões para o fluxo:

$$f(u) = au\,, \qquad f(u) = au(1-u)$$

- Equação Hiperbólica de primeira ordem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Lei de Conservação não linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial\,[u(1-u)]}{\partial x} = 0$$

Equações hiperbólicas:

$$u_t + a u_x = 0$$

com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Equações hiperbólicas:

$$u_t + au_x = 0$$

com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x).$$

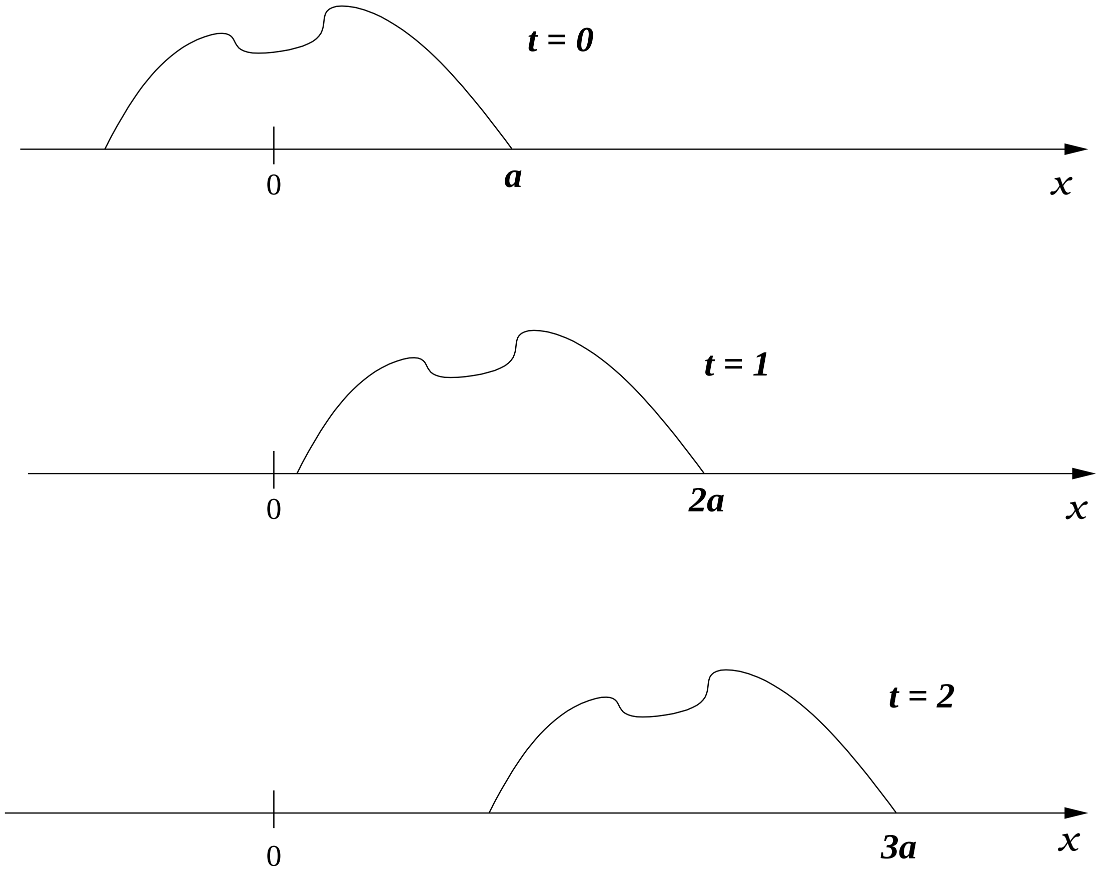
Solução:

$$u(x,t) = u_0(x - at), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0.$$

Equações hiperbólicas:

Solução:

$$u(x,t) = u_0(x - at), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0.$$

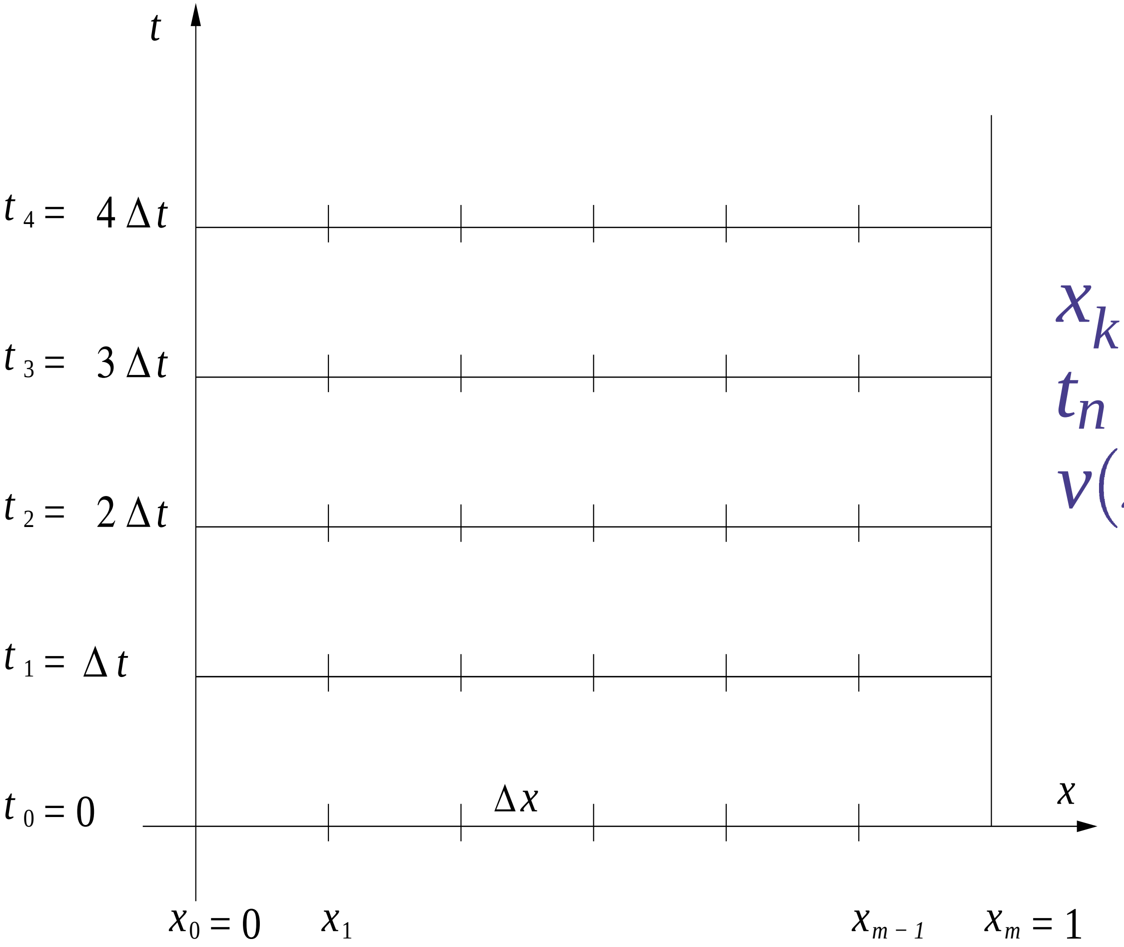


Discretização dos dados:

$$u_t + a u_x = 0$$

Discretização dos dados:

