Lista 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	X		X	X	X	X	X	X	X

11	12	13	14	15	16	17	18
	X		X	X	X	X	

Zadanie 1

Zbiór wierzchołków centralnych drzewa zawiera jeden lub dwa wierzchołki. Pokażmy, że automorfizm zachowuje w przypadku jednego wierzchołka centralnego - ten wierzchołek, a w przypadku dwóch - krawędź między nimi.

Dla $n = 1, 2$ wierzchołków odpowiednio każdy automorfizm zachowuje wierzchołek lub krawędź.

Weźmy drzewo T o n wierzchołkach. Wiemy, że automorfizm musi zachować stopnie wierzchołków. Zatem liście tego drzewa mogą zostać przekształcone wyłącznie na inne liście. Usuńmy te liście i otrzymajmy T'. Zauważmy, że T' zawiera te same wierzchołki centralne co T, a następnie powtarzajmy operację usuwania liści aż do otrzymania samych wierzchołków centralnych. Z podstawy wiemy, że albo krawędź między dwoma wierzchołkami zostanie zachowana, albo wierzchołek.
Co kończy dowód.

Zadanie 2

$\implies$
Załóżmy, że n-wierzchołkowy G jest samodopełniający.

Ponieważ $G \cup G' = K_n$ to $|E(G)| + |E(G')| = \frac{n(n-1)}{2}$.
Skoro G jest izomorficzny z G' to $|E(G)| = |E(G')| = \frac{n(n-1)}{4}$.
Liczba wierzchołków musi być parzysta zatem

$$n(n-1) \pmod 4 \equiv 0 \implies n \pmod 4 \equiv 0 \vee (n-1) \pmod 4 \equiv 0 \iff n \pmod 4 \equiv 0 \vee n \pmod 4 \equiv 1$$

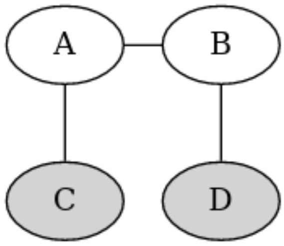
$\impliedby$
Rozpatrzmy przypadki:

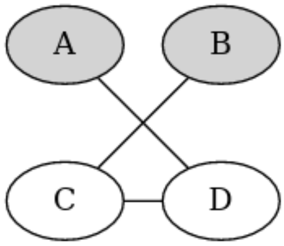
- $n \pmod 4 \equiv 0$

Stwórzmy graf G o n wierzchołkach. Podzielmy jego wierzchołki po równo na zbiory A, B, C, D. Niech podgrafy C, D będą pełne, a A, B – puste. Teraz utwórzmy wszystkie krawędzie postaci $\{v_d, v_b\}, \{v_b, v_a\}, \{v_a, v_c\}$, gdzie v_x należy do zbioru X.

W dopełnieniu tego grafu podgrafy A, B są pełne, natomiast C, D puste, ponadto pomiędzy podgrafami istnieją tylko krawędzie postaci $\{v_c, v_d\}, \{v_d, v_a\}, \{v_c, v_b\}$.

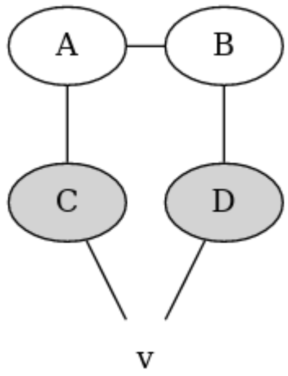
Grafy są izomorficzne te są izomorficzne, zatem G jest samodopełniający.

