Lista 1

1(2)	2	3	4	5	6(2)	7	8(2)
X	X	X	X	X		X	X

Zadanie 1

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p-(1-p))^n = 1$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Zadanie 2

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda}(0 + 1\frac{\lambda}{1!} + 2\frac{\lambda^2}{2!} + 3\frac{\lambda^3}{3!}...) =$$
$$e^{-\lambda}(\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + ...) =$$
$$e^{-\lambda}\lambda(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + ...) = \lambda$$

Zadanie 3

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \quad p > 0$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = -t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt = (n-1)\Gamma(n-1)$$

Skoro $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ to $\Gamma(n) = (n-1)!$

Zadanie 4

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad \lambda > 0$$

(a)

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda x)dx =$$
$$\int_0^\infty \lambda e^{(-\lambda x)}dx = \lambda \int_0^\infty e^{(-\lambda x)}dx =$$
$$\lambda(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda})\Big|_0^\infty = 0 + e^0 = 1$$

(b)

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \lambda \int_0^\infty xe^{(-\lambda x)}dx =$$
$$-xe^{(-\lambda x)}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{(-\lambda x)}dx = \frac{1}{\lambda}e^{(-\lambda x)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Zadanie 5

Pokazać, że $D_n = n$, gdzie:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Mamy macierz, w której i-ty wiersz ($2 \leq i \leq n$) zawiera jedynkę w pierwszej oraz i-tej kolumnie.

Teraz stosując eliminację Gaussa, każdy wiersz $i = 2, 3, ..., n$ kolejno dodajmy do 1 wiersza. W ten sposób otrzymamy macierz dolnotrójkątną, w której pierwszy element na przekątnej wynosi n, a pozostałe 1. CKD.

Zadanie 6

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\} dx$$
$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{x^2+y^2}{2}\Big\} dy\,dx$$

Pokazać, że $I^2 = 2\pi$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy\,dx$$

Dokonujemy podstawienia:

Trzeba tu zamienić obie współrzędnę, skorzystać z macierzy Jacobiana w tym wypadku będzie to R i zmienić współrzędne na kąt i odległość od pacztku układu współrzędnych.

Example 2: polar-Cartesian transformation [edit]

The transformation from polar coordinates (r, φ) to Cartesian coordinates (x, y), is given by the function $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ with components:

$$x = r\cos\varphi;$$
$$y = r\sin\varphi.$$

$$\mathbf{J_F}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

The Jacobian determinant is equal to r. This can be used to transform integrals between the two coordinate systems:

$$\iint_{\mathbf{F}(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

de facto to jest ten przykład. Zmiana granic jest trochę tricki ale no kąt to 0 to 2pi a odległość o to +inf.

Jeśli chcesz szukać rozwiązania to Całka Gaussa.

Zadanie 7

(a)

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_k\,\bar{x} + \bar{x}^2) =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - 2x_1\,\bar{x} - 2x_2\,\bar{x} - 2x_3\,\bar{x} + \ldots - 2x_n\,\bar{x} + n\,\bar{x}^2 =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - 2\,\bar{x}\,\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} \cdot n + n\,\bar{x}^2 =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - n\,\bar{x}^2$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - \bar{x}\,y_k - x_k\,\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - \bar{x}\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) - \bar{y}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n\,\bar{x}\bar{y} =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - \bar{x}\,\frac{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}{n} \cdot n - \bar{y}\,\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} \cdot n + n\,\bar{x}\bar{y} =$$
$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - n\,\bar{x}\bar{y}$$

Zadanie 8

8. **(2p.)** Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Niech $S = (X - \vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(X - \vec{\mu})$ oraz $Y = A \cdot X$, gdzie macierz A jest odwracalna. Sprawdzić, że $S = (Y - A\vec{\mu})^T(A\Sigma A^T)^{-1}(Y - A\vec{\mu})$.

$$
\begin{gathered}
S = (Y - A\ \vec{\mu})^T(A\Sigma A^T)^{-1}(Y - A\ \vec{\mu}) = \\
(AX - A\ \vec{\mu})^T(A\Sigma A^T)^{-1}(AX - A\ \vec{\mu}) = \\
(A(X - \vec{\mu}))^T(A\Sigma A^T)^{-1}A(X - \vec{\mu}) = \\
(A(X - \vec{\mu}))^T(A^T)^{-1}(A\Sigma)^{-1}A(X - \vec{\mu}) = \\
(A(X - \vec{\mu}))^T(A^T)^{-1}\Sigma^{-1}I(X - \vec{\mu}) = \\
(X - \vec{\mu})^T A^T(A^T)^{-1}\Sigma^{-1}(X - \vec{\mu}) = \\
(X - \vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(X - \vec{\mu})
\end{gathered}
$$

Wykorzystane własności:

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ i $(A^T)^{-1} =(A^{-1})^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

tags: `rpis`