Universidade Federal do Rio Grande do Norte
-
DIMAP

Cálculo Numérico
U3 – Sistemas de Equações Lineares

Antonio Carlos Gay Thomé

Introdução

A resolução de sistemas lineares é uma tarefa que ocorre em diversas áreas do conhecimento.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & \cdots & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & \cdots & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

No caso geral em que o sistema linear envolve m equações com n incógnitas, o sistema pode apresentar uma única solução, infinitas soluções ou não admitir solução.

Introdução

Nesta unidade vamos analisar esquemas numéricos apenas para soluções de sistemas lineares de ***n*** **equações com** ***n*** **incógnitas**, supondo que este tenha uma única solução.

Serão analisados duas classes de esquemas numéricos: **Métodos Iterativos** e **Métodos Diretos**.

Os ***métodos iterativos*** seguem um esquema semelhante aos métodos para o cálculo de zeros de funções.

Os ***métodos diretos*** são baseados no processo de escalonamento de sistemas e matrizes.

Representação Matricial

$$S_n = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Forma Matricial de Sn

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Onde:

- $A \Rightarrow$ matriz dos coeficientes;
- $x \Rightarrow$ vetor das incógnitas (ou vetor solução);
- $b \Rightarrow$ vetor dos termos independentes.

Cálculo Numérico

Representação Matricial

Matriz Aumentada ou Matriz Completa do Sistema

$$B = [A : b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Solução do Sistema

$$\boxed{\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T.}$$

Cálculo Numérico

Classificação de um Sistema Linear

1. Quanto à Possibilidade de Solução
   - ✓ Compatível – apresenta solução
   - ✓ Incompatível – não apresenta solução

2. Quanto ao determinante da matriz A (coeficientes)

- $\det A \neq 0$ (SPD) $\Rightarrow$ sistema linear possível e determinado (SOLUÇÃO ÚNICA);
- $\det A = 0$ (SPI) ou (SI): a matriz A é SINGULAR.
  (SPI) $\Rightarrow$ Sistema possível e indeterminado,
  (SI) $\Rightarrow$ Sistema impossível.

Se $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, o sistema é dito HOMOGÊNEO. Todo sistema homogêneo é compatível, pois admite sempre a solução $x = 0$ (chamada TRIVIAL).

Cálculo Numérico

Métodos Iterativos

Suponha o Sistema Linear: $Ax = b$
onde $A \in R^{n \times n}$ e x, $b \in R^n$

Nos métodos iterativos, o sistema é reescrito na forma:
$\boldsymbol{x = Cx + g}$
onde $g \in R^n$ e $C \in R^{n \times n}$ é chamada de matriz de iteração e deve satisfazer $\|C\| < 1$.

E o processo iterativo é dado por:

Dado $x^0 \rightarrow x^{k+1} = Cx^k + g$

Métodos iterativos:
- ✓ Método Iterativo de **Gauss-Jacobi**
- ✓ Método Iterativo de **Gauss-Seidel**

7 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Critério de Parada

Sendo um processo iterativo, é necessário ter um critério de parada, i.e., ter uma medida entre as aproximações x^{k+1} e x^k que indique o instante de parar o algoritmo.

Para isto faz-se uso do conceito de **norma de matrizes**:

Uma norma em $R^{n \times m}$ decorre da aplicação de uma transformação $\|\cdot\|$: $\boldsymbol{R^{n \times m}} \rightarrow \boldsymbol{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(M1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ *e* $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0, \forall \mathbf{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$.

(M2) $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{A}\|, \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$ *e* $\forall \mathbf{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$.

(M3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$.

8 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Critério de Parada

As **normas matriciais** mais usadas são:

$$||\mathbf{A}||_1 = \max_{1 \le j \le m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

- ***máximo das colunas***

$$||\mathbf{A}||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$$

- ***máximo das linhas***

$$||\mathbf{A}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

- ***norma euclidiana***

A norma vetorial pode ser vista como um caso particular da matricial, onde um vetor $x \in R^n$ é equivalente a uma matriz de ordem $n \times 1$.

Cálculo Numérico

Critério de Parada

O conceito de norma permite definir a convergência de uma sequência de vetores $\{x^k\}$.