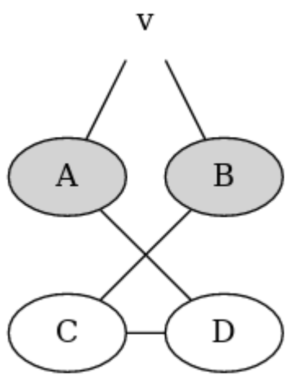




- $n \pmod 4 \equiv 1$

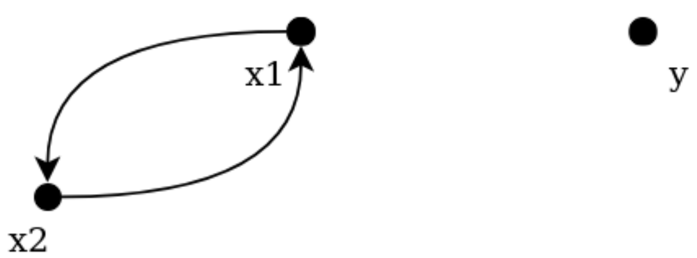
Skorzystajmy z grafu G z poprzedniego przypadku i dołóżmy do niego wierzchołek rozłączny z każdym ze zbiorów. Dodajmy krawędzie postaci $\{v, v_c\}$ oraz $\{v, v_d\}$.
Analogicznie do poprzedniego przypadku, grafy G i G' są izomorficzne, zatem G jest samodopełniający.





Zadanie 4

$\Longrightarrow$
Kontrprzykład:



Zawiera cykl Eulera, ale nie jest spójny.

$\Longleftarrow$

Lemat 1

> Jeśli dla każdego wierzchołka u w grafie G $\mathrm{outdeg}(u) = \mathrm{indeg}(u)$ to dla dowolnego wierzchołka v istnieje droga zamknięta z do wierzchołka v.

Dowód lematu 1:

Przechodząc graf od wierzchołka v i wchodząc do innego wierzchołka zawsze będzie istnieć krawędź, która nie została odwiedzona, wychodząca z tego wierzchołka ($\mathrm{outdeg}(u) = \mathrm{indeg}(u)$). Jedynym wierzchołkiem, w którym może nie być nieodwiedzonej krawędzi wychodzącej jest v, zatem droga ta musi zakończyć się w v.

Załóżmy, że graf jest spójny (po wymazaniu skierowań i łuków) i dla każdego wierzchołka u zachodzi $\mathrm{outdeg}(u) = \mathrm{indeg}(u)$.

Twierdzenie: Powyższy graf zawiera cykl Eulera.

Indukcja po liczbie krawędzi.

Dla $n = 0$ taki graf posiada cykl Eulera.

Załóżmy, że dla każdego $k < n$ prawdą będzie, że k-wierzchołkowy graf spełniający warunki zadania posiada cykl Eulera.

Niech dany będzie n-wierzchołkowy graf G zgodny z założeniami. Weźmy zatem dowolny wierzchołek v i zaczynający się od niego cykl C, następnie utwórzmy $G' = G \backslash C$ poprzez usunięcie krawędzi należących do cyklu C. W G' również dla dowolnego wierzchołka u zachodzi $\mathrm{outdeg}(u) = \mathrm{indeg}(u)$. Z założenia, wszystkie składowe spójne grafu G' zawierają cykl Eulera, a cykl C ma wierzchołki wspólne ze wszystkimi tymi składowymi, zatem G zawiera cykl Eulera.

Zadanie 5

$\implies$
Załóżmy, że graf spójny G jest grafem Eulera.
Weźmy dowolne minimalne cięcie, które dzieli graf G na dwa dwie spójne składowe H i H'. Aby graf G posiadał cykl Eulera to z H musi wychodzić tyle samo razy co wchodzić, stąd między H a H' musi znajdować się parzysta liczba krawędzi. Ponieważ wszystkie te krawędzie należą do minimalnego cięcia, to zawiera ono parzystą liczbę krawędzi.

$\impliedby$
Załóżmy, że każde minimalne cięcie w G zawiera parzystą liczbę krawędzi.

Weźmy zatem dowolny wierzchołek v należący do G i go usuńmy. Krawędzie między wierzchołkiem v a każdą spójną składową powstałą w grafie G (w szczególności może być tylko jedna) są minimalnymi cięciami, które z założenia zawierają parzystą liczbę krawędzi. Stąd stopień wierzchołka jest parzysty, zatem G zawiera cykl Eulera.

