Lista 3

1(2p)	2(1p)	3(2p)	4(1p)	5(2p)	6(2p)	7(1p)	8(2p)
✓	?		✓	✓		✓	?

Zadanie 1 (E)

a) $4cos^2x - 3$

Zjawisko utraty cyfr znaczących uzyskujemy, gdy $4cos^2x \approx 3 \iff x \approx \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ x \approx -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$$4cos^2x - 3 = 4(cos^2x - \frac{3}{4}) = 4(cosx - \frac{\sqrt{3}}{2})(cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$4(cosx - cos\frac{\pi}{6})(cosx + cos\frac{\pi}{6}) = 4 \cdot (-2)sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}2cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2} =$$

$$-4sin(x - \frac{\pi}{6})sin(x + \frac{\pi}{6}) = 4sin(x + \frac{5\pi}{6})sin(x + \frac{\pi}{6})$$

b) $x^{-3}(\frac{\pi}{2} - x - arcctg(x))$

Korzystając ze wzoru $arcctg(x) = \frac{\pi}{2} - arctg(x)$, mamy:

$L = \frac{\pi}{2} - x - arcctg(x) = arctg(x) - x$

Zjawisko utraty cyfr znaczących możemy zaobserwować, gdy $L \approx 0$, czyli gdy $x \approx 0$.

Rozwinięcie $f(x) = arctg(x)$ w szereg Taylora:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ...$$

$$\frac{arctg(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{7} + \frac{x^6}{9} - ...$$

Zatem dla $x \approx 0$, realistyczne wyniki otrzymamy dla:

$$\frac{arctg(x) - x}{x^3} \approx -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{7} + \frac{x^6}{9} - \frac{x^8}{11} + ...\frac{x^{18}}{21}$$

Bez obawy o wystąpienie zjawiska utraty cyfr znaczących.

Zadanie 2

$ax^2 + bx + c = 0$ oraz $a \neq 0$

Metoda szkolna:
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Metoda (prawdopodobnie) lepsza:

Wzory Viete'a dla równania kwadratowego:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Jeśli $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ oraz $b \geq 0$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Jeśli $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} \neq 0$ oraz $b \geq 0$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 = \frac{c}{ax_2} \end{cases}$$

Jeśli $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ oraz $b < 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Jeśli $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \neq 0$ oraz $b < 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{c}{ax_1} \end{cases}$$

Zadanie 4 (E)

Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania funkcji f w punkcie x.

Dla $h < \mathcal{E}$:

Błąd względny wyniku	**Błąd względny danych**

Błąd względny wyniku	Błąd względny danych
$\widetilde{f}= \left\lvert \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \right\rvert$	$\widetilde{x}= \left\lvert \frac{(x+h)-x}{x} \right\rvert = \left\lvert \frac{h}{x} \right\rvert$

Wskaźnik uwarunkowania to stosunek błędu względnego wyniku do błędu względnego danych:

$$K = \lim_{x \to h} \frac{\widetilde{f}}{\widetilde{x}} = \lim_{x \to h} \frac{\left\lvert \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \right\rvert}{\left\lvert \frac{h}{x} \right\rvert} = \lim_{x \to h} \left\lvert \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)} \right\rvert = \left\lvert \frac{f'(x)x}{f(x)} \right\rvert$$

Zadanie 5 (E)

a) $f(x) = x^3 + 2020$

$$K = \left\lvert \frac{f'(x)x}{f(x)} \right\rvert = \left\lvert \frac{3x^3}{x^3 + 2020} \right\rvert$$

Zadanie jest źle uwarunkowane dla $x \approx -\sqrt[3]{2020}$, bo:

$$\lim_{x \to -\sqrt[3]{2020}} \left\lvert \frac{3x^3}{x^3 + 2020} \right\rvert = \infty$$

b) $f(x) = x^{-1} ln(x)$

$$K = \left\lvert \frac{(-x^{-2} ln(x) + x^{-1} x^{-1})x}{x^{-1} ln(x)} \right\rvert = \left\lvert \frac{-ln(x) + 1}{ln(x)} \right\rvert$$

Zadanie jest źle uwarunkowane dla $x \approx 1$, bo:

$$\lim_{x \to 1} K = \infty$$

c) $f(x) = cos(5x)$

$$K = \left\lvert \frac{-sin(5x)5x}{cos(5x)} \right\rvert = \left\lvert -5x tan(5x) \right\rvert$$

Zadanie jest źle uwarunkowane dla $5x \approx \pi(\frac{1}{2} + k) \iff x \approx \frac{\pi}{5}(\frac{1}{2} + k)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$, bo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k} \left\lvert 5x tan(5x) \right\rvert = \infty$$

d) $f(x) = (\sqrt{x^4 + 2020} + x)^{-1}$

$$K = \left| - \frac{x + \frac{2x^4}{\sqrt{2020+x^4}}}{\sqrt{x^4+2020}+x} \right| = \left| \frac{x\sqrt{2020+x^4} + x^4 + x^4 + 2020 - 2020}{x^4 + 2020 + x\sqrt{2020+x^4}} \right| =$$

$$\left| 1 + \frac{x^4 - 2020}{x^4 + 2020 + x\sqrt{2020+x^4}} \right| = \left| 1 + \frac{x^4 - 2020}{x^4 + 2020 + x^3\sqrt{\frac{2020}{x^4}+1}} \right|$$

Zadanie jest dobrze uwarunkowane.

