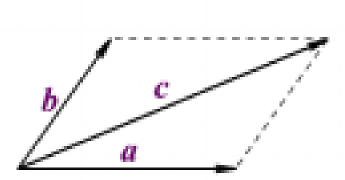
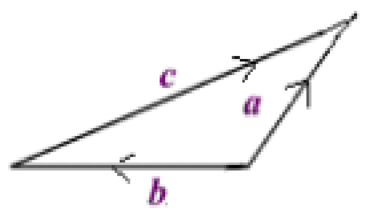
第七章 常微分方程

1. 基本概念：通解，特解，初始条件
2. 可分离变量的微分方程
3. 齐次方程（简单类型）
4. 一阶线性方程：公式法（掌握交换自变量与因变量类型）
5. 二阶常系数齐次线性微分方程：特征方程法求通解
6. 二阶常系数非齐次线性微分方程（非齐次特解与齐次通解关系， 正确的设出特解）

第八章 向量与解析几何

向量代数		
定义	定义与运算的几何表达	在直角坐标系下的表示
向量	有大小、有方向 . 记作 $\mathbf{a}$ 或 $\overline{AB}$	$\mathbf{a}=a_x i+a_y j+a_z k=(a_x,a_y,a_z)$ $a_x=\mathrm{prj}_{\bar{x}}a, a_y=\mathrm{prj}_{\bar{y}}a, a_z=\mathrm{prj}_{\bar{z}}a$
模	向量 $\mathbf{a}$ 的模记作 $\lvert\mathbf{a}\rvert$	$\lvert\mathbf{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
和差	  $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$	$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$
单位向量	$\mathbf{a}\neq 0$，则 $\mathbf{e_a}=\dfrac{\mathbf{a}}{\lvert\mathbf{a}\rvert}$	$\mathbf{e_a}=\dfrac{(a_x,a_y,a_z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
方向余弦	设 $\mathbf{a}$ 与 x, y, z 轴的夹角分别为 α，β，γ， 则方向余弦分别为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$	$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\lvert a\rvert}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{\lvert a\rvert}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\lvert a\rvert}$ $\mathbf{e_a}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
点乘（数量积）	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$，$\theta$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
叉乘（向量积） $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\lvert\mathbf{c}\rvert=\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\sin\theta$ θ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 向量 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 都垂直	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$
定理与公式		
垂直	$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$	$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
平行	$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$	$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$
交角余弦	两向量夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

投影	向量 $\mathbf{a}$ 在非零向量 $\mathbf{b}$ 上的投影 $prj_{b}a=\lvert a\rvert\cos(\widehat{a,b})=\dfrac{a\cdot b}{\lvert b\rvert}$	$prj_{b}a=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

平面		直线	
法向量 $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$		方向向量 $\mathbf{T}=\{m,n,p\}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$	
方程名称	方程形式及特征	方程名称	方程形式及特征
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	一般式	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	点向式	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
三点式	$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$	参数式	$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	两点式	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$
面面垂直	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$	线线垂直	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
面面平行	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	线线平行	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
线面垂直	$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$	线面平行	$Am+Bn+Cp=0$
点面距离 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $Ax+By+Cz+D=0$		面面距离 $Ax+By+Cz+D_1=0$ $Ax+By+Cz+D_2=0$	
$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$		$d=\dfrac{\lvert D_1-D_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	

面面夹角	线线夹角	线面夹角
$\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ $\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$	$\mathbf{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$ $\mathbf{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$	$\mathbf{s}=\{m,n,p\}$ $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$
$\cos\theta=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	$\cos\varphi=\dfrac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

空间曲线 Γ：	$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\\z=\omega(t),\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$	切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$	切“线”方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$
			法平“面”方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$
	$\begin{cases}y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$	切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x),\psi'(x))$	切“线”方程：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$
			法平“面”方程：$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

空间曲面 Σ：	$F(x,y,z)=0$	法向量 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),$ $F_y(x_0,y_0,z_0),$ $F_z(x_0,y_0,z_0))$	切平“面”方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_x(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$ $+F_x(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ 法“线“方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$
	$z=f(x,y)$	$\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),$ $-f_y(x_0,y_0),1)$ 或 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),$ $f_y(x_0,y_0),-1)$	切平“面”方程：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$
			法“线“方程：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

