

Sprawozdanie z laboratorium 1

Temat: Predykaty geometryczne

Data: 20.10.2023

Algorytmy geometryczne

Wojciech Kaźmierczak

Nr albumu: 416692

Gr. 4, czwartek 11:20, tydzień A

Informatyka, Wydział Informatyki

AGH UST

Procesor: AMD Ryzen 7 5700U 8 rdzeni

RAM: 16GB

System: Windows 11 Home

Użyty język: Python, Biblioteki: numpy, pandas, matplotlib

Środowisko: Jupyter Notebook

1. Cel ćwiczenia

Porównanie wyników położenia losowo wygenerowanych punktów względem prostej obliczanego różnymi wyznacznikami, w różnych zakresach, w różnych przyjętych tolerancjach błędu (epsilon wokół zera), oraz dla różnej dokładności zmiennej, w której zapisywane są współrzędne punktów.

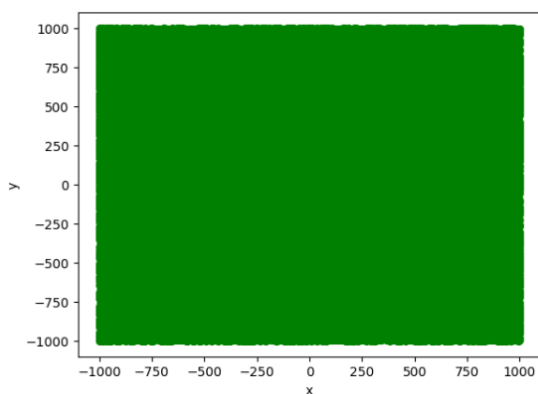
2. Generowanie zbiorów punktów

Wygenerowane zostały 4 zbiory punktów:

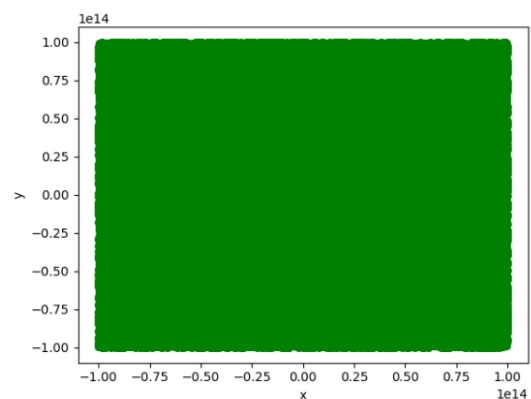
- 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału $[-1000, 1000]$
- 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału $[-10^{14}, 10^{14}]$
- 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu $R=100$
- 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału $[-1000, 1000]$ leżących na prostej wyznaczonej przez wektor (a, b) , przyjmij $a = [-1.0, 0.0]$, $b = [1.0, 0.1]$.

Generowanie punktów odbyło się przy pomocy funkcji `numpy.random.uniform()`, dla zbioru c) użyta została postać trygonometryczna wzoru na okrąg, a dla d) postać parametryczna prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

