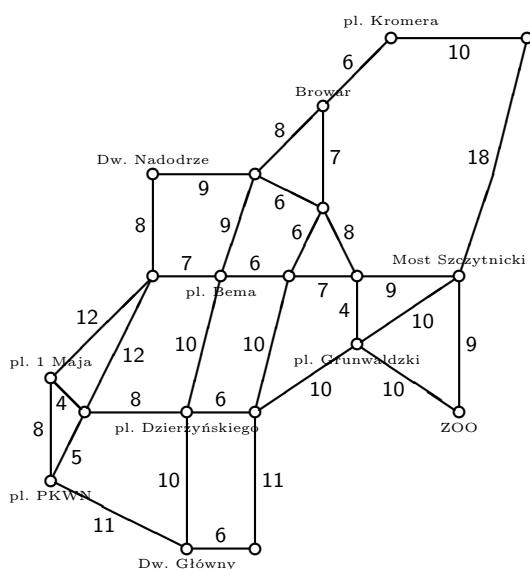


## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 12

1. Zastosuj przeszukiwanie grafu spójnego w głąb do znajdowania wierzchołka *rozcinającego*, tzn. takiego którego usunięcie rozspaja graf (jeśli taki wierzchołek istnieje). Twoja procedura powinna mieć złożoność  $O(m + n)$ .
2. Zastosuj przeszukiwanie grafu w głąb do sprawdzania, czy graf jest dwudzielny. Twoja procedura powinna mieć złożoność  $O(m + n)$ .
3. *Topologiczne porządkowanie wierzchołków*. Niech  $G$  będzie digrafem acyklicznym (bez skierowanych cykli). Napisz procedurę, która w czasie  $O(n + m)$  przyporządkowuje numery wierzchołkom w taki sposób, że gdy  $(i, j)$  jest łukiem w  $G$ , to  $i < j$ .
4. Używając algorytmów Prima–Dijkstry i Kruskala, wyznacz najkrótszy podzbiór dróg z Rysunku poniżej taki, że po tym podzbiórze dróg można dojechać z każdego węzła tej sieci do każdego innego. Ponumeruj krawędzie tego podzbioru w kolejności, w jakiej dołączają je do niego oba te algorytmy.
5. Używając algorytmu Dijkstry wyznacz drzewa najkrótszych dróg z Dw. Głównego, pl. Grunwaldzkiego i Browaru w sieci z Rys. 1. Ponumeruj krawędzie drzew w kolejności dołączania przez algorytm.
7. Pokaż, w jaki sposób można znaleźć najdłuższe drzewo rozpinające grafu z wagami.
8. Podaj szybką implementację algorytmu Warshalla dla obliczania przechodniego domknięcia grafu o 32 wierzchołkach. Macierz sąsiedztwa zawarta jest w postaci tablicy 32 słów 32-bitowych reprezentujących kolejne wiersze. Możesz wykonywać operacje logiczne na słowach 32 bitowych.
9. Zmodyfikuj tak algorytm Warshalla–Floyda, aby znajdował nie tylko długości najkrótszych drogi między parami wierzchołków, ale również te drogi.
10. W digrafie może istnieć wiele minimalnych dróg z wierzchołka  $v$  do  $u$ . Zmodyfikuj tak algorytm Dijkstry, żeby wyznaczał nie drzewo najkrótszych dróg, a acykliczny digraf będący sumą najkrótszych dróg z wierzchołka  $v$  do wszystkich innych.
11. Drzewo z dodaną jedną krawędzią nazywamy 1-drzewem. Zaproponuj (działający w rozsądnym czasie) algorytm znajdujący najkrótsze 1-drzewo spinające grafu z wagami i uzasadnij jego poprawność.
12. Niech  $G$  będzie grafem z nieujemnymi wagami na krawędziach. Niech  $MST(G)$  oznacza dłu-



6. (Dualny algorytm chciwości) Udowodnij, że po wykonaniu kroków 1 i 2,  $T$  jest najkrótszym drzewem rozpinającym grafu  $G$ .

Krok 1: Niech  $c(e_1) > c(e_2) > \dots > c(e_m)$ ;

Krok 2:  $T := E(G)$ ;

for  $e_1, e_2, \dots, e_m$  do

if  $T \setminus e_i$  jest grafem spójnym

then  $T := T \setminus e_i$ .

$$\text{MST}(G) \leq \text{TSP}(G) \leq 2 \cdot \text{MST}(G).$$

13. Dana jest sieć, w której każda krawędź poza pojemnością ma określony minimalny przepływ dla każdego łuku. Dany mamy pewien dopuszczalny przepływ  $f$  w tej sieci. Pokaż jak wyznaczyć maksymalny i minimalny przepływ w tej sieci.
14. (Twierdzenie Menger'a) Graf jest krawędziowo  $k$ -spójny gdy jest spójny i usunięcie z niego co najwyżej  $k - 1$  krawędzi nie rozspójnia go. Używając przepływów w sieciach pokaż, że  $G$  jest krawędziowo  $k$  spójny wtedy i tylko wtedy gdy między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje  $k$  krawędziowo rozłącznych dróg.
15. (Wersja wierzchołkowa Twierdzenia Menger'a) Graf jest  $k$ -spójny gdy jest spójny i usunięcie z niego co najwyżej  $k - 1$  wierzchołków nie rozspójnia go. Pokaż, że  $G$  jest  $k$ -spójny wtedy i tylko wtedy gdy między każdymi dwoma nie sąsiednimi wierzchołkami istnieje  $k$  wierzchołkowo rozłącznych dróg.