$$u_t + a u_x = 0$$



$$x_k = k\Delta x,\; k = 0,\ldots,m$$
$$t_n = n\Delta t,\; n = 0,1,\ldots$$
$$v(x_k,t_n) = v_k^n.$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k+1},t_n) &= v(x_k,t_n)+\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n) \\
&+\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k+1}, t_n) &= v(x_k, t_n) + \Delta x \, v_x(x_k, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_k, t_n) \\
&\quad + \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_k, t_n) + O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow v(x_{k+1}, t_n) - v(x_k, t_n) = \Delta x \, v_x(x_k, t_n) + O(\Delta x^2)
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k+1},t_n) &= v(x_k,t_n)+\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n) \\
&\quad +\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow v(x_{k+1},t_n)-v(x_k,t_n) = \Delta x\, v_x(x_k,t_n)+O(\Delta x^2)
$$

$$
\Rightarrow \frac{v(x_{k+1},t_n)-v(x_k,t_n)}{\Delta x} = v_x(x_k,t_n)+O(\Delta x)
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k-1}, t_n) &= v(x_k, t_n) - \Delta x\, v_x(x_k, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_k, t_n) \\
&\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_k, t_n) + O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k-1}, t_n) &= v(x_k, t_n) - \Delta x \, v_x(x_k, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_k, t_n) \\
&\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_k, t_n) + O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow v(x_k, t_n) - v(x_{k-1}, t_n) = \Delta x \, v_x(x_k, t_n) + O(\Delta x^2)
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k-1},t_n) \;&=\; v(x_k,t_n) - \Delta x\, v_x(x_k,t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_k,t_n) \\
&\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_k,t_n) + O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow v(x_k,t_n) - v(x_{k-1},t_n) \;=\; \Delta x\, v_x(x_k,t_n) + O(\Delta x^2)
$$

$$
\Rightarrow \frac{v(x_k,t_n) - v(x_{k-1},t_n)}{\Delta x} \;=\; v_x(x_k,t_n) + O(\Delta x)
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k+1},t_n) &= v(x_k,t_n)+\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n)\\
&\quad+\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)\\
v(x_{k-1},t_n) &= v(x_k,t_n)-\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n)\\
&\quad-\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

Discretização das derivadas:

$$
\begin{aligned}
v(x_{k+1},t_n) &= v(x_k,t_n)+\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n)\\
&\quad +\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)\\
v(x_{k-1},t_n) &= v(x_k,t_n)-\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+\frac{\Delta x^2}{2!}v_{xx}(x_k,t_n)\\
&\quad -\frac{\Delta x^3}{3!}v_{xxx}(x_k,t_n)+O(\Delta x^4)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow v(x_{k+1},t_n)-v(x_{k-1},t_n) = 2\Delta x\, v_x(x_k,t_n)+O(\Delta x^3)$$

Discretização das derivadas:

$$\Rightarrow v(x_{k+1},t_n) - v(x_{k-1},t_n) \;=\; 2\Delta x\, v_x(x_k,t_n) + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{v(x_{k+1},t_n) - v(x_{k-1},t_n)}{2\Delta x} \;=\; v_x(x_k,t_n) + O(\Delta x^2),$$

Discretização de v_x:

$$v_x(x_k, t_n) = \frac{v(x_{k+1}, t_n) - v(x_k, t_n)}{\Delta x} \quad \text{avançada}$$

Discretização de v_x:

$$v_x(x_k,t_n) = \frac{v(x_{k+1},t_n) - v(x_k,t_n)}{\Delta x} \quad \text{avançada}$$

$$v_x(x_k,t_n) = \frac{v(x_k,t_n) - v(x_{k-1},t_n)}{\Delta x} \quad \text{atrasada}$$

Discretização de v_x:

$$v_x(x_k,t_n) \;=\; \frac{v(x_{k+1},t_n)-v(x_k,t_n)}{\Delta x} \quad \text{avançada}$$

$$v_x(x_k,t_n) \;=\; \frac{v(x_k,t_n)-v(x_{k-1},t_n)}{\Delta x} \quad \text{atrasada}$$

$$v_x(x_k,t_n) \;=\; \frac{v(x_{k+1},t_n)-v(x_{k-1},t_n)}{2\Delta x} \quad \text{centrada}$$

Discretização de v_t:

$$v_t(x_k, t_n) \;=\; \frac{v(x_k, t_{n+1}) - v(x_k, t_n)}{\Delta t} \quad \text{avançada}$$

Discretização de v_t:

$$v_t(x_k, t_n) = \frac{v(x_k, t_{n+1}) - v(x_k, t_n)}{\Delta t} \quad \text{avançada}$$

$$v_t(x_k, t_n) = \frac{v(x_k, t_n) - v(x_k, t_{n-1})}{\Delta t} \quad \text{atrasada}$$

Discretização de v_t:

$$v_t(x_k, t_n) = \frac{v(x_k, t_{n+1}) - v(x_k, t_n)}{\Delta t} \quad \text{avançada}$$

$$v_t(x_k, t_n) = \frac{v(x_k, t_n) - v(x_k, t_{n-1})}{\Delta t} \quad \text{atrasada}$$

$$v_t(x_k, t_n) = \frac{v(x_k, t_{n+1}) - v(x_k, t_{n-1})}{2\Delta t} \quad \text{centrada}$$

Esquemas de diferenças finitas:

Avançado no tempo e no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} = 0$$

Esquemas de diferenças finitas:

Avançado no tempo e no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} = 0$$

Avançado no tempo e atrasado no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_k^n - v_{k-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Esquemas de diferenças finitas:

Avançado no tempo e no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} = 0$$

Avançado no tempo e atrasado no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_k^n - v_{k-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Avançado no tempo e centrado no espaço:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Esquemas de diferenças finitas:

Esquema *leapfrog*:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Esquemas de diferenças finitas:

Esquema *leapfrog*:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Esquema Lax-Friedrichs:

$$\frac{v_k^{n+1} - \frac{1}{2}\left(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n\right)}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Explicitando os esquemas:

$$
\begin{aligned}
v_k^{n+1} &= (1+aR)v_k^n - aRv_{k+1}^n \\
v_k^{n+1} &= (1-aR)v_k^n + aRv_{k-1}^n \\
v_k^{n+1} &= -aR(v_{k+1}^n - v_{k-1}^n) + v_k^n \\
v_k^{n+1} &= -aR(v_{k+1}^n - v_{k-1}^n) + v_k^{n-1} \\
v_k^{n+1} &= \left(\frac{1-aR}{2}\right) v_{k+1}^n + \left(\frac{1+aR}{2}\right) v_{k-1}^n
\end{aligned}
$$

onde $R = \Delta t / \Delta x$.

