Sprawozdanie z laboratorium 2

Temat: Otoczka wypukła

Data: 17.11.2023

Algorytmy geometryczne

Wojciech Kaźmierczak

Nr albumu: 416692

Gr. 4, czwartek 11:20, tydzień A

Informatyka, Wydział Informatyki

AGH UST

Procesor: AMD Ryzen 7 5700U 8 rdzeni

RAM: 16GB

System: Windows 11 Home

Użyty język: Python, Biblioteki: numpy, pandas, matplotlib

Środowisko: Jupyter Notebook

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie polegało na wyznaczeniu otoczki wypukłej zbioru punktów przy użyciu algorytmu Graham'a oraz Jarvis'a.

2. Generowanie punktów zbiorów

Wygenerowane zostaną 4 zbiory punktów na płaszczyźnie (współrzędne rzeczywiste typu double):

a) Zbiór A zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów o współrzędnych z przedziału [-100, 100], funkcja generate_uniform_points(left=-100, right=100, n=100)

b) Zbiór B zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=10, funkcja generate_circle_points(O, R, n=100)

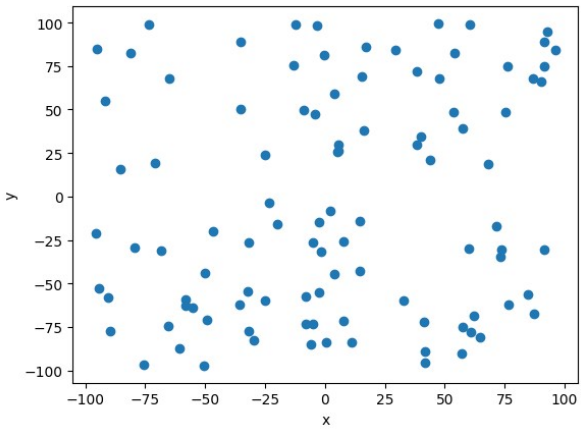
c) Zbiór C zawierający 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na bokach prostokąta o wierzchołkach (-10, 10), (-10,-10), (10,-10), (10,10), funkcja generate_rectangle_points(a=(-10,-10), b=(10,-10), c=(10,10), d=(-10,10), n=100)

d) Zbiór D zawierający wierzchołki kwadratu (0, 0), (10, 0), (10, 10), (0, 10) oraz punkty wygenerowane losowo w sposób następujący: po 25 punktów na dwóch bokach kwadratu leżących na osiach i po 20 punktów na przekątnych kwadratu, funkcja generate_square_points(a=(0,0), b=(10,0), c=(10,10), d=(0,10), axis_n=25, diag_n=20)

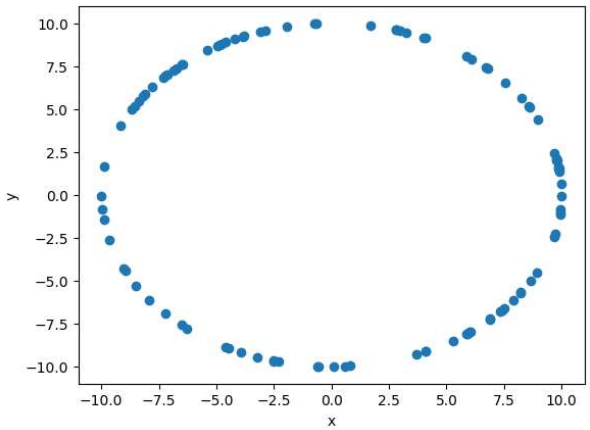
Na końcu wygenerowane zostaną ponadto zbiory o liczebnościach 25, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 1000 dla (zbioru D liczebności nieparzyste zastąpione pobliskimi parzystymi z uwagi na założenia rozłożenia punktów w zbiorze). Ponadto dla zbioru B dobierano losowe środki okręgu z współrzędnymi o wartościach z przedziału [-100, 100) oraz długość promienia z przedziału [1, 30). Dla zbioru D wartość z tablicy: 25, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 1000 podzielona przez dwa całkowitoliczbowo jest górną granicą dodatniej wartości losowej, którą jest liczba punktów na boku, a liczba punktów na przekątnej wynosi wartość z wyżej wymienionej tablicy odjąć dwukrotność liczby punktów na boku i to całe podzielone przez dwa całkowitoliczbowo.