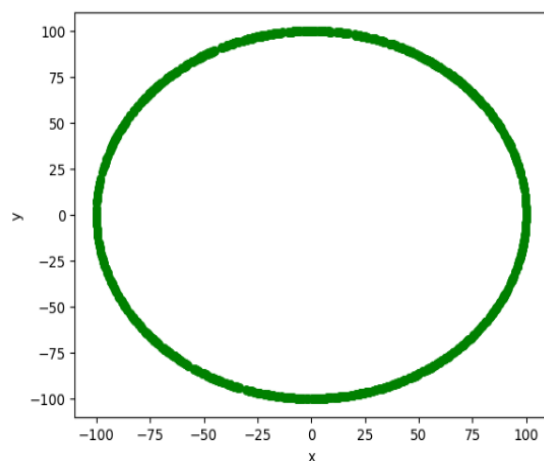
Zestaw A



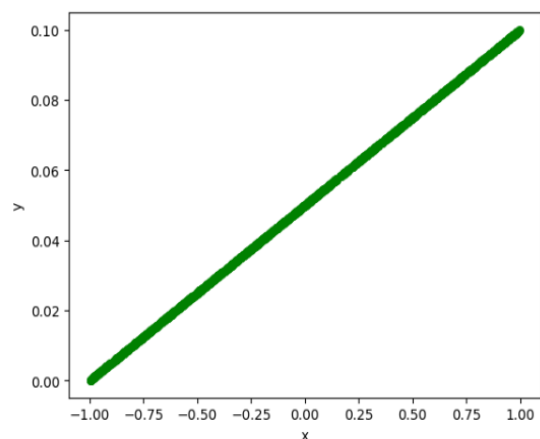
Zestaw B



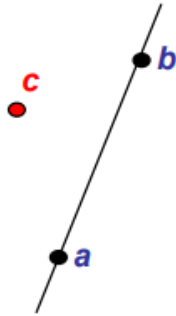
Zestaw C



Zestaw D



3. Wyznaczanie, po której stronie prostej znajduje się punkt



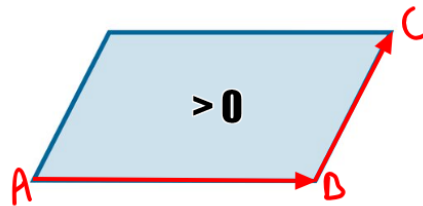
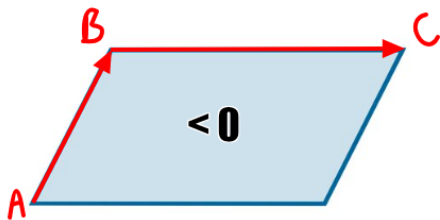
W celu rozstrzygnięcia po której stronie prostej (ab) znajduje się punkt c, możemy policzyć wyznacznik macierzy utworzonej z wartości współrzędnych punktów, zapisany w następujący sposób:

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad \det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$

$\det(a, b, c) = 0 \rightarrow$ Punkt c leży na prostej

$\det(a, b, c) > 0 \rightarrow$ Punkt c leży po lewej stronie prostej (jak na rysunku powyżej)

$\det(a, b, c) < 0 \rightarrow$ Punkt c leży po prawej stronie prostej



Wyznacznik obliczany był na 4 sposoby:

- przy użyciu funkcji bibliotecznej `numpy.linalg.det()` obliczającej wyznacznik 2x2, ten sposób oblicznia wyznacznika macierzy oznaczony jest dalej skrótowo – (2x2_lib)

- przy użyciu funkcji bibliotecznej `numpy.linalg.det()` obliczającej wyznacznik 3x3, ten sposób oblicznia wyznacznika macierzy oznaczony jest dalej skrótowo – (3x3_lib)

- przy użyciu funkcji zamplementowanej samodzielnie obliczającej wyznacznik 2x2, ten sposób oblicznia wyznacznika macierzy oznaczony jest dalej skrótowo – (2x2)

- przy użyciu funkcji zamplementowanej samodzielnie obliczającej wyznacznik 3x3, ten sposób oblicznia wyznacznika macierzy oznaczony jest dalej skrótowo – (3x3)

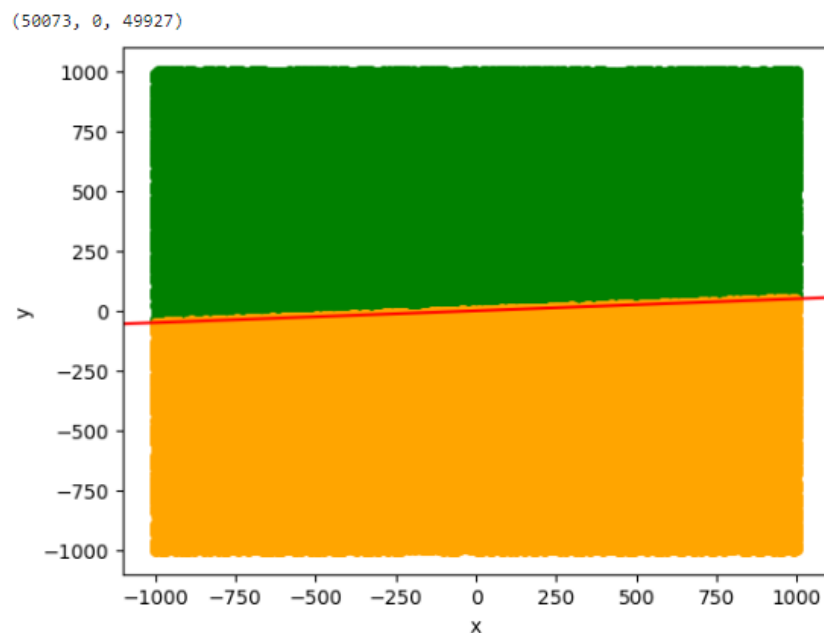
Punkty których wyznacznik mieścił się w granicach $[-\epsilon, \epsilon]$, także będziemy uznawać jako leżące na prostej. Przyjęte wartości epsilon:

1. 10^{-8}
2. 10^{-10}
3. 10^{-12}
4. 10^{-14}
5. 0

4. Wykresy dla niepewności 10^{-12}

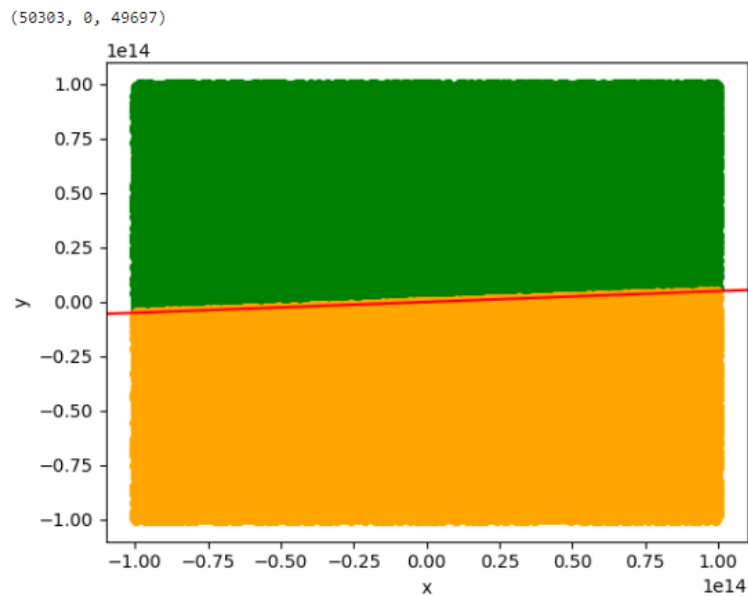
Punkty na wszystkich wykresach oznaczone są następującymi kolorami, znajdujące się po lewej od prostej [zielony], na prostej [fioletowy], po prawej od prostej [żółty]
krotka umieszczona w lewym górnym rogu pokazuje kolejno liczebność punktów znajdujących się po lewej, na prostej i po prawej

Wykres1 zestaw A (wszystkie wyznaczniki)



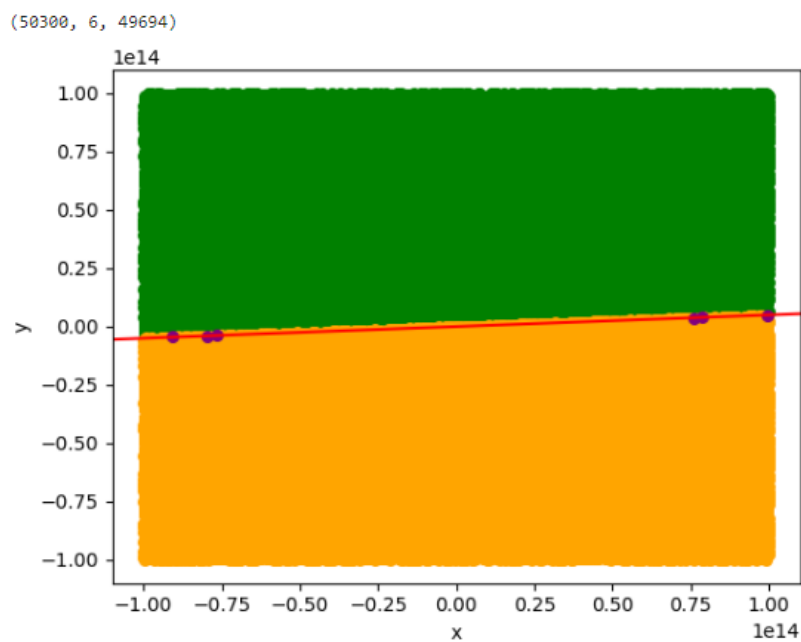
Niezależnie od sposobu liczenia wyznacznika wykres był zawsze taki sam, jak widać w tym przypadku żaden punkt nie został zakwalifikowany jako leżący na prostej.

Wykres 2.1 zestaw B (3x3, 3x3_lib)



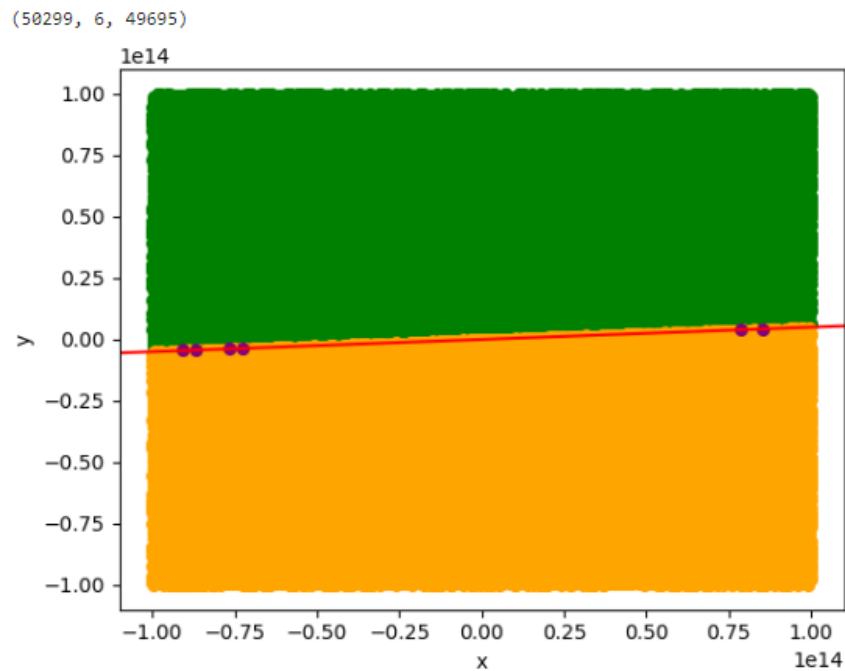
Wykres ten (powyżej) ilustruje kategoryzację punktów dla wyznacznika liczonego funkcją biblioteczną 3x3 oraz licząc wyznacznik 3x3 napisaną przeze mnie funkcją, jednak dla wyznaczników 2x2 otrzymamy inny wynik.

