第 5 章 等价关系与偏序关系

一、选择题（ 每题 3 分）

1、设 Z 为整数集，下面哪个序偶不够成偏序集（ A ）

A、 $<Z,<>$ （$<$：小于关系） B、 $<Z,\le>$ （$\le$：小于等于关系）

C、 $<Z,D>$ （D：整除 关系） D、 $<Z,M>$ （M：整倍数 关系）

2、序偶 $<\rho(A),\subseteq>$必为（ B ）

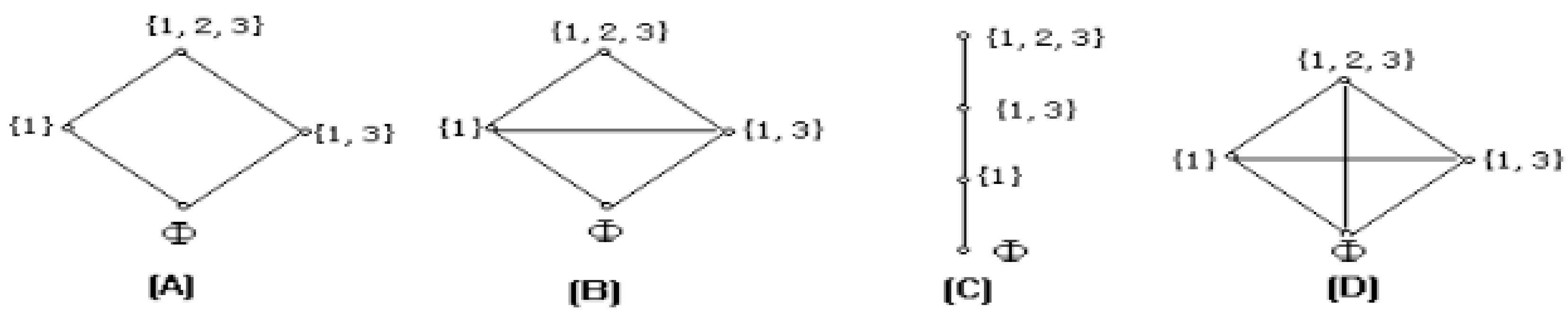
A、非偏序集 B、偏序集 C、线序集 D、良序集

3、设 $\le$：小于等于关系 Z 为整数集，下面哪个序偶能够成良序集（ D ）

A、 $<R^{+},\le>$ （R：正实数集） B、 $<Q^{+},\le>$ （Q^{+}：正 有理数集）

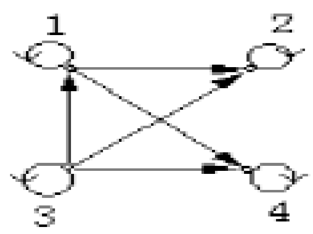
C、 $<Z^{+},\le>$ （Z^{+}：正 整数集） D、 $<N,\le>$ （N：自然数集）