Cztery pierwsze wygenerowane zbiory:

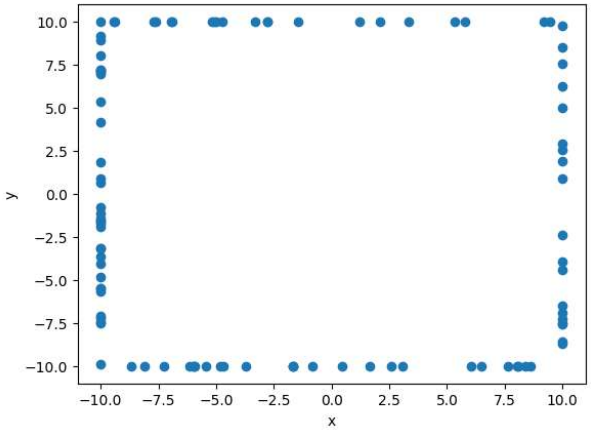
Wykres 1.1 Zbiór A



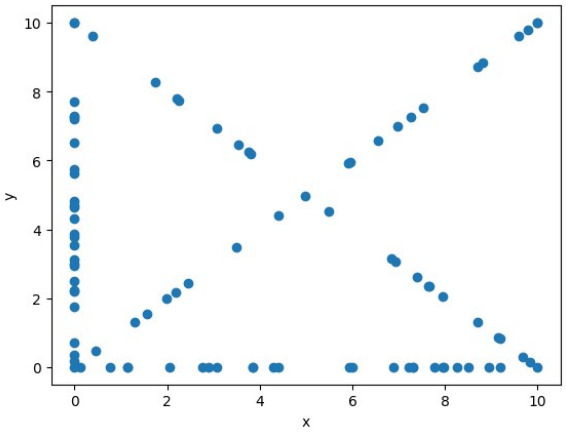
Wykres 1.2 Zbiór B



Wykres 1.3 Zbiór C



Wykres 1.4 Zbiór D



3. Implementacja algorytmów

Wyznacznik obliczano zaimplementowaną funkcją obliczającą wyznacznik 2x2, przyjęty epsilon reprezentujący tolerancję błędu ustawiony na 0.

3.1. Algorytm Graham'a

Działanie algorytmu rozpoczyna się od znalezienia punktu p0 z najmniejszą współrzędną y, a jeśli jest ich więcej niż jeden to także z najmniejszą wartością współrzędnej x. Po czym rozpoczyna się sortowanie punktów względem kąta między wektorem utworzonym przez punkty p0 oraz aktualnie rozważany punkt, a dodatnią częścią osi OX. Z punktów o tym samym kącie pozostawia tylko ten, który jest najbardziej odległy od p0. Dodajemy trzy pierwsze wierzchołki z posortowanej listy do otoczki. Następnie przetwarzając kolejne posortowane wierzchołki, jeśli dany tworzy lewoskręt względem wektora tworzonego przez ostatnie dwa wierzchołki dodane do otoczki to i on jest dodawany do otoczki jednak, jeśli nie ostatni punkt dodany do otoczki jest z niej usuwany, a aktualnie przetwarzany trafia na jego miejsce. Wykonujemy te operacje dla wszystkich punktów. Złożoność czasowa to O(nlogn) gdzie n to liczba punktów zbioru.

3.2. Algorytm Jarvis'a

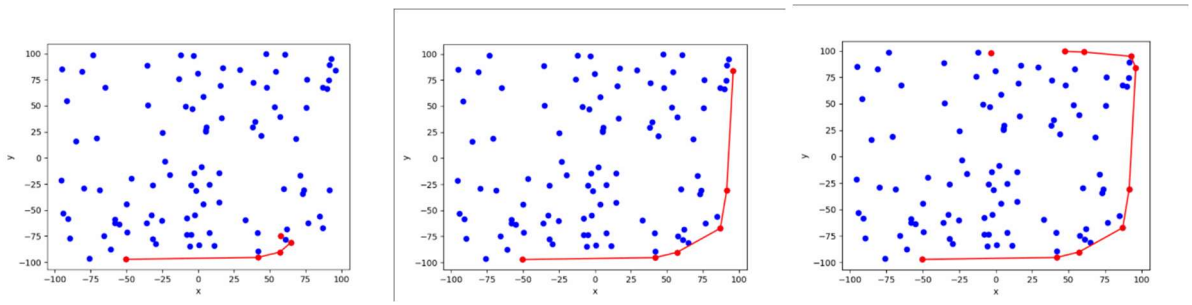
Działanie algorytmu rozpoczyna się od znalezienia punktu p0 z najmniejszą współrzędną y, a jeśli jest ich więcej niż jeden to także z najmniejszą wartością współrzędnej x. następnie wybieramy dowolny punkt z tego zestawu i oznaczamy go jako next potem iterujemy po każdym punkcie w zbiorze i patrzymy czy next nie ma żadnego prawostronnego sąsiada, jeśli ma to ten sąsiad staje się nowym next. I tak iterujemy aż nie dotrzemy do p0. Złożoność czasowa to O(nk), gdzie n to liczba punktów zbioru, a k to liczba punktów na otoczce, w pesymistycznym przypadku złożoność może osiągać O(n^2).

