

## ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. (2pkt) Podaj nierekurencyjną wersję procedury *Quicksort*, która
  - działa *w miejscu*, tj. poza tablicą z danymi ( `int A[n]` ) używa tylko stałej (niezależnej od  $n$ ) liczby komórek typu `int` (zakładamy, że  $\max(n, \max\{A[i] \mid i = 1, \dots, n\})$  jest największą liczbą jaką może pomieścić taka komórka),
  - czas jej działania jest co najwyżej o stały czynnik gorszy od czasu działania wersji rekurencyjnej.
2. (2pkt) Ułóż algorytm sortujący stabilnie i w miejscu ciągi rekordów o kluczach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$ .
3. (1pkt) Podaj algorytm sprawdzający izomorfizm drzew nieukorzenionych.
4. (1.5 pkt) Oszacuj oczekiwany czas działania Algorytmu Hoare'a (znajdowania mediany w ciągu). Mile widziane będzie zastosowanie metody Fredmana (z artykułu załączonego na stronie wykładu).
5. (2pkt) Niech  $h(v)$  oznacza odległość wierzchołka  $v$  do najbliższego pustego wskaźnika w poddrzewie o korzeniu  $v$ . Rozważ możliwość wykorzystania drzew binarnych, równoważonych poprzez utrzymywanie następującego warunku:

$$h(\text{lewy syn } v) \geq h(\text{prawy syn } v) \text{ dla każdego wierzchołka } v,$$

do implementacji złączalnych kolejek priorytetowych.

6. (0,5pkt) Udowodnij, że każde drzewo BST można przekształcić operacjami rotacji w dowolne inne drzewo BST .
  7. (2pkt) Napisz procedurę *Split*( $T, k$ ) rozdzialającą drzewo AVL  $T$  na dwa drzewa AVL: jedno zawierające klucze mniejsze od  $k$  i drugie zawierające pozostałe klucze. Jaka jest złożoność Twojej procedury?
  8. (1,5pkt) Zaproponuj strukturę danych do pamiętania zbioru liczbowego i wykonywania na nim operacji: *insert*, *delete*, *mindiff*. Ostatnia z tych operacji zwraca jako wynik najmniejszą różnicę między dwoma elementami zbioru.
  9. (2pkt) Zaproponuj strukturę danych do pamiętania ciągu liczbowego i wykonywania na nim operacji:
    - *insert*( $i, a$ ) - wstaw liczbę  $a$  na pozycję  $i$  w ciągu;
    - *delete*( $i$ ) - usuń element znajdujący się na pozycji  $i$ ;
    - *find*( $i$ ) - podaj wartość, znajdującą się na pozycji  $i$ ;
    - *sum-of-even*() -podaj sumę elementów znajdujących się na pozycjach parzystych.
- Operacja *insert*( $i, a$ ) przekształca ciąg  $x_1, x_2, \dots, x_n$  w ciąg  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , a operacja *delete*( $i$ ) przekształca ten ciąg w ciąg  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ .
10. (1.5pkt) Bolesną dolegliwością związaną z drzewami AVL jest konieczność poświęcenia dwóch bitów w każdym węźle na pamiętanie współczynnika zrównoważenia. Zastanów się, czy aby na pewno mamy do czynienia z "koniecznością".