Zadanie 6 (E)

Zadanie 7

```
fn A(x):
    u = x;
    v = 1 / x;
    ret (u + v);
```

$(x + \frac{1}{x}(1+\mathcal{E}_2))(1+\mathcal{E}_3) = x(1+\mathcal{E}_3) + \frac{1}{x}(1+\mathcal{E}_2)(1+\mathcal{E}_3) =$

$(x + \frac{1}{x})(1+\gamma)(1+\mathcal{E}_3) = (x+\frac{1}{x})(1+H)$

$x + \mathcal{E}_3 x + \frac{1}{x} + \mathcal{E}_2\frac{1}{x} + \mathcal{E}_3\frac{1}{x} + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3\frac{1}{x} = x + \gamma x + \mathcal{E}_3 x + \gamma\mathcal{E}_3 x + \frac{1}{x} + \gamma\frac{1}{x} + \mathcal{E}_3\frac{1}{x} + \gamma\mathcal{E}_3\frac{1}{x}$

$\mathcal{E}_2\frac{1}{x} + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3\frac{1}{x} = \gamma x + \gamma\mathcal{E}_3 x + \gamma\frac{1}{x} + \gamma\mathcal{E}_3\frac{1}{x}$

$\gamma(x + \mathcal{E}_3 x + \frac{1}{x} + \mathcal{E}_3\frac{1}{x}) = \mathcal{E}_2\frac{1}{x} + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3\frac{1}{x}$

$\gamma = \frac{\mathcal{E}_2\frac{1}{x} + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3\frac{1}{x}}{x + \mathcal{E}_3 x + \frac{1}{x} + \mathcal{E}_3\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}\mathcal{E}_2(1+\mathcal{E}_3)}{(x+\frac{1}{x})(1+\mathcal{E}_3)} = \frac{\mathcal{E}_2\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

Wiemy, że $|\mathcal{E}_3| \le 2^{-t}$, zatem:

$|\gamma| \le \left|\frac{1}{x^2+1}\right| \cdot 2^{-t}$

Dla dowolnego x mamy $\left|\frac{1}{x^2+1}\right| \le 1$. Czyli $|\gamma| \le 2^{-t}$.

Zatem z twierdzenia o kumulacji błędów:
$|H| \le 2 \cdot 2^{-t}$

Algorytm jest numerycznie poprawny, bo dla dokładnych danych (x - liczba maszynowa) dostaliśmy ‘nieco’ zmieniony wynik ($|H| \le 2 \cdot 2^{-t}$).

Zadanie 8

```
I:=x[1];
    for k=2 to n
        do
          I:=I*x[k]
        end;
return(I)
```

Jeśli liczby $x_1, x_2, ...x_n$ są liczbami maszynowymi

$$(...(((x_1(1+\mathcal{E}_1)\cdot x_2)(1+\mathcal{E}_2)\cdot x_3)(1+\mathcal{E}_3)\cdot x_4)(1+\mathcal{E}_4)...\cdot x_n)(1+\mathcal{E}_n)=$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot ...\cdot x_n(1+\mathcal{E}_1)(1+\mathcal{E}_2)(1+\mathcal{E}_3)\cdot ...\cdot(1+\mathcal{E}_n)=$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot ...\cdot x_n(1+H)$$

Gdzie $\mathcal{E}_1 = 0$

Wiemy, że $|\mathcal{E}_i| \leq 2^{-t}$ dla $i = 1, 2...n$

Z twierdzenia o kumulacji błędów mamy:

$|H| \leq n\cdot 2^{-t}$

Jeśli liczby $x_1, x_2, ...x_n$ nie są liczbami maszynowymi

$$rd(x_1)\cdot rd(x_2)\cdot rd(x_3)\cdot ...\cdot rd(x_n)(1+H)$$

Zamiast nieco zaburzonego wyniku dla dokładnych danych, w tym przypadku otrzymujemy nieco zaburzony wynik dla nieco zaburzonych danych, zatem algorytm wciąż jest numerycznie poprawny.

tags: `anl`