

Lista 6

Wiktoria

Zadanie 5

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$.

Niech $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Widzimy, że $Z \sim N(0, 1)$ (z poprzednich zajęć). Zatem $Y \sim N(0, 1)^2$.

Korzystamy z udowodnionej wcześniej własności (dla $y > 0$):

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \stackrel{(*)}{=} \frac{2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

Zatem $Y \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(*) Z parzystości gęstości standardowego rozkładu normalnego.