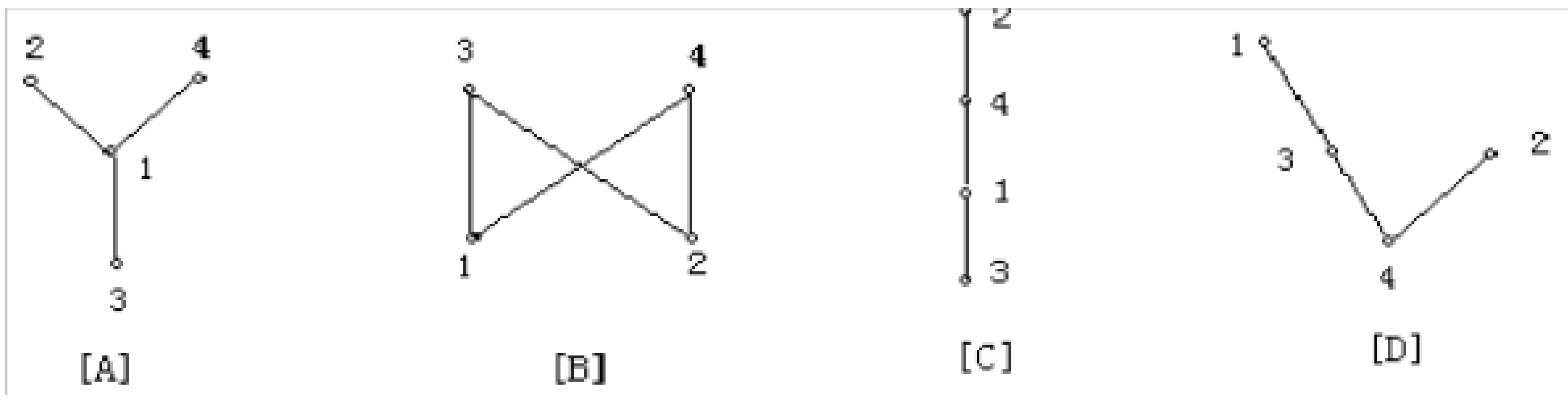
4、设 $A=\{\varnothing,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ ，则 A 上包含关系“ $\subseteq$ ”的哈斯图为（ C ）



5、集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 上的偏序关系图为

则它的哈斯图为（ A ）





6、某人有三个儿子，组成集合 $A=\{S_1, S_2, S_3\}$，则在 A 上的兄弟关系一定不是（ D ）

A、偏序关系 B、线序关系 C、良序关系 D、等价关系

7、有一个人群集合 $A=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，则在 A 上的同事关系一定是（ D ）

A、偏序关系 B、线序关系 C、良序关系 D、等价关系

8、设 A 为非空集合，则下列 A 上的二元关系中为等价关系的是（ D ）

A、空关系 B、全域关系 C、恒等关系 D、上述关系都是

9、设 $A=\{1, 2, 3\}$，则 A 上不同等价关系的个数为（ C ）

A、 3 B、 4 C、 5 D、 6

10、设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，则 A 上不同等价关系的个数为（ C ）

A、13 B、14 C、15 D、16

注：除了等价关系可以对空集定义， 而划分不能外， 等价关系与划分是相同概念的不同描述.

11、设 $S=\{1, 2\}$，“ $\bullet$ ”为 S 中元素的普通乘法，定义 $S\times S$ 上的等价关系

$R=\{<<a,b>,<c,d>> \mid <a,b>\in S\times S,<c,d>\in S\times S, a\bullet d=b\bullet c\}$，

则由 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分的分块数为（ D ）

A、1 B、 2 C、 3 D、 4

提示：记 $a_1=<1,1>, a_2=<1,2>, a_3=<2,1>, a_4=<2,2>$，

则由 R 的关系图易知 $S\times S=\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\}\}$.

12、设 $S=\{1,2,3\}$，“ $+$ ”为 S 中元素的普通乘法，定义 $S\times S$ 上的等价关系

$R=\{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \mid \langle a,b\rangle\in S\times S,\langle c,d\rangle\in S\times S,a+d=b+c\}$，

则由 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分的分块数为（ C ）

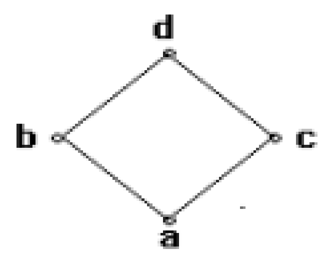
A、3　　B、5　　C、7　　D、9

提示：因 $a+d=b+c$，则 $a-b=c-d$

因 $a-b=-2,-1,0,1,2$，则等价关系 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分的分块数为 5．

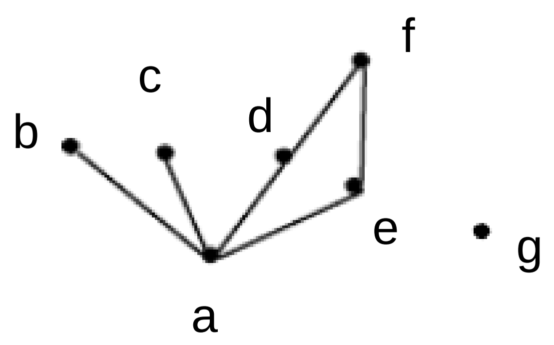
二、填充题（每题 4 分）

1、设 $A=\{a,b,c,d\}$，其上偏序关系 R 的哈斯图为



则 $R=\underline{\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}\cup I_A}$.