第九章　多元函数微分法及其应用

（一）　基本概念

1、　距离，邻域，内点，外点，边界点，聚点，开集，闭集，连通集，区域，闭区域，有界集，无界集。

2、　多元函数：$z=f(x,y)$，图形：

3、　极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

4、　连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

5、　偏导数：

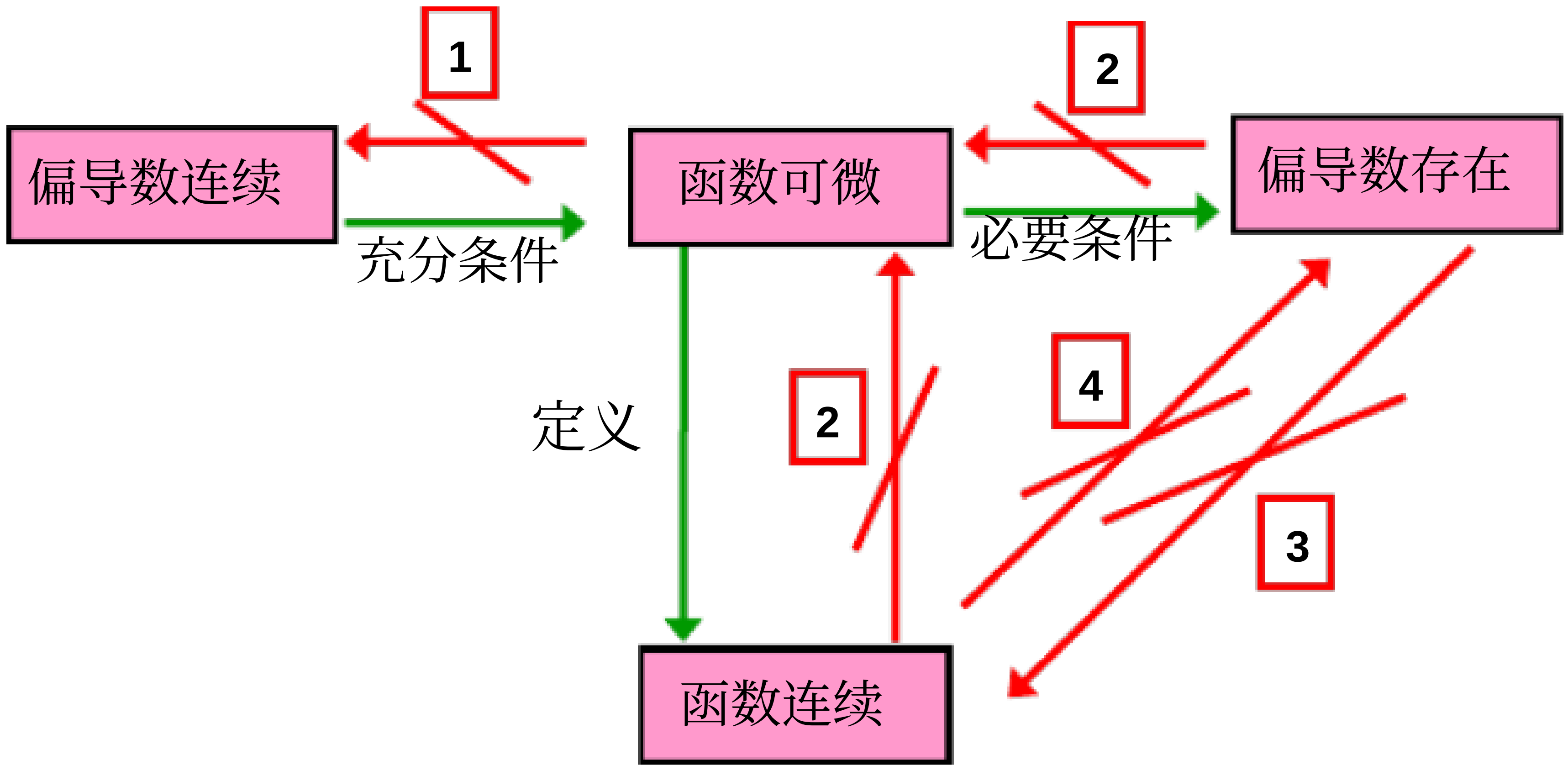
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