Zadanie 6

Oznaczmy wierzchołki grafu G jako:

$$v_1, v_2, ..., v_k; w_1, w_2, ..., w_k$$

Stwórzmy graf G' dodając do grafu G krawędzie postaci $\{v_i, w_i\}$. W ten sposób, wszystkie wierzchołki w grafie G' mają stopień parzysty oraz G' jest spójny, stąd G' zawiera drogę Eulera.

Jeśli usuniemy z grafu G' dodane wcześniej k krawędzi otrzymamy k rozłącznych krawędziowo maszrut, które łącznie pokrywają wszystkie krawędzie w pierwotnym grafie.

Każdy wierzchołek jest końcem co najmniej jednej maszruty, natomiast każda maszruta ma dwa końce, stąd nie można grafu G rozbić na $k-1$ rozłącznych krawędziowo maszrut.

Zadanie 7

Chcąc rozmieścić liczby $1, 2, 3, ..., n$ na kole tak, aby każda była sąsiadem pozostałych dokładnie raz szukamy tak naprawdę grafu pełnego (co spełnia warunek, aby każda liczba była sąsiadem pozostałych), który zawiera cykl Eulera (abyśmy mogli wypisać sekwencję przechodzenia połączeń między wierzchołkami (liczbami) w taki sposób, że każde połączenie przechodzimy dokładnie raz). Nie może być to tylko droga Eulera, gdyż w zadaniu mówimy o rozmieszczeniu liczb $1, 2, ..., n$ na kole – stąd droga musi zawierać przejście z ostatniego wierzchołka do pierwszego.

Wiemy, że aby graf Eulera posiadał cykl to stopień każdego wierzchołka w tym grafie musi być parzysty.

Ponieważ stopień wierzchołka w K_n to $n-1$ to rozmieszczenie podane w treści zadania znajdziemy wyłącznie dla n nieparzystego.

Zadanie 8

Weźmy graf skierowany o n wierzchołkach taki że każde jego dwa wierzchołki połączone są dokładnie jednym łukiem.

Pokażmy, że istnieje wierzchołek, z którego da się dojść do każdego innego wierzchołka po drodze skierowanej długości co najwyżej 2.

Weźmy wierzchołek v o największym stopniu.

Niech N_{out} oznacza zbiór wierzchołków połącząnych krawędzią wychodzącą z v, natomiast N_{in} zbiór wierzchołków połączonych z v krawędzią wchodzącą.

Weźmy teraz dowolny $y \in V(G) \backslash \{x\}$.

Jeśli $y \in N_{\text{out}}$ to istnieje droga długości 1 z x do y.

Wpp. jeśli $y \in N_{\text{in}}$ to istnieje takie $z \in N_{\text{out}}$, że istnieje krawędź (y, z) (jeśli dla każdego $z \in N_{\text{out}}$ istniałaby krawędź (z, y) to stopień wierzchołka y byłby większy niż x). Zatem $x \rightarrow z \rightarrow y$ jest drogą długości 2.

Co należało pokazać.

Zadanie 9

Dowód indukcyjny po liczbie wierzchołków.

Gdy $n = 1, 2$ to turniej posiada drogę Hamiltona.

Załóżmy, że dla każdego $k < n$ k-wierzchołkowy turniej zawiera drogę Hamiltona.

Weźmy turniej G o n wierzchołkach i zabierzmy z niego dowolny wierzchołek w otrzymując G'. Z założenia indukcyjnego, G' zawiera drogę Hamiltona z jakiegoś v_1 do jakiegoś v_{n-1}. Dołóżmy do turnieju G' z powrotem wierzchołek w, który zabraliśmy. Musi istnieć połączenie między każdymi dwoma wierzchołkami.
Jeśli istnieje istnieje krawędź (v_{n-1}, w) lub (w, v_1) to w G jest droga Hamiltona.