Dizemos que: $x^k \rightarrow \bar{x}$ *sss* $\lim_{k \to \infty} \left\| x^k - \bar{x} \right\| = 0$

Com isto podemos definir os critérios de parada: Dado um $\varepsilon > 0$

$||\mathbf{x}^{\mathbf{k}+1} - \mathbf{x}^{\mathbf{k}}|| \le \varepsilon$ Erro Absoluto

$\frac{||\mathbf{x}^{\mathbf{k}+1} - \mathbf{x}^{\mathbf{k}}||}{||\mathbf{x}^{\mathbf{k}}||} \le \varepsilon$ Erro Relativo

$||\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}|| \le \varepsilon$ Teste do Resíduo

Cálculo Numérico

Critério de Parada

As normas $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ e $\|.\|_\infty$, ainda satisfazem as seguintes regras:

(M4) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

(M5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

11 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Seja o Sistema dado por:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & \cdots & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & \cdots & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

onde os $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Em cada equação i podemos isolar a incógnita x_i obtendo as seguintes relações:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3 - \cdots - a_{1,n}x_n) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{2,2}}(b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 - \cdots - a_{2,n}x_n) \\ x_3 & = & \frac{1}{a_{3,3}}(b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2 - \cdots - a_{3,n}x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \frac{1}{a_{n,n}}(b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{array}$$

12 Curso de Cálculo Numérico - 2015

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Colocada na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & -\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & -\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}} & \cdots & -\frac{a_{2,n}}{a_{2,2}} \\ -\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}} & -\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3,n}}{a_{3,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,3}}{a_{n,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{1,1}} \\ \frac{b_2}{a_{2,2}} \\ \frac{b_3}{a_{3,3}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = C.x + g}$$

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Da forma matricial obtemos o Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Dado x^0

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{2,2}}\left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{3,3}}\left(b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3,n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{n,n}}\left(b_n - a_{n,1}x_1^{(k)} - a_{n,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{aligned}$$

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Critério de Convergência

Como critério de convergência, vimos que a matriz de iteração C deve satisfazer a condição ||C|| < 1. *Usando a Norma do Máximo das Linhas*, por exemplo, sobre a matriz C temos o seguinte critério de convergência para o Método de Gauss-Jacobi:

Dado o sistema linear Ax = b. *Se os* α_k *se apresentarem de tal forma que:*

$$\alpha_k = \frac{1}{|a_{k,k}|} \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}| < 1 \quad \textit{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

Então o Método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^k\}$ *que converge para a solução do sistema.*

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Precisão: $\varepsilon \leq 0.1$
(Norma do Máximo)
$x^0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T$

Passo 1: Verificar a Convergência

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{|a_{1,1}|}(|a_{1,2}| + |a_{1,3}|) = \frac{5}{7} < 1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{|a_{2,2}|}(|a_{2,1}| + |a_{2,3}|) = \frac{2}{3} < 1 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{|a_{3,3}|}(|a_{3,1}| + |a_{3,2}|) = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

O método CONVERGE

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Passo 2: Montar o esquema iterativo

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{7}\left(-2 - 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(3 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}\left(-1 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

Passo 3: Calcular a Iteração ***(para cada valor de k iniciando em 0)***

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{7}(-2 - 3*0.5 - 2*0.5) = 0.642 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(3 - 0.5 + 0.5) = 1.000 \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{3}(-1 - 0.5 - 0.5) = 0.666 \end{aligned}$$

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Passo 4: Verificar Critério de Parada

$$\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0.642 - 0.500 \\ 1.000 - 0.500 \\ 0.666 - 0.500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.142 \\ 0.500 \\ 0.166 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0||_\infty = 0.500 > \varepsilon$$

Passo 5: Se $x^{k+1} - x^k > \varepsilon$ ➔ faz $k = k + 1$ retorna ao passo 3

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -\frac{1}{7}(-2 - 3*1.000 - 2*0.666) = 0.904 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(3 - 0.642 + 0.666) = 1.008 \\ x_3^{(2)} &= -\frac{1}{3}(-1 - 0.642 - 1) = 0.880 \end{aligned}$$

senão ➔ encerra.