4. Wyznaczanie otoczek

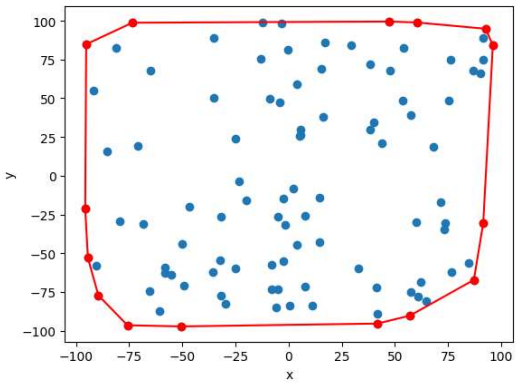
4.1. Algorytm Grahama

4.1.1. Zbiór A

Wykres 2.1 **Wykres 2.2** **Wykres 2.3**

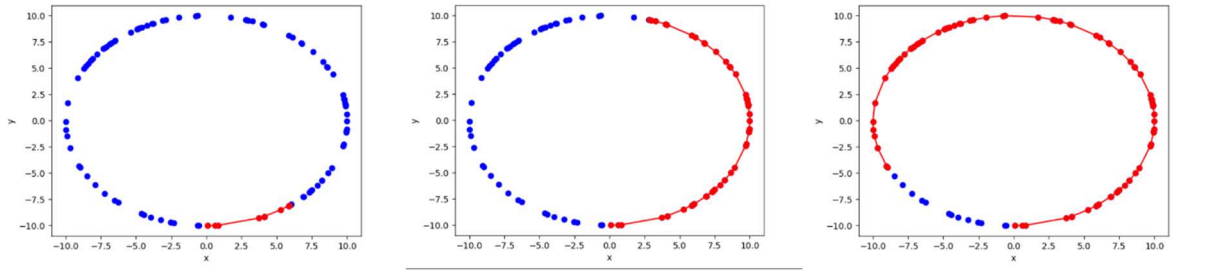


Wykres 2.4 otoczka wypukła zbioru A

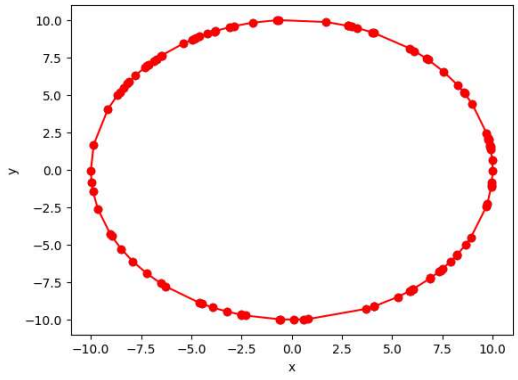


4.1.2. Zbiór B

Wykres 3.1 **Wykres 3.2** **Wykres 3.3**

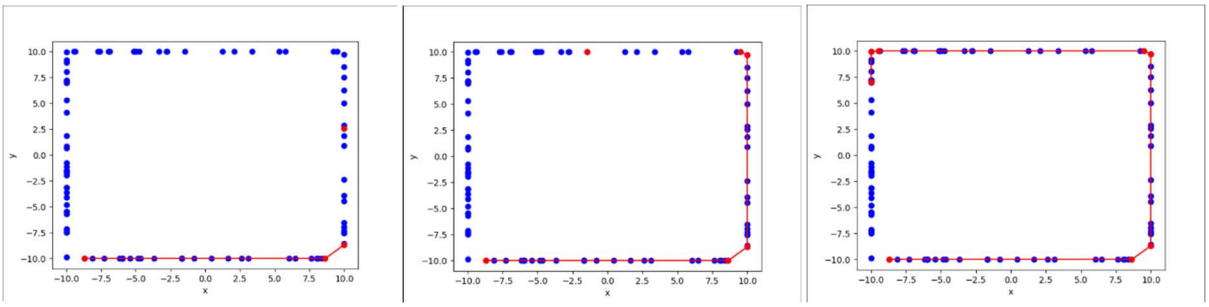


Wykres 3.4 otoczka wypukła zbioru B

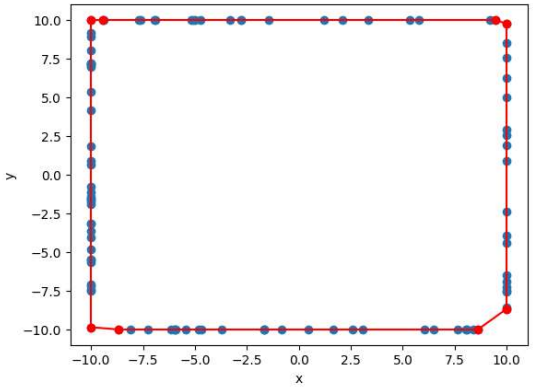


4.1.3. Zbiór C

Wykres 4.1 **Wykres 4.2** **Wykres 4.3**

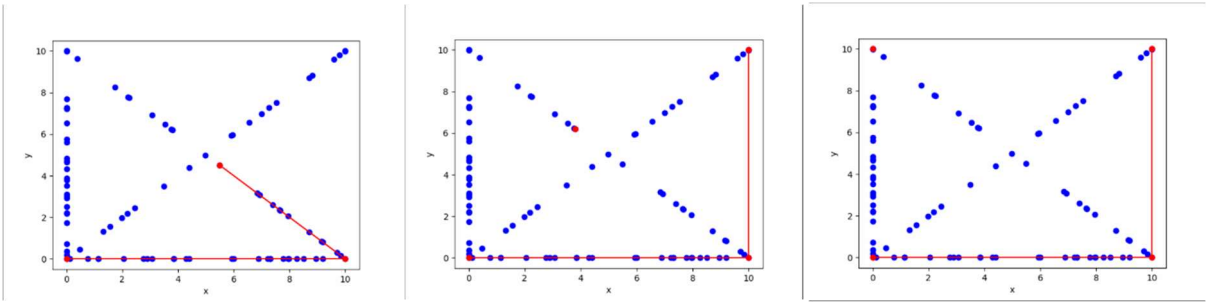