Wpp. Weźmy najmniejsze i takie, że istnieje krawędź z (w, v_i) (nie istnieje krawędź (v_{n-1}, w), zatem musi istnieć (w, v_{n-1})), wtedy jest (v_{i-1}, w).

Istnieje droga $v_1 \longrightarrow v_{i-1} \rightarrow w \rightarrow v_i \longrightarrow v_{n-1}$, która jest drogą Hamiltona.

Zadanie 10

Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5x5 ruchem konika szachowego tak, aby na każdym polu stanąć dokładnie raz?

19	**14**	**3**	**8**	**25**
4	**9**	**18**	**13**	**2**
15	**20**	**1**	**24**	**7**

19	**14**	**3**	**8**	**25**
10	**5**	**22**	**17**	**12**
21	**16**	**11**	**6**	**23**

Tak aby wrócił na to samo pole

Zauważmy, że konik szachowy za każdym ruchem zmienia kolor pola, na którym stoi. Ponieważ na szachownicy 5x5 jest 25 pól to konik swoje przejście musi zakończyć na polu koloru przeciwnego do tego, na którym zaczął. Stąd nie wróci na to samo miejsce.

Zadanie 12

Weźmy n wierzchołkowy graf G, w którym dla każdych 3 wierzchołków u, v, w istnieją co najmniej dwie z trzech krawędzi $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}$.

Jeśli graf jest pełny to zawiera cykl Hamiltona.

W przeciwnym przypadku weźmy dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki u, v. Z założenia, dla dowolnego $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ istnieją krawędzie $\{v, w\}$ i $\{w, u\}$. Zatem każdy z wierzchołków u, v jest stopnia $n-2$. Mamy zatem:

$$\deg(u) + \deg(v) = 2 \cdot (n-2) = 2n - 4 \geq n$$

Z twierdzenia Orego graf G zawiera cykl Hamiltona (dowód indukcyjny był na wykładzie).

Zadanie 14

Nazwijmy wierzchołki K_{2n} $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ i ułóżmy je na kole w kolejności rosnącej względem indeksu. Rozważmy sekwencję $v_1, v_{2n}, v_2, v_{2n-1}, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
Jeśli weźmiemy drogę, której kolejne krawędzie to krawędzie między kolejnymi wierzchołkami podanej sekwencji to otrzymamy drogę Hamiltona.

Możemy utworzyć sekwencję $v_2, v_1, v_3, v_{2n}, \ldots, v_{n+1}, v_{n+2}$ – zauważmy, że krawędzie drogi utworzonej z tej sekwencji nie pokrywają się z poprzednią.

Ponadto, zauważmy, że jeśli weźmiemy analogiczną sekwencję (ponieważ wierzchołki są na kole to przyjmijmy, że odejmując liczbę od wierzchołka cofamy się o daną liczbę wierzchołków na kole, niech zatem $v_{k-p} \equiv v_{(k-p) \pmod{2n}}$).

Możemy zatem uogólić:

$v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i-2}, v_{i+2}, \ldots v_{i+n-1}, v_{i+n}$.
Podstawiając kolejne wierzchołki $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uzyskamy n rozłącznych krawędziowo dróg Hamiltona, które w sumie pokryją wszystkie krawędzie K_{2n}. (Bo utworzyliśmy n rozłącznych dróg po $2n-1$ krawędzi każda).

Aby znaleźć n krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona w K_{2n+1} wystarczy wziąć sekwencję tworzącą drogi Hamiltona w K_{2n}, a następnie każdy początek i koniec każdej drogi połączyć z wierzchołkiem v_{2n+1}. W ten sposób otrzymamy n rozłącznych krawędziowo cykli Hamiltiona, które razem pokrywają wszystkie krawędzie w grafie K_{2n+1}.