Wykres 2.2 zestaw B (2x2_lib)



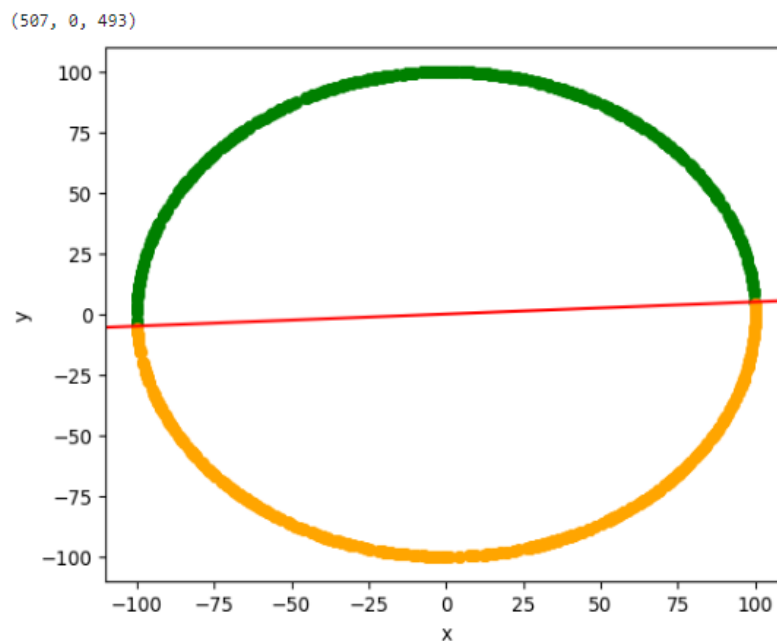
Kiedy obliczymy wyznacznik 2x2 funkcją biblioteczną otrzymujemy kilka punktów leżących na prostej (czego nie doświadczyliśmy w przypadku zestawu punktów A)

Wykres 2.3 zestaw B (2x2)



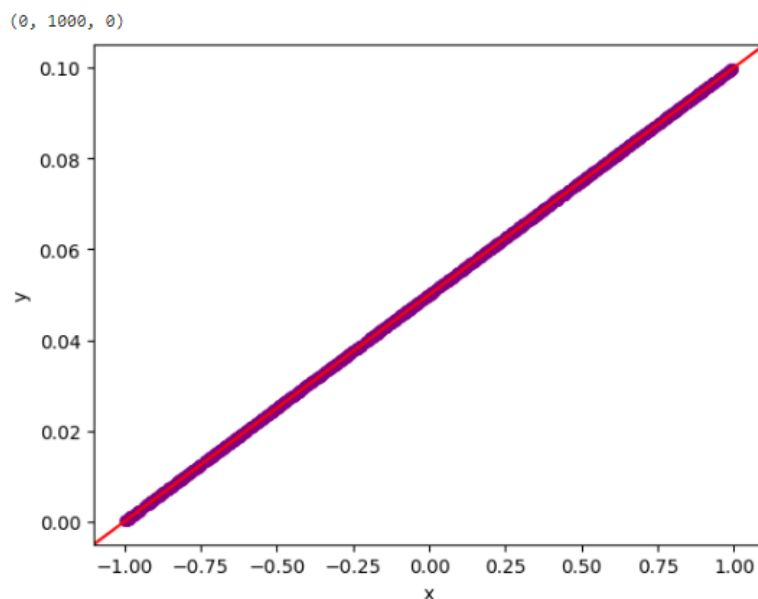
Na wykresie powyżej również otrzymaliśmy punkty leżące na prostej jednak różnią się od tych wyliczonych za pomocą funkcji bibliotecznej, widzimy tutaj różnicę w sposobie obliczania tej samej rzeczy jednak wyniki różnią się ze względu na dokładność obliczeń

Wykres 3 zestaw C (wszystkie wyznaczniki)



Dla wszystkich trzech wyznaczników otrzymaliśmy ten sam wynik, żaden punkt nie został zakwalifikowany jako leżący na prostej.