Wykres 4.4 otoczka wypukła zbioru C

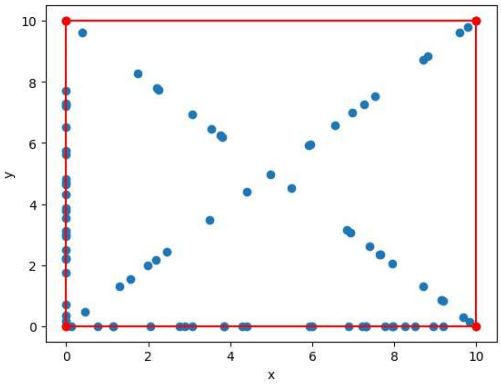


4.1.4. Zbiór D

Wykres 5.1 **Wykres 5.2** **Wykres 5.3**



Wykres 5.4 otoczka wypukła zbioru D

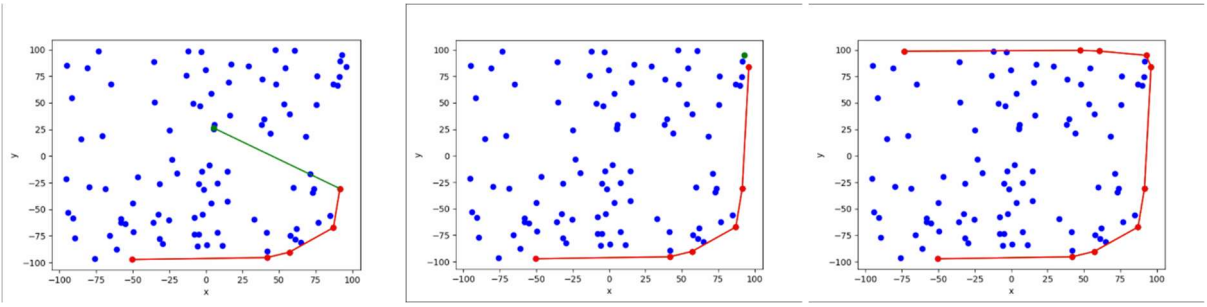


4.2. Algorytm Jarvis'a

Dla algorytmu Jarvis wedle oczekiwań otoczki wypukłe były tożsame tym uzyskanym przy użyciu Graham'a (wykresy 2.4, 3.4, 4.4, 5.4) jednak oczywiście różniły się sposobem ich otrzymania. Na wykresach kolorem zielonym oznaczono punkty, które są w danym momencie sprawdzane jako potencjalne punkty otoczki.