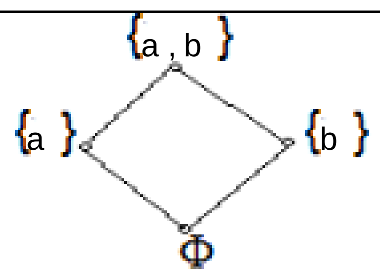
2、设 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，偏序集 $\langle A,R\rangle$ 的哈斯图为



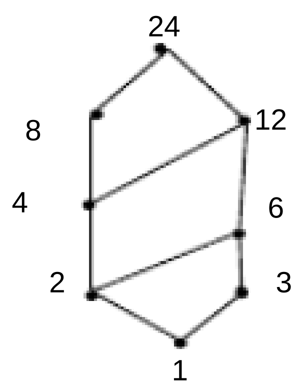
，

则 $R=\underline{\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle\}\cup I_A}$.

3、偏序集 $\langle P(\{a,b\}),\subseteq\rangle$ 的 Hass 图为



4、对于 $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，则偏序集 $\langle A,\text{整除关系}\rangle$ 的哈斯图为



.

5、设 $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，“ $\leq$ ”为 A 上整除关系，则偏序集 $\langle A,\leq\rangle$ 的极小元为 $\underline{1}$，最小元为 $\underline{1}$，极大元为 $\underline{24}$、最大元为 $\underline{24}$．

6、设 $A=\{2,3,4,6,8,12\}$，“ $\leq$ ”为 A 上整除关系，则偏序集 $\langle A,\leq\rangle$ 的极小元为 $\underline{2,3}$，最小元为无，极大元为 $\underline{8,12}$，最大元为无，既非极小元也非极大元的是 $\underline{4,6}$．

7、设 $A=\{a,b,c\}$ 考虑下列子集 $S_1=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$，$S_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$，$S_3=\{\{a\},\{b,c\}\}$，$S_4=\{\{a,b,c\}\}$，$S_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$S_6=\{\{a\},\{a,c\}\}$

则 A 的覆盖有 $\underline{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5}$，A 的划分有 $\underline{S_3,S_4,S_5}$．

8、设 $A=\{1,2,3,4\}$，$S=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ 为 A 的一个分划，则由 S 导出的等价关系为

$R=\underline{\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}}$．

提示：$R=(\{1\}\times\{1\})\cup(\{2,3\}\times\{2,3\})\cup(\{4\}\times\{4\})$．

9、非空正整数子集 A 上的模 k 等价关系 R 的秩为 $\underline{k}$，$A/R=\underline{\{[0]_k,[1]_k,\cdots,[k-1]_k\}}$．

三、问答题（每题 6 分）

1、试比较偏序集合、线序集合与良序集合.

答：若集合 A 上的二元关系 R 是自反的，反对称的和传递的，称序偶 $<A,R>$ 为偏序集；偏序集中的各元素并非都能比较，若都能比较，偏序集成为线序集；

在线序集中，若 A 的任一非空子集都有一最小元素，则线序集成为良序集.

2、设 $|A|=5$，R 是 A 的等价关系，由 R 诱导的 A 的划分块数为 3，则不同的 R 有多少种？

答：一个集合上的等价关系数目与该集合的划分数目是一致的，因而，该题只需求出将 5 个元素的集合分成 3 份的划分种数即可.

如果 3 份中元素个数分别为 3，1，1，则共有 C_5^3 种，

如果 3 份中元素个数分别为 2，2，1，则共有 C_5^2 种，

因此，A 上秩为 3 的等价关系共有 $C_5^3+C_5^2=20$.