# ZADANIA DODATKOWE - DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZYWANIA

1. (0pkt) Pokaż, że *Quicksort* działa w czasie  $\Theta(n \log n)$ , gdy wszystkie elementy tablicy  $A$  mają tę samą wartość.
2. (0pkt) Pokaż, że *Quicksort* działa w czasie  $\Theta(n^2)$ , gdy tablica  $A$  jest uporządkowana niemalejąco.
3. (0pkt) Załóżmy, że na każdym poziomie rekursji procedury *Quicksort* procedura *partition* dzieli daną tablicę na dwie podtablice w proporcji  $1 - \alpha$  do  $\alpha$ , gdzie  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  jest stałą. Pokaż, że minimalna głębokość liścia w drzewie rekursji wynosi około  $-\frac{\log n}{\log \alpha}$  a maksymalna głębokość liścia wynosi około  $-\frac{\log n}{\log(1-\alpha)}$ .
4. (1pkt) Opracuj wersję algorytmu *Quicksort*, która będzie efektywnie działać na ciągach zawierających wielokrotne powtórzenia kluczy.
5. (2pkt) Opracuj wersję algorytmu *Mergesort*, która działa w miejscu.
6. (2pkt) Pokaż w jaki sposób można zaimplementować kolejkę priorytetową tak, by operacje na niej wykonywane były w czasie  $O(\log \log m)$ , gdzie  $m$  jest mocą uniwersum, z którego pochodzą klucze.
7. (2pkt) Niech  $A = a_1, a_2, \dots, a_n$  będzie ciągiem elementów oraz niech  $p$  i  $q$  będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Rozważmy  $p$ -podciągi ciągu  $A$ , tj. podciągi utworzone przez wybranie co  $p$ -tego elementu. Posortujmy osobno każdy z tych podciągów. Powtórzmy to postępowanie dla wszystkich  $q$ -podciągów. Udowodnij, że po tym wszystkie  $p$ -podciągi pozostaną posortowane.
8. (2pkt)  $n$ -elementowym ciągiem o jednym zaburzeniu nazywamy dowolny ciąg, który może być otrzymany z ciągu  $\{1, 2, \dots, n\}$  poprzez wykonanie jednej transpozycji. Załóżmy, że algorytm *InsertSort* będzie uruchamiany jedynie na ciągach o jednym zaburzeniu. Zbadaj średnią złożoność algorytmu przy założeniu, że dla każdego  $n$ , wszystkie takie ciągi  $n$ -elementowe są jednakowo prawdopodobne.
9. (1pkt) (Poprawność procedury *Partition*). Rozważ następującą procedurę:

```

Partition(A, p, r)
x ← A[p]
i ← p - 1
j ← r + 1
while true do
  repeat j --
    until A[j] ≤ x
  repeat i ++
    until A[i] ≥ x
  if i < j
    then zamień A[i] ↔ A[j]
    else return j
    
```

Udowodnij co następuje

- (a) Indeksy  $i$  oraz  $j$  nigdy nie wskazują na element  $A$  poza przedziałem  $[p..r]$ .
  - (b) Po zakończeniu *Partition* indeks  $j$  nie jest równy  $r$  (tak więc podział jest nietrywialny).
  - (c) Po zakończeniu *Partition* każdy element  $A[p..j]$  jest mniejszy lub równy od dowolnego elementu  $A[j + 1, r]$ .
10. (1pkt) Ułóż algorytm sortujący ciąg  $n$  liczb całkowitych w czasie  $O(n)$  i pamięci  $O(n)$ . Przyjmij, że liczby są z zakresu **long long**.

11. (2pkt) *Seria* w ciągu nazwiemy dowolny niemalejący podciąg kolejnych jego elementów. *Seria* jest *maksymalna*, jeśli nie można jej rozszerzyć o kolejne elementy. Załóżmy, że algorytm *InsertSort* uruchamiany będzie jedynie na permutacjach zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , które można rozbić na co najwyżej dwie serie maksymalne. Zbadaj średnią złożoność algorytmu przy założeniu, że dla każdego  $n$ , wszystkie takie permutacje  $n$ -elementowe są jednakowo prawdopodobne.
12. (2pkt) Rozważmy permutacje liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$ , których wszystkie 2-podciągi i 3-podciągi są uporządkowane.
- (a) Ile jest takich permutacji?
  - (b) Jaka jest maksymalna liczba inwersji w takiej permutacji?
  - (c) Jaka jest łączna liczba inwersji w takich permutacjach?