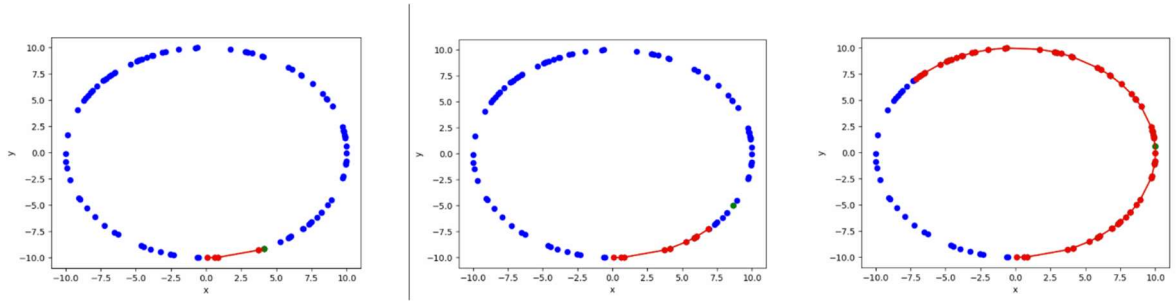
4.2.1. Zbiór A

Wykres 6.1 **Wykres 6.2** **Wykres 6.3**



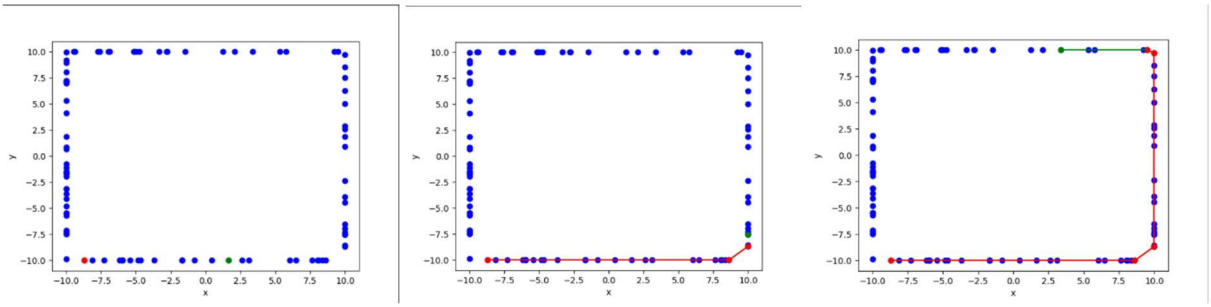
4.2.2. Zbiór B

Wykres 7.1 **Wykres 7.2** **Wykres 7.3**



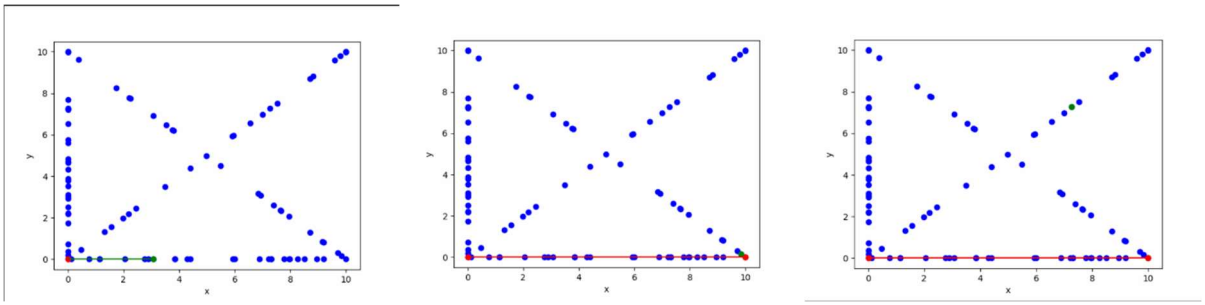
4.2.3. Zbiór C

Wykres 8.1 **Wykres 8.2** **Wykres 8.3**



4.2.4. Zbiór D

Wykres 9.1 **Wykres 9.2** **Wykres 9.3**



Wszystkie powyższe wykresy są krokami algorytmów kolejno Graham'a i Jarvis'a pełna wizualizacja w postaci GIFa zawarta jest w Jupyter notebook, zrealizowana jest ona przy pomocy dostarczonego narzędzia Visualizer().

5. Porównanie czasów działania algorytmów

Porównanie czasów działania algorytmów zostało zrealizowane na zbiorach nowo wygenerowanych informacja o owych zbiorach znajduje się w punkcie 2 (Generowanie punktów zbiorów).

