Zadania spisane:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X		X	X		X	X	X		X

11	12	13	14	15	16	17	18
X	X	X	X	X	X	X	X

Zadanie 1

Co można powiedzieć o macierzy sąsiedstwa grafu G i macierzy sąsiedztwa jego dopełnienia $\overline{G}$?

Dla macierzy sąsiedstwa Q grafu pełnego o takiej samej ilości wierzchołków co G, $Q - G$ da macierz sąsiedstwa dopełnienia grafu G. O ile nie dopuszczamy krawędzi wielokrotnych.

Jeśli I_i jest wektorem jednostkowym, który na pozycji i-tej ma jedynkę a na pozostałych zero, to AI jest wektorem krawędzi wchodzących do v_i.

$A^2 I_i$ natomiast, jest wektorem przedstawiającym liczbę różnych dróg długości 2 prowadzących do wierzchołka v_i.

Zadanie 3

3. (Grafy Mycielskiego) Graf M_2 to dwa wierzchołki połączone krawędzią. Graf M_{k+1} konstruujemy z M_k w ten sposób, że dokładamy dla każdego $v \in V(M_k)$ wierzchołek v' i łączymy go z wszystkimi sąsiadami v w M_k; następnie dodajemy jeszcze jeden wierzchołek w i łączymy go z wszystkimi wierzchołkami v'. Pokaż przez indukcję po k, że

   (a) graf M_k nie ma trójkątów (klik K_3);
   (b) graf M_k jest k-kolorowalny;
   (c) graf M_k nie jest $(k-1)$-kolorowalny.

(a) graf M_k nie ma trójkątów.

1° $k = 2 < 3$ ✓
2° Załóżmy, że M_{k-1} nie posiada trójkątów.

Załóżmy nie wprost, że M_k (skonstruuowany z M_{k-1}) posiada jakiś trójkąt, a v' jest jednym z wierzchołków tego trójkąta (jeśli by nie był to by znaczyło, że M_{k-1} również zawiera trójkąt). Wierzchołek v' sąsiaduje z $N(v)$. Zatem musi istnieć jakaś krawędź $v_i v_j$ tworząca trójkąt z v'. Ale to znaczyłoby, że w grafie M_{k-1} istnieje trójkąt $v v_i v_j$, sprzeczność.

(b) graf M_k jest k-kolorowalny.

1° $k = 2$ ✓
2° Załóżmy, że M_{k-1} jest $k-1$-kolorowalny.
Niech $c_{M_{k-1}}$ będzie $k-1$-kolorowaniem grafu M_{k-1}. Możemy zdefiniować kolorowanie c_{M_k} jako rozszerzenie $c_{M_{k-1}}$.
Niech dla każdego dodanego wierzchołka v_i' zachodzi $c_{M_{k-1}}(v_i) = c_{M_k}(v_i')$ (wierzchołki nie łączy krawędź, stąd kolorowanie wciąż jest poprawne), a wierzchołek w pokolorujmy nowym kolorem c_k. Zatem M_k jest k -kolorowalny.

(c) graf M_k nie jest $k-1$-kolorowalny.

1° $k = 2$ ✓

2° Załóżmy, że M_{k-1} nie jest $k-2$-kolorowalny.

Załóżmy nie wprost, że M_k jest $k-1$ kolorowalny (w tym jego podgraf M_{k-1}). Weźmy to kolorowanie i pokażmy, że możemy pokolorować M_{k-2} na $k-2$ kolory.

Bez straty ogólności załóżmy, że kolor wierzchołka w to c_{k-1}. Wtedy wierzchołki v_i' mogą przyjąć kolory $c_1, c_2, \ldots, c_{k-2}$.

Weźmy A - zbiór wierzchołków v_i, które mają kolor c_{k-1}. Każdemu takiemu wierzchołkowi możemy zmienić kolor na kolor v_i' zachowując poprawne kolorowanie, bo skoro v_i są tego samego koloru to nie mogą ze sobą sąsiadować; Z kolei wierzchołki v_i oraz v_i' mają wspólnych sąsiadów, ale nie istnieje krawędź między nimi.

W ten sposób kolor $k-1$ w grafie M_{k-2} nie jest już używany, co oznacza, że można pokolorować go na $k-2$ kolory. Sprzeczność.

