5.3 定轴转动的转动惯量

- 质量离散分布的刚体 $J=\Sigma\Delta m_i r_i^2$
- 质量连续分布的刚体 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

dm为质量元，简称质元。其计算方法如下:

质量为线分布 $\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$

质量为面分布 $\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}s$

质量为体分布 $\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$

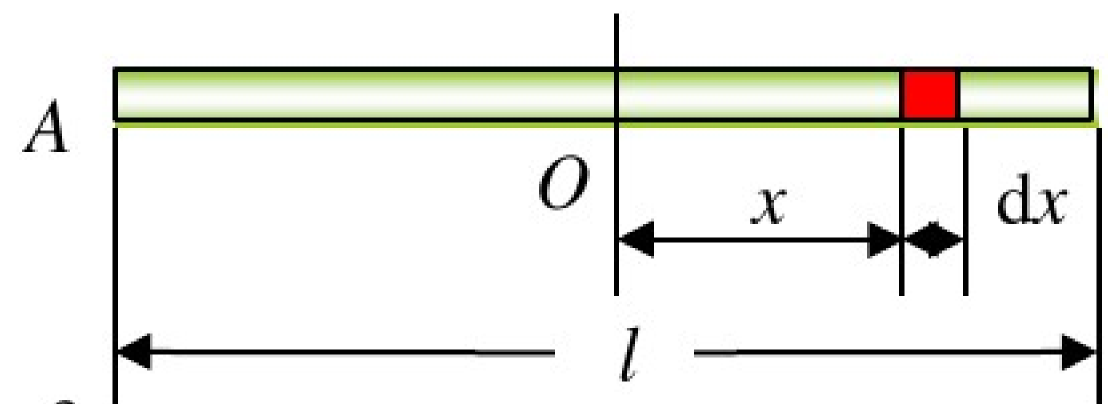
J与质量大小、质量分布、转轴位置有关

演示程序： 影响刚体转动惯量的因素

例题1 求质量为m，长为l的均匀细棒对下面转轴的转动惯量：(1)转轴通过棒的中心并和棒垂直；(2) 转轴通过棒的一端并和棒垂直。

解：(1) 在棒上离轴x处，取一长度元dx（如图所示），如果棒的质量线密度为λ，则长度元的质量为$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$，根据转动惯量计算公式：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$

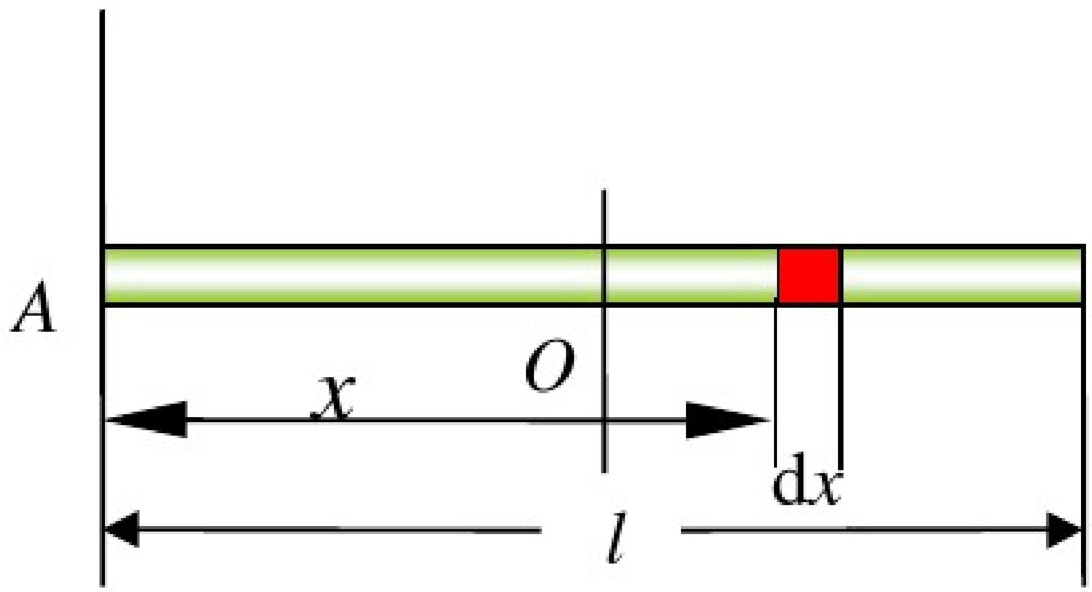


有

$$J_0=\int r^2\mathrm{d}m=\int_{-l/2}^{l/2}\lambda x^2\mathrm{d}x=\frac{\lambda l^3}{12}$$

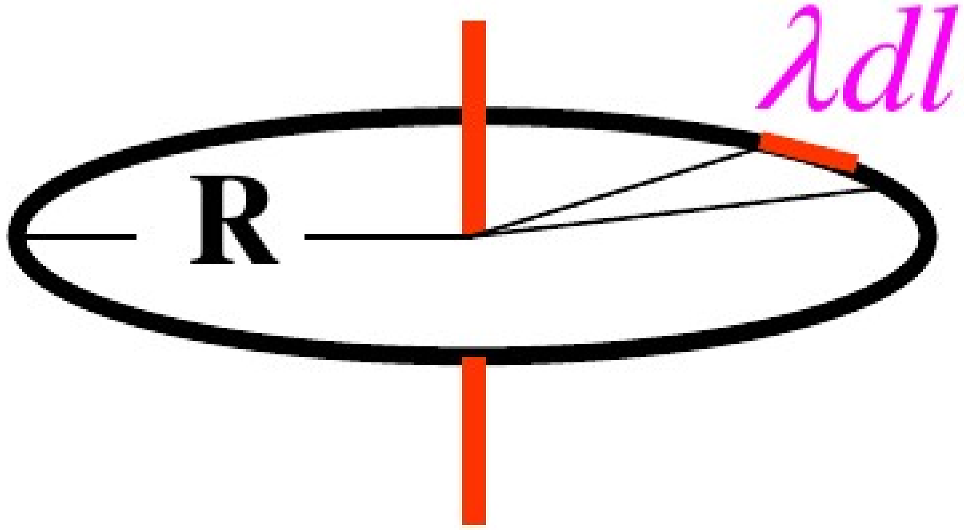
将 $\lambda l=m$ 代入上式，得： $J_0=\dfrac{1}{12}ml^2$

（2）当转轴通过棒的一端A并与棒垂直时

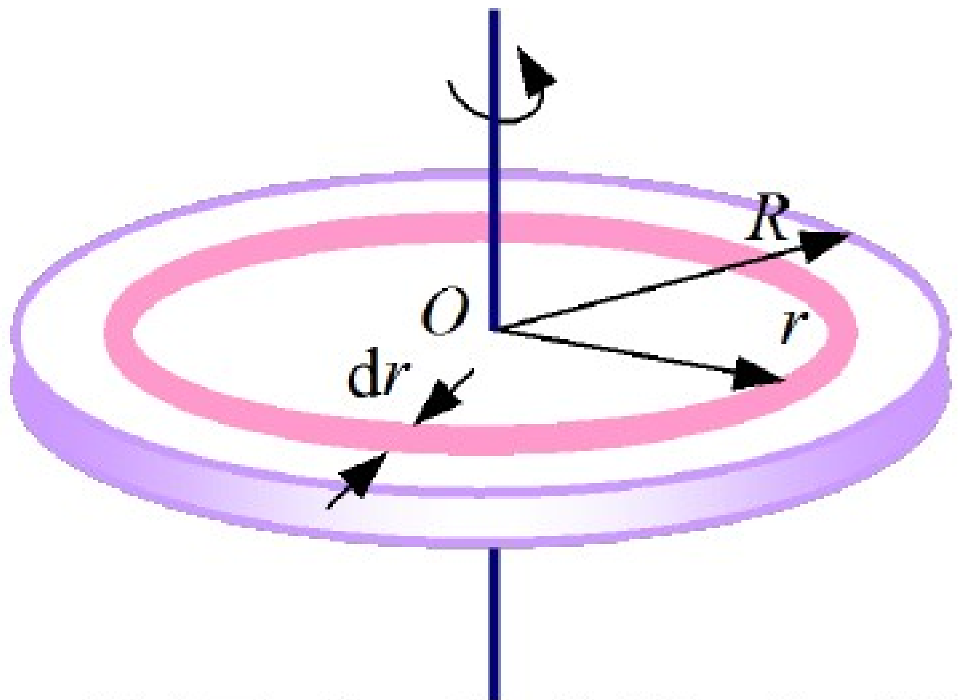


$$J_0 = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_0^l \lambda x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} m l^2$$