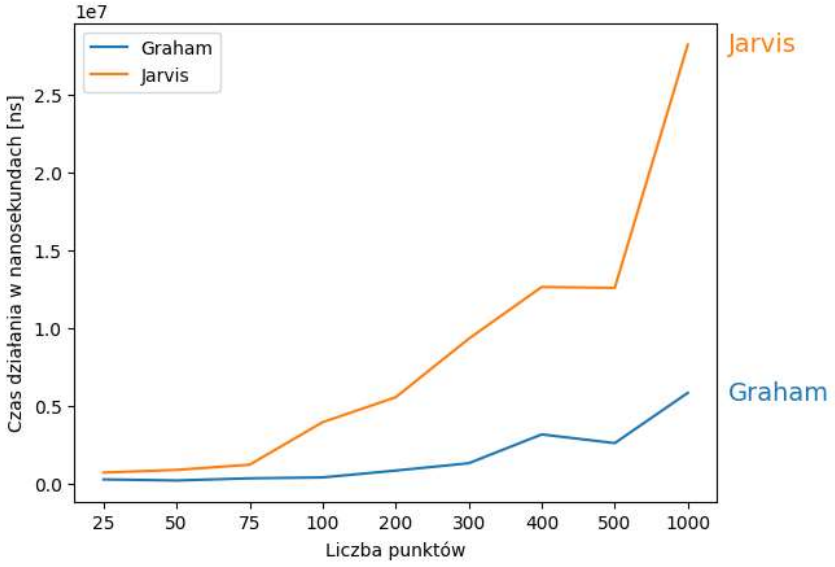
Czas działania algorytmów zmierzony został przy pomocy biblioteki time a mianowicie funkcji time_ns(), która to zawraca czas w nanosekundach [ns] w tych też jednostkach będzie on podawany od tego momentu. Wyniki dla każdego zbioru w tabelach.

5.1. Wyniki dla zbioru A generowanego funkcją : generate_uniform_points(left=-100, right=100, n)

Tabela 1 Zmierzone czasy dla zbioru A

Liczba punktów	Graham [ns]	Jarvis [ns]	Różnica czasu [ns] (Graham-Jarvis)
25	253293	692411	-439118
50	185063	865751	-680688
75	323186	1200861	-877675
100	383030	3937568	-3554538
200	821938	5542191	-4720253
300	1293908	9309187	-8015279
400	3149587	12641733	-9492146
500	2589860	12584304	-9994444
1000	5825593	28240596	-22415003

Wykres 10.1 Obrazuje czas działania obu algorytmów dla zbioru A w zależności od liczby punktów



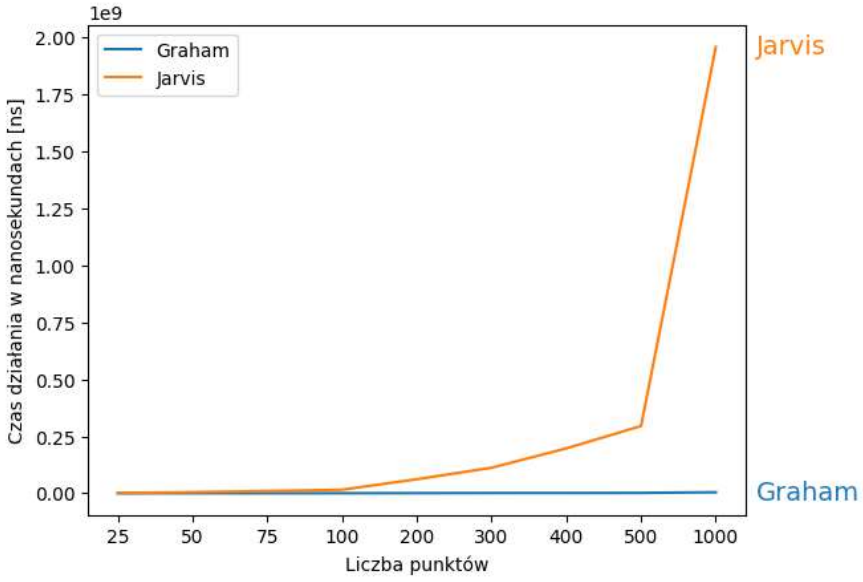
Łatwo zauważyć, iż czas działania algorytmu Grahama jest znacznie mniejszy niż algorytmu Jarvisa, krzywa ukazująca czasy działania algorytmu Jarvisa przypomina kawałek funkcji kwadratowej co może świadczyć, iż dla zbioru A czas działania owego algorytmu jest przybliżony do kwadratu liczby punktów zbioru.