Zadanie 4

4. Niech G będzie grafem o $2n$ wierzchołkach, którego wszystkie stopnie wierzchołków wynoszą co najmniej n. Pokaż, że G ma pełne skojarzenie tzn. skojarzenie n–krawędziowe.

Z twierdzenia Diraca graf G zawiera cykl Hamiltona. Weźmy zatem cykl Hamiltona zaczynający się w wierzchołku v_0. Do skojarzenia M dodawajmy krawędzie wychodzące z wierzchołka o indeksie nieparzystym, czyli $v_1 - v_2$, $v_3 - v_4$, ..., $v_{2n-1} - v_0$. Jest to doskonałe skojarzenie G.

Zadanie 6

6. Mamy daną grupę n dziewcząt i m chłopców. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by k dziewcząt mogło znaleźć męża (wewnątrz grupy), jest to, by każde r dziewcząt znało przynajmniej $k+r-n$ chłopców.

Wsk.: Dodaj $n-k$ chłopców akceptowanych przez wszystkie dziewczyny i zastosuj tw. Halla

Szukamy zatem warunku koniecznego i dostatecznego na istnienie skojarzenia o mocy k w grafie dwudzielnym $G = (C \cup D, E)$. Niech D to zbiór dziewcząt, a C – chłopców.

Poszerzmy więc zbiór C o C' - $n-k$ wierzchołków połączonych z każdym wierzchołkiem z D. Nazwijmy tak utworzony graf G'.

Tw. W G istnieje skojarzenie o mocy $k \iff$ w G' istnieje skojarzenie o mocy n.

$\implies$

Jeśli w G istnieje skojarzenie o mocy k to możemy wybrać takie wierzchołki ze zbioru D, które nie zostały jeszcze pokryte żadnymi krawędziami ze skojarzenia. Jest ich dokładnie $n-k$. Skoro w zbiorze C' mamy dokładnie $n-k$ wierzchołków, każdy z nich połączony z każdym wcześniej wymienionym wierzchołkiem z D, to możemy uzyskać w G' skojarzenie łącząc każdy niepokryty wierzchołek z D z jednym dowolnym wierzchołkiem z C'. Tak otrzymamy skojarzenie o mocy n.

$\impliedby$

Jeśli w grafie G' istnieje skojarzenie o mocy n to co najwyżej $n-k$ krawędzi tego skojarzenia jest incydentna do wierzchołków z C'. W takim razie, w grafie G istnieje skojarzenie o mocy co najmniej k.

Z tw. Halla, skojarzenie mocy $|D|$ istnieje $\iff$ dla każdego $X \subseteq D : |N_{G'}(X)| \geq |X|$

$$|X| \leq |N_{G'}(X)| = |N_{G'}(X) \cap C| + |N_{G'}(X) \cap C'| = |N_G(X)| + n - k \iff N_G(X) \geq |X| + k - n$$

Zadanie 7

7. W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $k/4$ chłopców.

Niech $G = (D \cup C, E)$ graf dwudzielny, w którym $|D| = n$.

Utwórzmy graf $G' = (D \cup C', E')$ w taki sposób, aby każdy wierzchołek z c sklonować 3 razy (żeby łącznie było ich po 4). Natomiast każda krawędź incydentna do wierzchołka c_i w C, będzie incydentna do dokładnie jednego wierzchołka $c_{i,j}$ $(1 \leq j \leq 4)$.

W G' istnieje skojarzenie mocy $k \iff$ w G istnieje k małżeństw, takich że każda kobieta ma jednego męża, a mężczyzna co najwyżej 4 żony.

$\Longrightarrow$

Jeśli istnieje skojarzenie o mocy k w G' oznacza to, że dokładnie k wierzchołków z D jest pokryte, a po suma krawędzi incydentnych do $c_{i,1}...c_{i,4}$ (czyli wierzchołka w G) nie przekracza 4.

$\Longleftarrow$

Analogicznie, jeśli istnieje k takich małżeństw to do każdego wierzchołka c_i incydentnych jest co najwyżej 4, a do d_i co najwyżej jedna. Stąd po rozdzieleniu wierzchołka c_i otrzymamy G' ze skojarzeniem o mocy k.