例题2）半径为R的质量均匀分布的细圆环，质量均为m，试分别求出对通过质心并与环面垂直的转轴的转动惯量。



例题3 求质量为m、半径为R、厚为h的均质圆盘对通过盘心并与盘面垂直的轴的转动惯量。



解：如图所示，将圆盘看成许多薄圆环组成。取任一半径为r，宽度为dr的薄圆环，此薄圆环的转动惯量为

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m$$

dm为薄圆环的质量。以 ρ表示圆盘的质量体密度

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho \cdot 2\pi r h \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = 2\pi r^3 h\rho \mathrm{d}r$$

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^R 2\pi r^3 h\rho \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi R^4 h \cdot \rho$$

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

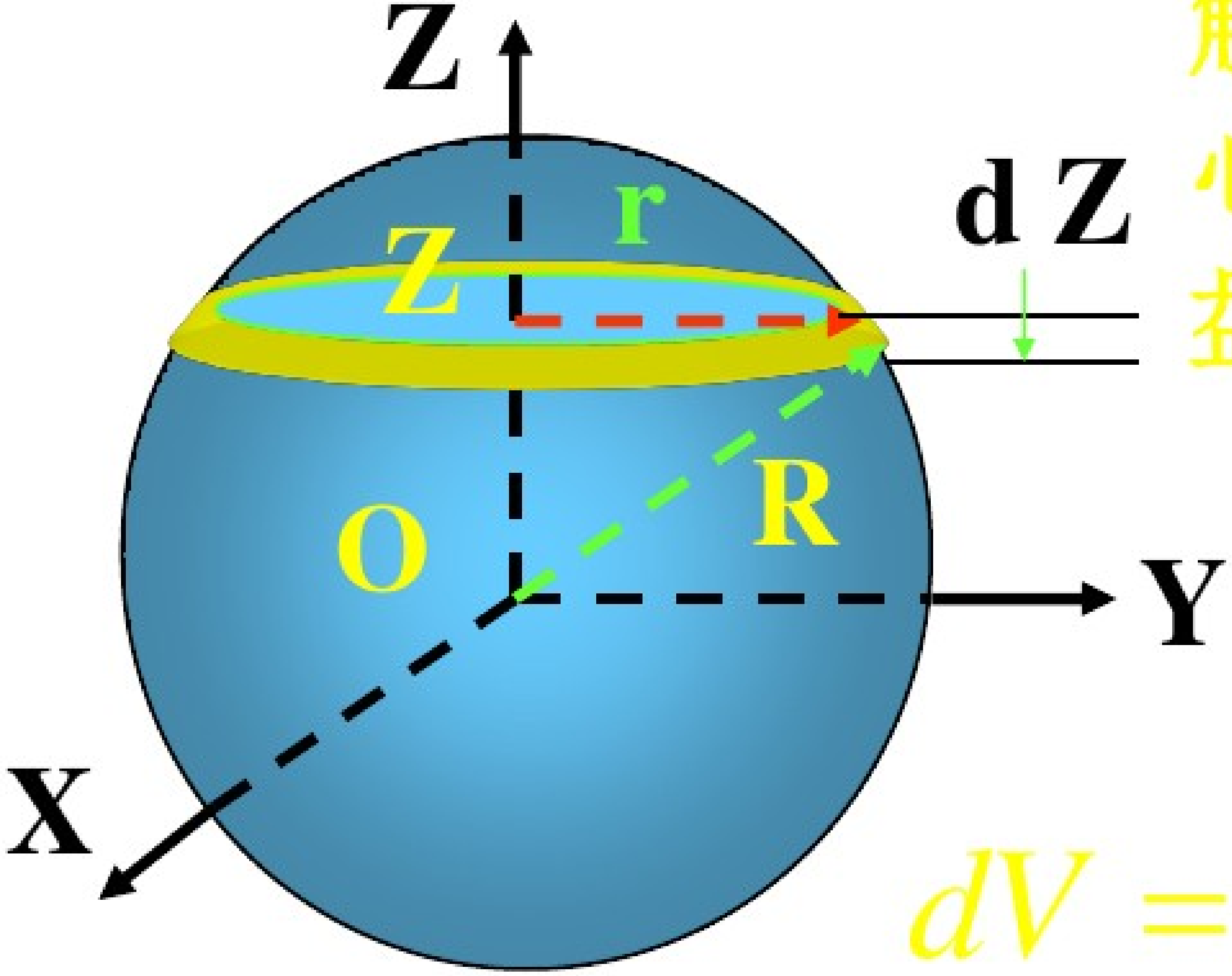
代入得

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

***J*与*h*无关**

一个质量为***m***、半径为***R***的实心圆柱体对其中心轴的转动惯量也与上述结果相同。

例4）求一质量为m的均匀实心球对其一条直径为轴的转动惯量。



解：一球绕Z轴旋转，离球心Z高处切一厚为dz的薄圆盘。其半径为

$$r = \sqrt{R^2 - Z^2}$$

其体积：

$$dV = \pi r^2 dZ = \pi(R^2 - Z^2)dZ$$

其质量： $dm = \rho dV = \rho\pi(R^2 - Z^2)dZ$

其转动惯量: $dJ = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - Z^2)^2 dZ$

$$dJ = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} \rho\pi (R^2 - Z^2)^2 dZ$$

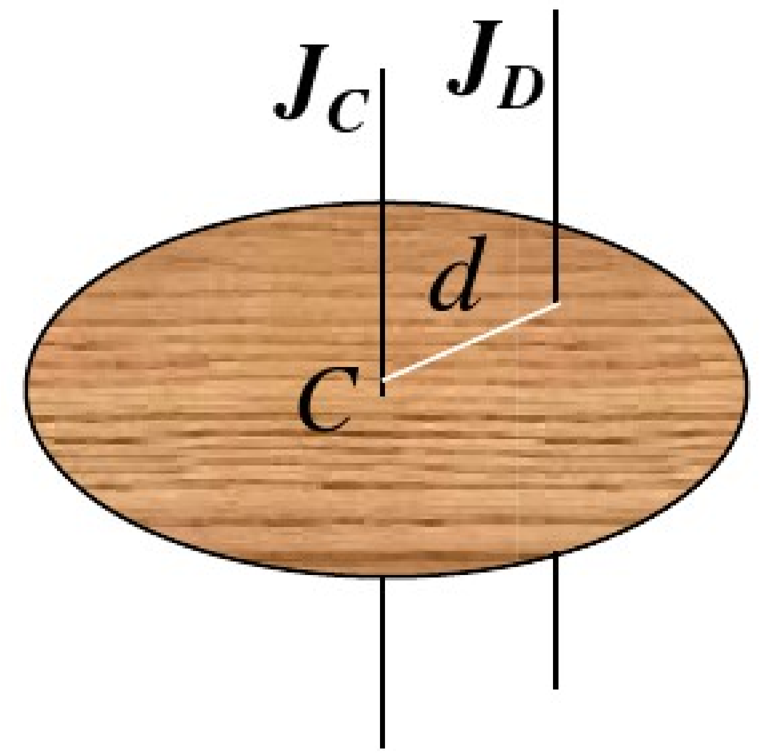
$$\therefore J = \int dJ$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \rho\pi (R^2 - Z^2)^2 dZ$$

$$= \frac{8}{15} \rho\pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \quad m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