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Critério de Parada

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0.904 - 0.642 \\ 1.008 - 1.000 \\ 0.880 - 0.666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.262 \\ 0.008 \\ 0.214 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_\infty = 0.262 > \varepsilon$$

Próximos Passos: Exercício (???????)

$$x_1^3 = -\frac{1}{7}(-2-3*1.008-2*0.880) = 0.9691$$

$$x_2^3 = \frac{1}{3}(3-0.904+0.880) = 0.9920$$

$$x_3^3 = -\frac{1}{3}(-1-0.904-1.008) = 0.9707$$

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Introduz uma pequena modificação no Método de Gauss-Jacobi com o objetivo de ***torná-lo mais rápido***.

$$x_s^{(k+1)} = \frac{1}{a_{s,s}}\left(b_s - \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=s+1}^{n} a_{s,j}x_j^{(k)}\right)$$ Gauss-Jacobi

$$x_s^{(k+1)} = \frac{1}{a_{s,s}}\left(b_s - \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=s+1}^{n} a_{s,j}x_j^{(k)}\right)$$ Gauss-Seidel

Aproveita os valores já calculados na própria iteração “k+1” para acelerar a convergência.

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Critério de Convergência (Critério de Sassenfeld)

Dado o sistema linear Ax = b. *Se os β_k se apresentarem de tal forma que:*

$$\beta_k = \frac{1}{|a_{k,k}|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|a_{k,j}|\beta_j + \sum_{j=k+1}^{n}|a_{k,j}|\right) < 1 \quad para\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência $\{x^k\}$ que converge para a solução do sistema.

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Exemplo:

Dado o sistema de equações ($\varepsilon \leq 0.1$ e norma do máximo):

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Passo 1: Verificar a convergência (aplicando o máximo das colunas)

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{|a_{1,1}|}(|a_{1,2}| + |a_{1,3}|) = \frac{5}{7} < 1 \\ \beta_2 &= \frac{1}{|a_{2,2}|}(|a_{2,1}|\beta_1 + |a_{2,3}|) = \frac{6}{7} < 1 \\ \beta_3 &= \frac{1}{|a_{3,3}|}(|a_{3,1}|\beta_1 + |a_{3,2}|\beta_2) = \frac{11}{14} < 1 \end{aligned}$$

A convergência está garantida.

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Exemplo:

Passo 2: Montando o processo iterativo (k=0, x^0 = [0.5,0.5,0.5]^T)

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{7}\left(-2 - 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(2 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\left(0 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)
\end{aligned}
$$

Passo 3: Executando o processo iterativo (k = k + 1)

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{7}(-2 - 3*0.5 - 2*0.5) = 0.642 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}(2 - 0.642 + 0.5) = 0.929 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{2}(0 - 0.642 - 0.929) = 0.785
\end{aligned}
$$

Cálculo Numérico

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Exemplo:

Passo 4: Calculando a Norma do Máximo de Linha

$$
\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0.642 - 0.500 \\ 0.929 - 0.500 \\ 0.785 - 0.500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.142 \\ 0.429 \\ 0.285 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0||_\infty = 0.429
$$

Passo 5: Verificando o Critério de Parada

Se $||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0||_\infty = 0.429 > \varepsilon$ retorna ao passo 3

Senão ➔ encerra

Cálculo Numérico

Métodos Diretos

São aqueles que após um número finito de operações fornecem a ***solução exata*** do sistema, a menos dos erros de truncamento ou de arredondamento. Estes métodos são baseados no processo de escalonamento de sistemas e matrizes.

São eficientes para sistemas de pequeno porte (não mais que 50 equações), pois aplicados a um sistema de **n x n** envolve o cálculo de (**n+1**) determinantes de ordem **n**.

Cálculo Numérico

Métodos Diretos

Pertencem a esta classe todos os métodos vistos nos cursos de 1º e 2º graus, destacando-se a regra de Cramer.

- ✓ Em sistemas lineares de dimensão n x n com solução única, o vetor solução x^* é dado por $x^* = A^{-1}b$.
- ✓ Calcular a matriz inversa e multiplicá-la pelo vetor é um processo desaconselhável em função do custo computacional. Os métodos a seguir buscam evitar tais operações:
  - ➢ ***Método de Eliminação de Gauss***
  - ➢ ***Fatoração LU***
  - ➢ ***Fatoração de Cholesky***

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Baseia-se no princípio de que 02 sistemas lineares são equivalentes quando possuem a mesma solução.

