

## 从 DSO 来看视觉里程计

文坤

22

## 关于 DSO

Direct+Sparse 的结合，使得算法既能很好的适应场景，而且实时性也很好。本文档将从算法和代码的各个层面展现 DSO 算法的细节，综合各种已有的资料，力求完整详细。

# 目录

<b>1</b>	<b>视觉 SLAM 分类</b>	<b>1</b>
1.1	稀疏-稠密法 . . . . .	1
1.2	直接-间接法 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>视觉中的数学问题</b>	<b>3</b>
2.1	最大似然估计 . . . . .	3
2.2	边缘化 . . . . .	3
2.3	流形—lie group . . . . .	3
2.3.1	李群对李代数的导数 . . . . .	4
2.3.2	SE(3) 的伴随矩阵 . . . . .	5
2.3.3	$\xi_{ij}$ 对 $\xi_i$ 、 $\xi_j$ 的导数 . . . . .	5
2.4	矩阵正交化 . . . . .	7
<b>3</b>	<b>DSO 原理</b>	<b>9</b>
3.1	残差形式 . . . . .	9
3.2	参数形式 . . . . .	11
3.3	雅可比 . . . . .	11
3.3.1	图像雅可比 $J_I$ . . . . .	12
3.3.2	几何雅可比 $J_{geo}$ . . . . .	12
3.4	边缘化 . . . . .	12
<b>4</b>	<b>DSO 代码分析—前端跟踪</b>	<b>13</b>
4.1	标定矫正 . . . . .	13

4.2	系统初始化 . . . . .	13
4.3	帧间跟踪 . . . . .	13
<b>5</b>	<b>DSO 代码分析-后端优化</b>	<b>15</b>
5.1	点的深度计算 . . . . .	15
5.1.1	深度滤波 . . . . .	15
5.1.2	深度优化 . . . . .	16
5.2	Bundle Adjustment . . . . .	16
5.3	边缘化 . . . . .	16
<b>6</b>	<b>代码细节</b>	<b>17</b>
6.1	比例因子 . . . . .	17

# 第 1 章 视觉 SLAM 分类

视觉 SLAM 可以从多个角度对其进行分类。

## 1.1 稀疏-稠密法

## 1.2 直接-间接法



## 第2章 视觉中的数学问题

### 2.1 最大似然估计

### 2.2 边缘化

### 2.3 流形—lie group

#### 流形上的优化:

位置、速度定义在欧式空间，可以直接进行优化处理。在欧式空间定义，特性是对加法操作封闭，比如  $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 + \Delta \mathbf{t}$ 。但是姿态，只对乘法操作封闭  $\mathbf{R}_2 = \Delta \mathbf{R} * \mathbf{R}_1$ ，需要在流形空间中进行优化。

简单说，流形是一个非线性空间，但是在局部空间内对其进行线性化，就可以用线性空间进行拟合。对于一般的优化问题：

$$x = \quad (2.1)$$

在流形上优化的好处：

1、有约束优化问题转化为无约束优化问题，如  $\det(\mathbf{R})=1$ ，有约束的优化问题会引入拉格朗日因子，优化变量维数会更高，转换李代数后，没有什么约束了，

### 2.3.1 李群对李代数的导数

对于  $\xi \in SE(3)$  定义

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in R^{4 \times 4}, \rho, \phi \in R^3 \quad (2.2)$$

$$\xi^\lambda = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\lambda = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ 0^T & \phi^\wedge \end{bmatrix} \in R^{6 \times 6}, \rho, \phi \in R^3 \quad (2.3)$$

其中  $\rho$  为平移分量,  $\phi$  为旋转分量。

假设某空间点  $p$  经过一次变换  $T$ (对应李代数  $\xi$ ), 得到  $Tp$ 。现在, 给  $T$  左乘一个扰动  $\Delta T = \exp(\delta \xi^\wedge)$ , 假设扰动项的李代数为  $\delta \xi = [\delta \rho, \delta \phi]^\wedge$ , 那么:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Tp)}{\partial\delta\xi} &= \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{\exp(\delta\xi^\wedge)\exp(\xi^\wedge)p - \exp(\xi^\wedge)p}{\delta\xi} \\
&\approx \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{(I + \delta\xi^\wedge)\exp(\xi^\wedge)p - \exp(\xi^\wedge)p}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{\delta\xi^\wedge \exp(\xi^\wedge)p}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\phi^\wedge & \delta\rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}p + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\phi^\wedge(\mathbf{R}p + \mathbf{t}) + \delta\rho \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} -(\mathbf{R}p + \mathbf{t})^\wedge \delta\phi + \delta\rho \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}}{\delta\xi} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -(\mathbf{R}p + \mathbf{t}) \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} = (\mathbf{T}p)^\odot
\end{aligned} \tag{2.4}$$