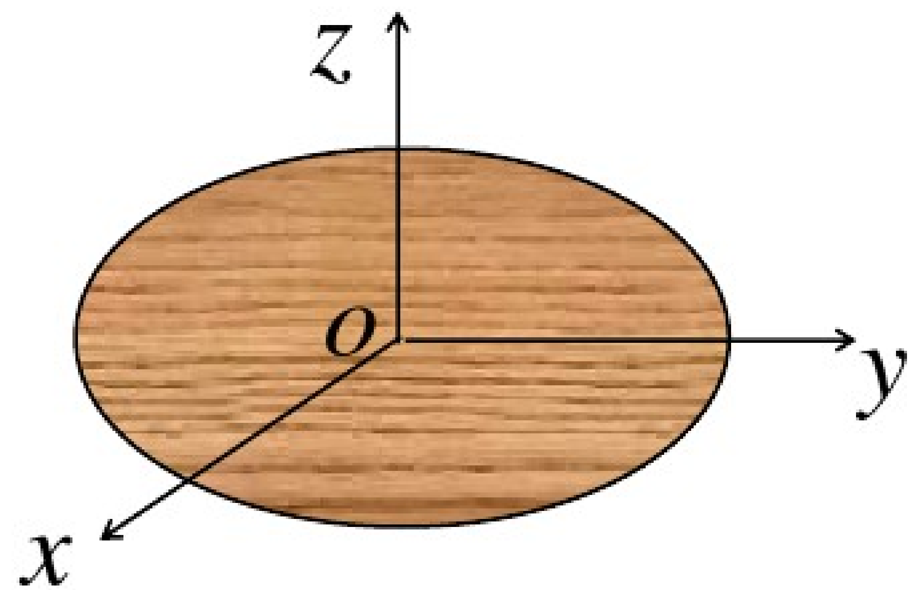
（1）平行轴定理

$$J_D = J_C + md^2$$

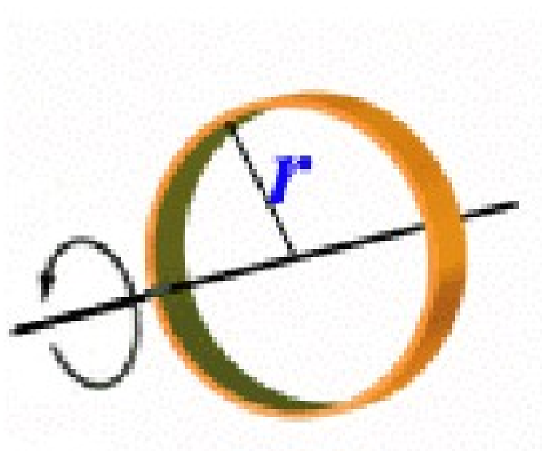


（2）薄板的正交轴定理

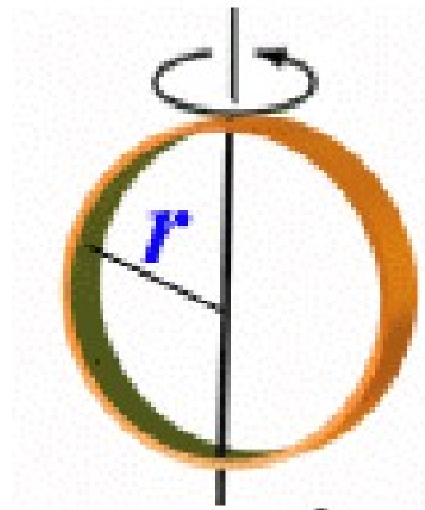
$$J_z = J_x + J_y$$



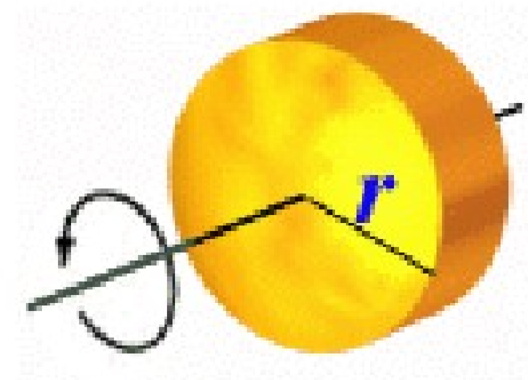
常见刚体的转动惯量



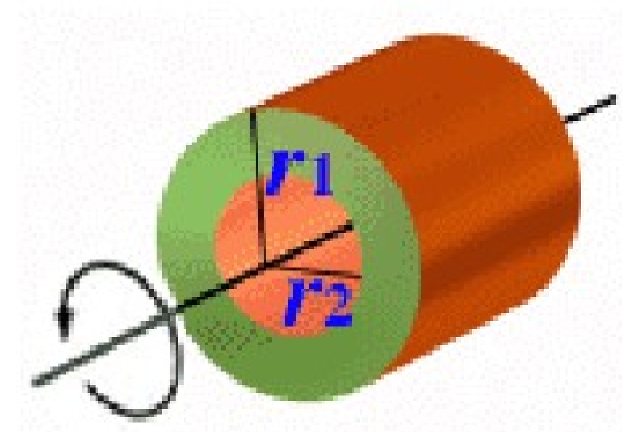
$J = mr^2$



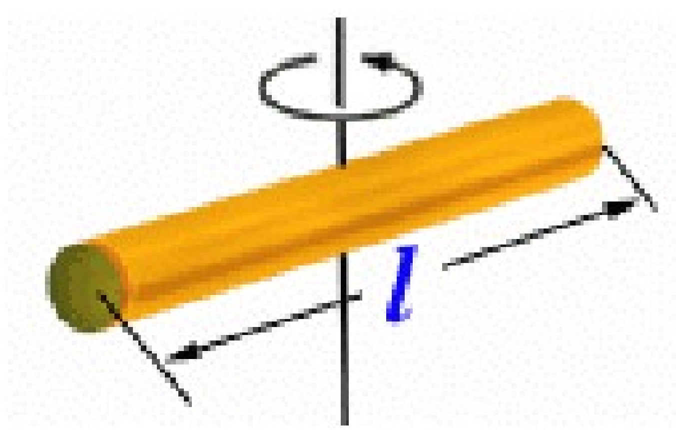
$J = mr^2/2$



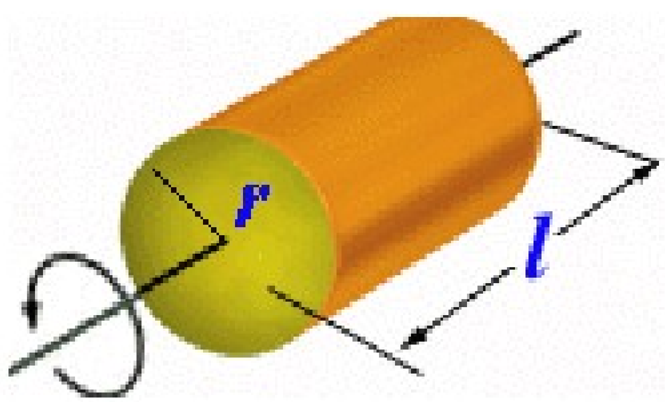
$J = mr^2/2$



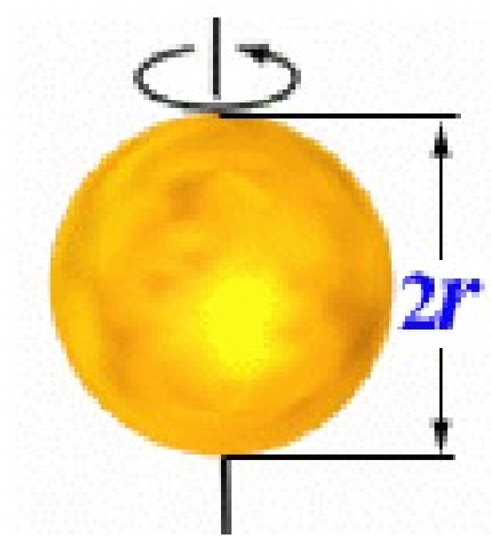
$J = m(r_1^2 + r_2^2)/2$



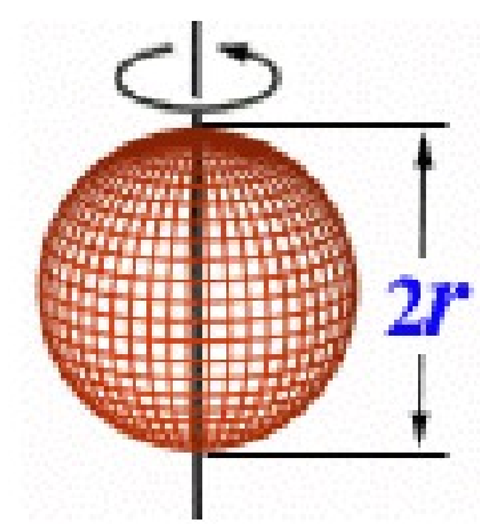
$J = ml^2/12$



$J = mr^2/2$

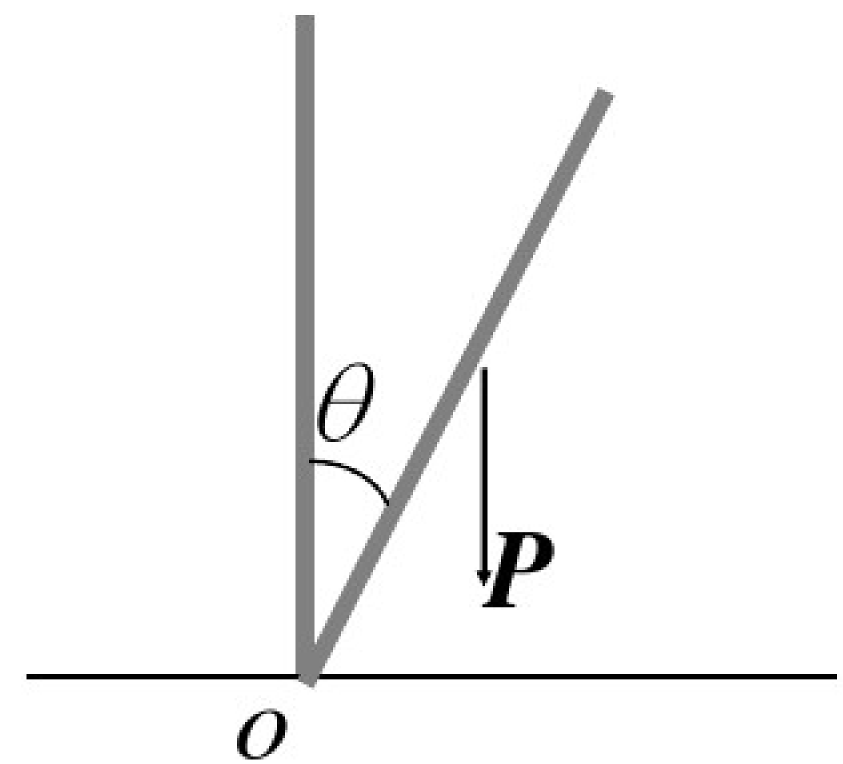


$J = 2mr^2/5$



$J = 2mr^2/3$

例题1 一长为l, 质量为m的匀质细杆竖直放置, 其下端与一固定铰链o相连, 并可绕其转动. 当其受到微小扰动时, 细杆将在重力的作用下由静止开始绕铰链o转动. 试计算细杆转到与铅直线呈θ角时的角加速度和角速度.



解:受力分析

取任一状态, 由转动定律

$$M_{外} = \frac{1}{2} mgl \sin\theta = J\beta$$

$$\because J = \frac{1}{3} ml^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{3g}{2l} \sin\theta$$

