《多元函数微分法及其应用》自测题答案

考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷

学院____________班级____________姓名____________学号____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$\{(x,y,z)\,|\,|z|\le\sqrt{x^2+y^2}\ \text{且}x^2+y^2\ne 0\}$

2、$2y+(x-y)^2$

3、1

4、$e^2dx+2e^2dy+3e^2dz$

5、$2x+3y+z-6=0$

二、 选择题　D D D C B

三、解下列各题（本题共四小题，每小题 10 分，满分 40 分 ）

1、求曲面$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-1$在点$(2,1,4)$处的法线方程。

解：法向量为$(2\boldsymbol{x},2\boldsymbol{y},-1)$，　　　4 分

在点$(2,1,4)$为$(4,2,-1)$，　　　3 分

法线方程为$\dfrac{\boldsymbol{x}-2}{4}=\dfrac{\boldsymbol{y}-1}{2}=\dfrac{\boldsymbol{z}-4}{-1}$　　　3 分

2、求函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{xy}^2+\boldsymbol{z}^3-\boldsymbol{xyz}$在点$(1,1,2)$处沿从点$(1,1,2)$到点$(2,3,4)$的方向的方向导数。

解：$\left.\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{(1,1,2)}=-1$，$\left.\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{y}}\right|_{(1,1,2)}=0$，$\left.\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{z}}\right|_{(1,1,2)}=11$　　　3 分

点$(1,1,2)$到点$(2,3,4)$的方向向量为$(1,2,2)$，　　　2 分

方向余弦为$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，方向导数为$-1\times\dfrac{1}{3}+0\times\dfrac{2}{3}+11\times\dfrac{2}{3}=7$　5 分

3、设 $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$，其中 f 对各变量具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$ 4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'\right)$ 1 分

$=2xf_1'+2xy(x^2f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}'')-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}(x^2f_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}'')$

$=2xf_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+2x^3yf_{11}''+yf_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$ 5 分

4、求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值。

解：解方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=3x^2-8x+2y=0\\f_y(x,y)=2x-2y=0\end{cases}$， 2 分

得驻点 $(0,0)$ 和 $(2,2)$， 2 分

函数的二阶偏导数为：

$A=f_{xx}(x,y)=6x-8$

$B=f_{xy}(x,y)=2$

$C=f_{yy}(x,y)=-2$ 2 分

对驻点 $(0,0)$，$AC-B^2=12>0$，且 $A=f_{xx}(0,0)=-8<0$，

所以 $f(0,0)$ 是极大值，$f(0,0)=1$； 2 分

对驻点 $(2,2)$，$AC-B^2=-12<0$，所以 $f(2,2)$ 不是极值。 2 分

四、论述题（本题共 20 分）

设函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，研究函数在原点 $(0,0)$ 处的下列问题：

（1）是否连续？
（2）偏导数是否存在和连续？
（3）沿任意方向的方向导数是否存在？
（4）是否可微？

解 （1） 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho}=0=f(0,0)$，故函数在原点连续；4 分

（2） 因为 $f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y(0,0),$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^3}=\sin^3\theta\neq f_x(0,0)$ ， $f_x(x,y)$ 在原点不连续；

同样 $f_y(x,y)$ 在原点不连续。 6 分

(3) 设 $\vec{l}$ 与 x 轴正向夹角为 φ，则在 $\vec{l}$ 上取一点 (x,y) $(x^2+y^2\neq 0)$，且

$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, \rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因此在原点处有方向导数为

$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\cos\varphi\sin\varphi=\cos\varphi\sin\varphi$； 5 分

（4） 因为 $\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \Delta x=\rho\cos\theta, \Delta y=\rho\sin\theta$ ，则

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho}=\cos\theta\sin\theta\neq o(\rho)$，因此函数在原点不可微。 5 分