第十章《重积分》自测题参考答案

考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷

学院______________班级______________姓名____________学号_____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$\dfrac{e-1}{2e}$

2、2

3、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

4、$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta)r^2dr$

5、$(0,0,\dfrac{3}{4})$

二、 选择题 ***CCCCD***

三、解下列各题（本题共 6 小题，满分 52 分 ）

1、（本题 8 分）求半球体 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在圆柱 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）内那部分的体积。

解：把所求立体投影到 xoy 面，即圆柱 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）内部,容易看出所求立体的体积以 D

为底，以上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为顶的曲顶柱体的体积。

由于积分区域的边界曲线为圆周，所以采用极坐标系较好.

此时 $D\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le a\cos\theta,\end{cases}$ ……………………3 分

故 $V=\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$ ……………………3 分

$=\dfrac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=$（$\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4}{9}$）$a^3$. ……………………2 分

2、（本题 8 分）求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积。

解：由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，**…………**3 分

曲面在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\le 2x$，**………**2 分

所求曲面面积 $A=\iint\limits_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}\pi$ **………**3 分

3、（本题 9 分）计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+3x-4y+2)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$

解 $\iint\limits_D x^2 dxdy=\iint\limits_D y^2 dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^2\rho d\rho=\frac{\pi}{4}$ **…………**3 分

$\iint\limits_D 3xdxdy=0$

$\iint\limits_D (-4y)dxdy=0$ **…………**2 分

$\iint\limits_D 2dxdy=2\pi$ **…………**2 分

$\iint\limits_D (x^2+3x-4y+2)dxdy=\frac{9\pi}{4}$ **………**2 分

4、（本题 9 分）计算 $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域。

解：$\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$ **…………**6 分

$=\frac{1}{4}\int_0^1 xdx\int_0^x x^4y^6dy=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}$ **…………**3 分

5、（本题 9 分）计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+2x-3y)dxdydz$，其中 Ω 为由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2$，$z=8$ 所围成的空间闭区域。

解 旋转面为 $x^2+y^2=2z$， **…………**2 分

$\iiint\limits_\Omega 2xdxdydz=0$，$\iiint\limits_\Omega (-3y)dxdydz=0$， 2 分

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+2x-3y)dxdydz=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\rho d\rho\int_2^8 dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\rho^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 dz \qquad 3\text{ 分}$$

$$=336\pi \qquad 2\text{ 分}$$

6、（本题 9 分）设半径为 R 的非均匀球体上任一点的密度与球心到该点的距离成正比，若球体的质量为 M，求该球体对于直径的转动惯量。

解：取球心为坐标原点，建立坐标系，从而球体 Ω 的方程为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，

由已知条件可假设球体密度为 $\mu(x,y,z)$，且满足 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，…1 分

从而球体质量为

$$M=\iiint_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV \text{ ....2 分}$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2k\pi\times2\times\frac{1}{4}R^4=k\pi R^4\text{，从而 }k=\frac{M}{\pi R^4}\text{。} \qquad \text{.........2 分}$$

球体对 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dV=k\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV \qquad \text{.........2 分}$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2k\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R\rho^5 d\rho$$

$$=2k\pi\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}R^6=\frac{4}{9}MR^2. \qquad \text{.........2 分}$$

四、证明题（本题 8 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$

证明：交换积分次序得到

$$\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(\mathrm{y})\mathrm{dy}=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx \qquad \text{.........2 分}$$

利用二重积分轮换对称性得到

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(y)f(x)dy \qquad \text{.........2 分}$$

从而

$$2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy$$

$$=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy+\int_0^1 dx\int_0^x f(y)f(x)dy$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\int_x^1 f(y)dy+\int_0^x f(y)dy\right]dx,$$ ....2 分

即

$$2\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(y)f(x)dy$$

$$=\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy$$

$$=\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$$ ....2 分