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

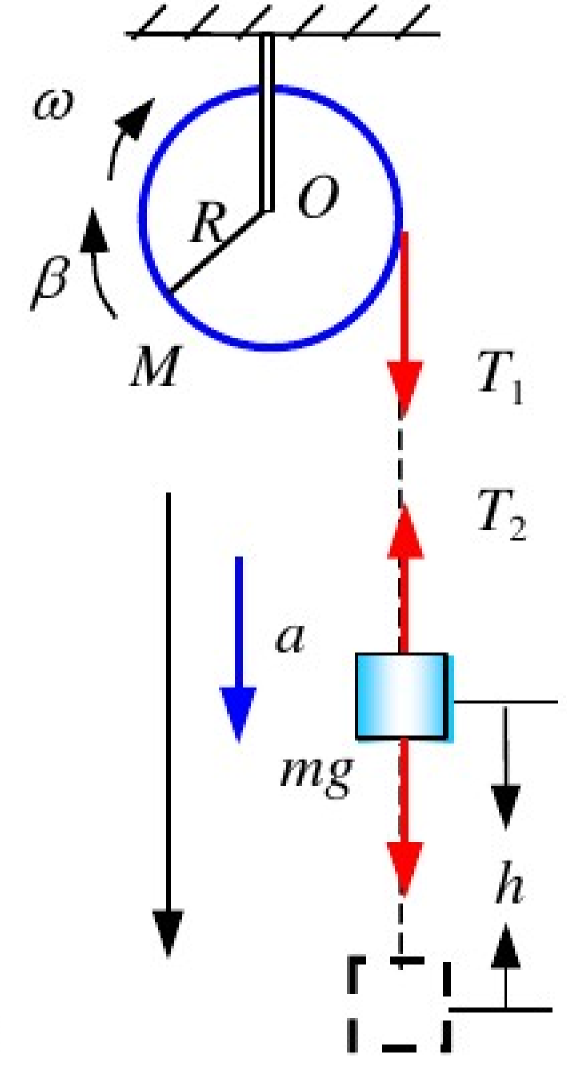
$$\Rightarrow \omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

初始条件为：$\boldsymbol{\theta=0}$，$\boldsymbol{\omega=0}$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}(1-\cos\theta)}$$

例题2　一个质量为M，半径为R的定滑轮（当作均匀圆盘）上面绕有细绳。绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为m的物体而下垂。忽略轴处摩擦，求物体m由静止下落h高度时的速度和此时滑轮的角速度。



解：对定滑轮M，由转动定律，对于轴O，有

$$RT = J\beta = \frac{1}{2}MR^2\beta$$

对物体m，由牛顿第二定律，

$$mg - T = ma$$

滑轮和物体的运动学关系为　$a = R\beta$

以上三式联立，可得物体下落的加速度为

$$a = \frac{m}{m + M/2} g$$

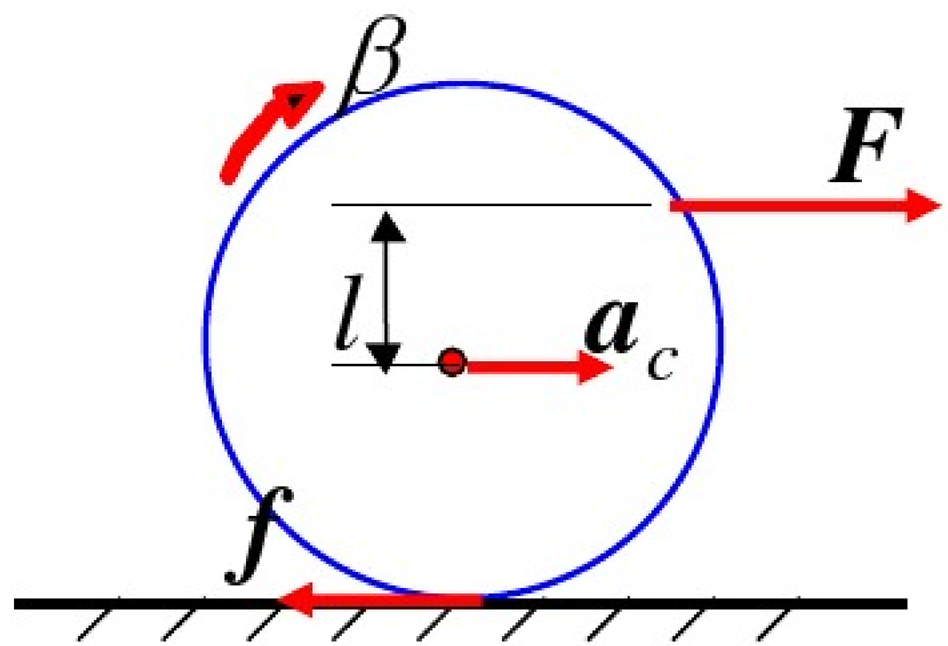
物体下落高度h时的速度

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

这时滑轮转动的角速度

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}}{R}$$

例题3 一质量为m、半径为R的均质圆柱，在水平外力作用下，在粗糙的水平面上作纯滚动，力的作用线与圆柱中心轴线的垂直距离为l，如图所示。求质心的加速度和圆柱所受的静摩擦力。