Korzystając z tw. Halla, w G' będzie istnieć skojarzenie o mocy $n \iff$ każdy z k wierzchołków w D ma co najmniej k sąsiadów. Oznacza to, że w grafie G każdy wierzchołek z D musi mieć przynajmniej $\frac{k}{4}$ sąsiadów (znać chłopców).

Zadanie 8

8. Udowodnij, że drzewo ma co najwyżej jedno pełne skojarzenie.

Weźmy drzewo T i jego doskonałe skojarzenie M.
Załóżmy nie wprost, że istnieje doskonałe skojarzenie M', takie że $M \neq M'$.

Utwórzmy graf G o wierzchołkach T i krawędziach z różnicy symetrycznej M i M'. Musi być to podgraf T. Zauważmy, że jeśli krawędź e (z v do v') należy jednocześnie do M i M' to wierzchołki incydentne do krawędzi e będą stopnia zerowego. Jeśli e należy tylko do jednego skojarzenia, to istnieją krawędzie: e' incydentna do v i e" incydentna do v' w drugim skojarzeniu. Wtedy wierzchołki v i v' będą miały stopień dwa w grafie G.

Usuńmy teraz wszystkie wierzchołki stopnia zerowego z grafu G i nazwijmy ten graf G'.

Jeśli G' jest pusty to oznacza to, że $M = M'$, sprzeczność.

Wpp. wszystkie wierzchołki w tym grafie są stopnia dwa. Zatem w G' istnieje cykl. Ale G' jest podgrafem T. Sprzeczność.

Zadanie 10

10. Pokaż, że dwudzielny graf d–regularny posiada pełne skojarzenie.

Niech G – d-regularny graf dwudzielny składa się z rozłącznych zbiorów wierzchołków X i Y oraz krawędzi między nimi.

1. $|Y| = |X|$

Wynika z regularności G. Z X wychodzi dokładnie $d|X|$ krawędzi i do Y wchodzi dokładnie $d|X|$ krawędzi. Analogicznie z Y wychodzi $d|Y|$ krawędzi. Stąd $d|X| = d|Y| \iff |X| = |Y|$.

2. G posiada pełne skojarzenie.

Weźmy (bez straty ogólności) $S \subseteq X$. Zauważmy, że liczba krawędzi między S a $N(S)$ to dokładnie $d|S|$. Z drugiej strony, liczba krawędzi wchodzących do $N(S)$ to $d|N(S)|$, wśród nich znajdują się krawędzie wychodzące z podzbioru S. Zatem $d|S| \leq d|N(S)| \iff |S| \leq |N(S)|$. Na mocy twierdzenia Halla, w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie.

Zadanie 11

11. Pokaż, że graf 3-regularny posiadający cykl Hamiltona ma indeks chromatyczny równy 3.

Niech G – 3-regularny graf Hamiltona.

Korzystając z lematu o uściskach dłoni wiemy, że G musi mieć parzystą liczbę wierzchołków $(2m = 3n)$. Zatem cykl Hamiltona w tym grafie musi być parzystej długości. Weźmy ten cykl Hamiltona i pokolorujmy jego krawędzie naprzemian kolorami c_1 i c_2. Pozostałe krawędzie tworzą doskonałe skojarzenie (każdy wierzchołek w tym grafie ma stopień 3, a każdy jest incydentny do dwóch krawędzi z cyklu Hamiltona), pokolorujmy je kolorem c_3. Wtedy każdy wierzchołek będzie incydentny do dokładnie jednej krawędź każdego z kolorów.

Zadanie 12

12. (a) Niech wszystkie wierzchołki G poza v mają stopień d i niech indeks chromatyczny G wynosi d. Pokaż, że $n = |V(G)|$ jest nieparzyste i $\deg(v) = 0$.
    (b) Pokaż, że graf d-regularny G posiadający wierzchołek rozcinający ma indeks chromatyczny równy $d + 1$.

$(a)\ deg(v) \neq d \implies deg(v) < d$

Skoro $\chi'(G) = d$ to weźmy optymalne kolorowanie i rozważmy krawędzie incydentne do v. Skoro $deg(v) < d$ to istnieje kolor c_1 taki, że żadna krawędź incydentna do v nie ma tego koloru. Krawędzie koloru c_1 po usunięciu wierzchołka v w grafie G' utworzą doskonałe skojarzenie. W szczególności, liczba wierzchołków w G' musi być parzysta.