Wykres 4 zestaw D (wszystkie wyznaczniki)



W tym przypadku wszystkie wygenerowane punkty na prostej rzeczywiście zostały uznane jako leżące na prostej, potwierdzają to wyniki otrzymane przy użyciu każdego z wyznaczników.

5. Analiza wyników z uwzględnieniem wszystkich parametrów.

Przedstawione poniżej tabele zbiorczo pokazują wyniki otrzymane podczas ćwiczenia. Oznaczenia kolumn (A, B, C, D) reprezentują zestaw punktów, dla którego otrzymano dane wyniki. Oznaczenia wierszy (mat_det_3x3_lib, mat_det_3x3, mat_det_2x2_lib, mat_det_2x2) reprezentują użytą metodę obliczania wyznacznika macierzy:

- mat_det_3x3_lib – wyznacznik 3x3 obliczany funkcją `numpy.linalg.det()`
- mat_det_2x2_lib – wyznacznik 2x2 obliczany funkcją `numpy.linalg.det()`
- mat_det_3x3 – wyznacznik 3x3 obliczany funkcją zaimplementowaną ręcznie
- mat_det_2x2 – wyznacznik 2x2 obliczany funkcją zaimplementowaną ręcznie

W lewym górnym rogu znajdują się informacje o przyjętej tolerancji błędów - epsilon. Same dane natomiast przedstawione są w następujący sposób:

(x, y, z)

- x – liczebność zbioru punktów leżących na lewo od prostej
- y – liczebność zbioru punktów leżących na prostej
- z – liczebność zbioru punktów leżących na prawo od prostej

5.1 Wyniki bez zmienionej dokładności typu float

Tabela 1.1 (wyniki dla float64, eps=10⁻⁸)

10 ⁻⁸	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50299, 6, 49695)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)

Tabela 1.2 (wyniki dla float64, eps=10⁻¹⁰)

10 ⁻¹⁰	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50299, 6, 49695)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)

Tabela 1.3 (wyniki dla float64, eps=10⁻¹²)

10 ⁻¹²	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50299, 6, 49695)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)

Tabela 1.4 (wyniki dla float64, eps=10⁻¹⁴)

10 ⁻¹⁴	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50299, 6, 49695)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)

Tabela 1.5 (wyniki dla float64, eps=0)

0	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(174, 826, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(223, 565, 212)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(296, 382, 322)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50299, 6, 49695)	(507, 0, 493)	(274, 402, 324)

Analiza tabeli 1: Większość wyników powtarza się niezależnie od dokładności oraz wyznacznika, wyniki dla zestawu A, B oraz C są wszędzie takie same jednak dla zestawu D w przypadku ustawienia tolerancji epsilon na zero okazuje się, że wiele punktów nie zostaje zakwalifikowanych jako leżące na prostej.

5.1 Wyniki ze zmienioną dokładnością typu float

Tabela 2.1 (wyniki dla float32, $\text{eps}=10^{-8}$)

10⁻⁸ float32	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(0, 1000, 0)

Tabela 2.2 (wyniki dla float32, $\text{eps}=10^{-10}$)

10⁻¹⁰ float32	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(415, 164, 421)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(415, 164, 421)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(415, 164, 421)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(415, 164, 421)

Tabela 2.3 (wyniki dla float32, $\text{eps}=10^{-12}$)

10⁻¹² float32	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)

Tabela 2.4 (wyniki dla float32, $\text{eps}=10^{-14}$)

10⁻¹⁴ float32	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)

Tabela 2.5 (wyniki dla float32, $\text{eps}=0$)