6、　全微分：设 $z=f(x,y)$，则 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

（二）　性质

1、　函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：



2、 闭区域上连续函数的性质（有界性定理，最大最小值定理，介值定理）

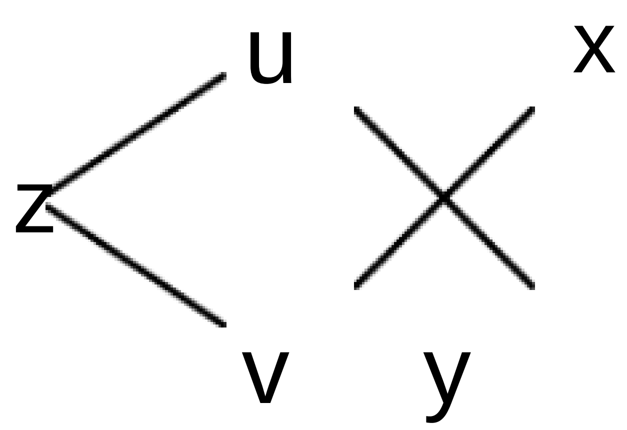
3、 微分法

1） 定义：

2） 复合函数求导：链式法则

若 $z = f(u,v), u = u(x,y), v = v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$



3） 隐函数求导：两边求偏导，然后解方程（组）

（三） 应用

1、 极值

1） 无条件极值：求函数 $z = f(x,y)$ 的极值

解方程组 $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ 求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0, y_0)，令

$A = f_{xx}(x_0, y_0)$， $B = f_{xy}(x_0, y_0)$， $C = f_{yy}(x_0, y_0)$，

① 若 $AC - B^2 > 0$， $A > 0$，函数有极小值，

若 $AC - B^2 > 0$， $A < 0$，函数有极大值；

② 若 $AC - B^2 < 0$，函数没有极值；

③ 若 $AC - B^2 = 0$，不定。

2） 条件极值：求函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极值

令：$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ ——— Lagrange 函数

解方程组 $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

2、 几何应用

1） 曲线的切线与法平面

曲线 $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，则 Γ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$（对应参数为 t_0）处的

切线方程为：$\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为：$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$

2） 曲面的切平面与法线

曲面 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$ ，则 Σ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为：

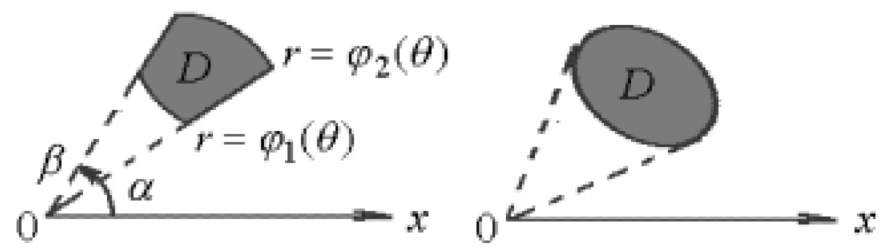
$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

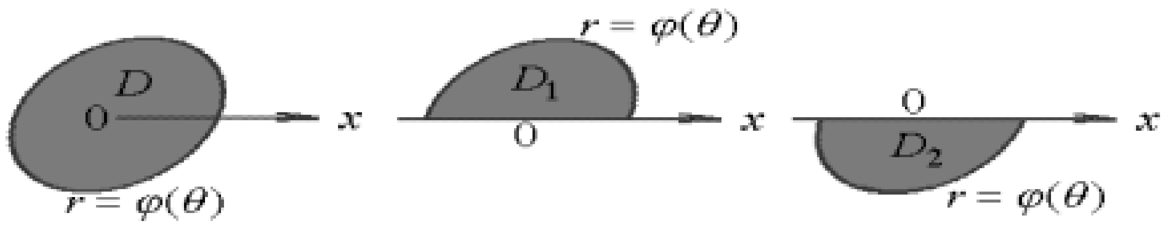
法线方程为：$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

第十章 重积分

<table>
<tr><th colspan="3">重积分</th></tr>
<tr><th>积分类型</th><th>计算方法</th><th>典型例题</th></tr>
<tr><td rowspan="4">二重积分
$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