5.2. Wyniki dla zbioru B generowanego funkcją : generate_circle_points(O, R, n) , środek okręgu oraz promień wybierany losowo

Tabela 2 Zmierzone czasy dla zbioru B

Liczba punktów	Promień	Środek okręgu	Graham [ns]	Jarvis [ns]	Różnica czasu [ns] (Graham-Jarvis)
25	17	(-55,-66)	128064	1151767	-1023703
50	7	(23, 37)	155015	4860160	-4705145
75	8	(90, 98)	308739	9856197	-9547458
100	4	(26,-39)	373493	15576080	-15202587
200	11	(29,-81)	783324	61639555	-60856231
300	1	(-65,-13)	1285842	112107355	-110821513
400	20	(54,-89)	1361016	197154989	-195793973
500	22	(8,-63)	1676398	295348911	-293672513
1000	4	(-54, 3)	4563044	1959128676	-1954565632

Wykres 10.2 Obrazuje czas działania obu algorytmów dla zbioru C w zależności od liczby punktów



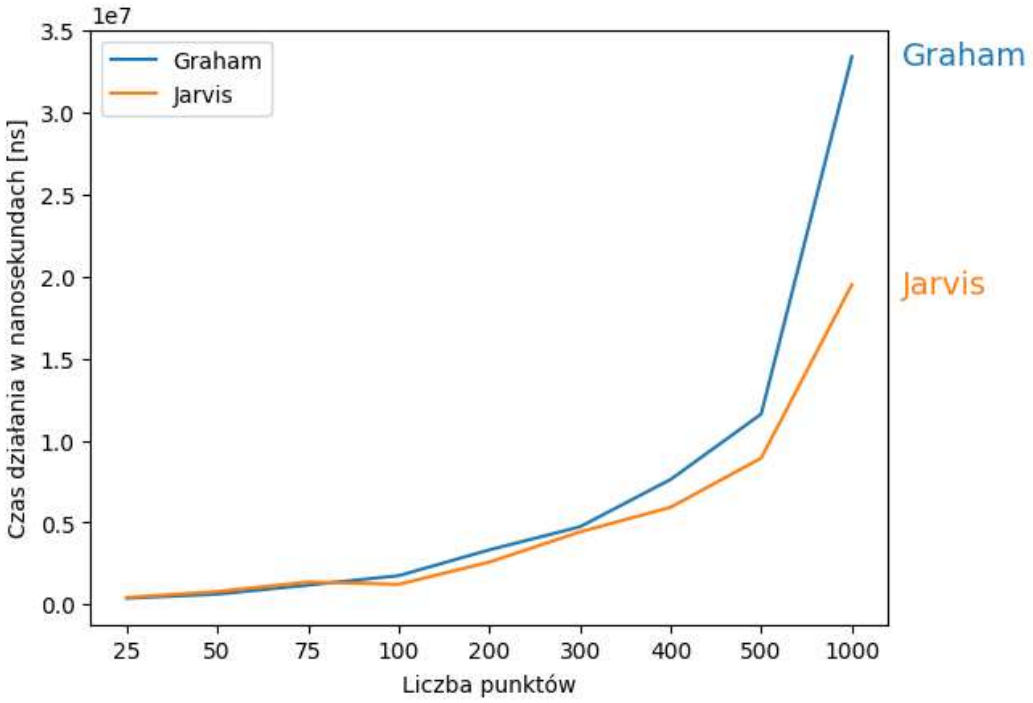
Podobnie jak w poprzednim przypadku (na wykresie 10.1) taki tutaj (wykres 10.2) widać, znaczną różnicę jeśli chodzi o czas działania tych algorytmów. Ponownie obserwujemy kształt przypominający część funkcji kwadratowej w przypadku wykresu dla algorytmu Jarvis'a. Różnice w wartościach są tak ogromne, że czas działania algorytmu Graham'a wydaje się niemal liniowy, lecz wiemy, że tak nie jest.

5.3. Wyniki dla zbioru C generowanego funkcją : generate_rectangle_points(a=(-10,-10), b=(10,-10), c=(10,10), d=(-10,10), n)

Tabela 3 Zmierzone czasy dla zbioru C

Liczba punktów	Graham [ns]	Jarvis [ns]	Różnica czasu [ns] (Graham-Jarvis)
25	390004	435310	-45306
50	639711	795597	-155886
75	1190661	1383359	-192698
100	1765718	1238091	527627
200	3338487	2593567	744920
300	4744790	4431462	313328
400	7629553	5934118	1695435
500	11620515	8934462	2686053
1000	33396142	19504447	13891695

Wykres 10.3 Obrazuje czas działania obu algorytmów dla zbioru C w zależności od liczby punktów



W tym przypadku widzimy, że wykres 10.3 różni się znacznie od 10.1 oraz 10.2, czasy działanie są zbliżone, a dla większych zbiorów danych nawet korzystniejsze dla algorytmu Jarvisa, wynika to zapewne z specyfiki rozmieszczenia punktów na prostokącie i w tym przypadku algorytm Jarvisa zyskuje przewagę w czasie działania nad algorytmem Grahama.