### 2.3.2 SE(3) 的伴随矩阵

李群伴随矩阵的作用，相当于实现李群乘法的交换律：

$$\mathbf{T} \exp(\xi^\wedge) = \exp((Ad(\mathbf{T})\xi)^\wedge) \mathbf{T} \tag{2.5}$$

稍加改变，用  $\mathbf{T}^{-1}$  代替  $T$  得：（推导有待继续查，参考 14 讲 11.1.2 节）

$$\exp(\xi^\wedge) \mathbf{T} = \mathbf{T} \exp((Ad(\mathbf{T}^{-1})\xi)^\wedge) \tag{2.6}$$

伴随矩阵的解释，还可参照 JingeTu 的理解

### 2.3.3 $\xi_{ij}$ 对 $\xi_i$ 、 $\xi_j$ 的导数

这部分的推到参考：

- 1) 视觉 slam14 讲 11.1.2 节 Pose Graph 的优化

2)JingeTu 的博客 <https://www.cnblogs.com/JingeTU/p/9077372.html> , 只是这里的推导方式不是很好, 结合 1) 中的扰动法, 推导过程如下。

参考坐标系为全局坐标系时

假设 pose 在世界坐标系 w 下定义,  $\xi_i$ 、 $\xi_j$  即  $\xi_{wi}$ 、 $\xi_{wj}$ , 则

$$\xi_{ij} = \xi_{wi}^{-1} \circ \xi_{wj} = \text{In}(\exp((- \xi_{wi})^\wedge) \exp(\xi_{wj}^\wedge))^\vee \quad (2.7)$$

对应的李群:

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{wi}^{-1} \mathbf{T}_{wj} = \exp(\xi_{ij}^\wedge) \quad (2.8)$$

采用扰动法对  $\xi_{wi}$ 、 $\xi_{wj}$  进行求导

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= \text{In}(\mathbf{T}_{wi}^{-1} * \mathbf{T}_{wj})^\vee \\ &= \text{In}((\exp(\delta \xi_{wi}^\wedge) \mathbf{T}_{wi})^{-1} \exp(\delta \xi_{wj}^\wedge) \mathbf{T}_{wj})^\vee \\ &= \text{In}(\mathbf{T}_{wi}^{-1} \exp((- \delta \xi_{wi})^\wedge) \exp(\delta \xi_{wj}^\wedge) \mathbf{T}_{wj})^\vee \\ &= \text{In}(\mathbf{T}_{wi}^{-1} \exp(-\delta \xi_{wi}) \mathbf{T}_{wj} \exp((\text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wj})^\wedge))^\vee \\ &= \text{In}(\mathbf{T}_{wi}^{-1} \mathbf{T}_{wj} \exp((- \text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wi})^\wedge) \exp((\text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wj})^\wedge))^\vee \quad (2.9) \\ &\approx \text{In}(\mathbf{T}_{wi}^{-1} \mathbf{T}_{wj} [\mathbf{I} - \text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wi} + \text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wj}])^\vee \\ &\approx \text{In}(\exp(\xi_{ij}^\wedge) [\mathbf{I} - \text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wi} + \text{Ad}(\mathbf{T}_{wj}^{-1}) \delta \xi_{wj}])^\vee \\ &\approx \xi_{ij} + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{wi}} \delta \xi_{wi} + \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{wj}} \delta \xi_{wj} \end{aligned}$$

按照李代数上的求导法则, 可求出  $\xi_{ij}$  对两个位姿  $\xi_i$ 、 $\xi_j$  的雅可比矩阵:

$$\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{wi}} = -\mathcal{J}^{-1}(\xi_{ij}) \text{Ad}(\mathbf{T}_j^{-1}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{wj}} = \mathcal{J}^{-1}(\xi_{ij}) \text{Ad}(\mathbf{T}_j^{-1}) \quad (2.11)$$