解：设静摩擦力f的方向如图所示，则由质心运动方程

$$F - f = ma_C$$

圆柱对质心的转动定律：

$$Fl + fR = J_C\beta$$

纯滚动条件为： $a_C = R\beta$

圆柱对质心的转动惯量为： $J_C = \frac{1}{2}mR^2$

联立以上四式，解得：

$$a_C = \frac{2F(R+l)}{3mR}$$

$$f = \frac{R-2l}{3R}F$$

由此可见

当$l<R/2$时，$f>0$，静摩擦力向后；

当$l>R/2$时，$f<0$，静摩擦力向前。

例一静止刚体受到一等于M_0 (N.m)的不变力矩的作用，同时又引起一阻力矩M_1， M1与刚体转动的角速度成正比，即｜ M_1 ｜= aω(Nm)，(a为常数)。又已知刚体对转轴的转动惯量为J，试求刚体角速度变化的规律。

已知：M_0 J $M_1 = -a\omega$ $\omega|_{t=0} = 0$

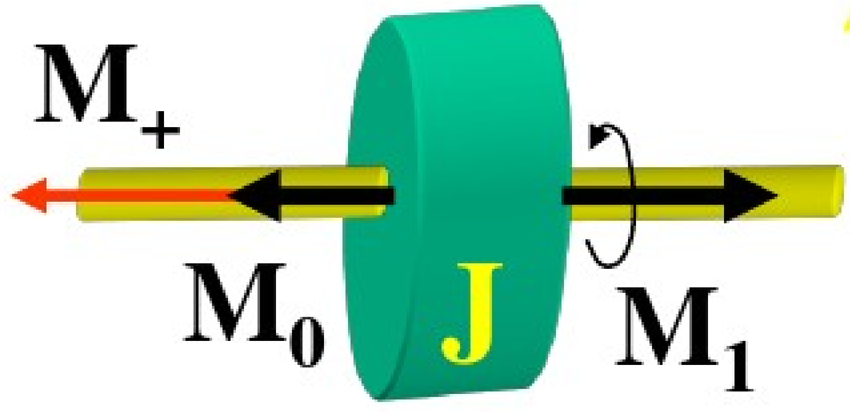
求：$\omega_{(t)} = ?$

解： 1）以刚体为研究对象；

2）分析受力矩

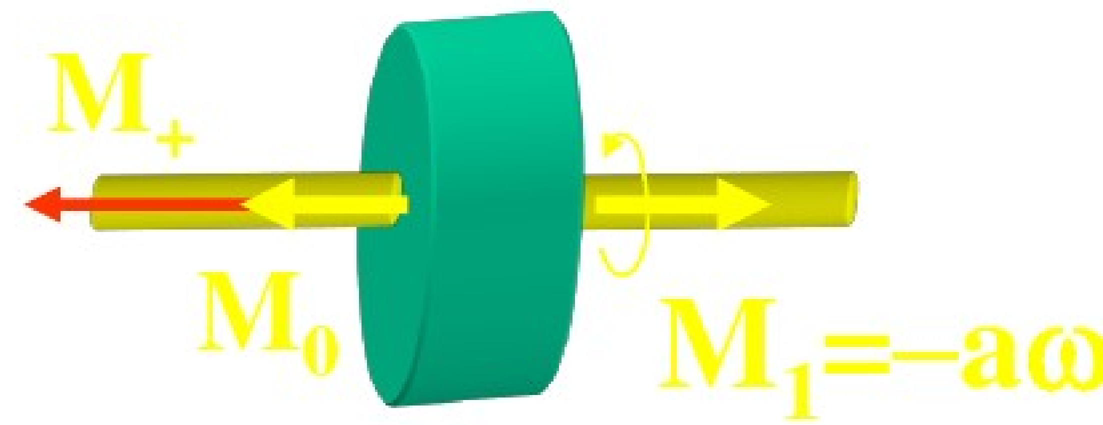
3）建立轴的正方向；

4）列方程：



$$M_0 + M_1 = J\beta$$

解：4）列方程：



$$M_0+M_1=J\beta$$

$$\beta=\frac{M_0+M_1}{J}=\frac{M_0-a\omega}{J}$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{M_0-a\omega}{J}$$

分离变量：

$$\frac{d\omega}{M_0-a\omega}=\frac{dt}{J}$$

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{M_0-a\omega}=\int_0^{t}\frac{dt}{J}$$

$$-\frac{1}{a}(\ln\frac{M_0-a\omega}{M_0})=\frac{t}{J}$$

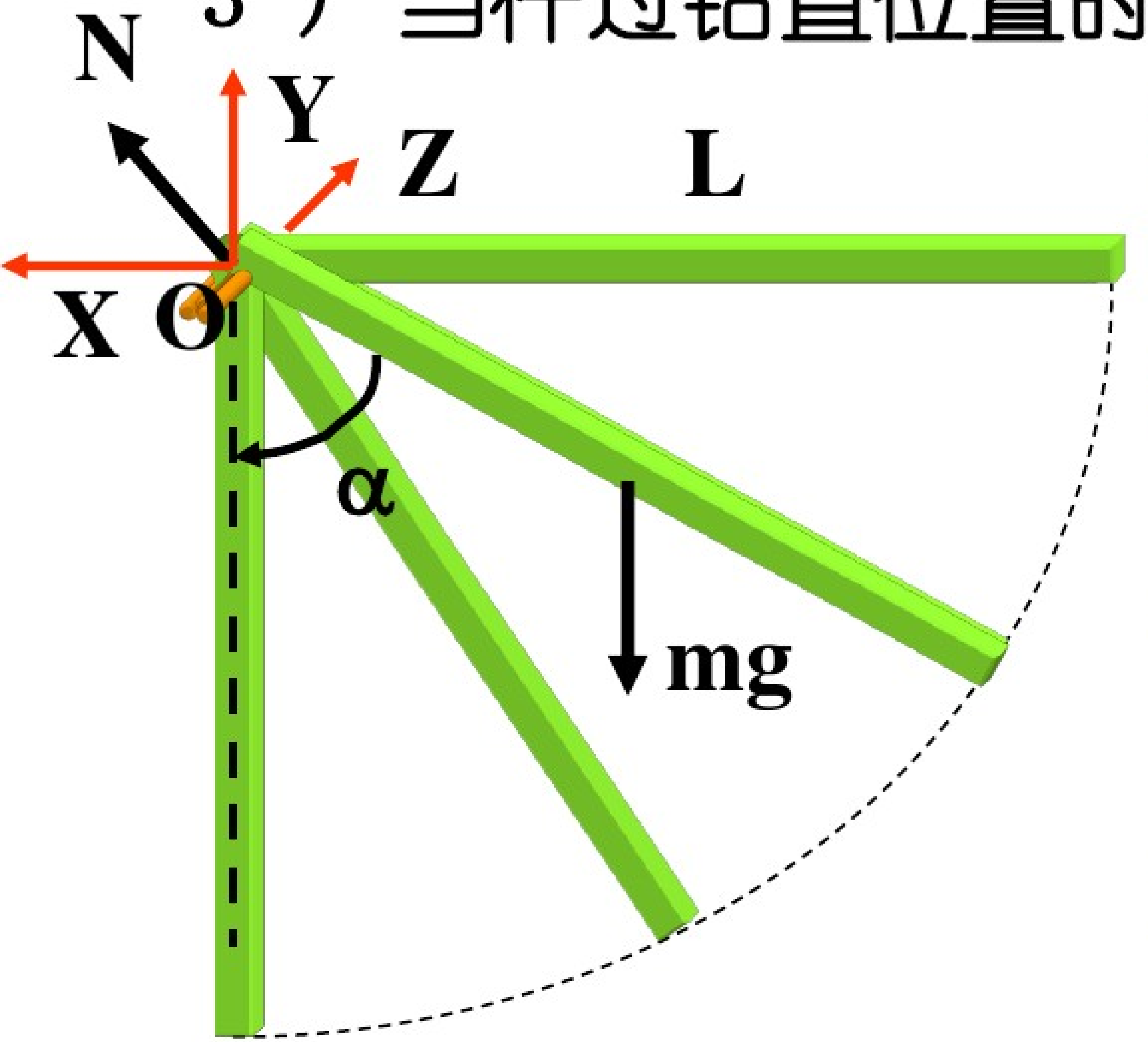
$$\frac{M_0-a\omega}{M_0}=e^{-\frac{at}{J}}$$