O método de Gauss consiste em transformar o sistema linear original em um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, cuja resolução é imediata.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \cdots a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \cdots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{3,3}x_3 \cdots a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

(*) Este sistema admite uma única solução se $a_{i,i} \neq 0$ para i = 1, 2, . . . , n

Cálculo Numérico

Métodos da Eliminação de Gauss

A resolução de um Sistema Triangular Superior é dada por:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \cdots a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \cdots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{3,3}x_3 \cdots a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{n,n}} \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) \\ x_{n-2} &= \frac{1}{a_{n-2,n-2}}(b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n) \end{aligned}}$$

Cálculo Numérico

Métodos da Eliminação de Gauss

Algoritmo de solução de uma Matriz Triangular Superior:

Algoritmo: Retro-Solução

Input: Matriz triangular superior $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n \times n}$ e $\mathrm{b} \in \mathrm{R}^n$

$x_n \leftarrow b_n / a_{n,n}$

Para $k = n-1, n-2, \ldots 1$, faça:

$$x_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} x_j \right)$$

fim para

Output: $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$: solução do sistema

29 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Transformação de A.x = b em S.x = b'

triangular superior

É feita por operações elementares do tipo:

1. Trocar a posição de 02 equações (linhas)
2. Multiplicar uma equação por uma constante não nula
3. Adicionar a uma equação uma outra multiplicada por uma constante não nula

(*) Aplicando uma sequência qualquer dessas operações elementares num sistema A.x = b obtemos um novo sistema S.x = b' de tal forma que estes serão equivalentes.

30 *Curso de Cálculo Numérico - 2015*

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Considerando o Sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & \cdots & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & \cdots & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

se Determinante (A) ≠ 0 ➔ Existe solução e é única

✓ Passo 0: Monta-se a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & a_{1,3}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} & a_{2,3}^{(0)} & \cdots & a_{2,n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{3,1}^{(0)} & a_{3,2}^{(0)} & a_{3,3}^{(0)} & \cdots & a_{3,n}^{(0)} & b_3^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(0)} & a_{n,2}^{(0)} & a_{n,3}^{(0)} & \cdots & a_{n,n}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right)$$

Cálculo Numérico

Métodos da Eliminação de Gauss

✓ Passo 1: Elimina-se a variável x_1 em todas as equações a partir da 2ª linha

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & \cdots & a_{3,n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

✓ Passo n: Elimina-se a variável x_{n-1} na nª linha

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1}^{(n-1)} & a_{1,2}^{(n-1)} & a_{1,3}^{(n-1)} & \cdots & a_{1,n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(n-1)} & a_{2,3}^{(n-1)} & \cdots & a_{2,n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(n-1)} & \cdots & a_{3,n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

(*) as eliminações são feitas através da aplicação sucessiva das operações elementares

Método da Eliminação de Gauss

Algoritmo: Método de Eliminação de Gauss

Input: Matriz A e vetor b

Eliminação:

Para k = 1,2, ..., n-1 faça:

  Para i = k+1, ..., n faça:

   $m = a_{i,k} / a_{k,k}$

   Para j = 1, ..., n faça:

    $a_{i,j} = a_{i,j} - m * a_{k,j}$

   fim para

   $b_i = b_i - m * b_k$

  fim para

fim para

Retro-Solução:

$x_n \leftarrow b_n / a_{n,n}$

Para $k = n-1, n-2, \ldots 1$, faça:

$$x_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} x_j\right)$$

fim para

Output: $x \in R^n$: solução do sistema

Método da Eliminação de Gauss

Exemplo:

Det(A) = -20 ≠ 0

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

✓ Passo 0: Montar a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

✓ Passo 1: Eliminar x_1 das equações 2 e 3

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= L_1^{(0)} \\ L_2^{(1)} &= L_2^{(0)} - m_{2,1} L_1^{(0)}, \quad onde \quad m_{2,1} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} = \frac{7}{3} \\ L_3^{(1)} &= L_3^{(0)} - m_{3,1} L_1^{(0)}, \quad onde \quad m_{3,1} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -17/3 & 4/3 & -13/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 & 12/3 \end{array}\right)$$

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Exemplo:

✓ Passo 2: Eliminar x_2 na equação 3

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} &= L_3^{(1)} - m_{3,2} L_2^{(1)}, \quad \textit{onde} \quad m_{3,2} = \frac{a_{32}^{(01)}}{a_{2,2}^{(1)}} = \frac{2}{17} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -17/3 & 4/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & 20/17 & 20/17 \end{array}\right)$$

✓ Passo 3: Encontrar a Solução do sistema Triangular Superior

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3}{a_{3,3}} = 1 \\ x_2 &= \frac{1}{a_{2,2}}(b_2 - a_{2,3}x_3) = 1 \\ x_1 &= \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3) = 0 \end{aligned}$$

Solução do sistema:
***x* = (0, 1, 1)^T**

(*) a solução é exata

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Pivotamento Parcial

Em cada etapa k da eliminação temos o cálculo do multiplicador:

$$m_{k,j} = \frac{a_{k,j}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}.$$

Se o pivô $|a_{k,k}^{(k-1)}| \ll 1$, ou seja for próximo de zero ➔ haverá problemas com erros de arredondamento.

A estratégia do pivotamento parcial é baseada na operação elementar (I), ou seja, no início de cada etapa escolhe-se como pivô o elemento de maior módulo entre todos os coeficientes e troca-se a posição das linhas correspondentes.

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Pivotamento Parcial – Exemplo: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Passo 1: Escolher pivô

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |a_{i,1}| = |a_{3,1}|$$

Troca-se a linha L1 com a linha L3 $\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$

Passo 2: Eliminar x_1 das equações 2 e 3

$$\vdots$$

Cálculo Numérico

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa:

A inversa de uma matriz A $\in R^{n \times n}$, denotada por A^{-1}, é uma matriz $n \times n$ tal que:

$$\boxed{\mathbf{A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I}}$$

Seja A = $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$

logo $AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa:

Portanto cada coluna *k* da inversa da matriz A é solução de um sistema linear, onde o vetor dos termos independentes é a *k*-ésima coluna da matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ x_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, se temos uma matriz n×n, podemos achar sua inversa resolvendo n sistemas lineares, representados pela matriz estendida $(A|b_1|b_2| \ldots |b_n)$, onde os vetores b_k são os vetores unitários.

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa - Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Representação Estendida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 4 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa - Exemplo:

Etapa 1: *Eliminar x_1 das linhas 2 e 3.*

$$
\begin{aligned}
L_1^{(1)} &= L_1^{(0)} \\
L_2^{(1)} &= L_2^{(0)} - m_{2,1}L_1^{(0)}, \quad onde \quad m_{2,1} = \frac{3}{4} \\
L_3^{(1)} &= L_3^{(0)} - m_{3,1}L_1^{(0)}, \quad onde \quad m_{3,1} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c}
4 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 5/4 & -3/2 & -3/4 & 1 & 0 \\
0 & 1/4 & -1/2 & -3/4 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Etapa 2: *Eliminar x_2 da linhas 3.*

$$
\begin{aligned}
L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\
L_2^{(2)} &= L_2^{(1)} \\
L_3^{(2)} &= L_3^{(1)} - m_{3,2}L_2^{(1)}, \quad onde \quad m_{3,2} = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c|c}
4 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 5/4 & -3/2 & -3/4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1/5 & -3/5 & -1/5 & 1
\end{array}\right)
$$

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa - Exemplo:

Etapa 3: *Encontrar a solução dos sistemas triangulares superior.*

Primeira Coluna

$$
\begin{aligned}
x_{3,1} &= \frac{b_3^1}{a_{3,3}} = 3 \\
x_{2,1} &= \frac{1}{a_{2,2}}(b_2^1 - a_{2,3}x_3) = 3 \\
x_{1,1} &= \frac{1}{a_{1,1}}(b_1^1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3) = 4
\end{aligned}
$$

Segunda Coluna

$$
\begin{aligned}
x_{3,2} &= \frac{b_3^2}{a_{3,3}} = 1 \\
x_{2,2} &= \frac{1}{a_{2,2}}(b_2^2 - a_{2,3}x_3) = 2 \\
x_{1,2} &= \frac{1}{a_{1,1}}(b_1^2 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3) = 1
\end{aligned}
$$

Terceira Coluna

$$
\begin{aligned}
x_{3,3} &= \frac{b_3^3}{a_{3,3}} = -5 \\
x_{2,3} &= \frac{1}{a_{2,2}}(b_2^3 - a_{2,3}x_3) = -6 \\
x_{1,3} &= \frac{1}{a_{1,1}}(b_1^3 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3) = -6
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}
$$

Método da Eliminação de Gauss

Cálculo da Matriz Inversa - Exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 4 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Conversão direta

A vira Identidade

1	0	0	4	1	-6
0	1	0	3	2	-6
0	0	1	3	1	-5

Identidade vira A^{-1}

Método da Fatoração LU

Consiste em decompor a matriz A em um produto de 02 ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que conduzirá à solução do Sistema Linear Original.