平面薄片的质量

质 量 = 面 密 度 × 面积</td>
<td>（1） 利用直角坐标系
X—型 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$
Y—型 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$</td>
<td>课上的例题及课后作业</td></tr>
<tr><td>（2）利用极坐标系
使用原则
(1) 积分区域的边界曲线易于用极坐标方程表示 （ 含圆弧，直线段 ）；
(2) 被积函数用极坐标变量表示较简单 （ 含 $(x^2+y^2)^{\alpha}$， α 为实数 ）


$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$
$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$


$0\le\theta\le 2\pi$ $0\le\theta\le\pi$ $\pi\le\theta\le 2\pi$</td>
<td></td></tr>
<tr><td>（3）利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性
当 D 关于 y 轴对称时，（关于 x 轴对称时，有类似结论）
$$I=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{对于 }x\text{是奇函数，}\\ & \text{即}f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & f(x,y)\text{对于 }x\text{是偶函数，}\\ & \text{即}f(-x,y)=f(x,y)\\ & D_1\text{是 }D\text{的右半部分}\end{cases}$$</td>
<td>应用该性质更方便</td></tr>
<tr><td>计算步骤及注意事项
1. 画出积分区域
2. 选择坐标系 标准：域边界应尽量多为坐标轴，被积函数</td>
<td></td></tr>
</table>

	关于坐标变量易分离 3. 确定积分次序 原则：积分区域分块少，累次积分好算为妙 4. 确定积分限 方法：图示法 先积一条线，后扫积分域 5. 计算要简便 注意：充分利用对称性，奇偶性	
三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 空间立体物的质量 质量＝密度×面积	(1) 利用直角坐标 $\begin{cases}\text{投影法}\\\text{截面法}\end{cases}$ 投影 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$	
	（2） 利用柱面坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$ 相当于在投影法的基础上直角坐标转换成极坐标 适用范围： ①积分区域 表面用柱面坐标表示时 方程简单； 如 旋转体 ②被积函数 用柱面坐标表示时 变量易分离．如 $f(x^2+y^2)\ f(x^2+z^2)$ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\int_a^b dz\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho$	
	（3）利用球面坐标 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta\\y=\rho\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$ $dv=r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$ 适用范围： ①积分域 表面用球面坐标表示时 方程简单；如，球体，锥体 ． ②被积函数 用球面坐标表示时 变量易分离 ． 如， $f(x^2+y^2+z^2)$ $I=\int_\alpha^\alpha d\varphi\int_\beta^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta\varphi)}^{\rho_2(\theta\varphi)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$	
	（4）利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性	

第十一章曲线积分与曲面积分

<table>
<tr><th colspan="3">曲线积分与曲面积分</th></tr>
<tr><th>积分类型</th><th>计算方法</th><th>典型例题</th></tr>
<tr><td>第一类曲线积分
$I=\int_L f(x,y)ds$
曲形构件的质量
质量=线密度×弧长</td><td>参数法（转化为定积分）
（1）$L: y=\varphi(x)$　　$I=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\varphi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$
（2）$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$　$I=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$
（3）$r=r(\theta)$　$(\alpha\le\theta\le\beta)$　$L:\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$
$I=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">平面第二类曲线积分
$I=\int_L Pdx+Qdy$
变力沿曲线所做的功</td><td>（1）参数法（转化为定积分）
$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$　(t单调地从 α 到 β)
$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$</td><td></td></tr>
<tr><td>（2）利用格林公式（转化为二重积分）
条件：①L 封闭，分段光滑，有向（左手法则围成平面区域 D）
②P，Q具有一阶连续偏导数
结论：$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\\text{有瑕点，挖洞}\\\text{不是封闭曲线，添加辅助线}\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>（3）利用路径无关定理（特殊路径法）
等价条件：① $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　　② $\oint_L Pdx+Qdy=0$
③ $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关，与起点、终点有关
④ $Pdx+Qdy$ 具有原函数 $u(x,y)$
（特殊路径法，偏积分法，凑微分法）</td><td></td></tr>
<tr><td>（4）两类曲线积分的联系
$I=\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$</td><td></td></tr>
<tr><td>空间第二类曲线积分
$I=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$
变力沿曲线所做的功</td><td>（1）参数法（转化为定积分）
$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$
$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$
（2）利用斯托克斯公式（转化第二类曲面积分）
条件：①L 封闭，分段光滑，有向
②P，Q，R具有一阶连续偏导数
结论：$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$
$=\iint_\Sigma(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy$</td><td></td></tr>
</table>