例）设一细杆的质量为m，长为L，一端支以枢轴而能自由旋转，设此杆自水平静止释放。

求:1 ）当杆与铅直方向成α角时的角加速度：

2 ）当杆过铅直位置时的角速度：

3 ）当杆过铅直位置时，轴作用于杆上的力。



已知：m，L

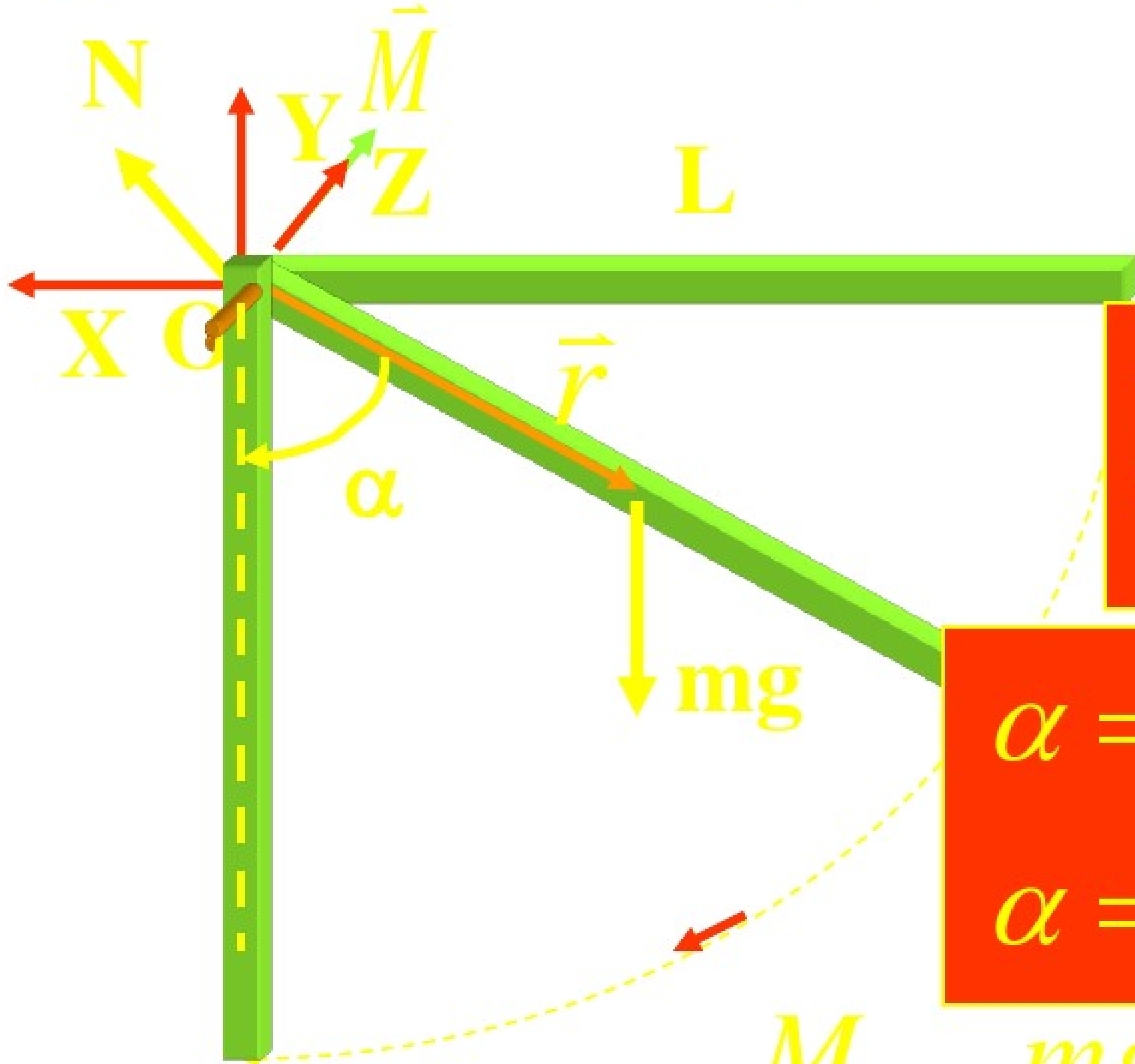
求：β_α，$\omega_\perp$, N

解：1）以杆为研究对象

受力: mg，N（不产生对轴的力矩）

建立OXYZ坐标系

建立OXYZ坐标系（并以Z轴为转动量的正方向）



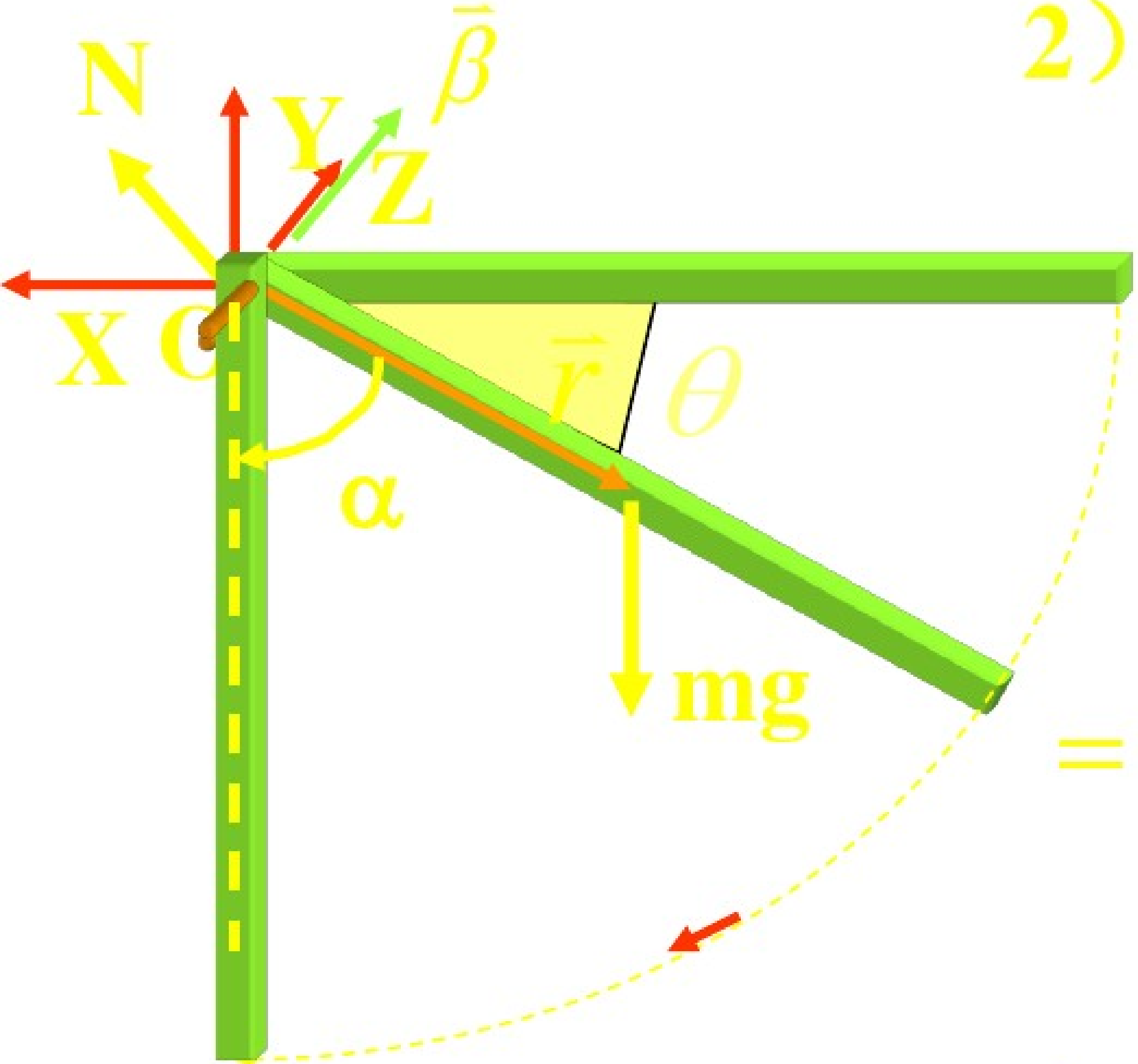
$$\because M = mg\frac{L}{2}\sin\alpha \quad (1)$$