3、设 A 是实数集合，试判断 $R=\{<x,y>|\,x\in A\wedge y\in A\wedge x-y=3\}$ 是 A 上的偏序关系吗？等价关系吗？为什么？

答：都不是；因 $\forall x\in A$，$x-x=0\neq 2$，所以 $<x,x>\notin R$，R 不是自反的.

四、画图填表题（每题 10 分）

1、设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系 $R=\{<c,d>\}\cup I_A$，画出偏序集 $<A,R>$ 的哈斯图，列表给出 A 的子集 $B_1=\{a,b,c,d,e\}$，$B_2=\{c,d\}$，$B_3=\{c,d,e\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界和下确界.

解：哈斯图如图 4.44 所示：

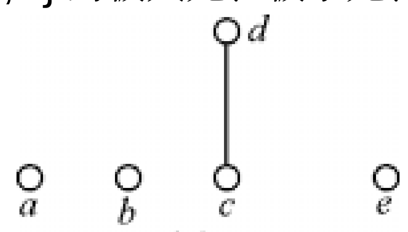


图4.44

其子集 $B_i, i=1,2,3$ 上的各种特殊元素如下表所示，

	极大元	极小元	最大元	最小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	a,b,d,e	a,b,c,e	无	无	无	无	无	无
B_2	d	c	d	c	d	c	d	c
B_3	d,e	c,e	无	无	无	无	无	无

2、设 $A=\{a,b,c\}$ 的幂集 $P(A)$ 上的关系 $\subseteq=\{<x,y>|\,x\in P(A)\wedge y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$，画出偏序集 $<P(A),\subseteq>$ 哈斯图，列表给出 $P(A)$ 子 $B_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$，$B_2=\{\{a\},\{c\}\}$，$B_3=\{\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界和下确界.

解：哈斯图如图 4.45 所示：

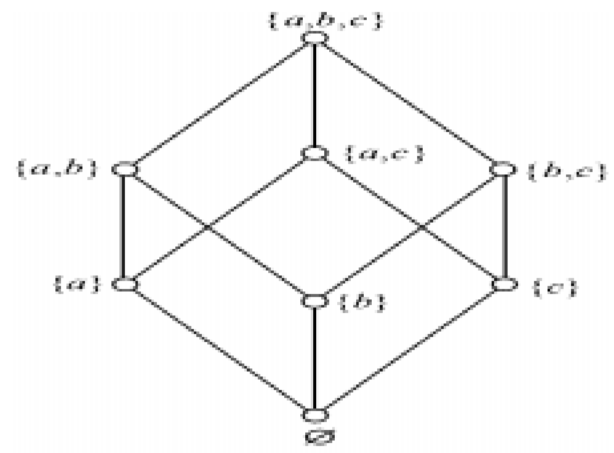


图 4.45

其子集 $B_i, i=1,2,3$ 上的各种特殊元素如下表所示，

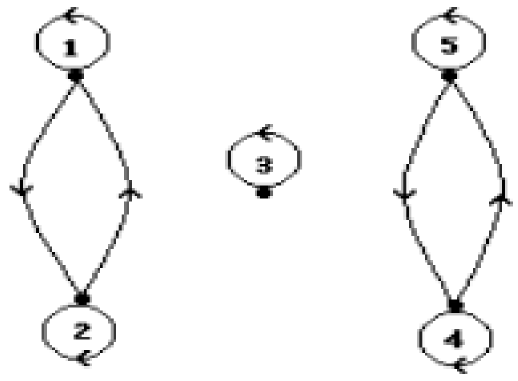
	极大元	极小元	最大元	最小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	$\{a\},\{b\}$	$\varnothing$	无	$\varnothing$	$\{a,b,c\},\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a,b\}$	$\varnothing$
B_2	$\{a\},\{c\}$	$\{a\},\{c\}$	无	无	$\{a,b,c\},\{a,c\}$	$\varnothing$	$\{a,c\}$	$\varnothing$
B_3	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,c\}$

3、试填出 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 上的等价关系 R，

其产生划分 $A/R=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$ ，并画出关系图.