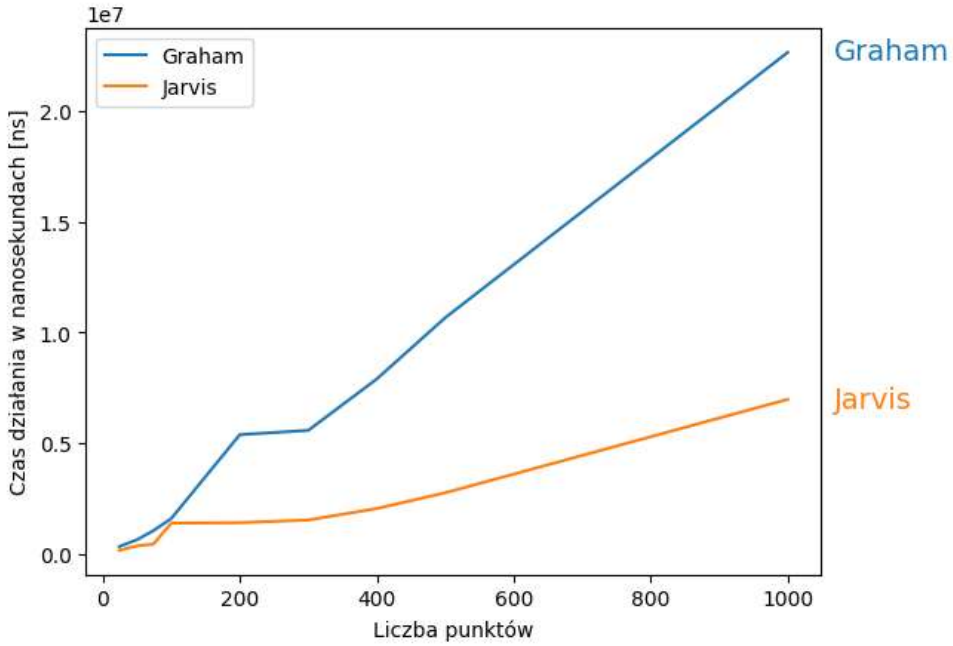
5.4. Wyniki dla zbioru D generowanego funkcją :

generate_square_points(a=(0,0), b=(10,0), c=(10,10), d=(0,10), axis_n, diag_n), axis_n oraz diag_n wyliczane są na podstawie kolejnych wartości 25, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 1000, w sposób opisany w punkcie 2

Tabela 4 Zmierzone czasy dla zbioru D

Liczba wszystkich punktów	Liczba punktów na boku	Liczba punktów na przekątnej	Graham [ns]	Jarvis [ns]	Różnica czasu [ns] (Graham-Jarvis)
24	3	9	343405	171096	172309
50	10	15	654659	373663	280996
74	14	23	1064440	455409	609031
100	24	26	1611343	1400366	210977
200	99	1	5392997	1422163	3970834
300	34	116	5586776	1541400	4045376
400	58	142	7905118	2059489	5845629
500	112	138	10672557	2769613	7902944
1000	135	365	22643433	6986349	15657084

Wykres 10.4 Obrazuje czas działania obu algorytmów dla zbioru D w zależności od liczby punktów



W tym zaś przypadku widzimy znaczną przewagę algorytmu Jarvisa jeśli chodzi o szybkość działania zbiór D, który jest złożony z punktów leżących na dwóch przekątnych oraz na dwóch bokach kwadratu faworyzuje algorytm Jarvisa w swoją budową. Mniej iteracji potrzebne jest, aby odnaleźć otoczkę wypukłą właśnie tym sposobem w tym przypadku. Ciekawym jest też, fakt że oba wykresy przypominają funkcje liniowe.

6. Wnioski

Jak widać na powyższych wykresach 10.1 do 10.4 dla zbioru A oraz B algorytm Graham'a działa szybciej niż algorytm Jarvis'a dzieje się tak zapewne przez specyfikę rozmieszczenia punktów w zbiorze, liczba punktów na otoczce jest całkiem duża zwłaszcza dla zbioru B. Ten fakt powoduje, że k zawarte w szacowaniu złożoności algorytmu Jarvis'a jest rzędu n więc złożoność tego algorytmu staje się zależnością kwadratową od liczby punktów w zbiorze. W dwóch ostatnich przypadkach (zbiór C oraz zbiór D) liczba punktów na otoczce jest niewielka co faworyzuje czasowo algorytm Jarvis'a, na wykresach 10.3 i 10.4, jak i w tabelach 3 i 4 widać wyraźną różnicę. W przypadku zbioru D otrzymane wykresy przypominają wręcz funkcje liniowe, powodem tego może być charakterystyczne rozmieszczenie punktów. Otrzymane wykresy (10.1-10.4) jak i tabele (1-4) potwierdzają założenia teoretyczne co do złożoności oraz czasów działania algorytmów Jarvis'a oraz Graham'a.