Załóżmy nie wprost, że $deg(v) > 0$ i rozważmy krawędź koloru c_2 incydentną do v. Krawędzie koloru c_2 tworzą skojarzenie doskonałe w G, tzn. G ma parzystą liczbę wierzchołków. Sprzeczność. Zatem $deg(v) = 0$.

(b)

Załóżmy nie wprost, że $\chi'(G) = d$. Wtedy dla ustalonego d-optymalnego kolorowania krawędzie dowolnego koloru tworzą skojarzenie doskonałe.
Niech v – wierzchołek rozcinający. Niech v łączy dwie spójne składowe (które powstałyby w grafie G po jego usunięciu) H_1, H_2, takie, że nie ma krawędzi między H_1 a H_2.

Weźmy krawędź koloru c_k łączącą wierzchołek v z wierzchołkiem w H_1. Skoro krawędzie c_k tworzą doskonałe skojarzenie, to liczba wierzchołków w H_1 musi być nieparzysta, natomiast liczba wierzchołków w H_2 – parzysta.

Analogicznie, weźmy krawędź koloru c_t, która łączy wierzchołek v z wierzchołkiem w H_2. Skoro krawędzie o kolorze c_t tworzą doskonałe skojarzenie to H_2 zawiera nieparzystą liczbę wierzchołków, a H_1 – parzystą. Sprzeczność.

Skoro $\chi'(G) \leq d + 1$ to $\chi'(G) = d + 1$.

Zadanie 13

13. Pokaż, że indeks chromatyczny $\chi'(K_n)$ jest równy $n - 1$, gdy n jest parzyste i n, gdy n jest nieparzyste.

Nazwijmy wierzchołki w K_n (gdzie n jest nieparzyste) jako $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$

Teraz pokolorujmy każdą krawędź $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ kolorem $i + j \pmod n$. Pokażmy, że żaden wierzchołek nie ma dwóch incydentnych krawędzi tego samego koloru.

Załóżmy nie wprost, że istnieje wierzchołek v_k, w którym dwie z krawędzi do niego incydentnych jest tego samego koloru. Tzn, istnieją $v_m \neq v_t$ takie, że $k + t \equiv k + m \pmod n \iff t \equiv m \pmod n$, ale wiemy, że $t, m < n$, zatem $n = m$, sprzeczność.

Z drugiej strony, ze względu na to, że zbiór krawędzi jest zawsze skojarzeniem, a każdy wierzchołek w K_n ma stopień $n - 1$ to chcąc pokolorować K_n $n - 1$ kolorami to każdy z tych kolorów musiałby być incydentny do każdego z wierzchołków, czyli musiałyby istnieć $n - 1$ skojarzenia doskonałe, co sprzeczne jest z nieparzystością wierzchołków.

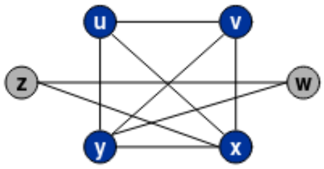
Teraz rozważmy graf K_{n+1} i kolorowanie wyznaczone wyżej. Zauważmy, że dla każdy z wierzchołków nie używa dokładnie jednego koloru. Dokładniej, każdy v_i nie ma incydentnej krawędzi koloru $2i \pmod n$. Wpp. musiałyby istnieć takie wierzchołki $v_i, v_j, i \neq j$, że $i + j \equiv 2i \pmod n \iff j \equiv i \pmod n$. Tzn, $j = i$ lub $j = n + i$.

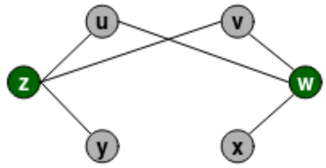
Pokażmy teraz, że dla każdej pary wierzchołków, brakujący kolor krawędzi incydentnej nie jest taki sam, tj. dla $v_i \neq v_j$ zachodzi $2j \not\equiv 2i \pmod n$. Załóżmy nie wprost, że $2j \equiv 2i \pmod n \iff j \equiv i \pmod n \implies j = i$, sprzeczność.

Wystarczy zatem pokolorować krawędzie w taki sposób, że krawędź łącząca dołączony wierzchołek z wierzchołkiem v_i pokolorowana zostanie na kolor $2i \pmod n$.