解：$R=\underline{\{1,2\}\times\{1,2\}}\cup\underline{\{3\}\times\{3\}}\cup\underline{\{4,5\}\times\{4,5\}}$

其关系图为：



六、证明题（每题 10 分）

1、设 R 是 A 上的二元关系，如果 R 是传递的和反自反的，称 R 是 A 上的拟序关系，

证明：如果 R 是 A 上的拟序关系，则 $r(R)=R\cup I_A$ 是 A 上的偏序关系.

证明：（1）因 $r(R)=R\cup I_A\supseteq I_A$，有 $r(R)$ 是自反的；

（2）设 $<x,y>\in r(R)$，而 $x\neq y$，则 $<x,y>\in R$，若 $<y,x>\in R$，

由 R 的传递性，知 $<x,x>\in R$，与 R 的反自反性矛盾，则 $<y,x>\notin R$，

又 $<y,x>\notin I_A$，有 $<y,x>\notin R\cup I_A=r(R)$，于是有 $r(R)$ 是反对称的；

（3）由 R 的传递性，知 $R\circ R\subseteq R$，

因 $r(R)\circ r(R)=(R\cup I_A)\circ(R\cup I_A)=((R\cup I_A)\circ R)\cup((R\cup I_A)\circ I_A)$

$=((R\circ R)\cup(I_A\circ R))\cup((R\circ I_A)\cup(I_A\circ I_A))=(R\circ R)\cup R\cup I_A\subseteq r(R)$，则 $r(R)$ 可传递；

综上所述，可证 $r(R)$ 是 A 上的偏序关系.

2、设 R 是 A 上的二元关系，如果 R 是传递的和反自反的，称 R 是 A 上的拟序关系，

证明：如果 R 是 A 上的偏序关系，则 $R-I_A$ 是 A 上的拟序关系.

证明：（1）$(R-I_A)\cap I_A=(R\cap\overline{I_A})\cap I_A=R\cap(\overline{I_A}\cap I_A)=R\cap\varnothing=\varnothing$，则 $R-I_A$ 反自反；

（2）设 $<x,y>\in R-I_A,<y,z>\in R-I_A$，则 $<x,y>\in R,<y,z>\in R$，而 $x\neq y,y\neq z$，

因 R 是传递的，有 $<x,z>\in R$；若 $x=z$，则 $<z,y>\in R,<y,z>\in R$，由 R 的反对称性，

知 $y=z$，与 $y\neq z$ 矛盾，于是 $x\neq z$，则 $<x,z>\in R-I_A$，有 $R-I_A$ 是传递的；

综上所述，可证 $R-I_A$ 是 A 上的拟序关系.

3、设 R 是 A 上的对称和传递关系，

证明：若 $\forall a\in A,\exists b\in A,\partial<a,b>\in R$，则 R 是 A 上的等价关系.

证明：$\forall a\in A,\exists b\in A,\partial<a,b>\in R$，因 R 是对称的，有 $<b,a>\in R$，

又因 R 是传递的，所以 $<a,a>\in R$，则 R 在 A 上自反，故 R 是 A 上的等价关系.

4、设 R 是 S 上的偏序关系，证明：R^{-1} 是 S 上的偏序关系.

证明：（1）$\forall x\in S$，因 R 在 S 上的自反性，则 $<x,x>\in R$，

有 $<x,x>\in R^{-1}$，于是，R^{-1} 在 S 上是自反的；

（2）设 $<x,y>\in R^{-1}$，而 $x\neq y$，则 $<y,x>\in R$，因 R 在 S 上的反对称性，有 $<x,y>\notin R$，

则 $<y,x>\notin R^{-1}$，于是，R^{-1} 在 S 上是反对称的；

（3）设 $<x,y>\in R^{-1},<y,z>\in R^{-1}$，则 $<z,y>\in R^{-1},<y,x>\in R^{-1}$，

因 R 在 S 上的传递性，有 $<z,x>\in R$，则 $<x,z>\in R^{-1}$，于是，R' 在 S' 上是传递的；

综上所述，可证 R^{-1} 是 S 上的偏序关系.（题 **4** 在证明中用了定义法）

5、设 R 是 S 上的等价关系，证明：R^{-1} 是 S 上的等价关系.

