Zadanie 2

Wiktoria

Dla gęstości $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n)$ z poprzedniego zadania wykazać, że gęstość brzegowa $f_n(y_n)$ względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem $f_{Y_n}(y_n) = \lambda^n \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_n$.

Wiemy, że $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ są ciągłymi zmiennymi losowymi, aby policzyć rozkład brzegowy dla gęstości $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n)$ względem Y_n musimy obliczyć:

$$\int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_3} \int_0^{y_2} f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n)\, dy_1\, dy_2, \ldots\, dy_{n-1}$$

Granice całkowania wynikają z zależności z poprzedniego zadania: $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

Mamy zatem:

$$\begin{gathered}
\int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_3} \int_0^{y_2} \lambda^n \exp(-\lambda y_n)\, dy_1\, dy_2, \ldots\, dy_{n-1} \overset{(*)}{=} \\
\lambda^n \exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_3} \int_0^{y_2} 1\, dy_1\, dy_2, \ldots\, dy_{n-1} = \\
\lambda^n \exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_3} y_2\, dy_2, \ldots\, dy_{n-1} = \\
\lambda^n \exp(-y_n) \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_4} \frac{y_3^2}{2}\, dy_3, \ldots\, dy_{n-1} = \\
\lambda^n \exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_5} \frac{y_4^3}{2 \cdot 3}\, dy_4, \ldots\, dy_{n-1} = \\
\cdots \\
\lambda^n \exp(-\lambda y_n) \int_0^{y_n} \frac{y_{n-1}^{n-2}}{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-2)}\, dy_{n-1} = \\
\lambda^n \exp(-\lambda y_n) \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}
\end{gathered}$$

$(*)$ Gęstość nie zależy od żadnej ze zmiennych, po których całkujemy, stąd możemy wyciągnąć ją przed całki.