Zadanie 15

Jeśli G jest grafem prostym o n wierzchołkach i dla każdych dwóch niesąsiednich wierzchołków zachodzi:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$$

to w G istnieje droga Hamiltona.

Dowód:

Weźmy graf G spełniający założenia zadania, dodajmy do niego wierzchołek i połączmy go z każdym z wierzchołków z G otrzymując w ten sposób graf H.

Zatem w H każde dwa niesąsiadujące ze sobą wierzchołki z G spełniają zależność:

$$\deg_H(u) + \deg_H(v) = (\deg_G(u) + 1) + (\deg_G(v) + 1) \geq n - 1 + 2 = n + 1$$

Skoro H ma $n+1$ wierzchołków to z twierdzenia Orego H ma cykl Hamiltona.
Zatem zabierając dowolny wierzchołek dostaniemy drogę Hamiltona, czyli G ma drogę Hamiltona.

Zadanie 16

Niech $d(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$ - średni stopień wierzchołka w G.

Lemat 1

> Każdy graf spójny zawiera drogę długości co najmniej $\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}$, gdzie $\delta(G)$ oznacza najmniejszy stopień wierzchołka w G.

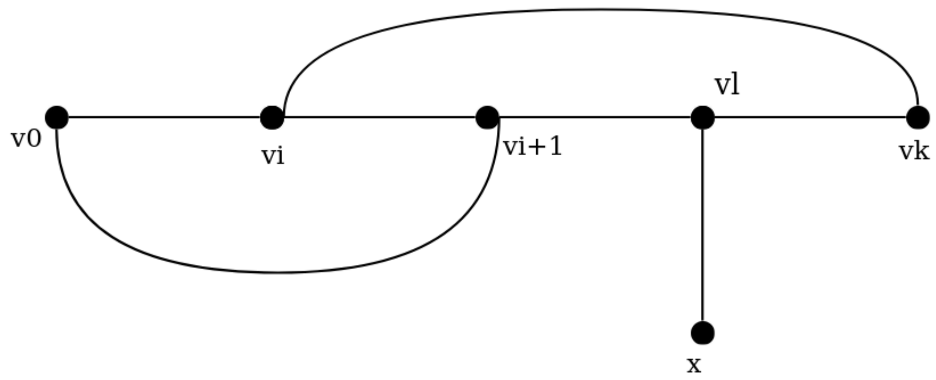
Dowód **Lematu 1**:

Weźmy najdłuższą drogę $P: v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_k$. Jeśli $k = |V(G)| - 1$ to lemat zachodzi.

W przeciwnym przypadku istnieje wierzchołek x nie leżący na drodze P, ale ponieważ graf G jest spójny to x jest sąsiedni do któregoś v_l.

Zauważmy, że nie może on sąsiadować z wierzchołkami v_0, v_k, ponieważ wtedy droga P mogłaby zostać przedłużona. Nie może istnieć także krawędź między v_0 i v_k, gdyż wtedy droga $v_{l+1} \longrightarrow v_k \to v_0 \longrightarrow v_l \to x$ dłuższa od P.

Obserwacja:



Powyższa sytuacja nie może wystąpić powyższa sytuacja. Dla $l > i + 1$ droga $v_{l+1} \longrightarrow v_k \to v_i \longrightarrow v_0 \to v_{i+1} \to v_l \to x$ dłuższa od P. Analogicznie dla $l < i$.

Zbiory $N(v_0), \{v_{i+1} : v_i \in N(v_k)\}$ zawierają się w $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Ponieważ $|N(v_1)| \geq \delta(G)$ oraz $|N(v_k)| = |\{v_{i+1} : v_i \in N(v_k)\}| \geq \delta(G)$ oraz zbiory te są rozłączne (na podstawie powyższej obseracji) to droga P ma długość co najmniej $2\delta(G)$.

Co kończy dowód.

Lemat 2

> Każdy graf ma spójną składową H, taką że $d(H) \geq d(G)$.