证明：（1）因 R 在 S 上的自反性，有 $I_S\subseteq R$，则 $I_S=I_S^{-1}\subseteq R^{-1}$，有 R^{-1} 在 S 上自反；

（2）因 R 在 S 上的对称性，有 $R^{-1}=R$，则 $(R^{-1})^{-1}=R=R^{-1}$，有 R^{-1} 在 S 上对称；

（3）因 R 在 S 上的传递性，有 $R^2\subseteq R$，则 $(R^{-1})^2=R^2\subseteq R=R^{-1}$，有 R^{-1} 在 S 上可传递；

则 $R'^2\subseteq(R'\circ R)\cap(R'\circ(S'\times S'))\subseteq R\cap(S'\times S')=R'$，有 R' 在 S' 上是对称的；

综上所述，可证 R^{-1} 是 S 上的等价关系.（题 **5** 在证明中用了集合法）

6、设 R,S 是 A 上的偏序关系，证明：$R\cap S$ 是 A 上的偏序关系.

证明：(1) $\forall x\in A$，因 R,S 在 A 上的自反性，则 $<x,x>\in R\cap S$，有 $R\cap S$ 在 A 上自反；

(2) 设 $<x,y>\in R\cap S$, 而 $x\neq y$，则 $<x,y>\in R, <x,y>\in S$，因 R,S 在 A 上的反对称性，有 $<y,x>\notin R, <y,x>\notin S$, 则 $<y,x>\notin R\cap S$, 于是，$R\cap S$ 在 A 上是反对称的；

(3) 设 $<x,y>\in R\cap S, <y,z>\in R\cap S$，

则 $<x,y>\in R, <y,z>\in R; <x,y>\in S, <y,z>\in S$，因 R,S 在 A 上的传递性，

有 $<x,z>\in R, <x,z>\in S$, 则 $<x,z>\in R\cap S$，于是，$R\cap S$ 在 A 上是传递的；

综上所述，可证 $R\cap S$ 是 A 上的偏序关系.（题 **6** 在证明中用了定义法）

7、设 R,S 是 A 上的等价关系，证明：$R\cap S$ 是 A 上的等价关系.

证明：(1) 因 R,S 在 A 上自反，有 $I_A\subseteq R, I_A\subseteq S$，则 $I_A\subseteq R\cap S$，有 $R\cap S$ 在 A 上自反；

(2) 因 R,S 在 A 上对称，有 $R^{-1}=R, S^{-1}=S$，

则 $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}=R\cap S$，有 $R\cap S$ 在 A 上对称；

(3) 因 R,S 在 A 上传递，有 $R^2\subseteq R, S^2\subseteq S$，

则 $(R\cap S)^2\subseteq((R\cap S)\circ R)\cap((R\cap S)\circ S)\subseteq R^2\cap S^2\subseteq R\cap S$，有 $R\cap S$ 在 A 上可传递；

综上所述，可证 $R\cap S$ 是 A 上的等价关系.（题 **7** 在证明中用了集合法）

8、设 R 是 S 上的二元关系，$S'\subseteq S$ 定义 S' 上的二元关系 $R'=R\cap(S'\times S')$,

证明：如果 R 是 S 上的偏序关系，那么 R' 是 S' 上的偏序关系.