由于  $\text{se}(3)$  上的左右雅可比  $\mathcal{J}$  形式过于复杂，通常取其近似。如果误差接近于零，就可以将它近似于  $I$  或者

$$\mathcal{J}^{-1} \approx I + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ 0 & \phi^\wedge \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

参考坐标系为局部坐标系时

当参考坐标系选取为当前载体坐标系时，即  $\xi_i$ 、 $\xi_j$  即  $\xi_{iw}$ 、 $\xi_{jw}$ ，则

$$\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{iw}} = \mathbf{I} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \delta \xi_{jw}} = -Ad(\mathbf{T}_{th}) \quad (2.14)$$

## 2.4 矩阵正交化

矩阵正交化本是矩阵问题，放在几何部分中，是因为想从几何的角度中来阐述。

本小节内容参见：<https://blog.csdn.net/tengweitw/article/details/41174555>、<https://blog.csdn.net/tengweitw/article/details/41775545>

矩阵正交投影

图中， $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{b} - x\mathbf{a}$ ，向量  $\mathbf{e}$  为投影残差

向量  $\mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{e}$  垂直，

$$\mathbf{a}^T \mathbf{e} = 0 \longrightarrow \mathbf{a}^T (\mathbf{b} - x\mathbf{a}) = 0 \longrightarrow x\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \longrightarrow x = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$$

$x$  是一个标量值，刻画了向量  $\mathbf{b}$  投影到向量  $\mathbf{a}$  上的长度。

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}x = \mathbf{a} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$$

$\mathbf{P}$  为投影矩阵， $\mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{p}$ ，则：

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$$

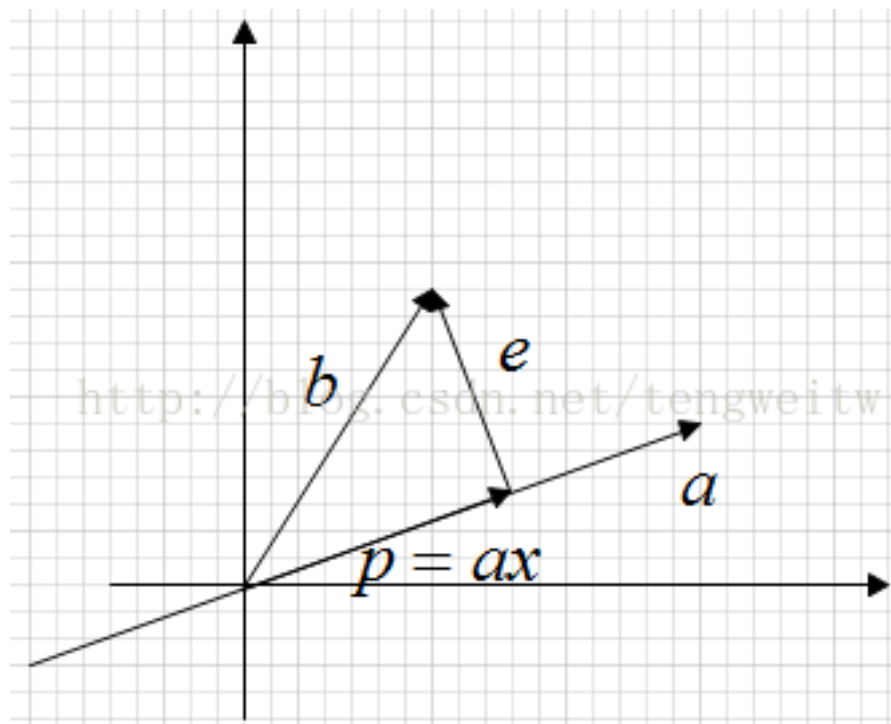


图 2.1: 向量  $b$  在向量  $a$  上的投影.