	应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\ \text{不是封闭曲线，添加辅助线}\end{cases}$	
第一类曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dv$ 曲面薄片的质量 质量=面密度×面积	投影法 $\Sigma: z=z(x,y)$ 投影到 xoy 面 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 类似的还有投影到 yoz 面和 zox 面的公式	
第二类曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 流体流向曲面一侧的流量	（1）投影法 ① $\iint_{\Sigma} Pdydz=\pm\iint_{D_{yz}} p(x(y,z),y,z)dydz$ $\Sigma: z=z(x,y)$，γ 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角 前侧取“+”，$\cos\gamma>0$；后侧取“−”，$\cos\gamma<0$ ② $\iint_{\Sigma} Qdzdx=\pm\iint_{D_{yz}} p(x,y(x,z),z)dzdx$ $\Sigma: y=y(x,z)$，β 为 Σ 的法向量与 y 轴的夹角 右侧取“+”，$\cos\beta>0$；左侧取“−”，$\cos\beta<0$ ③ $\iint_{\Sigma} Qdxdy=\pm\iint_{D_{yz}} Q(x,y,z(x,y))dxdy$ $\Sigma: x=x(y,z)$，α 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角 上侧取“+”，$\cos\alpha>0$；下侧取“−”，$\cos\alpha<0$	
	（2）高斯公式　右手法则取定 Σ 的侧 条件：① Σ 封闭，分片光滑，是所围空间闭区域 Ω 的外侧 ② P，Q，R 具有一阶连续偏导数 结论：$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$ 应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\ \text{不是封闭曲面，添加辅助面}\end{cases}$	
	（3）两类曲面积分之间的联系 $\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ 转换投影法：$dydz=(-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy$　$dzdx=(-\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$	

所有类型的积分：

① 定义：四步法——分割、代替、求和、取极限；

② 性质：对积分的范围具有可加性，具有线性性；

③ 对坐标的积分，积分区域对称与被积函数的奇偶性。

第十二章　级数

- 无穷级数
  - 常数项级数
    - 一般项级数
      - 用收敛定义，$\lim_{n\to\infty} s_n$ 存在
      - 常数项级数的基本性质
        - ① 若级数收敛，各项同乘同一常数仍收敛．
        - ② 两个收敛级数的和差仍收敛．
        - 注：一致、一散之和必发散；两散和、差必发散．
        - ③ 去掉、加上或改变级数有限项，不改变其收敛性．
        - ④ 若级数收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。
        - 推论：如果加括号后所成的级数发散，则原来级数也发散．注：收敛级数去括号后未必收敛．
        - ⑤（必要条件） 如果级数收敛，则 $\lim_{n\to 0} u_n = 0$
      - 常数项级数的基本性质
    - 交错级数
      - 莱布尼茨判别法：若 $u_n \geq u_{n+1}$ 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛
    - 正项级数
      - 比较判别法：$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leq v_n$．若 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 也收敛；若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 也发散．
      - 比较判别法的极限形式：$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$，则 ① 若 $0 < l < +\infty$，$\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛或同散；② 若 $l = 0$，$\sum v_n$ 收敛，$\sum u_n$ 也收敛；③ 如果 $l = +\infty$，$\sum v_n$ 发散，$\sum u_n$ 也发散。
      - 比值判别法 根值判别法：$\sum u_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$，则 $\rho < 1$ 时收敛；$\rho > 1$（$\rho = +\infty$）时发散；$\rho = 1$ 时可能收敛也可能发散．
  - 幂级数
    - 收敛性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，$R = \frac{1}{\rho}$，$\rho \neq 0$; $R = +\infty$，$\rho = 0$; $R = 0$，$\rho = +\infty$. 缺项级数用比值审敛法求收敛半径
    - 和函数：$s(x)$ 的性质 ① 在收敛域 I 上连续；② 在收敛域 $(-R, R)$ 内可导，且可逐项求导；③ 和函数 $s(x)$ 在收敛域 I 上可积分，且可逐项积分．（R 不变，收敛域可能变化）.
    - 展成幂级数：直接展开：泰勒级数　间接展开：六个常用展开式
      $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ (-1 < x < 1) \qquad e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \ (-\infty < x < +\infty)$$