Zadanie 3

Wiktoria Kuna

Mamy zmienną losową Z – funkcję zmiennych losowych X i Y. Policzmy jej rozkład znając rozkłady X i Y.

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$
$$P(X = 1, Y = k - 1) + P(X = 2, Y = k - 2) + \cdots + P(X = k - 1, Y = 1) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} P(X = i, Y = k - i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1 - i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2 - k + i} =$$
$$p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \overset{(**)}{=} \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k}$$

Mamy zatem $Z \sim B(n_1 + n_2, p)$.

(∗) Niezależność zmiennych losowych.
(∗∗) Tożsamość Cauchy'ego.