## Gram-Schmidt 正交化

## 第3章 DSO 原理

在 DSO 中, pose 表示在载体坐标系, 即  $\mathbf{T}_i$  为  $\mathbf{T}_{iw}$ 。

### 3.1 残差形式

残差公式  $r^k$  是 Host 帧 i 到 Target 帧 j 上的匹配点的 K 的某个 patch 投影的 residual:

$$\begin{aligned} r_{ij}^k &= r^k(x \boxplus \xi_0) \\ &= I_j[p'(T_i, T_j, d_k, c)] - b_j - \frac{t_j e^{a_j}}{t_i e^{a_i}} (I_i(p^k) - b_i) \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} p' &= \pi(R\pi^{-1}(p, d_p) + t) \\ &= \pi(T_j T_i^{-1} \pi^{-1}(p, d_p)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

而位姿的  $se(3)$  表示为

$$T_j = \exp(\hat{\xi}_j), T_i = \exp(\hat{\xi}_i) \quad (3.3)$$

投影和反投影方程分别为

$$\pi(P) = (\frac{f_x P_x}{P_z} + c_x, \frac{f_y P_y}{P_z} + c_y) \quad (3.4)$$

$$\pi^{-1}(P, d_p) = (\frac{p_x - c_x d_p}{f_x}, \frac{p_y - c_y d_p}{f_y}, d_p) \quad (3.5)$$

注意:

1、残差方程中, 涉及到 i、j 两个时刻的 pose。而基于 feature point 的 slam 中只于当前时刻的 pose 相关, 将全局坐标系下面的 point 转换到当前帧下计算重投影误差。

2、考虑了亮度值的仿射变换 a、b。

以上对应论文中的残差形式，而代码中涉及到更为细节，下面进行展开。这里考虑在优化时有两个关键帧，一个称为 Host，一个称为 Target。取 Host 帧中的一个像素点：

$$x_H = [u_H, v_H, 1]^T_H \quad (3.6)$$

其中  $u_H, v_H$  为该点的像素坐标系，使用齐次坐标为了方便矩阵运算。同时，点的逆深度为：

$$\rho_H = \frac{1}{d_H} \quad (3.7)$$

在不考虑亮度放射变换时，点 p 从 Host 帧 i 变换到到 Target 帧 j 上的过程为：

$$\begin{aligned} \overbrace{\rho_T^{-1} K^{-1} x_T}^{P_W} &= T_{TW} \overbrace{T_{HW}^{-1} \frac{1}{\rho_H} K^{-1} x_H}^{P_W} \\ \underbrace{\rho_T^{-1} K^{-1} x_T}_{p_T} &= \underbrace{T_{TW} T_{HW}^{-1}}_{T_{TH}} \underbrace{\frac{1}{\rho_H} K^{-1} x_H}_{p_H} \end{aligned} \quad (3.8)$$

将 SE(3) 形式展开

$$T_{TH} = \begin{bmatrix} R_{TH} & t_{TH} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

代入上式得：

$$x_T = \frac{\rho_T}{\rho_H} (K R_{TH} K^{-1} x_H + K t_{TH} \rho_H) \quad (3.10)$$

**注：**

- 1) 公式中省略了齐次坐标和非齐次坐标的转换过程。推导时请自行脑补。
- 2) 对于逆深度的操作，有些和常规习惯不同，但是代码中就是这样实现的，而且感觉挺方便的，后面会结合具体代码进行分析。

3) 公式 (3.2) 中的  $p'$  表示一个投影过程, 而 (3.10) 的  $x_H$  表示从 Host 中变换到 Target 后的一个点, 二者实质是一样的。即 (3.10) 是 (3.2) 的展开形式。

### 3.2 参数形式

涉及到的参数为  $\xi_i, \xi_j, d, c, a_i, a_j, b_i, b_j$ 。其中  $\xi_i, \xi_j \in SE(3)$  为两帧的外参,  $d$  为 point 在其 host 帧中的深度,  $c \in R^4$  为相机的内参,  $a_i, a_j, b_i, b_j$  分别为光照参数。

按照 Jacobian 的结构可以分为 2 类,  $T_i, T_j, d, c = (f_x, f_y, c_x, c_y)$  为 geometry 参数  $\delta_{geo}$ , 而  $a_i, a_j, b_i, b_j$  为 photometric 参数  $\delta_{photo}$ 。

每个点以某一个 pattern 来构成, pattern 形式见论文"Figure 4. **Residual pattern**". 按照层级, 参数又可以分为全局属性  $c$ 、帧属性  $\xi_i, \xi_j, ab_i, ab_j$ , 点属性  $d_{k_i}$  (注意, 这里是  $i$ , 表示的是点在 host 帧下面的深度)。自变量中  $d$  的数量是最多。