证明：(1) $\forall x\in S'\subseteq S$，因 R 在 S 上的自反性，则 $<x,x>\in R$，而 $<x,x>\in S'\times S'$，

有 $<x,x>\in R\cap(S'\times S')=R'$，于是，$R'$ 在 S' 上是自反的；

(2) 设 $<x,y>\in R'$, 而 $x\neq y$，则 $<x,y>\in R$, 因 R 在 S 上的反对称性，有 $<y,x>\notin R$,

则 $<y,x>\notin R\cap(S'\times S')=R'$, 于是，$R'$ 在 S' 上是反对称的；

(3) 设 $<x,y>\in R', <y,z>\in R'$，因 R 在 S 上的传递性，有 $<x,z>\in R$,

而 $<x,z>\in S'\times S'$，则 $<x,z>\in R\cap(S'\times S')=R'$，于是，$R'$ 在 S' 上是传递的；

综上所述，可证 R' 是 S' 上的偏序关系.（题 **8** 在证明中用了定义法）

9、设 R 是 S 上的二元关系，$S'\subseteq S$ 定义 S' 上的二元关系 $R'=R\cap(S'\times S')$,

证明：如果 R 是 S 上的等价关系，那么 R' 是 S' 上的等价关系.

证明：(1) 因 R 在 S 上的自反性，则 $I_S\subseteq R$，而 $S'\subseteq S$, 有 $I_{S'}\subseteq I_S\subseteq R$，而 $I_{S'}\subseteq S'\times S'$,

有 $I_{S'}\subseteq R\cap(S'\times S')=R'$，于是，$R'$ 在 S' 上是自反的；

(2) 因 R 在 S 上的对称性，有 $R^{-1}=R$，而 $(S'\times S')^{-1}=S'\times S'$,

则 $(R')^{-1}=(R\cap(S'\times S'))^{-1}=R^{-1}\cap(S'\times S')^{-1}=R'$，有 R' 在 S' 上是对称的；

(3) 因 R 在 S 上的传递性，有 $R^2\subseteq R$,

有 $R'\circ R\subseteq R^2\subseteq R$，而 $R'\circ(S'\times S')\subseteq(S'\times S')^2=S'\times S'$,

则 $R'^2\subseteq(R'\circ R)\cap(R'\circ(S'\times S'))\subseteq R\cap(S'\times S')=R'$，有 R' 在 S' 上是传递的；

综上所述，可证 R' 是 S' 上的等价关系.（题 **9** 在证明中用了集合法）

10、若 R 是 A 上的等价关系，则 $S=\{<a,b>|a,b\in A\wedge\exists c\in A(<a,c>\in R\wedge<c,b>\in R)\}$

也是 A 上的一个等价关系.

证明：(1) $\forall a\in A$，由 R 自反，则 $<a,a>\in R\wedge<a,a>\in R$，$\therefore<a,a>\in S$，有 S 自反；

(2) $\forall<a,b>\in S$，则 $\exists c\in A$，使 $<a,c>\in R, <c,b>\in R$,

由 R 在 A 上对称，有 $<b,c>\in R, <c,a>\in R$, 有 $<b,a>\in S$，知 S 对称；

(3) 若 $<a,b>\in S, <b,c>\in S$，则 $\exists d\in A$，使 $<a,d>\in R, <d,b>\in R$,

同时 $\exists e\in A$，使 $<b,e>\in R, <e,c>\in R$,

由 R 在 A 上传递，知 $<a,b>\in R, <b,c>\in R$, 有 $<a,c>\in S$，有 S 传递；

综上所述，可证 S 是 A 上的等价关系.（题 **10** 在证明中用了定义法）

六、证明计算题（ 每题 10 分）

1、设 $A=\{1,2,3\}$，在 $A\times A$ 上定义 $R: \langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R \Leftrightarrow a+b=c+d$，“$+$”为普通加法，证明：$R$ 是 $A\times A$ 上的等价关系，并求出 $[\langle 1,3\rangle]_R$，$A\times A/R$。

证明：（1）$\forall\langle a,b\rangle\in A\times A$，$\because a+b=a+b$，$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 自反；

（2）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，则 $a+b=c+d$，$\therefore c+d=a+b$，

则 $\langle\langle c,d\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 对称；

（3）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，$\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，则 $a+b=c+d=e+f$，

$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，即 R 传递；

综上得出，R 是 $A\times A$ 上的等价关系，

且 $[\langle 1,3\rangle]_R=\{\langle a,b\rangle\mid\langle a,b\rangle\in A\times A, a+b=4\}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，

