Zadanie 1

Wiktoria

Treść zadania

Wykazać, że dla rozkładu Cauchy'ego wartość oczekiwana nie istnieje. $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$

Definicja całki niewłaściwej i jej zbieżności

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna (w sensie Riemanna) na każdym przedziale $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Granicę:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

nazywamy całką niewłaściwą funkcji f w granicach a do ∞. Jeśli granica istnieje i jest skończona nazywamy całkę zbieżną (wpp. rozbieżną).

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Ponadto, aby całka $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ istniała, chociaż jedna z dwóch całek (dla $a \in \mathbb{R}$) musi być skończona lub obie całki muszą być tego samego znaku.

Rozwiązanie

Aby pokazać, że rozkład Cauchy'ego nie posiada wartości oczekiwanej, musimy pokazać, że całka $\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx$ jest rozbieżna.

Przeanalizujmy całki $\int_{-\infty}^a xf(x)\,dx$ oraz $\int_a^\infty xf(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^a xf(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2\pi}\right]_{x=A}^a = -\infty$$

$$\int_a^\infty xf(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{B\to\infty} \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2\pi}\right]_{x=a}^B = \infty$$

Widzimy zatem, że żadna z rozpatrywanych całek nie jest skończona oraz obie są różnych znaków. Zatem całka $\int_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx$, a tym samym wartość oczekiwana rozkładu Cauchy'ego, nie istnieje.