Exemplo:

$$u_t + u_x = 0, \qquad -3 \leq x \leq 6, \qquad t \geq 0,$$

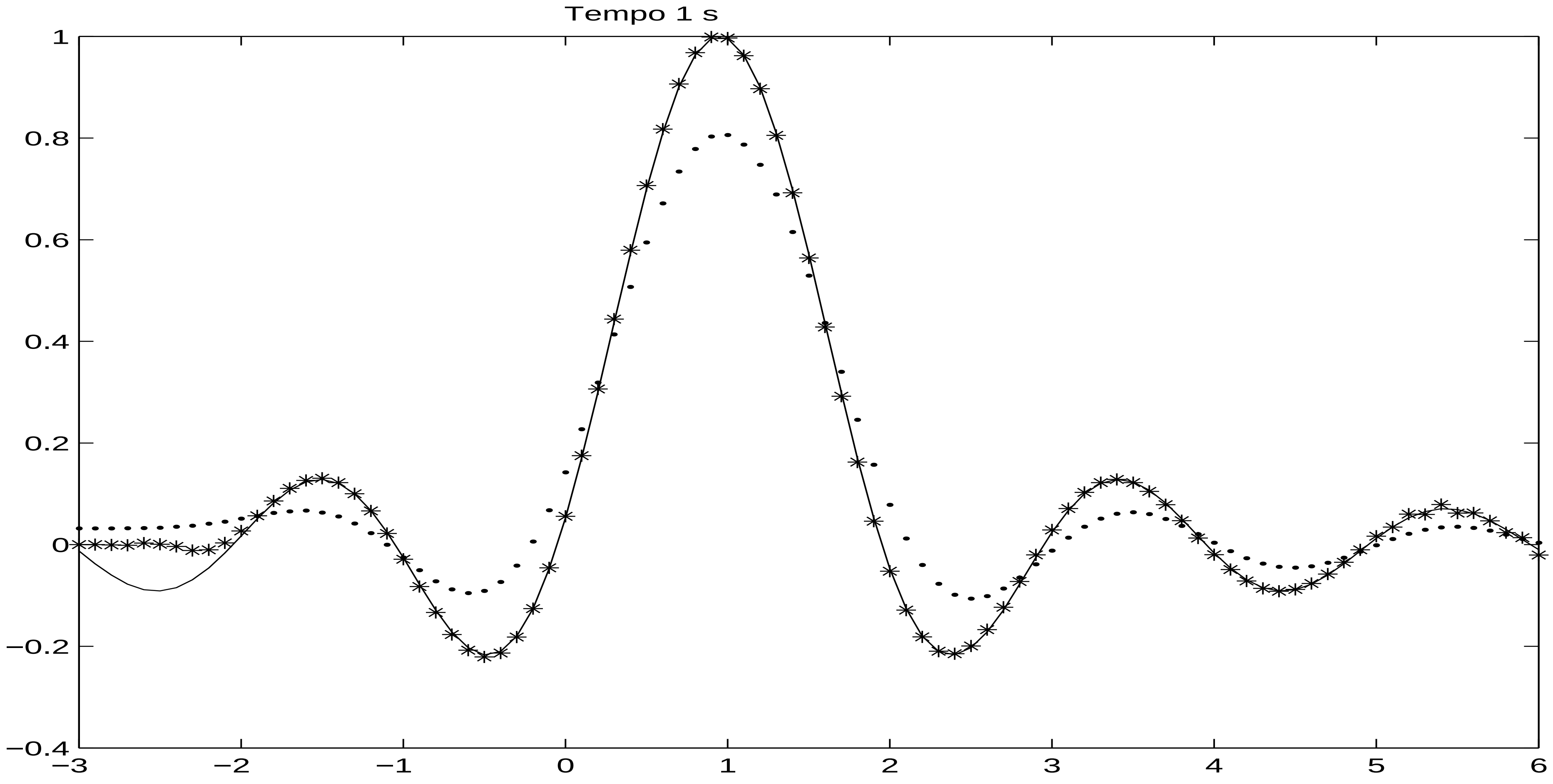
Condição de contorno: $u(-3,t) = 0$

Condição inicial:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ \sin(\pi x)/(\pi x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esquemas usados: Leapfrog e Lax-Friedrichs ($R = 0.5$ e $\Delta x = 0.1$)

Exemplo:



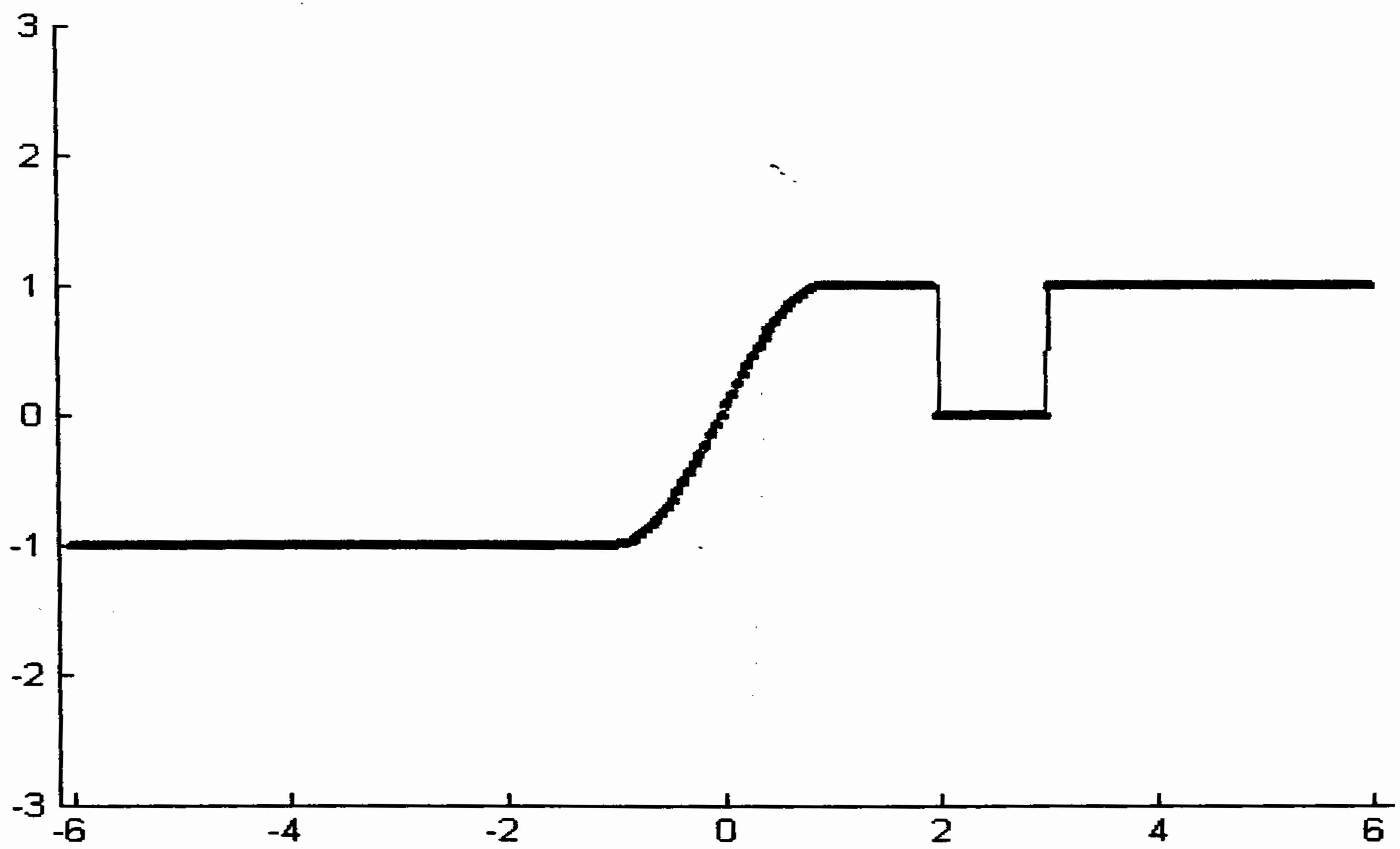
Exata: (–) , Leapfrog: (*) e Lax-Friedrichs $(\cdots)$