$A\times A/R=\{[\langle 1,1\rangle]_R,[\langle 1,2\rangle]_R,[\langle 1,3\rangle]_R,[\langle 2,3\rangle]_R,[\langle 3,3\rangle]_R\}$。

2、设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义 $R: \langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R \Leftrightarrow a+d=b+c$，“$+$”为普通加法，证明：$R$ 是 $A\times A$ 上的等价关系，并求出 $[\langle 2,4\rangle]_R$，$A\times A/R$。

证明：（1）$\forall\langle a,b\rangle\in A\times A$，$\because a+b=b+a$，$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 自反；

（2）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，则 $a+d=b+c$，$\therefore c+b=d+a$，

则 $\langle\langle c,d\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 对称；

（3）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，$\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，

则 $a+d=b+c$，$c+f=d+e$ $\therefore a+d+c+f=b+c+d+e$

有 $a+f=b+e$，$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，即 R 传递；

综上得出，R 是 $A\times A$ 上的等价关系，

且 $[\langle 2,4\rangle]_R=\{\langle a,b\rangle\mid\langle a,b\rangle\in A\times A, a=b-2\}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，

$A\times A/R=\{[\langle 1,1\rangle]_R,[\langle 1,2\rangle]_R,[\langle 2,1\rangle]_R,[\langle 1,3\rangle]_R,[\langle 3,1\rangle]_R,[\langle 1,4\rangle]_R,[\langle 4,1\rangle]_R\}$。

3、设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义 $R: \langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$，“$\cdot$”为普通乘法，证明：$R$ 是 $A\times A$ 上的等价关系，并求出 $[\langle 2,4\rangle]_R$，$A\times A/R$。

证明：（1）$\forall\langle a,b\rangle\in A\times A$，$\because a\cdot b=b\cdot a$，$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 自反；

（2）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，则 $a\cdot d=b\cdot c$，$\therefore c\cdot b=d\cdot a$，

则 $\langle\langle c,d\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即 R 对称；

（3）$\forall\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，$\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，

则 $a\cdot d=b\cdot c$，$c\cdot f=d\cdot e$ $\therefore a\cdot d\cdot c\cdot f=b\cdot c\cdot d\cdot e$，

有 $a\cdot f=b\cdot e$，$\therefore\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，即 R 传递；

综上得出，R 是 $A\times A$ 上的等价关系，

且 $[\langle 2,4\rangle]_R=\{\langle a,b\rangle\mid\langle a,b\rangle\in A\times A, 2a=b\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，

$A\times A/R=\{[\langle 1,1\rangle]_R,[\langle 1,2\rangle]_R,[\langle 2,1\rangle]_R[\langle 1,3\rangle]_R,[\langle 3,1\rangle]_R,[\langle 1,4\rangle]_R,[\langle 4,1\rangle]_R\}$。

4、设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 A 的幂集 $\rho(A)$ 上规定 $R=\{\langle s,t\rangle\mid s,t\in\rho(A)\wedge(|s|=|t|)\}$，

证明：R 是 $\rho(A)$ 上的等价关系，并写出商集 $\rho(A)/R$。

证明：⑴ $\forall s\in\rho(A)$，由于 $|s|=|s|$，所以 $\langle s,s\rangle\in R$，即 R 自反的；

⑵ $\forall s,t\in\rho(A)$，若 $\langle s,t\rangle\in R$，则 $|s|=|t|\Rightarrow|t|=|s|$，$\therefore\langle t,s\rangle\in R$，$R$ 是对称的；

⑶ $\forall s,t,u\in\rho(A)$，若 $\langle s,t\rangle\in R$ 且 $\langle t,u\rangle\in R$，即 $|s|=|t|=|u|$，

则 $\langle s,u\rangle\in R$ 所以 R 是传递的；

综上得出，R 是 $\rho(A)$ 上的等价关系，

$\rho(A)/R=\{[\varnothing]_R,[\{1\}]_R,[\{1,2\}]_R,[\{1,2,3\}]_R,[\{1,2,3,4\}]_R\}$。