Zadanie 14

14. Pokaż wielomianową redukcję problemu istnienia w grafie G pokrycia wierzchołkowego rozmiaru k do problemu istnienia w grafie H kliki rozmiaru k'.





Transformacja $f: G \to \overline{G}$.

W G istnieje pokrycie wierzchołkowe wielkości $k \iff$ W $\overline{G}$ istnieje klika wielkości $|V| - k$.

$\implies$

Załóżmy, że w G istnieje pokrycie wierzchołkowe S wielkości k. Niech $S' = V \setminus S$. Wtedy $|S'| = |V| - k$.
Weźmy dowolną krawędź $e = uw \in E(S)$.

Skoro $e \in E(S)$, tzn, że $u \in S$ lub $w \in S$.
W przypadku, gdy żaden z wierzchołków nie należy do S to krawędź leży w S'.

Zatem S' jest kliką

$\impliedby$

Niech $\overline{G}$ zawiera klikę S' wielkości $|V| - k$. Rozważmy $S = V \setminus S'$. Wtedy $|S| = |V| - (|V| - k) = k$.
Pokażmy, że S jest pokryciem wierzchołkowym.

Weźmy dowolną krawędź $G - e = uv$:

- $\overline{e}$ nie jest krawędzią w G,
- przynajmniej jeden z wierzchołków u, v nie należy do S' (bo S' jest kliką),
- przynajmniej jeden z wierzchołków u, v jest w S

Zatem S jest pokryciem wierzchołkowym rozmiaru k.

Zadanie 15

15. Pokaż, że jeśli można rozstrzygnąć, czy graf dowolny graf jest 4-kolorowalny w czasie wielomianowym, to da się również rozstrzygnąć, czy dowolny graf jest 3-kolorowalny w czasie wielomianowym.

Niech $f : G \to G'$, taka że do G' kopiujemy G i dołączamy wierzchołek y incydentny do każdego innego wierzchołka w G'.

G jest 3-kolorowalny $\iff$ G' jest 4-kolorowalny

$\Longrightarrow$

Jeśli G jest 3-kolorowalny to w grafie G' y będzie musiał być pokolorowany 4 kolorem, ponieważ jest incydentny do wszystkich pozostałych wierzchołków. Zatem G' jest 4-kolorowalny.

$\Longleftarrow$

Jeśli G' jest 4-kolorowalny to istnieje taki wierzchołek y połączony krawędzią ze wszystkimi innymi wierzchołkami, co oznacza, że ma inny kolor niż wszystkie pozostałe wierzchołki. Stąd G jest 3-kolorowalny.

Zadanie 16

16. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem izomorfizmu grafów do problemu izomorfizmu grafów dwudzielnych.

Zdefiniujmy transformację f, która zachowuje wierzchołki z G, a dla każdej krawędzi uv utworzy wierzchołek w. Wtedy $f(G)$ będzie dwudzielny.

Pokażmy, że G jest izomorficzne z H $\iff$ $f(G)$ jest izomorficzne z $f(H)$

$\Longrightarrow$

Jeśli G jest izomorficzne z H to po dodaniu wierzchołka na krawędzi uv w G, wierzchołek przejdzie na krawędź $u'v'$ w G

$\Longleftarrow$ Wystarczy rozważyć grafy spójne (jeśli nie są spójne to możemy rozważyć problem izomorizmu dla każdej ze spójnych składowych osobno).

Jeśli G nie jest cyklem to w $f(G)$ możemy rozróżnić wierzchołki dodane do grafu $f(G)$ od tych z grafu G. Wystarczy znaleźć wierzchołek v stopnia nieparzystego i zastosować algorytm, który podzieli wierzchołki w taki sposób, że sąsiedzi v będą dodanymi wierzchołkami, z kolei ich sąsiedzi będą wierzchołkami z G etc. (na każdej krawędzi dodany był jeden wierzchołek).

Wtedy jeśli w grafie G istniała krawędź uv to w grafie $f(G)$ istnieje krawędź ux i xv. Jeśli $f(G)$ jest izomorficzne z $f(H)$ to krawędź ux przechodzi na $u'x'$ w $f(H)$, a xv na $x'v'$ w $f(H)$. Stąd jeśli pominiemy wierzchołek v (dodany poprzez transformację) to będzie zachodzić, iż jeśli istniała krawędź uv w grafie G to przejdzie ona na $u'v'$ w H.

