Zadanie 5

Wiktoria

Treść zadania

Dane są niezależne zmienne X, Y o rozkładzie $U[0,1]$. Niech x, y będą wylosowanymi wartościami zmiennych X, Y. Odcinek $[0,1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

Lemat: Prawdopodobieństwo wylosowania x, y takich, że $x < y$ wynosi $\frac{1}{2}$.

Dowód:

1° $P(X = Y) = P(X - Y = 0) = 0$, bo (X, Y) jest ciągłą zmienną losową.

2° $P(X < Y) = P(Y < X)$

$$\begin{gathered} P(X < Y) = P(X < y | Y = y) \overset{(1)}{=} P(X < y)P(Y = y) \overset{(2)}{=} \\ P(Y < y)P(X = y) = P(Y < y | X = y) = P(Y < X) \end{gathered}$$

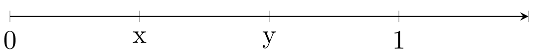
(1) Niezależność zmiennych X, Y.

(2) Zmienne X i Y mają taki sam rozkład.

Mamy zatem $P(X < Y) = \frac{1}{2}(P(X < Y) + P(Y < X)) = \frac{1}{2}(1 - P(X = Y)) = \frac{1}{2}$

Rozwiązanie

Rozważmy przypadek dla $x < y$.

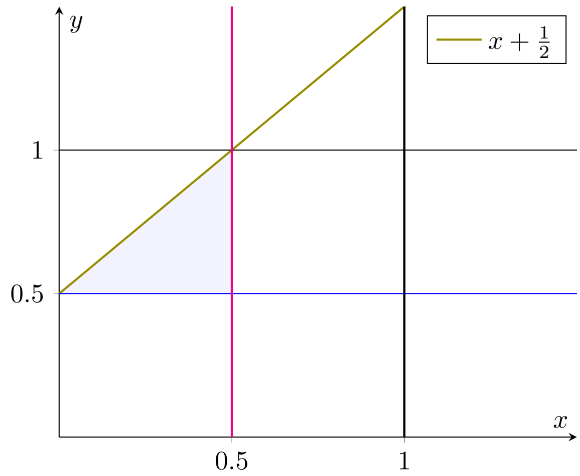


Mamy kolejno odcinki długości: $x, y - x, 1 - y$.

Interesujące nas zdarzenia to, takie, podczas których zachodzi:

$$\begin{cases} x + y - x > 1 - y \\ y - x + 1 - y > x \\ 1 - y + x > y - x \end{cases} \iff \begin{cases} y > \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \\ y - x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Losowanie dwóch wartości x, y możemy potraktować jako wylosowanie jednego punktu z przestrzeni $[0,1] \times [0,1]$. Szukamy zatem obszaru zaznaczonego na poniższym rysunku:



Wystarczy teraz policzyć całkę:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} 1 \, dx \, dy = \frac{1}{8}$$

Symetrycznie dla $x > y$, stąd prawdopodobieństwo utworzenia trójkąta z wylosowanych odcinków wynosi $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.