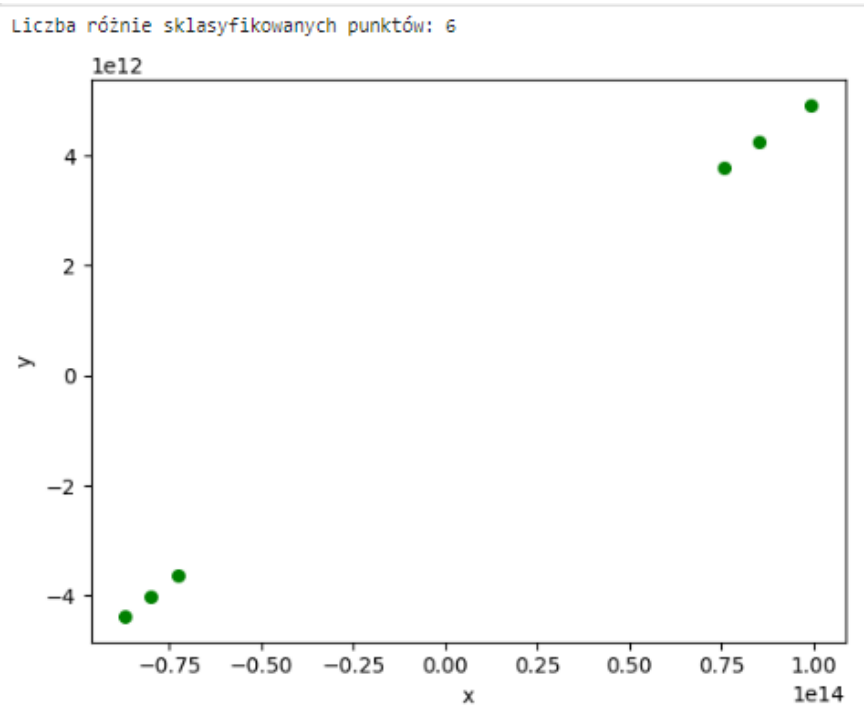
0 float32	A	B	C	D
mat_det_3x3_lib	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 159, 424)
mat_det_3x3	(50073, 0, 49927)	(50303, 0, 49697)	(507, 0, 493)	(417, 41, 542)
mat_det_2x2_lib	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(418, 29, 553)
mat_det_2x2	(50073, 0, 49927)	(50300, 6, 49694)	(507, 0, 493)	(417, 22, 561)

Analiza tabeli 2: Wyniki dla zestawu A oraz C pozostają bez zmian w każdym przypadku, dla B różnią się od tych otrzymanych bez zmienionej wartości float, ale w obrębie zmienionej pozostają takie same, natomiast wyniki dla zestawu D różnią się znacznie jeśli chodzi o klasyfikację do danej strony i jeśli chodzi o wybrany wyznacznik, ale także jeśli chodzi o wybrany epsilon. Obserwujemy tutaj największą zmian, wynikających z rozbieżności w sposobie liczenia oraz dokładności obliczeń

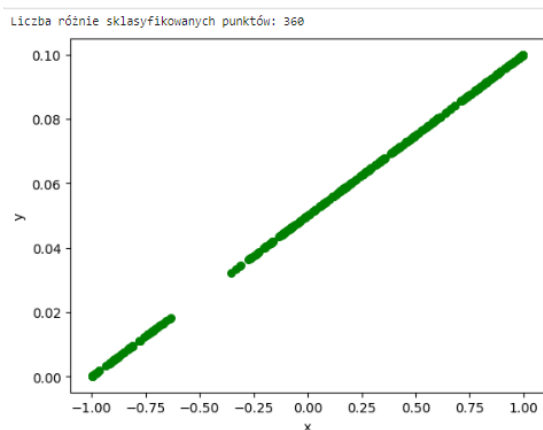
6. Porównywanie wykresów

Kilka kolejnych wykresów będzie obrazem punktów, które zostały zakwalifikowane w różny sposób, w zależności od sposobu obliczenia wyznacznika. Legenda nazw wykresów:
(porównywane wyznaczniki [w skrótowej, opisanej wcześniej formie], epsilon, badany zestaw punktów).

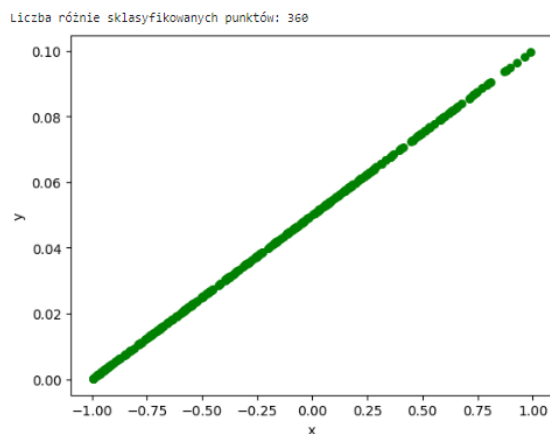
Wkres 5 (2x2 i 2x2lib, 10^{-12} , zestaw B)



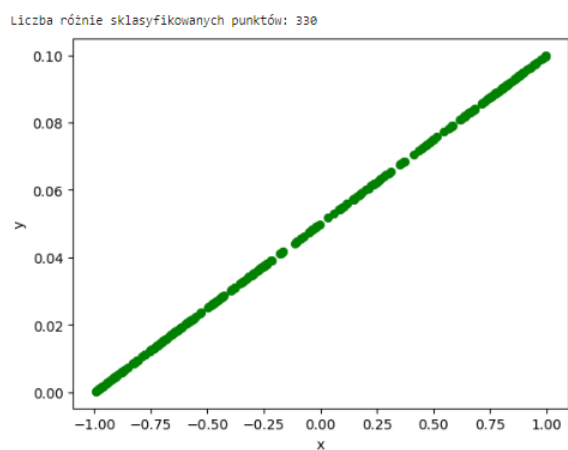
Wykres 6.1 (3x3 i 3x3lib, 0, zestaw D)