Exemplo:

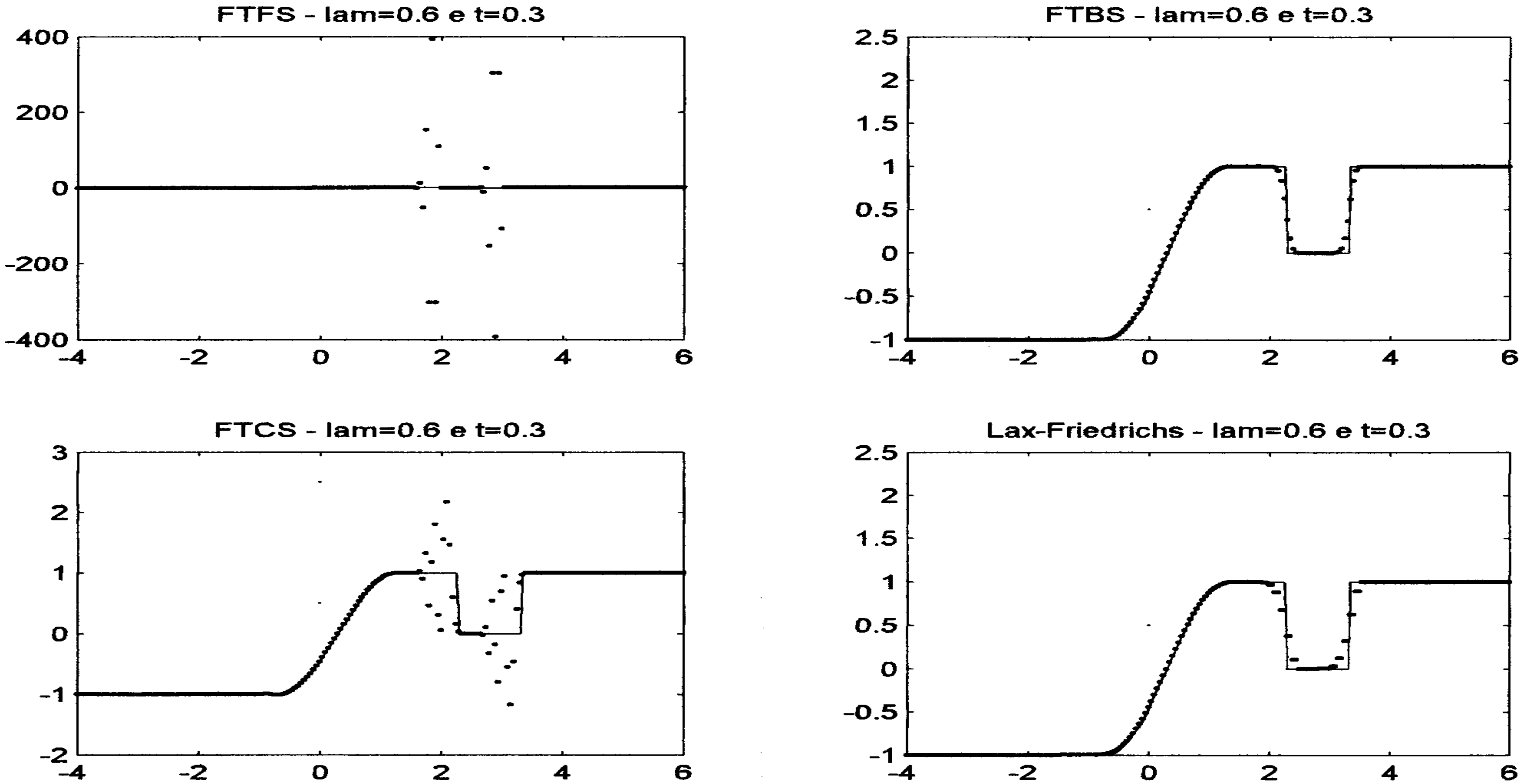
$$u_t + u_x = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x < 1 \\ \sin\frac{\pi x}{2}, & -1 \le x \le 2 \\ 0, & 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

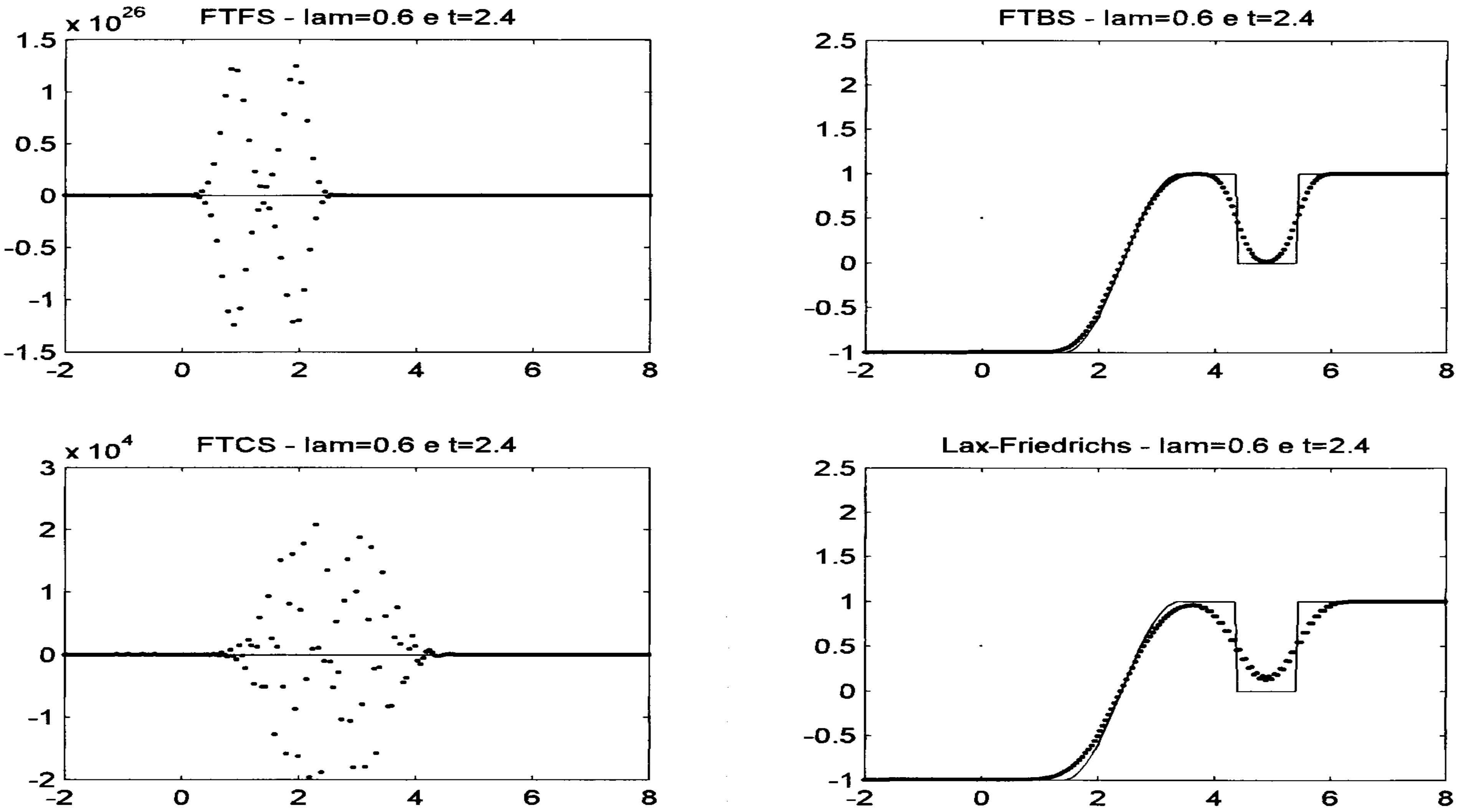
Exemplo:



Exemplo:

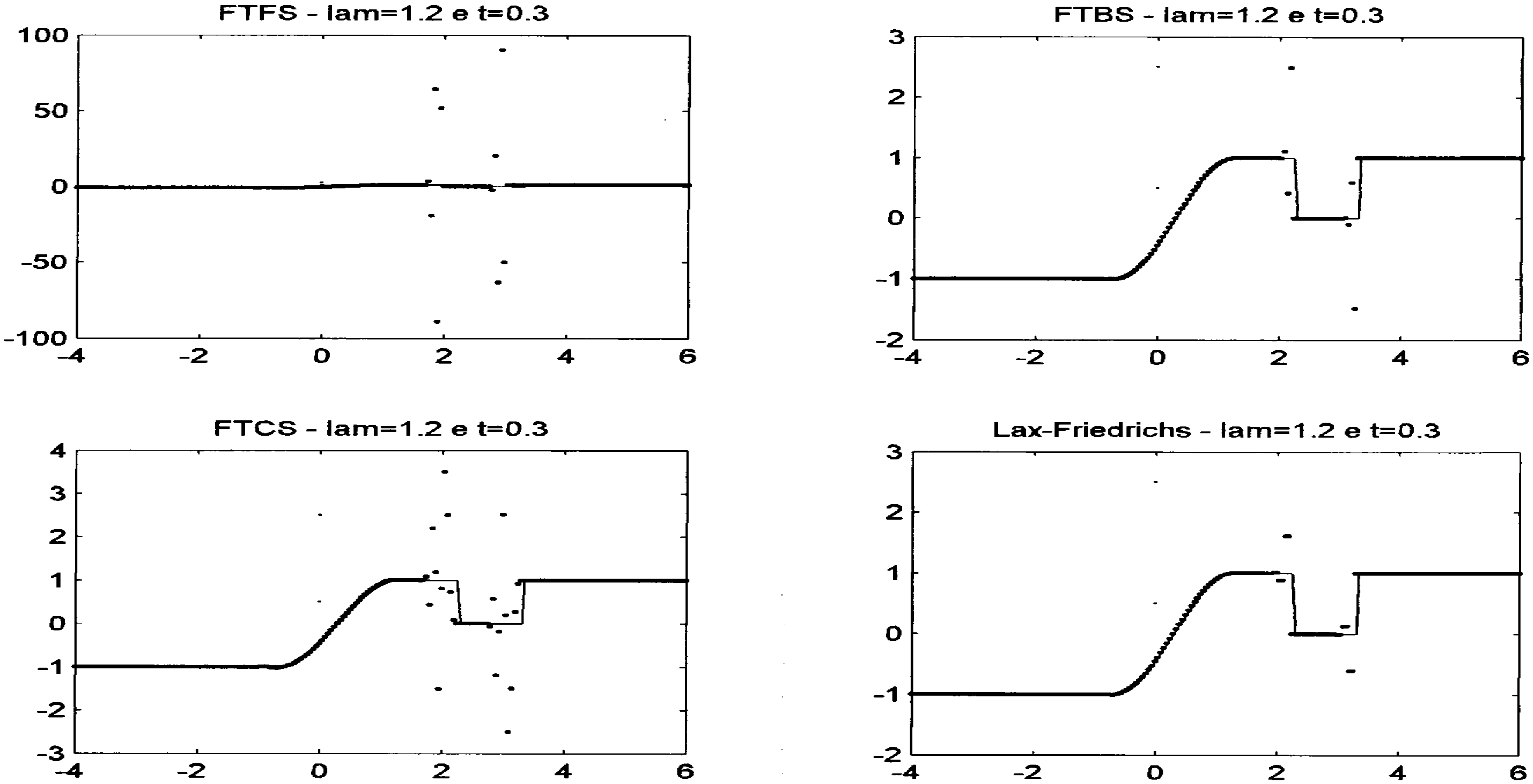

FTFS - lam=0.6 e t=0.3
FTBS - lam=0.6 e t=0.3
FTCS - lam=0.6 e t=0.3
Lax-Friedrichs - lam=0.6 e t=0.3

Exemplo:

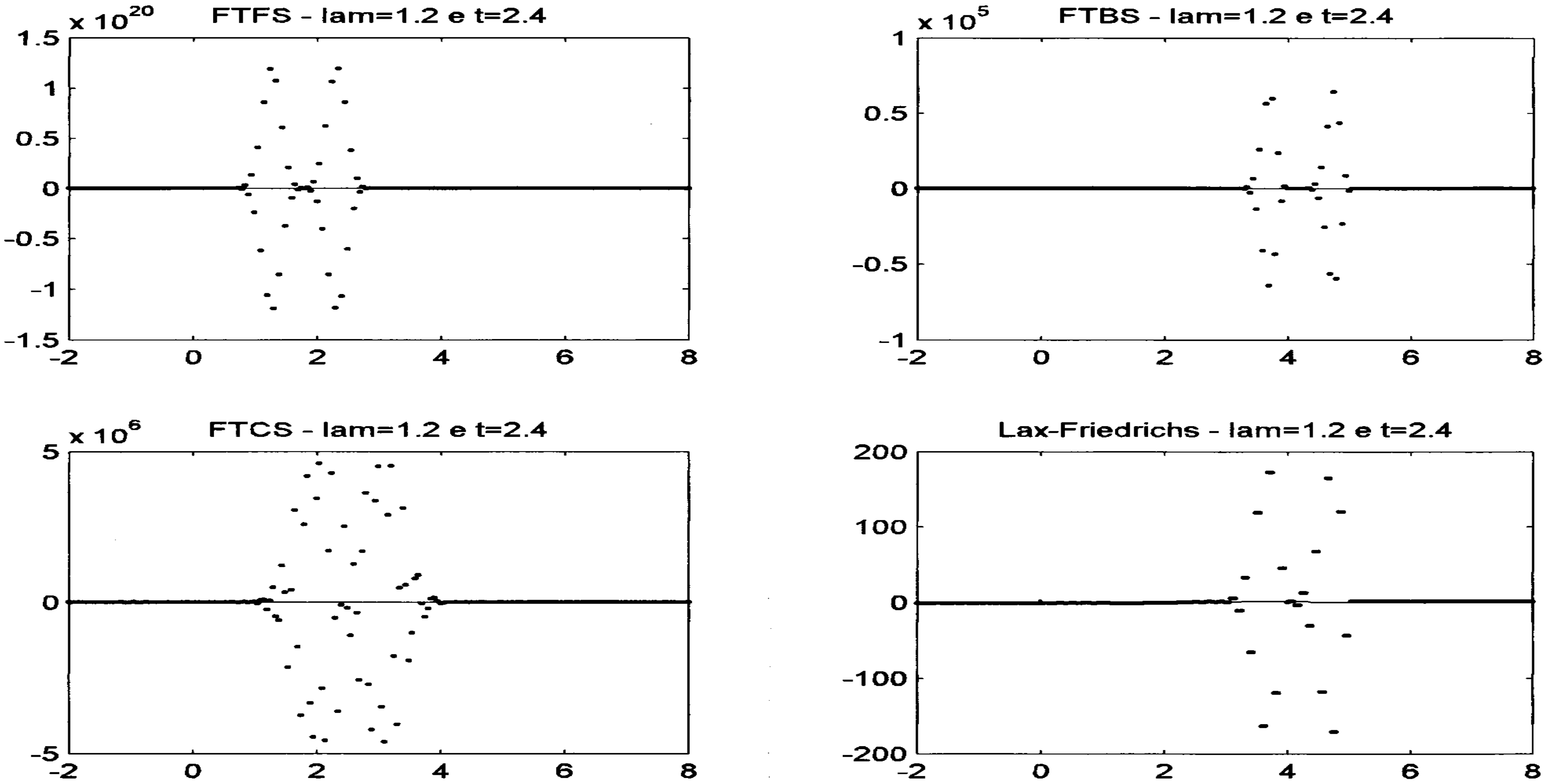


FTFS - lam=0.6 e t=2.4
x 10^26
FTBS - lam=0.6 e t=2.4
FTCS - lam=0.6 e t=2.4
x 10^4
Lax-Friedrichs - lam=0.6 e t=2.4

Exemplo:


FTFS - lam=1.2 e t=0.3
100
50
0
-50
-100
-4
-2
0
2
4
6
FTBS - lam=1.2 e t=0.3
3
2
1
0
-1
-2
-4
-2
0
2
4
6
FTCS - lam=1.2 e t=0.3
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
0
2
4
6
Lax-Friedrichs - lam=1.2 e t=0.3
3
2
1
0
-1
-2
-4
-2
0
2
4
6

Exemplo:



FTFS - lam=1.2 e t=2.4
x 10^20
FTBS - lam=1.2 e t=2.4
x 10^5
FTCS - lam=1.2 e t=2.4
x 10^6
Lax-Friedrichs - lam=1.2 e t=2.4

Convergência:

Problema:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}u &= F, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \;\; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Problema discretizado:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_k^n v_k^n &= G_k^n, \;\; -\infty < k < \infty, \; n = 0, 1, \ldots \\ v_k^0 &= f(k\Delta x) \end{aligned}$$

Definição: *Um esquema de diferenças* $\mathscr{L}_k^n v_k^n = G_k^n$ *que aproxima a equação diferencial parcial* $\mathscr{L}u = F$ *é um esquema pontualmente convergente, se para qualquer* (x,t)*, quando* $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \to (x,t)$*, então* $v_k^n \to u(x,t)$*, quando* $\Delta x \to 0$ *e* $\Delta t \to 0$.

$$\vec{u}^{\,n} = (\ldots, u^n_{-1}, u^n_0, u^n_1, \ldots)$$

Definição: O esquema $\mathscr{L}^n_k v_k = G^n_k$ é convergente na norma $\| \cdot \|$ para a solução da equação diferencial parcial $\mathscr{L} u = F$ no tempo t, se quando $(n+1)\Delta t \to t$, temos

$$\| \vec{v}^{\,n+1} - \vec{u}^{\,n+1} \| \to 0,$$

quando $\Delta t \to 0$ e $\Delta x \to 0$.

Ordem de Convergência: O esquema $\mathscr{L}_k^n v_k = G_k^n$ que aproxima a equação diferencial parcial $\mathscr{L}u = F$ é um esquema convergente de ordem (p,q), se quando $(n+1)\Delta t \to t$, temos

$$\| \vec{v}^{\,n+1} - \vec{u}^{\,n+1} \| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q),$$

quando $\Delta t \to 0$ e $\Delta x \to 0$.

Consistência:

Definição: O esquema de diferenças finitas $L_k^n v_k^n = G_k^n$ é pontualmente consistente com a equação diferencial parcial $\mathscr{L}u = F$ no ponto (x,t), se para qualquer função suave $\phi(x,t)$,

$$(\mathscr{L}\phi - F)(k\Delta x, n\Delta t) - [L_k^n \phi(k\Delta x, n\Delta t) - G_k^n] \to 0,$$

quando $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ e $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \to (x,t)$.

Consistência:

Definição: O esquema $\vec{v}^{\,n+1} = Q\vec{v}^{\,n} + \Delta t\vec{G}^{\,n}$ é consistente com a respectiva equação diferencial parcial, na norma $\|\cdot\|$, se a solução da equação diferencial parcial, u, satisfaz

$$\vec{u}^{\,n+1} = Q\vec{u}^{\,n} + \Delta t\vec{G}^{\,n} + \Delta t\vec{\tau}^{\,n}$$

e

$$\|\vec{\tau}^{\,n}\| \to 0,$$

quando $\Delta t \to 0$ e $\Delta x \to 0$, onde $\vec{u}^{\,n}$ denota um vetor cujo a k-ésima componente do vetor é $u(k\Delta x, n\Delta t)$.

Estabilidade:

$$\vec{v}^{\,n+1} = Q\vec{v}^{\,n}, \;\; n \geq 0 \qquad (*)$$

Definição: O esquema de diferenças (*) é dito estável com respeito a norma $\|\cdot\|$, se existem constantes positivas Δx_0 e Δt_0, e constantes não negativas K e β tais que

$$\|\vec{v}^{\,n+1}\| \leq Ke^{\beta t}\|\vec{v}^{\,0}\|\;,$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ e $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Exemplo:

Esquema:

$$v_m^{n+1} = \alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n,$$

para a equação diferencial $u_t + a u_x = 0$ é estável.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n|^2 \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + 2|\alpha||\beta||v_m^n||v_{m+1}^n| + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2) \\
&\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} [|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta|(|v_m^n|^2 + |v_{m+1}^n|^2) + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2)|v_m^n|^2 \\
&= (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2
\end{aligned}$$

Se $(|\alpha| + |\beta|) \leq 1$, então o esquema é estável.

Teorema de Lax:

Considere um esquema de diferenças finitas

$$\vec{v}^{\,n+1} = Q\vec{v}^{\,n} + \Delta t G^n$$

preciso de ordem (p,q) na norma $\|\cdot\|$ para um problema de valor inicial linear e bem-posto. Se este esquema é estável com respeito a norma $\|\cdot\|$, então ele é convergente de ordem (p,q) com respeito a norma $\|\cdot\|$.

Teorema de equivalência de Lax:

Um esquema de diferenças finitas de dois níveis, consistente, para um problema de valor inicial linear e bem-posto, é convergente, se e somente se, é estável.