Zatem izomorfizm $f(G) \to f(H)$ obcięty do wierzchołków G definiuje $G \to H$.

Jeśli G jest cyklem o n wierzchołkach to jeśli $f(G)$ jest izomorficzny z $f(H)$ oznacza to, że zarówno $f(G)$ jak i $f(H)$ są cyklami o $2n$ wierzchołkach. Jeśli $f(H)$ jest cyklem o $2n$ wierzchołkach to powstał z H - cyklu o n wierzchołkach. Stąd G jest izomorficzne z H.

Zadanie 17

17. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia drogi Hamiltona w grafie do problemu istnienia w nim drzewa spinającego o stopniu nie większym, niż 2021.

Zdafiniujmy transformację $f : G \to G'$, taką że w G' mamy graf G i dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$, v ma w G' 2019 nowych sąsiadów

W grafie G istnieje droga Hamiltona $\iff$ w G' istnieje drzewo rozpinające o stopniu nie większym niż 2021

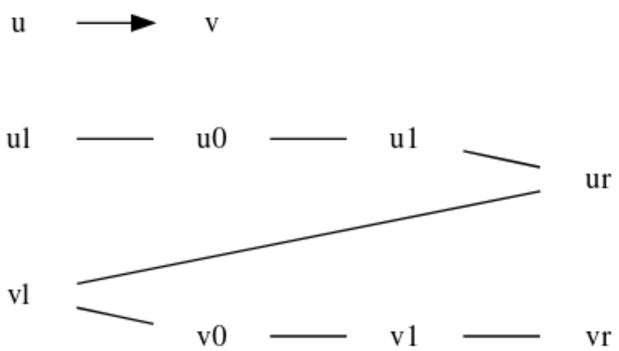
Jeśli w grafie istnieje droga Hamiltona to w szczególności jest ona drzewem rozpinającym tego grafu o stopniu co najwyżej 2021.

Drzewo rozpinające dla G' musi zawierać dla każdego $v \in V(G)$ po 2019 krawędzi łączących v z tymi wierzchołkami. Czyli pozostała jego część drzewa, czyli drzewo rozpinające dla grafu G ma stopień nie większy niż 2, tzn. jest ścieżką Hamiltona w G.

Zadanie 18

18. Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia cyklu Hamiltona w dowolnym digrafie do problemu istnienia cyklu Hamiltona w nieskierowanym grafie dwudzielnym.

Zdefiniujmy transformację f, która jeśli w G istnieje wierzchołek u to przekształca go na cztery wierzchołki u_l, u_0, u_1, u_r i łączy u_l, u_0, u_0, u_1 oraz u_0, u_r nieskierowanymi krawędziami. W przypadku, gdy w G istnieje skierowana krawędź (u, v) to w $f(G)$ powstanie nieskierowana krawędź $u_r v_l$.



Pokażmy, że w digrafie G istnieje cykl Hamiltona $\iff$ w grafie $f(G)$ istnieje cykl Hamiltona.

$\implies$

Jeśli w G istnieje cykl Hamiltona, to w $f(G)$ również istnieje, z tą różnicą, że dla każdej przechodzonej krawędzi (u, v) w grafie G przechodzimy przez drogę $u_l, u_0, u_1, u_r, v_l, v_0, v_1, v_r$ w grafie $f(G)$.

$\Longleftarrow$

Jeśli w $f(G)$ istnieje cykl to musi być on postaci $u_l, u_0, u_1, u_r, v_l, v_0, v_1, v_r, \ldots$ lub $u_r, u_1, u_0, u_l, v_r, v_1, v_0, v_l \ldots$. Ponieważ porządek przechodzonych kolejno wierzchołków odpowiada skierowaniu krawędzi w grafie G to w przypadku 1 cyklu zamieniając wierzchołki od vl do vr na v dostaniemy cykl Hamiltona w G. W przypadku drugiego cyklu, skoro $f(G)$ jest nieskierowany, wystarczy go odwórcić.

Obserwujemy, że nigdy nie zdarzy się sytuacja w której przejdziemy raz z prawego do lewego wierzchołka a następnie z prawego do lewego (wynika z definicji transformacji).

tags: `mdm`