Egzamin z analizy numerycznej (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

# Pracuj samodzielnie!!!

**Część 4:** godz. 11.45–12.30, **jedno zadanie**.

**Deklaracja wyboru:** godz. 11.45–12.00 ⇒ SKOS.

1. 12 punktów Sformułuj i udowodnij schemat Hornera. Udowodnij, że jest to algorytm numerycznie poprawny.

2. 12 punktów Niech dany będzie wielomian $w_n \in \Pi_n$ postaci
$$w_n(x) := z_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n),$$
gdzie liczby rzeczywiste $z_0, z_1, \ldots, z_n$ są dane. Opracuj i uzasadnij **oszczędny** algorytm znajdowania postaci potęgowej wielomianu $w_n$. Określ złożoność zaproponowanej metody. Gdzie, w kontekście metod omówionych w ramach wykładu, algorytm taki może mieć zastosowania?

3. 12 punktów Funkcję $f(x) = \cos(2x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}$. Jak należy dobrać $n$, aby mieć pewność, że
$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-8}\ ?$$

4. 12 punktów Niech dane będą wektory $\mathtt{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \le k \le n-1$), $\mathtt{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech $s_n$ oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \le k \le n$). Jak pamiętamy, w języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej $f$ znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \le k \le 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję $f$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsc zerowych** funkcji $f$ znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka `PWO++`, a mianowicie `Solve3(a,b,c,d)` znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $\mathtt{a}x^3 + \mathtt{b}x^2 + \mathtt{c}x + \mathtt{d}$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

*Powodzenia!*

Paweł Woźny

**Pamiętaj, że**

1. rozwiązanie **musi być spisane na szablonie** udostępnionym w SKOSie;
2. **plik PDF** z rozwiązaniem musi mieć **orientację pionową**, **być czytelny** oraz zawierać **następujące dane**: imię i nazwisko, numer części i numer zadania;
3. sprawdzane mogą być **jedynie zadeklarowane zadania** spełniające **podane warunki** oraz **przesłane w ustalonym czasie** (patrz wyżej i SKOS).