Análise de von Neumann

Esquema avançado no tempo e atrasado no espaço

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a\frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

para a EDP

$$u_t + au_x = 0.$$

$$v_m^{n+1} = (1 - R)v_m^n + Rv_{m-1}^n$$

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{im\Delta x\xi}\, \hat{v}^{n+1}(\xi)\, d\xi$$

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{im\Delta x\xi} \left[(1-R) + Re^{-i\Delta x\xi}\right] \hat{v}^{n}(\xi)\, d\xi$$

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) \;=\; \underbrace{\left[(1-R) + Re^{-i\Delta x\xi}\right]}_{g(\Delta x\xi)} \hat{v}^{n}(\xi)$$

$$\hat{v}^n(\xi) = g(\Delta x \xi)^n \hat{v}^0(\xi)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{v}^n\|^2_{\Delta x} = \Delta x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &= \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |\hat{v}^n(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |g(\Delta x \xi)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g(\theta)|^2 &= |(1-R) + Re^{-i\theta}|^2 \\ &= 1 - 4R(1-R)\sin^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Se $0 \leq R \leq 1$, então $|g(\theta)| \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\|\hat{v}^n\|^2 = \Delta x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{v}_m^n|^2 \ &\leq \ \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\
&= \ \Delta x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 = \|v^0\|^2
\end{aligned}
$$

Teorema:

Um esquema de diferenças finitas (com coeficientes constantes) é estável, se e somente se, existe uma constante K (independente de θ, Δx e Δt) e números positivos $\Delta\tilde{t}$ e $\Delta\tilde{x}$, tais que

$$|g(\theta,\Delta t,\Delta x)| \leq 1 + K\Delta t,$$

para todo θ, $0 < \Delta t \leq \Delta\tilde{t}$ e $0 < \Delta x \leq \Delta\tilde{x}$. Se $g(\theta,\Delta t,\Delta x)$ é independente de Δx e Δt, a condição de estabilidade acima pode ser substituida por

$$|g(\theta)| \leq 1.$$

Procedimento equivalente:

Substituir v_m^n no esquema por $g^n e^{im\theta}$

Exemplo: Esquema:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

para a EDP: $u_t + au_x = 0$.

$$\frac{g^{n+1}e^{im\theta} - g^n e^{im\theta}}{\Delta t} + a\frac{g^n e^{i(m+1)\theta} - g^n e^{i(m-1)\theta}}{2\Delta x} = 0,$$

$$\Rightarrow g^n e^{im\theta}\left(\frac{g-1}{\Delta t} + a\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\Delta x}\right) = 0,$$

$$g = 1 - iR\sin\theta \qquad (R = a\Delta t/\Delta x)$$

Procedimento equivalente:

Se $\Delta t/\Delta x$ é constante, então g é independente de Δx e Δt e

$$|g(\theta)|^2 = 1 + R^2 \sin^2\theta.$$

Como $|g(\theta)|$ é sempre maior que 1 para $\theta \neq 0$ ou π, temos pelo teorema que este esquema é instável.

Métodos *upwind*

Esquema avançado no tempo e avançado no espaço:

$$v_k^{n+1} = v_k^n - R(v_{k+1}^n - v_k^n),$$

com $R = a\Delta t/\Delta x$ e $a < 0$.

Consistente de ordem: $O(\Delta t) + O(\Delta x)$

Fator de amplificação:

$$g(\theta) = 1 + R - Re^{i\theta}$$

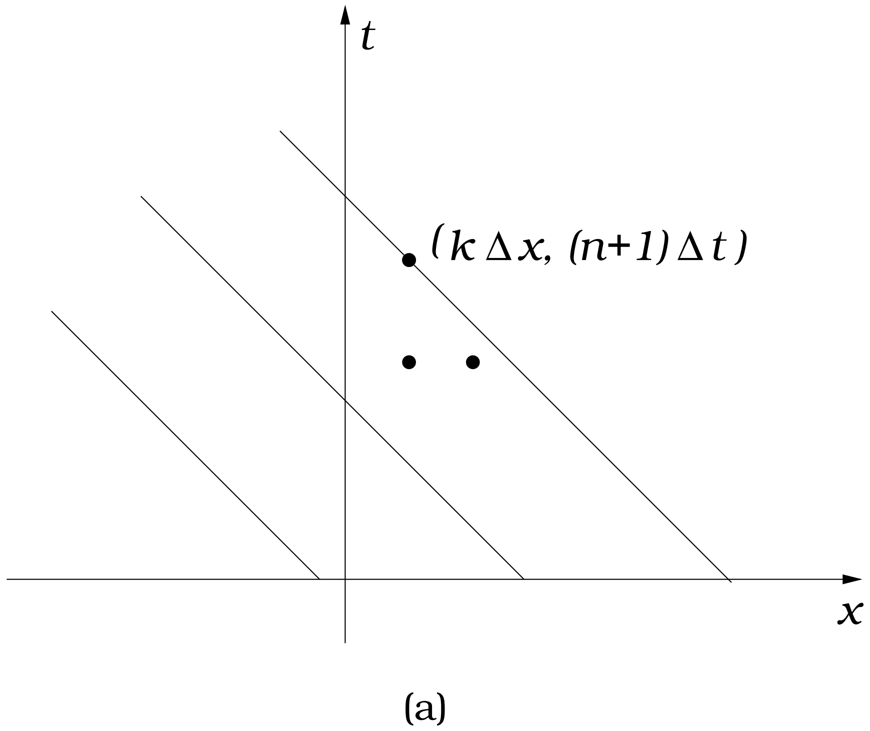
$$\Rightarrow \quad |g(\theta)|^2 = 1 + 4R(1+R)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

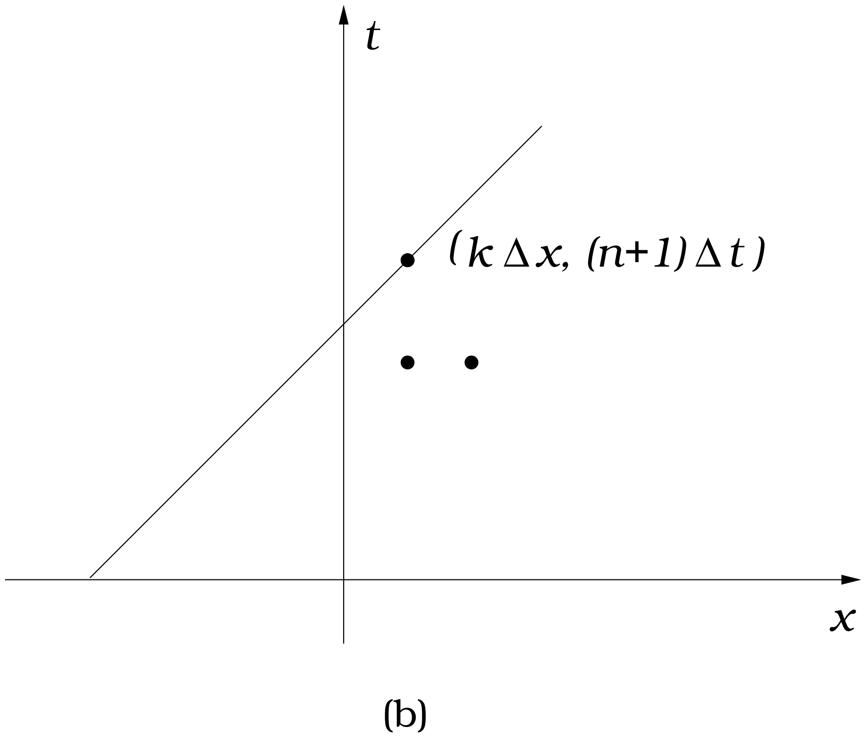
Para que o esquema seja estável,temos que ter:

$|g(\theta)|^2 \leq 1$, ou seja, $4R(1+R) \leq 0$.

