Lista 7

Zadanie 1

Znajdźmy liczbę rozłożeń i pionków na planszy $n \times n$, tak, aby dla każdej pary jeden z nich znajdował się na lewo i niżej od drugiego.

Jeżeli $i = 1$ to nie ma żadnej pary i warunek jest spełniony.

Aby warunek zadania został spełniony to w każdej kolumnie i wierszu musi znajdować się dokładnie jeden pionek. Stąd też nie możemy w taki sposób umieścić więcej niż n pionków.

Zauważmy, że dla każdych i kolumn i i wierszy istnieje tylko jedno takie rozłożenie spełniające warunek zadania.

	0:	**1:**	**2:**	**3:**
0:				
1:				X
2:		X		
3:	X			

Dla przykładu weźmy $n = 4, i = 3$. Dla kolumn $0, 1, 3$ i wierszy $1, 2, 3$. Pierwszy pionek musimy ustawić w możliwym, najbardziej oddalonym prawym górnym punkcie, aby reszta pionków zmieściła się na dole z lewej strony. Po ustawieniu pierwszego pionka postępujemy tak z każdym kolejnym.

Zatem wszystkich ustawień i jest tyle, ile wszystkich kombinacji par i różnych kolumn i i różnych wierszy, czyli: $\binom{n}{i}\binom{n}{i}$.

Ponieważ $0 \leq i \leq n$ to rozłożeń dowolnej liczby pionków na planszy $n \times n$ jest:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i}$$

Zadanie 2

---

(1) Pokazać, że $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$.

1°

$n = 0 \implies F_1 = \binom{0}{0} = 1$

$n = 1 \implies F_2 = \binom{0}{0} + \binom{0}{1} = 1$

2° Założmy, że $F_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i}{i}$ dla każdego $0 \leq k < n$.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{zał.ind.}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{(n-2)-j}{j} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{(n-2)-(i-1)}{i-1} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{(n-1)-i}{i} + \binom{(n-1)-i}{i-1} \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$$

(2) Pokazać, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m}$ to liczba Fibonacciego.

Pokażmy, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m} = F_{m+2n}$

1°

$n = 0 \implies \binom{0}{0} F_m = F_m$

$n = 1 \implies \binom{1}{0} F_m + \binom{1}{1} F_{m+1} = F_{m+2}$

2° Założmy, że $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F_{i+m} = F_{m+2k}$ dla każdego $k < n$.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m} = \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n-1}{i} F_{i+m} + \binom{n-1}{i-1} F_{i+m} \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{i+m} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{i+m+1} \overset{zał.ind.}{=}$$

$$F_{m+2(n-1)} + F_{m+1+2(n-1)} = F_{m+2n}$$

Zadanie 3

Wszystkich możliwych ustawień liczb $1, 2, 3, ...n$ w ciąg długości $2n$, tak by każda występowała dwukrotnie jest $\frac{(2n!)}{2^n}$.

Niech A_i to zbiór zawierający wszystkie ciągi takie, że i-te liczby znajdują się koło siebie.
Ustawmy ciąg długości $2n-2$ bez i-tej liczby. Możemy to zrobić na $\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}}$ sposobów.
Weźmy teraz parę liczb i-tych i ustawmy je w powyższym ciągu. Możemy zrobić to na $2n-1$ sposobów układając je na początku, pomiędzy każdymi sąsiadującymi liczbami w ciągu i na końcu.

Zatem $|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$.

Wybierzmy teraz po parze i-tych i j-tych liczb. Ułóżmy pozostałe w ciąg – $\frac{(2n-4)!}{2^{n-2}}$ sposobów.

Parę i-tą możemy umieścić na $2n-3$ sposobów, a parę j-tą na $2n-2$ sposobów (mamy ustawionych $2n-2$ liczb i możemy wstawić j-tą parę pomiędzy każdą z nich, ale parę i-tą potraktujemy jako jedną liczbę, bo nie możemy jej rozdzielić).