Dowód **Lematu 2**:
Fakt: Jeśli $x_i, y_i > 0$, jeśli $\frac{x_i}{y_i} < t$ to $\frac{\sum_i x_i}{\sum_i y_i} < t$.
Załóżmy nie wprost, że nie istnieje taka spójna składowa. Zatem każda spójna składowa H_i spełnia $d(H_i) = \frac{2|E(H_i)|}{|V(H_i)|} < d(G)$. Czyli $d(G) = \frac{\sum_i 2|E(H_i)|}{\sum_i |V(H_i)|} < d(G)$. Sprzeczność.

Twierdzenie: Graf prosty G zawiera drogę o długości co najmniej $d(G)$.

Dowód indukcyjny po ilości wierzchołków.

1° Jeśli w grafie występuje jeden wierzchołek to $d(G) = 0 = \frac{0}{1}$, a G nie zawiera żadnej drogi, stąd twierdzenie zachodzi.

2° Załóżmy, że dla każdego prostego grafu o liczbie wierzchołków równej $k < n$ twierdzenie zachodzi.

Rozważmy graf o n wierzchołkach.

Jeśli graf nie jest spójny to weźmy jego składową spójną, która spełnia $d(H) \geq d(G)$ i nazwijmy ją H (istnieje z **Lematu 2**). Wiemy, że $V(H) < V(G)$, korzystając z założenia indukcyjnego H zawiera drogę długości $d(H)$, a ponieważ H jest spójną składową G, to G zawiera drogę długości $d(G)$.

Jeśli istnieje wierzchołek o stopniu co najwyżej $\frac{1}{2}d(G)$ możemy go usunąć i otrzymać graf G'. Wtedy $d(G) \leq d(G')$. Korzystając z założenia indukcyjnego w grafie G' istnieje droga długości co najmniej $d(G')$. Zatem w grafie G znajduje się droga długości co najmniej $d(G)$.

Jeśli taki wierzchołek nie istnieje, musi zachodzić $\delta(G) > \frac{1}{2}d(G)$. Z **Lematu 1** graf musi mieć drogę długości $\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}$. Skoro $2\delta(G) > d(G)$ oraz $d(G) \leq |V(G)| - 1$ to graf G zawiera drogę długości co najmniej $d(G)$.

Zadanie 17

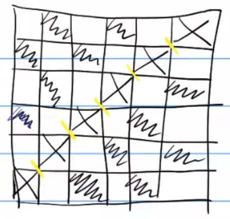
Niech droga P długości k łączy wierzchołki v, u cyklu C.

Niech $V(P) \cap V(C) = \{v_1, ..., v_t\}$.

Jeżeli $t \geq \sqrt{k}$ to w grafie istnieje cykl długości przynajmniej $\sqrt{k}$ i jest nim C.

W przeciwnym przypadku, gdy $t < \sqrt{k}$, ponieważ $V(P) = k$ to istnieje poddroga P długości co najmniej $\sqrt{k}$, rozłączna z cyklem C, łącząca v_i z v_{i+1}. Stąd wystarczy wziąć tą poddrogę i dołączyć krawędź $\{v_i, v_{i+1}\}$, aby otrzymać cykl długości co najmniej $\sqrt{k}$.

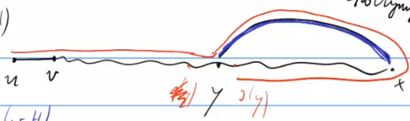
tags: `mdm`



18 pól białych
12 pól czarnych

Dla G definiujemy pomocniczy graf H t. że:

- $V(H)$ to ścieżki Hamiltona w G t. że wspoczynają się od u, v
- $E(H)$



(w H)

- stopień ścieżki kończącej się w x to

$\deg_G(x) - 1 - [1$ jeśli u jest sąsiadem $x]$

Ścieżek o końcach w sąsiadach u (wzmacniających się do cyklu Ham. z (u,v)) jest parzyście wiele, bo mają nieparzyste stopnie.