

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

第十章《重积分》自测题

考试时间：100 分钟

考试方式：闭卷

学院	班级	姓名	学号		
题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、计算 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy =$ _____

2、设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$), 又有 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = 8\pi$, 则 $a =$ _____

3、交换积分次序: $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy =$ _____

4、 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $\iiint_{\Omega} f(x) dv$ 可以用球坐标的累次积分表示为 _____

5、设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = 1$ 所围成的均匀物体（设密度 $\rho = 1$ ），则物体 Ω 的质心为 _____

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、设 $D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 3x$, 则 $\iint_D dx dy =$ ()

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

2、设 $D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x$, 则 $\iint_D (4x^2 + y^3 + \cos x \sin y) dx dy =$ ()

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

3、设平面区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$ ()

(A) $2\pi \int_0^2 rf(r) dr$ (B) $\pi \int_0^2 f(r) dr$ (C) $2\pi \int_1^2 rf(r) dr$ (D) $\pi \int_1^2 f(r) dr$.

4、设空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则有 ()

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dV = 4 \iiint_{\Omega_2} x dV$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dV = 4 \iiint_{\Omega_2} y dV$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dV = 4 \iiint_{\Omega_2} x dV$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dV = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dV$

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

5、曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 4$ 所围成的立体体积为 ()

- (A) 2π (B) 4π (C) 6π (D) 8π

三、解下列各题（本题共 6 小题，满分 52 分）

1、（本题 8 分）求半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在圆柱 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 内那部分的体积。

2、（本题 8 分）求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积。

3、（本题 9 分）计算二重积分 $\iint_D (x^2 + 3x - 4y + 2) dx dy$ ，其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$

4、（本题 9 分）计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$ ，其中 Ω 是由曲面 $z = xy$ ，平面 $y = x$ ， $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

5、(本题 9 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + 2x - 3y) dx dy dz$ ，其中 Ω 为由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z = 2$ ， $z = 8$ 所围成的空间闭区域。

6、(本题 9 分) 设半径为 R 的非均匀球体上任一点的密度与球心到该点的距离成正比，若球体的质量为 M ，求该球体对于直径的转动惯量。

四、证明题 (本题 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：
$$2 \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$$