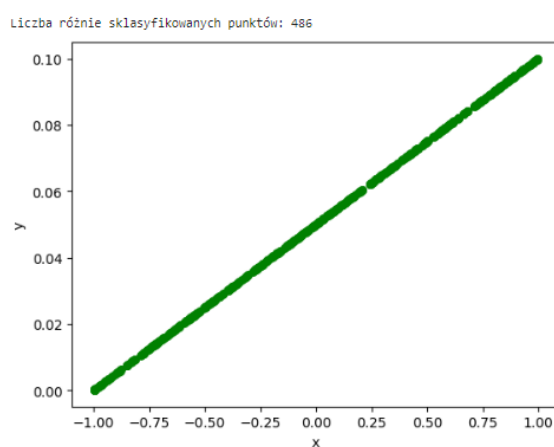
Wykres 6.2 (2x2 i 2x2lib, 0, zestaw D)



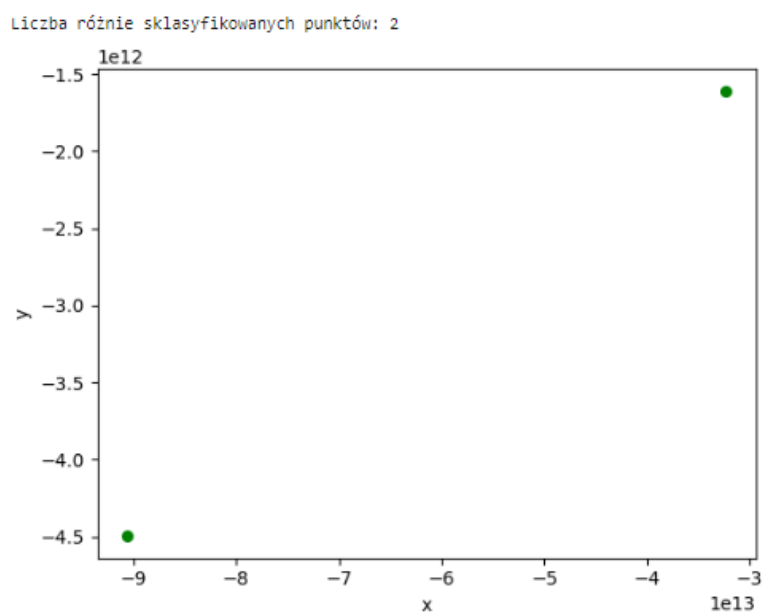
Wykres 6.3 (2x2 i 3x3, 0, zestaw D)



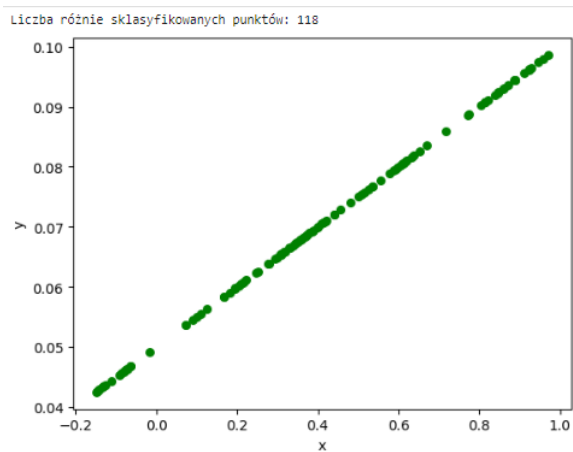
Wykres 6.4 (2x2lib i 3x3lib, 0, zestaw D)



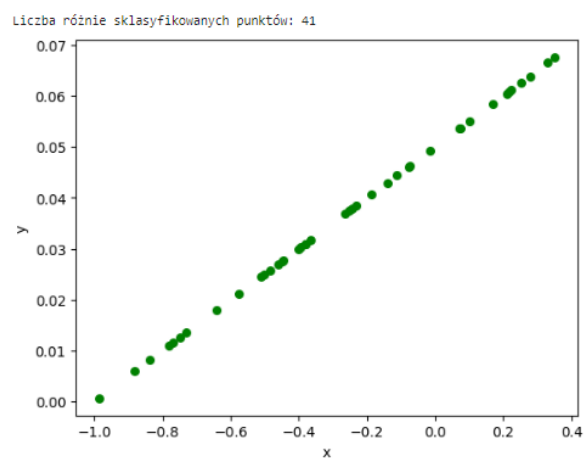
Wykres 7 (2x2 i 2x2lib, 10^{-12} , zestaw B, float32)



