中国矿业大学 2019 ～ 2020 学年第 二 学期

《空间解析几何及向量代数》测试题答案

（ 考试时间：100 分钟　　考试方式：闭卷 ）

院系______________ 班级_______________姓名_______________学号_____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

(2) $\dfrac{\pi}{3}$

(3) $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$

(4) 3

(5) $(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

二、单项选择题（每小题 4 分，本题共 20 分）

1. (C)　2.(C)　3.(C)　4. (B)　5.(A)

三、(10 分) $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$。

解 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2}$

$$=\sqrt{2^2+2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1}=\sqrt{7}$$ ……………………（每一步 2 分）

四、(10 分) 一平面通过点 $(1,2,3)$，它在正 x 轴，正 y 轴上的截距相等，且 z 轴上截距为正，问此平面在三坐标面上截距为何值时，它与三个坐标平面围成的四面体的体积最小？并写出平面方程。

解 依题意设所求平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{c}=1$，由于点 $(1,2,3)$ 在此平面上，故有 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{c}=1$，解之 $c=\dfrac{3a}{a-3},(a>3)$。………………………2 分

四面体之体积 $V=\dfrac{1}{6}a\cdot a\cdot\dfrac{3a}{a-3}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^3}{a-3}$，………………………2 分

$V'=\dfrac{1}{2}\dfrac{3a^2(a-3)-a^3}{(a-3)^2}$，……………………2 分

令 $V'=0$ 得 $a=\dfrac{9}{2},c=9$。……………………2 分

平面方程 $2x+2y+z=9$ ……………………2 分

五、(10 分) 求过点 $p_0(-1,2,-3)$ 且平行于平面 $\Pi:6x-2y-3z+2=0$，又与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 相交的直线方程。

解 设 $Q(x,y,z)$ 为两直线的交点，则 $\overrightarrow{P_0Q}//\Pi,\ \overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{n}=0$，即……………………2 分

$$6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0\text{，（1）}$$ ……………………2 分

又 Q 在 L 上：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$（2）……………………2 分

令（2）$=t$ 解得 x,y,z 代入(1)解得 $t=0$，……………………2 分

在反代入（2）得 Q 的坐标为 $(1,-1,3)$，得直线为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$$ ……………………2 分

六、 (15 分)求过点 $(1,2,1)$ 而与直线 $l_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$，$l:\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程。

解：因 $\overrightarrow{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(1,-2,-3)$ 为直线 l_1 的方向向量，…………4 分

$\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(0,-1,-1)$ 直线 l_2 的方向向量。…………4 分

取 $\vec{n}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&-3\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(-1,1,-1)$，…………4 分

则通过点$(1,2,1)$并以$\vec{n}$为法向量的平面方程$x-y+z=0$即为所求的平面方程。……3 分

七、 (15 分) 求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程，并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程。

解　将直线l改写为$\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$，所以经过$l$的平面方程可设为…………3 分

$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$，即$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0$。…………3 分

由于它与平面π垂直，故有$1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得$\lambda=-2$。

于是经过l且垂直于π的平面方程为$x-3y-2z+1=0$。从而l_0的方程为

$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$…………3 分

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$是直线l_0上的任意一点，设$M(x,y,z)$为所求曲面上的任意一点，则

$$y=y_1,\quad x^2+z^2=x_1^2+z_1^2 \text{…………2 分}$$

又由直线l_0的对称式：$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$得：$x_1=2y_1,\ z_1=-\dfrac{1}{2}(y_1-1)$…………2 分

故于是l_0绕y轴旋转一周生成的曲面方程为 $x^2+z^2=4y^2+\dfrac{1}{4}(y-1)^2$

即　$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$。…………2 分