$\vec{r}\times\vec{F}$ 沿Z轴正向，故取正值。

$\alpha = 0$则$\beta = 0$

$\alpha = \pi/2$则$\beta = 3g/2L$

$$\therefore \beta = \frac{M}{J} = \frac{mg\sin\alpha}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g}{2L}\sin\alpha$$



2）$\omega_{\perp}$=?

$$\boxed{\beta = \frac{3g}{2L}\sin\alpha}$$

$$\because \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

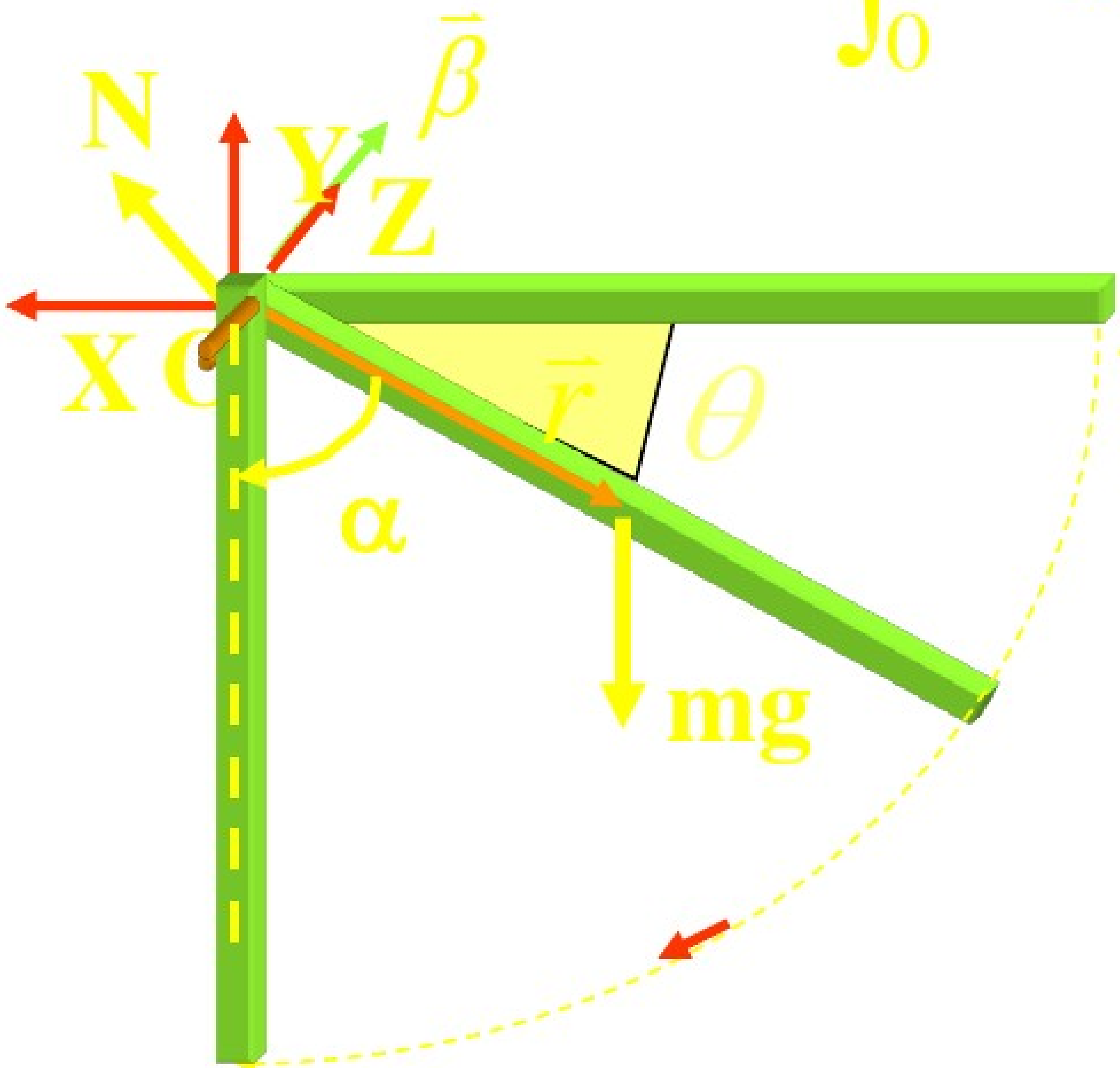
$$= \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g}{2L}\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\therefore \omega d\omega = \frac{3g}{2L}\cos\theta d\theta$$

两边积分：$\displaystyle\int_0^{\omega_{\perp}} \omega d\omega = \int_0^{\pi/2} \frac{3g}{2L}\cos\theta d\theta$

2）$\omega_\perp$=?

$$\int_0^{\omega_\perp} \omega d\omega = \int_0^{\pi/2} \frac{3g}{2L}\cos\theta d\theta$$

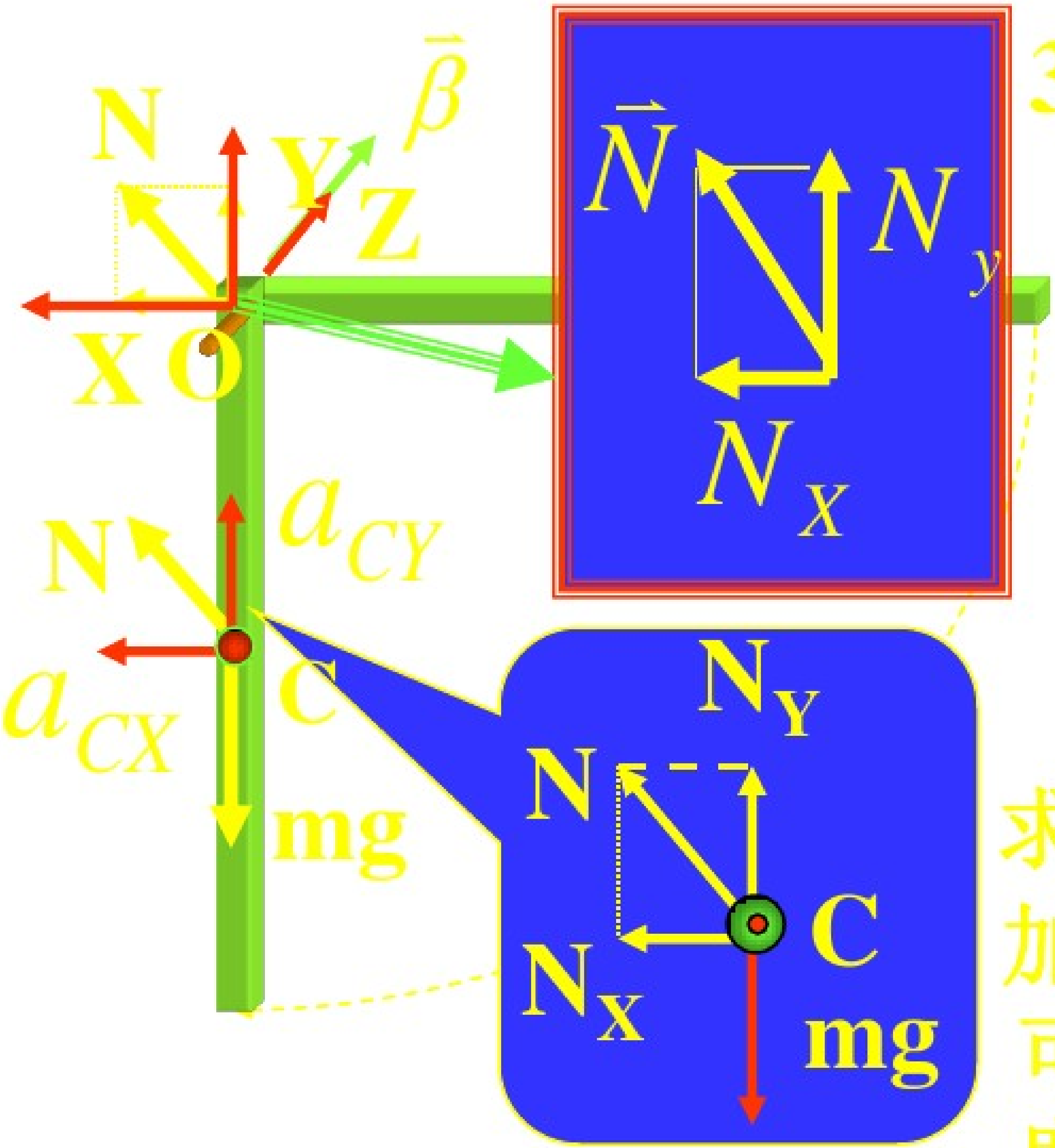


$$\frac{1}{2}\omega_\perp^2 = \frac{3g}{2L}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3g}{2L}$$

$$\boxed{\therefore \omega_\perp = \sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

3）求$\vec{N}$=?