Se fatorarmos A = CD teremos:

$\boxed{(CD)x = b}$

Se fizermos **y = D.*x*** ➔ resolver **A.*x* = b** é o mesmo que:

1. **Resolver o sistema linear: C.y = b e, a seguir,**
2. **Resolver o sistema linear: D.*x* = y**

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

A vantagem dos processos de fatoração está no fato de podermos resolver qualquer sistema linear que tenha A como matriz dos coeficientes. Isto é, se o vetor "b" for alterado, a resolução do novo sistema linear será quase imediata.

A fatoração **LU** é das mais empregadas. Nela, a matriz **L** é *triangular inferior com diagonal unitária* e **U** *triangular superior*.

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Cálculos de L e de U:

Os fatores L e U podem ser obtidos através de fórmulas específicas ou ser construídos usando o Método da Eliminação de Gauss.

Eliminação de Gauss é o mais usado. Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Fatoração usando Eliminação de Gauss:

Etapa 1:

Pivô $= a_{11}^{(0)} = 3$

Multiplicadores: $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{1}{3}$ e $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{4}{3}$.

Então,

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - m_{31} L_1 \end{aligned} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Uma vez que $a_{2,1}^{(1)}, a_{3,1}^{(1)}$ são nulos, podemos guardar os valores de "$m_{i,j}$" nestas posições

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{array}\right)$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Etapa 2:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

Multiplicadores: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

Teremos:

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - m_{32} L_2 \end{aligned} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Os fatores L e U são, respectivamente:

Os fatores L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Resolvendo o Sistema Linear:

Resolvendo L(Ux) = b:

i) Ly = b

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$

$$y = (1 \quad 5/3 \quad 0)^T$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração LU

Resolvendo o Sistema Linear:

ii) Ux = y:

$$Ux = y \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = (-3 \quad 5 \quad 0)^T.}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

A fatoração de Cholesky é aplicada quando a matriz A é ***positiva definida*** (**$x^T.A.x > 0$ para $\forall x \in R^n$, $x \neq 0$**).

Nestes casos "A" pode ser fatorada como:

$$\boxed{A = G.G^T}$$

onde:

G: n x n é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal ***estritamente positivos***.

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

Se A: n x n for positiva definida ➔ pode ser fatorada, de forma única, como:

$$\boxed{\mathbf{A = L.D.\underline{U}}}$$ onde:

L: n x n triangular inferior com diagonal unitária

D: n x n diagonal e

$\underline{U}$: n x n triangular superior com diagonal unitária

Caso a matriz "A" também seja simétrica ➔ $\underline{U} = L^T$ e a fatoração fica:

$$\boxed{\mathbf{A = L.D.L^T}}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

Teorema 3: Fatoração de Cholesky

Se **A: n x n** é simétrica e positiva definida ➔ existe uma matriz única triangular inferior **G: n x n** com diagonal positiva tal que $\mathbf{A = G.G^T}$

Tendo $A = L.D.L^T$ e $d_{i,i} > 0$

Tomando: $D = \underline{D}.\underline{D}$ onde $\underline{D} = D^{1/2}$

temos:

$A = (L.\underline{D}).(\underline{D}.L^T) = G.G^T$ onde $\boxed{G = L.\underline{D}}$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix}$$

Etapa 1: Fatorando em **A = L.U**

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

Exemplo:

Etapa 1: Fatorando em **U = D.<u>U</u>**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L **D** **<u>U</u>**

(*) Observe que A é simétrica ➔ **<u>U</u> = L^T**

Cálculo Numérico

Método da Fatoração de Cholesky

Exemplo:

Como A é positiva definida: $x^T.A.x > 0$

então:

G = L.<u>D</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

L <u>D</u> **G**