Lista zadań. Nr 5. 21 kwietnia 2024

Algorytmy i Struktury Danych

IIUWr. II rok informatyki.

1. (1pkt) Pokaż, że problem znajdowania otoczki wypukłej nie może być rozwiązany w modelu drzew decyzyjnych.

2. (2pkt) Rozważmy następujący problem:

   Problem *3SUM*:
   Dane: Liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$.
   Wynik: 'TAK' - jeśli $\exists_{1 \leq i < j < k \leq n}\ x_i + x_j + x_k = 0$,
   'NIE' - w przeciwnym przypadku.

   Udowodnij, że $\Omega(n \log n)$ jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

3. (1,5pkt) Ułóż algorytm rozwiązujący problem *3SUM* w czasie $O(n^2)$.

4. (**Z** 2pkt) Rozwiąż poprzednie zadanie dla takiej "wersji" problemu *3SUM*, w której operacja dodawania jest zastąpiona operacją XOR, tj. chcemy sprawdzić, czy w danym ciągu istnieją elementy a, b, c, takie że $a \oplus b \oplus c = 0$.

5. (2pkt) Rozważmy problem, polegający na sprawdzeniu, czy w zbiorze n punktów leżących na płaszczyźnie znajdują się co najmniej 3 punkty współliniowe. Udowodnij, że problem ten nie jest prostszy niż problem *3SUM*, a dokładniej, że istnienie algorytmu rozwiązującego ten problem w czasie $o(n^{2-\epsilon})$ implikuje istnienie algorytmu o złożoności $o(n^{2-\epsilon})$ dla problemu *3SUM*.

6. (1.5pkt) Udowodnij, że $2n - 1$ porównań trzeba wykonać, aby scalić dwa ciągi n elementowe w modelu drzew decyzyjnych. Zastosuj grę z adwersarzem, w której adwersarz na początku ogranicza przestrzeń danych tak, by zawierała $2n$ zestawów danych takich i by każde porównanie wykonane przez algorytm eliminowało co najwyżej jeden zestaw.

7. (**Z** 2pkt) Mamy dany ustalony zbiór permutacji na n elementach $F \subseteq S_n$. Chcemy posortować liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (używając tylko porównań) wiedząc, że ich permutacja sortująca należy do F. Pokaż, że istnieje dla tego problemu drzewo decyzyjne o głębokości $O(n + \log |F|)$.

8. (2pkt) W problemie *3D-Matching* dane są n elementowe zbiory A, B, C oraz zbiór uporządkowanych trójek $X \subseteq A \times B \times C$ a zadaniem jest sprawdzenie, czy istnieje n elementowy podzbiór $S \subseteq X$, taki że każdy element z $A \cup B \cup C$ należy do dokładnie jednej trójki z S.

   Pokaż redukcję wielomianową problemu $3SAT$ do problemu *3D-Matching*.

9. (2pkt) Rozważmy problem wyznaczenia za pomocą porównań elementów największego i drugiego z kolei w zbiorze n-elementowym. Udowodnij, że $n + \lceil \log n \rceil - 2$ porównań potrzeba i wystarcza do wyznaczenia tych elementów.

Zadania dodatkowe - nie będą rozwiązywane w czasie ćwiczeń

1. (0pkt) Pokaż, że $\Omega(n \log n)$ pozostaje dolną granicą dla problemu sortowania, jeśli w modelu drzew decyzyjnych na zapytania o relację między elementami a i b możliwe są trzy odpowiedzi: "a$<$b", "a=b" i "a$>$b".

2. (1pkt) Pokaż, że problem "Element uniqueness" rozbija R^n na $\Omega(n!)$ spójnych składowych.

3. (2pkt) Rozważmy następujący problem weryfikacji rozmiaru wielozbioru (MSV). Dany jest wielozbiór złożony z n liczb rzeczywistych oraz liczba naturalna k. Należy sprawdzić, czy w tym wielozbiorze jest dokładnie k różnych elementów. Postaraj się wskazać jak najwięcej różnych spójnych składowych, na które problem ten rozbija R^n.

4. (2pkt) *Algebraiczne Drzewo Obliczeń* jest uogólnieniem algebraicznego drzewa decyzyjnego. Posiada ono dwa rodzaje wierzchołków:

   - wierzchołki obliczeniowe: z każdym takim wierzchołkiem u związana jest wartość f_u, która jest określona jako wynik jednej z poniższych opeacji:

   $$f_u \leftarrow f_w + f_v, \quad f_u \leftarrow f_w - f_v, \quad f_u \leftarrow f_w * f_v, \quad f_u \leftarrow f_w / f_v, \quad f_u \leftarrow \sqrt{f_v},$$

     gdzie f_w i f_v są wartościami skojarzonymi z pewnymi przodkami wierzchołka u lub są elementami ciągu wejściowego lub stałymi z R.

   - wierzchołki rozgałęziające: wierzchołek v wykonuje test $f_u < 0$ bądź $f_u \geq 0$ bądź $f_u = 0$, gdzie u jest przodkiem v.

   Problem Set Equality (SE) zdefiniowany jest następująco: dane są zbiory $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ oraz $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$; pytamy, czy $X = Y$. Pokaż , że jeśli dane dla problemu SE są liczbami całkowitymi, to problem ten może być rozwiązany w modelu Algebraicznych Drzew Obliczeń w czasie liniowym.

5. (1pkt) Rozważmy decyzyjną wersję problemu otoczki wypukłej: mamy dane n punktów $p_1, \ldots, p_n$ na płaszczyźnie oraz liczbę naturalną k. Pytamy, czy otoczka wypukła tego zbioru składa się z k punktów. Wiedząc, że problem MSV zdefiniowany w poprzednim zadaniu wymaga $\Omega(n \log k)$ operacji w modelu algebraicznych drzew decyzyjnych, pokaż, że w tym modelu decyzyjna wersja problemu otoczki także wymaga tylu działań.

6. (2pkt) Problem "Przekrój zbiorów" zdefiniowany jest następująco:

   Problem:
   Dane: Liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.
   Wynik: 'TAK' - jeśli $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \emptyset$
   'NIE' - w przeciwnym przypadku.

   Udowodnij, że $\Omega(n \log n)$ jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

Krzysztof Loryś