Métodos *upwind*

Como $4R(1+R) \leq 0$, então $-1 \leq R \leq 0$. Condição que só pode ser satisfeita para $a < 0$.





(a) $a < 0$ (b) $a > 0$

Métodos Lax-Wendroff

Iniciamos com $u_t = -au_x$, então derivamos

$$u_{tt} = (-au_x)_t = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2 u_{xx}$$

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= u_k^n + (u_t)_k^n \Delta t + (u_{tt})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \\
&= u_k^n + (-au_x)_k^n \Delta t + (a^2 u_{xx})_k^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \\
&= u_k^n - a\left(\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\right)\Delta t \\
&\quad + a^2\left(\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)\right)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

Métodos Lax-Wendroff

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \frac{R}{2}\left(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n\right) + \frac{R^2}{2}\left(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n\right)$$

Fator de amplificação:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 1 - \frac{R}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{R^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \\ &= 1 - 2R^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - iR\sin\theta \end{aligned}$$

Então, a magnitude de $g(\theta)$ é

$$
\begin{aligned}
|g(\theta)|^2 &= \left(1 - 2R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(2R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 4R^2(1 - R^2) \sin^4 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}
$$

$$|g(\theta)| \leq 1 \Rightarrow 1 - R^2 \geq 0$$

ou seja, o esquema será estável se, e somente se,

$$|R| \leq 1$$

Método Lax-Friedrichs

$$\frac{v_k^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n)}{\Delta t} + a\frac{v_{k+1}^n + v_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Condicionalmente consistente: $O(\Delta t) + O(\Delta x^2/\Delta t)$
- Estabilidade: $|R| \leq 1$

Nome	Estabilidade	Ordem
Avançado no tempo Centrado Espaço	instável	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
Avançado no tempo Avançado no Espaço	estável $(-1 \leq R \leq 0)$	$O(\Delta t) + O(\Delta x)$
Avançado no tempo Atrasado no Espaço	estável $(0 \leq R \leq 1)$	$O(\Delta t) + O(\Delta x)$
Lax-Wendroff	estável $(\|R\| \leq 1)$	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$
Lax-Friedrichs	estável $(\|R\| \leq 1)$	Condicionalmente consistente, $O(\Delta t) + O(\Delta x^2/\Delta t)$

Dispersão:

Resolvendo a equação diferencial analiticamente:

$$u(x,t) = \hat{u}e^{i(\omega t+\beta x)} = \hat{u}e^{i\omega t}e^{i\beta x}.$$

ω é a frequência, β é o número de onda que é relacionado ao comprimento de onda $\lambda_c = 2\pi/\beta$.

Relação de dispersão: $\omega = \omega(\beta)$

Exemplo 1:

$$u_t = \nu u_{xx}$$

Relação de dispersão: $\omega = i\nu\beta^2$

$$u(x,t) = \hat{u}e^{-\nu\beta^2 t}e^{i\beta x}$$

- a onda não se move e decaí com o tempo

Exemplo 2:

$$u_t + au_x = 0$$

Relação de dispersão: $\omega = -a\beta$

$$u(x,t) = \hat{u}e^{i\beta(x-at)}$$

- onda se propaga com velocidade $-\omega/\beta$ e sua amplitude não decaí

Dissipação:

- os termos de Fourier não crescem com o tempo e ao menos um termo decai

Mediante análise feita acima:

1. a equação do calor é dissipativa, se $\nu > 0$, então todos os termos associados com todos os números de onda, $\beta \neq 0$ dissipam
2. a equação hiperbólica nem é dispersiva e nem dissipativa

Dispersão e dissipação de esquemas

O termo de Fourier discreto

$$u_k^n = \hat{u} e^{i(\omega n\Delta t + \beta k \Delta x)}$$

Relação dispersão discreta: $\omega = \omega(\beta)$ ($\omega = \alpha + ib$, com $\alpha = \alpha(\beta)$ e $b = b(\beta)$)

$$u_k^n = \hat{u} e^{i[\alpha n\Delta t + ibn\Delta t + \beta k\Delta x]} = \hat{u}(e^{-b\Delta t})^n e^{i\beta[k\Delta x - (-\alpha/\beta)n\Delta t]}$$

$$u_k^n = \hat{u}e^{i[\alpha n\Delta t + ibn\Delta t + \beta k\Delta x]} = \hat{u}(e^{-b\Delta t})^n e^{i\beta[k\Delta x - (-\alpha/\beta)n\Delta t]}$$

- se $b > 0$ para algum β, então o esquema de diferenças finitas é dissipativo
- se $b < 0$ para algum β, então soluções para o esquema serão ilimitadas (e o esquema será instável)
- se $b = 0$ para todo β, o esquema será não dissipativo

Além disso, temos

- se $\alpha = 0$ para todo β, então não se tem propagação de ondas
- se $\alpha \neq 0$ para algum β, ocorre propagação de ondas com velocidade $-\alpha/\beta$
- se $-\alpha/\beta$ é uma função não constante de β, então o esquema será dispersivo

Exemplo:

Esquema: $v_k^{n+1} = v_k^n - R(v_{k+1}^n - v_k^n)$ $(R = a\Delta t/\Delta x)$

Equação: $u_t + au_x = 0$ $(a < 0)$

Análise de von Neumann: $|R| \leq 1$

Análise de dissipação:

$$\begin{aligned} e^{i\omega\Delta t} &= e^{i\alpha\Delta t} e^{-b\Delta t} \\ &= 1 - R\{e^{i\beta\Delta x} - 1\} \\ &= 1 + R - R\cos\beta\Delta x - iR\sin\beta\Delta x \end{aligned}$$

Exemplo:

Portanto,

$$e^{-b\Delta t} = \sqrt{(1+R)^2 - 2R(1+R)\cos\beta\Delta x + R^2}.$$

- para $\beta \neq 0$ há decaimento e para $\beta = 0$ não há crescimento nem decaimento. Portanto, o esquema é dissipativo
- quando $R = -1$, temos $b = 0$ para todo β e o esquema é não dissipativo

Análise de dispersão:

$$e^{i\alpha\Delta t} = \frac{1+R-R\cos\beta\Delta x - iR\sin\beta\Delta x}{|1+R-R\cos\beta\Delta x - iR\sin\beta\Delta x|}$$

ou

$$\tan\alpha\Delta t = \frac{-R\sin\beta\Delta x}{1+R-R\cos\beta\Delta x}$$

Portanto a parte real da relação de dispersão pode ser escrita como

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t}\tan^{-1}\left\{\frac{R\sin\beta\Delta x}{1+R-R\cos\beta\Delta x}\right\}.$$

- α é não linear em β, então o esquema é dispersivo

Expandindo α em série de Taylor em torno de $\Delta x = 0$:

$$\alpha \approx -a\beta(1-\beta^2\Delta x^2(1+3R+2R^2)/6),$$

ou seja,

$$-\alpha/\beta \approx a - a\beta^2\Delta x^2(1+3R+2R^2)/6).$$

- Dispersão seja reduzida, devemos ter: $1+3R+2R^2 = 0$, ou seja, $R = -1$ ou $R = -1/2$