同时, 按照参数的来源的分类, 即可以分为 Host 参数 (下标为  $i$ , 代码中表示为  $h$ ) 和 Target 参数 (下标为  $j$ , 代码中表示为  $t$ )

### 3.3 雅可比

Jacobian 定义为:

$$J_k = \frac{\partial r^k((\delta + x) \boxplus \xi_0)}{\partial \delta} \quad (3.11)$$

论文里, 根据残差形式 (3.1) 将其划分为两部分

$$J_k = \underbrace{\left[ \frac{\partial I_j}{\partial p'} \right]}_{J_I} \underbrace{\left[ \frac{\partial p'((\delta + x) \boxplus \xi)}{\partial \delta_{geo}} \right]}_{J_{geo}} \underbrace{\left[ \frac{\partial r_k((\delta + x) \boxplus x_0)}{\partial \delta_{photo}} \right]}_{J_{photo}} \quad (3.12)$$

其中,  $J_I = \frac{\partial I_j}{\partial p'} = \left( \frac{\partial I_j}{\partial p'_x}, \frac{\partial I_j}{\partial p'_y} \right) \in R_{1 \times 2}$  是当前像素的亮度的梯度值

在完整 DSO 中, 雅可比由三部分组成:

图像雅可比  $J_I$ , 即图像梯度;

几何雅可比  $J_{geo}$ ，描述各量相对几何量，例如旋转和平移的变化率；  
光度雅可比  $J_{photo}$ ，描述各个量相对光度参数的雅可比；

### 3.3.1 图像雅可比 $J_I$

$$J_I = \frac{\partial I_j}{\partial p'} = \frac{\partial I_j}{\partial x_T} \text{ 即图像的梯度}$$

### 3.3.2 几何雅可比 $J_{geo}$

对 pose 求导

几何部分包括相机的位姿和特征点的深度，需要对两部分求雅可比。

记  $\xi_T$  和  $\xi_H$  分别为  $T_{TW}$ 、 $T_{HW}$  的李代数形式，位姿部分的雅可比：

$$\frac{\partial x_H}{\partial \xi_T} = \begin{bmatrix} \rho_T f_x & 0 & -\rho_T u f_x & -uv f_x & (1+u^2)f_x & -v f_x \\ 0 & \rho_T f_y & -f_y \rho_T v & -(1+v^2)f_y & f_y uv & f_y u \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial x_H}{\partial \xi_H} = \text{????????} \quad (3.14)$$

对逆深度求导

再考虑对 Host 帧中的逆深度  $\rho_H$  的雅可比：

$$\frac{\partial x_T}{\partial \rho_H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_T}{\partial u} & \frac{\partial x_T}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho_H} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho_H} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

对相机内参求导

## 3.4 边缘化



## 第4章 DSO 代码分析-前端跟踪

整个项目代码量比较大，文件很多。而且作者为了提高计算效率，优化相关的部分，很多中间结果共用，也没有采用开源的优化库 `ceres`、`gtsam` 等，所有部分纯手撸。而且还进行了 SSE 加速，也没使用 `OpenCV` 中的算法。因此，代码及其复杂，还涉及到分门别类的参数，这些参数与作者的使用调试经验强相关。整个关键代码部分，可以分为三个部分：

- 初始化
- 帧间跟踪
- 局部优化

**初始化** 作者在 github 的项目主页上说到，初始化并不是很鲁棒，用户可以自己实现自己的初始化操作。

**帧间跟踪** 帧间跟踪主要是进行图像对齐，计算帧间的 pose，类似基于特征点法计算 H 或者 F 分解得到 Pose 的过程，同时还要更新点的深度信息。

**局部优化** 局部优化中做的事儿就有点儿多了，重头戏。

### 4.1 标定矫正

### 4.2 系统初始化

### 4.3 帧间跟踪

DSO 中帧间跟踪时，只计算当前帧与前一个**关键帧**间的 pose，即粗略跟踪。

完成粗跟踪的类是 CoarseTracker, 该类在 FullSystem 中共有两个对象, 分别是 coarseTracker\_forNewKF、coarseTracker。

二者的区别是:

**coarseTracker:** 用于所有帧的跟踪, 每一个非关键帧到来时, 都计算相对于 coarseTracker 中保存的关键帧的相对 pose。两个关键帧间的所有非关键帧使用的 coarseTracker 对象是同一个。

**coarseTracker\_forNewKF:** 用于更新存储当前关键帧的信息。即当前帧是关键帧时, 更新该对象, 然后在下一帧 (非关键帧) 到来时, 复制给 coarseTracker 对象。更新的信息包括 refFrameID 信息, 在 makeKeyFrame() 函数中完成, 且是在完成关键帧之后和边缘化之前。

新帧到来时, 若 coarseTracker\_forNewKF 中的 refFrameID 比 coarseTracker 中的 refFrameID 大 (因为其在前一关键帧中被更新, 而 coarseTracker 中保存的还是前前关键帧), 就将 coarseTracker\_forNewKF 赋给 coarseTracker。若没有, coarseTracker 维持之前的状态, 即最后一个 keyframe。更新过程只发生在关键帧及其下一帧中间。

## 第5章 DSO 代码分析—后端优化

后端优化在 `makeKeyFrame()` 中，依次有十几项步骤：

### 5.1 点的深度计算

关键点的深度的计算都在后端完成，前端之负责计算两帧间的 `pose` 的初值。分为两步：

- 1) 通过深度滤波器更新点的深度范围，直到点的深度收敛，作为深度的初值。
- 2) 在完成帧间 `pose` 的优化后，进一步优化点的深度值。

#### 5.1.1 深度滤波

通过深度滤波器完成深度范围的更新，在函数 `ImmaturePoint::traceOn()` 中，主要维持两个变量：`idepth_min`、`idepth_max`。将点投影到 `Target` 帧中，形成对应的两个点 `ptpMin`、`ptpMax`，如果两个点的距离小于一定的阈值，则认为该点深度收敛：

**Listing 5.1** `ImmaturePoint::traceOn()`

```
1: Vec3f pr = hostToFrame_KRKi * Vec3f(u,v, 1);
2: Vec3f ptpMin = pr + hostToFrame_Kt*idepth_min;
3: .....
4: Vec3f ptpMax;
5: ptpMax = pr + hostToFrame_Kt*idepth_max;
6: .....
7: if(!(uMax > 4 && vMax > 4 && uMax < wG[0]-5 && vMax < hG[0]-5))
8: {
9:     if(debugPrint) printf("00B_uMax%f_v%f_u%f_v%f!\n",u,v, uMax, vMax);
10:    lastTraceUV = Vec2f(-1,-1);
11:    lastTracePixelInterval=0;
```

```

12:
13:   return lastTraceStatus = ImmaturePointStatus::IPS_00B;
14: }

```

对深度进行深度更新：

$$\begin{aligned}
u - \delta edx &= \frac{(pr + \rho_{min} Kt)[0]}{(pr + \rho_{min} Kt)[2]} \\
u + \delta edx &= \frac{(pr + \rho_{max} Kt)[0]}{(pr + \rho_{max} Kt)[2]}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

式中， $pr = KR_{TH}K^{-1} * p_H$  是点从 Host 帧中旋转到 Target 帧后的样子（即 Point Rotation 的简写），未考虑平移。平移和深度相关，深度相关的和前面重点强调的是一样的。变形后得到代码中的形式：

$$\begin{aligned}
\rho_{min} &= \frac{(pr[2] * (u - \delta edx) - pr[0])}{(kt)[0] - (Kt)[2] * (u - \delta edx)} \\
\rho_{max} &= \frac{(pr[2] * (u + \delta edx) - pr[0])}{(kt)[0] - (Kt)[2] * (u + \delta edx)}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

### 5.1.2 深度优化

在优化时，会专门对深度进行优化

## 5.2 Bundle Adjustment

这一部分是整篇中最为核心的地方。作者将 Hessian 矩阵分为 active、linear、marginal 三部分。在 AccumulatedTopHessianSSE::addPoint() 函数中，模板参数 mode 的值 0、1、2 分别表示 active、linearized、marginalize。但是经测试 linearized 下面的实际部分并未执行，作者在逻辑中将其屏蔽掉了。

**active 部分**

**marginal 部分**

### 5.3 边缘化

## 第 6 章 代码细节

### 6.1 比例因子

代码中好多地方出现比例因子，这些因子作用是提高求解方程式

$$H \triangle x = b$$

的数值稳定性和精确度.

出现的地方：

- 1、方程求解的过程中
- 2、FrameHessian 中