Zatem $|A_i \cap A_j| = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$.

Zauważamy zależność: $|\bigcap_{i=0}^{k} A_i| = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

Korzystamy następnie z zasady włączeń i wyłączeń.

Wszystkich takich ustawień jest:

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

Zadanie 4

Rozwiąż zależność rekurencyjną:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} \end{cases}$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2} \iff 2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$(2E^2 - E - 1) < a_n > = < 0 >$$

$$2(E + \frac{1}{2})(E-1) < a_n > = < 0 >$$

Zatem rozwiązaniami szczególnymi a_n są $(\frac{-1}{2})^n, 1^n$.

Rozwiązanie ogólne zależności rekurencyjnej to $a_n = \alpha(\frac{-1}{2})^n + \beta$.

Policzmy współczynniki α i β.

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = \frac{-\alpha}{2} + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\beta = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem zwarta postać ciągu a_n to $a_n = \frac{1}{3}(\frac{-1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3}$.

Zadanie 5

$(a)\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1, \text{ gdy } a_0 = a_1 = 0$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n - 1$$

Możemy przepisać równanie rekurencyjne jako:

$$(E^2 - 2E + 1) < a_n >= E^2 < 3^n - 1 >$$

Operator $(E^2 - 2E + 1)$ nie anihiluje w całości zależności a_n. Pozostawia resztę w postaci $3^n - 1$, którą anihiluje operator $(E - 3)(E - 1)$.

Zatem operator $(E - 3)(E - 1)(E^2 - 2E + 1) = (E - 3)(E - 1)^3$ jest anihilatorem równania.

Mamy wtedy rozwiązanie ogólne:

$$a_n = \alpha 3^n + \beta + \gamma n + \delta n^2$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \beta & (1) \\ a_1 = 0 = 3\alpha + \beta + \gamma + \delta & (2) \\ a_2 = 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta & (3) \\ a_3 = 2 = 27\alpha + \beta + 3\gamma + 9\delta & (4) \end{cases}$$

$(4)-9(2)$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha & (1) \\ 0 = 3\alpha + \beta + \gamma + \delta & (2) \\ 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta & (3) \\ 1 = -4\beta - 3\gamma & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta & (1) \\ 0 = 3\alpha + \beta + \gamma + \delta & (2) \\ 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta & (3) \\ \gamma = \frac{1+4\beta}{-3} & (5) \end{cases}$$

Podstawiamy (1) i (5) do (2)

$$\begin{cases} \alpha = -\beta & (1) \\ 0 = -3\beta + \beta + \frac{1+4\beta}{-3} + \delta & (6) \\ 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta & (3) \\ \gamma = \frac{1+4\beta}{-3} & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta & (1) \\ \delta = \frac{10\beta+1}{3} & (6) \\ 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta & (3) \\ \gamma = \frac{1+4\beta}{-3} & (5) \end{cases}$$

Podstawmy $(1), (6), (5)$ do (3)

$$-9\beta + \beta + 2\frac{1+4\beta}{-3} + 4\frac{10\beta+1}{3} = 0$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{1}{4} \\ \gamma = 0 \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$(b)\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1},\ \text{gdy}\ a_0 = a_1 = 1$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n2^{n+1}$$

Możemy przepisać jako:

$$(E^2 - 4E + 4) < a_n >= E^2 < n2^{n+1} >$$

Zauważmy, że $(E-2)^2$ anihiluje resztę $n2^{n+1}$. Całe równanie wyzeruje operator $(E-2)^4$.

Zatem rozwiązanie ogólne to:

$$a_n = \alpha + \beta n 2^n + \gamma n^2 2^n + \delta n^3 2^n$$

$(c)\ a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n,\ \text{gdy}\ a_0 = a_1 = 1$

$$a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 2^{n+1}$$

Możemy przepisać zależność:

$$(E^2 + E + 1) < a_n >= E^2 < 2^{n+1} >$$

Anihilatorem równania jest $(E^2 + E + 1)(E - 2) = (E - \frac{-1-3i}{2})(E - \frac{-1+3i}{2})(E - 2)$.