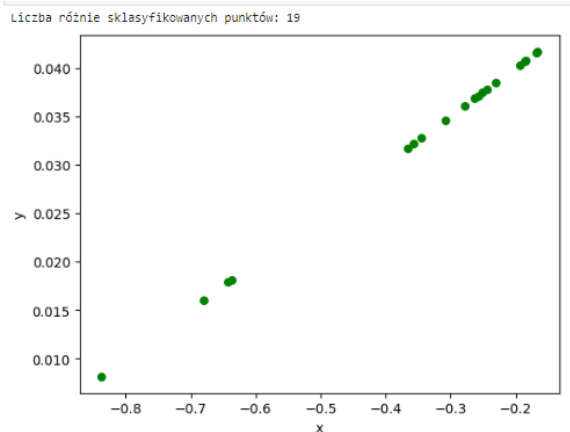
Wykres 8.1 (3x3 i 3x3lib, 0, zestaw D, float32)



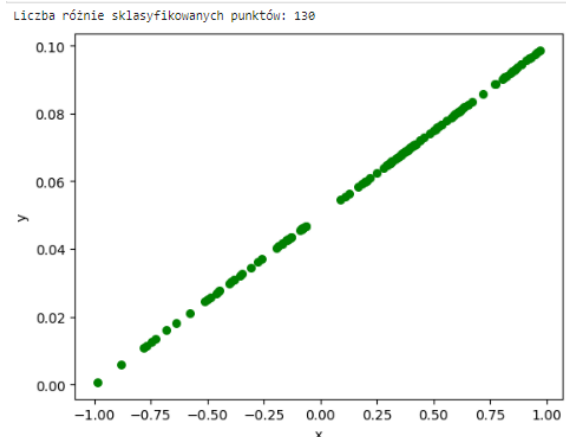
Wykres 8.2 (2x2 i 2x2lib, 0, zestaw D, float32)



Wykres 8.3 (2x2 i 3x3, 0, zestaw D, float32)



Wykres 8.4 (2x2lib i 3x3lib, 0, zestaw D, float32)



7. Wnioski

Dla zestawu punktów A (10^5 punktów generowanych na kwadracie o boku 2000) wszystkie otrzymane klasyfikacje punktów względem prostej były takie same i żadnego punktu nie sklasyfikowano jako leżącego na prostej, punkty generowane były losowo, zatem szansa by jakiś znalazł się dokładnie na prostej była znikoma nawet przy największej tolerancji.

Zestaw B pokazał już ciekawsze wyniki, a zwłaszcza dla wyznaczników: 2x2 implementowanego ręcznie oraz 2x2 jako funkcji bibliotecznej. W tych przypadkach otrzymaliśmy kilka punktów leżących na prostej dla każdej tolerancji epsilon. Obliczenia położenia punktu wyznacznikiem 2x2 i 2x2_lib różnią się o kilka punktów (wykres 5 oraz 7). Różnice wynikają ze sposobu i dokładności obliczeń.

Zestaw C (1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu $R=100$) ten zestaw nie pokazał żadnych różnic w wyniku niezależnie od tolerancji błędu oraz sposobu liczenia wyznacznika. Może być to podyktowane stosunkowo niewielką liczbą punktów generowanych, a tym bardziej niewielką liczbą punktów leżących nieopodal prostej.

Zestaw 4 (1000 losowych punktów na prostej) dał najciekawsze wyniki, bo tutaj mogliśmy obserwować zmiany w zależności od tolerancji przydzielania punktów jako leżące na linii (różne epsilon), jak i przyjętej dokładności float oraz sposobu obliczania wyznacznika macierzy. Wyniki dla epsilon równe 0 dla każdego wyznacznika dają inny wynik zarówno dla niezminionej dokładności floata (wykresy 6.1, 6.2, 6.3, 6.4) jak i dla zmienionej (wykresy 8.1, 8.2, 8.3, 8.4). Wydawałoby się, że punkty generowane na prostej powinny leżeć na tej prostej, jednak przez różne sposoby obliczania wyznacznika oraz ograniczoną pamięć na zapis liczby, okazuje się że niektóre sklasyfikowane są zupełnie inaczej. Nawet 486 różnic w klasyfikacji punktów dla 2x2lib oraz 3x3lib (wykres 6.4) (przypomnijmy, że generowaliśmy 1000 punktów). Niewątpliwie ciekawym jest obserwowanie tak dużych różnic w przykładach, które teoretycznie powinny ich nie posiadać. Jednak praktyka i ograniczenia obliczeniowe rewidują teorię.