轴对杆的力，不影响到杆的转动，但影响质心的运动，故考虑用质心运动定理来解。



3）求$\vec{N}$=?

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}_C$$

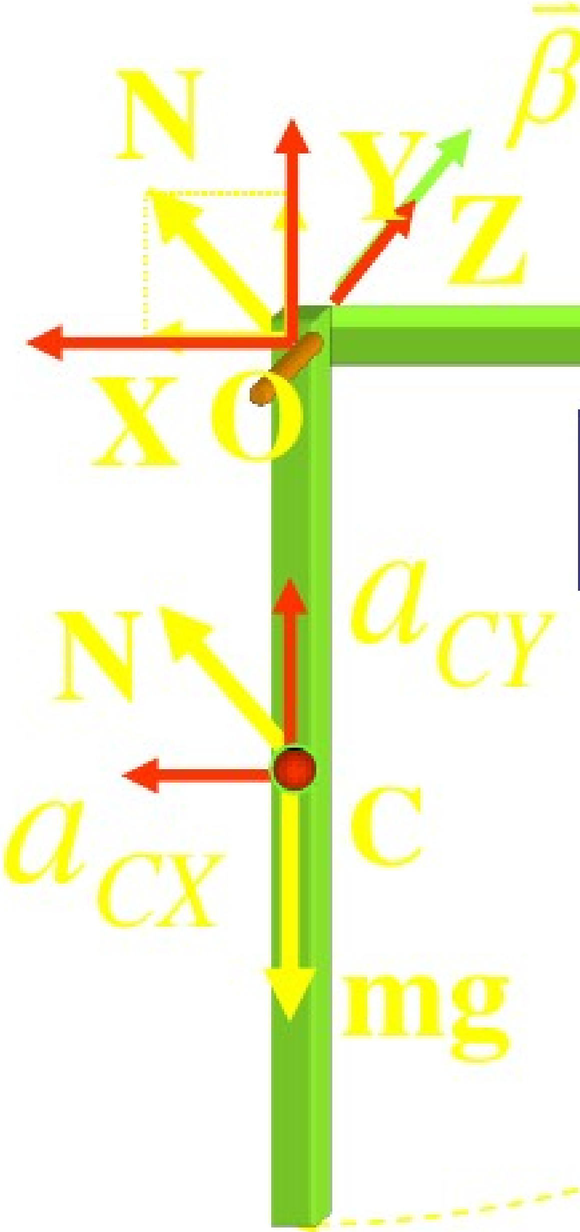
写成分量式：

$$\begin{cases} N_X = ma_{CX} \\ N_Y - mg = ma_{CY} \end{cases}$$

求N，就得求 $\vec{a}_C$ ，即C点的加速度，现在C点作圆周运动，可分为切向加速度和法向加速度但对一点来说，只有一个加速度。故这时：

a_{CX} …. 实际上正是质心的转动的切向加速度

a_{CY} …. 实际上正是质心的转动的法向加速度



$$\begin{cases} N_X = ma \\ N_Y - \end{cases}$$

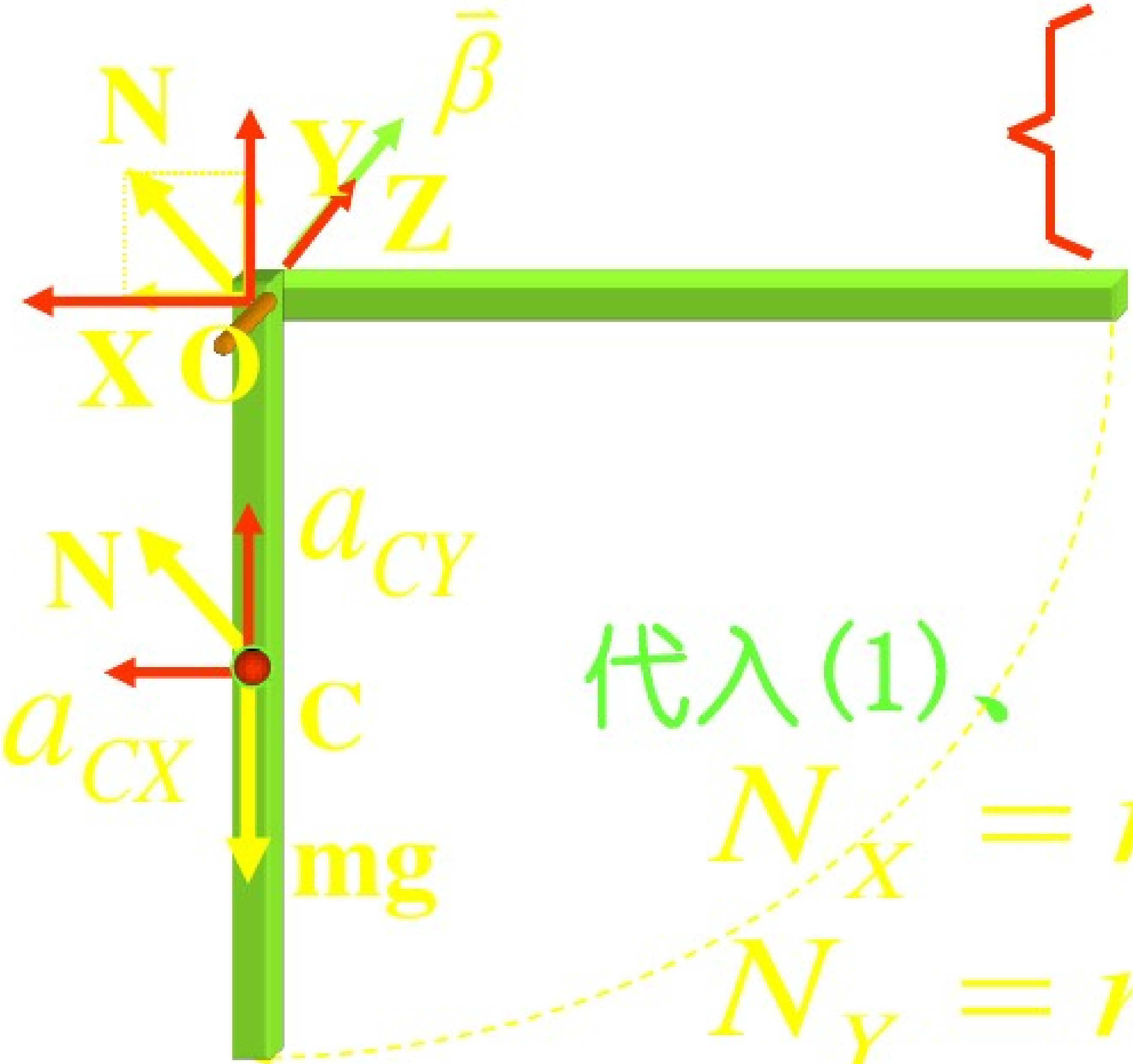
$$\beta = \frac{3g}{2L}\sin\alpha$$

由角量和线量的关系:

$$a_{CX} = R\beta_{\perp} = \frac{L}{2}\frac{3g}{2L}\sin 0^{\circ} = 0$$

$$a_{CY} = R\omega_{\perp}^{2} = \frac{L}{2}\left(\sqrt{\frac{3g}{L}}\right)^{2} = \frac{3g}{2}$$

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$



$$\begin{cases} N_X = ma_{CX} \cdots (1) \\ N_Y - mg = ma_{CY} \cdots (2) \end{cases}$$

$$a_{CX} = 0 \quad a_{CY} = \frac{3g}{2}$$

代入(1)、(2)式中：

$$N_X = ma_{CX} = 0$$

$$N_Y = mg + ma_{CY}$$

$$= mg + m\frac{3g}{2} = \frac{5}{2}mg$$

$$\boxed{\therefore \vec{N} = \frac{5}{2}mg\hat{j}}$$