13 stycznia 2021

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 13

1. Niech $G \bullet e$ oznacza graf G po ściągnięciu krawędzi e. Pokaż, że jeśli G jest planarny to $G \bullet e$ też jest planarny. Czy graf Petersena jest planarny?

2. Załóżmy, że G jest grafem o co najmniej 11 wierzchołkach. Wykaż, że grafy G i $\bar{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

3. Pokaż, że w dowolnym grafie prostym planarnym (o co najmniej trzech wierzchołkach) istnieją co najmniej trzy wierzchołki stopnia niewiększego od 5.

4. Udowodnij, że jeśli G jest grafem płaskim, to

$$n(G) + f(G) = m(G) + k(G) + 1$$

gdzie $f(G)$ jest liczbą obszarów, a $k(G)$ liczbą składowych spójności G.

5. Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem płaskim, w którym najkrótszy cykl ma długość r, to spełniona jest nierówność

$$(r-2)m \leq r(n-2).$$

Kiedy nierówność ta staje się równością?

6. Wielościan foremny to taki, w którym dla pewnej pary (a, b) każda ściana jest a-kątem foremnym i z każdego wierzchołka wychodzi b krawędzi. Na podstawie wzoru Eulera wywnioskuj jakie pary (a, b) są dopuszczalne i powiedz jakim wielościanom foremnym one odpowiadają.

7. Korzystając z wzoru Eulera pokaż, że wielościan (bez dziur ale niekoniecznie wypukły) zawsze ma dwie ściany o tej samej liczbie boków.

   Wsk.: Możesz założyć że z każdego wierzchołka wychodzą co najmniej trzy krawędzie. Wtedy $f - 2 = m - n \geq m/3 \geq (3 + 4 + \cdots + (f+2))/6$.

8. Pokaż, że dla każdego grafu G istnieje taka kolejność jego wierzchołków, że algorytm sekwencyjny przy tej kolejności koloruje G najmniejszą liczbą kolorów jakimi można pokolorować ten graf.

9. Pokaż, że dwa kolory wystarczą do pokolorowania ścian eulerowskiego grafu płaskiego.

10. Na płaszczyźnie rozłożono pewną liczbę monet o jednakowej średnicy, z których żadne dwie nie nachodzą na siebie. Monety te kolorujemy tak, by te które się stykają miały różne kolory Nie korzystając z twierdzenia o czterech barwach pokaż, że cztery kolory zawsze wystarczą a trzy nie zawsze.

11. Dla grafu G oznaczmy przez $G \bullet e$ graf powstały w wyniku ściągnięcia krawędzi e polegającego na usunięciu z G krawędzi e i identyfikacji jej końców, a przez $P_G(k)$ – liczbę pokolorowań grafu k kolorami. Pokaż, że

$$P_G(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G \bullet e}(k).$$

12. Niech T będzie drzewem n-wierzchołkowym, a C_n grafem cyklicznym. Pokaż, że

$$P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$$

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

13. Wykaż, że liczba krawędzi dowolnego grafu wynosi co najmniej

$$\chi(G)(\chi(G) - 1)/2.$$

14. Pokaż, że dla dowolnego grafu G

$$\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n.$$

15. Dla (multi)grafu G oznaczmy przez $G \bullet e$ graf powstały w wyniku ściągnięcia krawędzi e polegającego na usunięciu z G krawędzi e i identyfikacji jej końców.

   (a) Pokaż, że $n(G \bullet e) = n(G) - 1, m(G \bullet e) = m(G) - 1, p(G \bullet e) = p(G)$, gdzie $p(G)$ jest liczba składowych spójnych grafu G, i że jeśli G jest drzewem, to $G \bullet e$ jest drzewem.

   (b) Niech $t(G)$ będzie liczbą drzew rozpinających grafu G. Udowodnij, że $t(G) = t(G \setminus e) + t(G \bullet e)$.

   (c) stosując metodę z poprzedniego punktu wyznacz liczbę drzew rozpinających grafu z Rysunku.