Równanie ogólne:

$$a_n = \alpha\Big(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + \gamma 2^n$$

Zadanie 6

Mamy ciąg:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-3} \quad n > 2 \end{cases}$$

$$a_n - a_{n-3} = 0$$

$$(E^3 - 1) < a_n >= 0$$

$$(E - 1)(E^2 + E + 1) < a_n >= 0$$

Rozwiązanie ogólne:

$$a_n = \alpha + \beta\Big(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + \gamma\Big(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^n$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\gamma = 1 & (2) \\ \alpha + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\gamma = 2 & (3) \end{cases}$$

Odejmijmy wiersze $(3) - (2)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\gamma = 1 & (2) \\ \beta = \frac{1}{i\sqrt{3}} + \gamma & (4) \end{cases}$$

Podstawmy (4) do (2) i (1)

$$\begin{cases} \alpha = -(\frac{1}{i\sqrt{3}} + \gamma) - \gamma & (1) \\ \alpha + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{i\sqrt{3}} + \gamma + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\gamma = 1 & (2) \\ \beta = \frac{1}{i\sqrt{3}} + \gamma & (4) \end{cases}$$

Podstawmy (1) do (2) i rozwiążmy dla γ:

$$-\frac{1}{i\sqrt{3}} - 2\gamma + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{i\sqrt{3}} + \gamma) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\gamma = 1$$

$$\frac{-6}{2}\gamma = 1 + \frac{3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$$

$$\gamma = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}-3}{6}$$

Podstawiamy w pozostałe równania i otrzymujemy współczynniki:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{i\sqrt{3}} + 2\frac{1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = 1 \\ \beta = \frac{1}{i\sqrt{3}} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}+3}{6} \\ \gamma = \frac{i\sqrt{3}-3}{6} \end{cases}$$

Zatem $n \bmod 3$ możemy wyrazić jako:

$$a_n = 1 - \frac{i\sqrt{3}+3}{6}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Ponieważ $fl_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n - n \bmod 3}{3}$

$$fl_n = \frac{n-a_n}{3} = \frac{n - 1 - \frac{i\sqrt{3}+3}{6}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n}{3}$$

$$fl_n = \frac{n-1}{3} - \frac{i\sqrt{3}+3}{18}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}-3}{18}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Zadanie 8

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i2^i$$

Zależność rekurencyjna:

$$s_n = s_{n-1} + n2^n$$

Możemy przepisać ją jako:

$$(E-1) < s_n >= E < n2^n >$$

Ponieważ $(E-2)^2 < n2^n >= 0$ to anihilatorem wyrażenia jest $(E-1)(E-2)^2$.

Możemy przedstawić rozwiązanie ogólne:

$$s_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma n 2^n$$

$$\begin{cases} s_0 = 0 = \alpha + \beta & (1) \\ s_1 = 2 = \alpha + 2\beta + 2\gamma & (2) \\ s_2 = 10 = \alpha + 4\beta + 8\gamma & (3) \end{cases}$$

Odejmijmy wiersze $(3) - 2(2)$ i $(2) - 2(1)$

$$\begin{cases} s_0 = 0 = \alpha + \beta & (1) \\ s_1 = 2 = -\alpha + 2\gamma & (4) \\ s_2 = 6 = -\alpha + 4\gamma & (5) \end{cases}$$

$(5) - (4)$

$$\begin{cases} s_0 = 0 = \alpha + \beta & (1) \\ s_1 = 2 = -\alpha + 2\gamma & (4) \\ s_2 = 4 = 2\gamma & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Zatem $s_n = 2 - 2 \cdot 2^n - 2n2^n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$

tags: `mdm`