Lista 6

Zadanie 1

$$\sum_{k=i}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$n2^{n-1}$ – wybieramy przewodniczącego na n sposobów, a następnie podzbiór pozostałych osób będących delegacją na 2^{n-1} sposobów.

$\sum_{k=i}^{n} k\binom{n}{k}$ – dla każdej możliwej liczności delegacji (k) wybieramy k osób na $\binom{n}{k}$ sposobów, a następnie wybieramy przewodniczącego na k sposobów.

Zadanie 3

Niech P_i oznacza zbiór liczb $x \in [1, n]$, takich że $i|x$, a $\Omega = 1, ..., n$.

Liczb z przedziału $[1, n]$ podzielnych przez 2 i 3, ale nie podzielnych przez 5 ani 7 jest:

$|P_2 \cup P_3| - |(P_2 \cap (P_5 \cup P_7)) \cup (P_3 \cap (P_5 \cup P_7))|$

Liczb podzielnnych przez i z przedziału $[1, n]$ jest $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Zatem wszystkich liczb określonych przez zadanie jest:

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot 3}\right\rfloor - \left(\left(\left\lfloor\frac{n}{2\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2\cdot 7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor\right) + \\ \left(\left\lfloor\frac{n}{3\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3\cdot 7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor\frac{n}{2\cdot 3\cdot 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2\cdot 3\cdot 7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor\right)\right)$$

Zadanie 4

Wszystkich permutacji zbioru $A = 1, 2..., n$ jest $n!$.
Niech A_i zawiera wszystkie permutacje takie, że i-ta liczba znajduje się na i-tej pozycji. $|A_i| = (n-1)!$

Liczba permutacji takich, że i-ta liczba nie znajduje się na i-tej pozycji dla $k < n$ to $|A| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k|$

Liczba permutacji takich, że na k pozycjach znajdują się i-te liczby to $(n-k)! = |\bigcap_{i=1}^{k} A_i|$

Zatem z zasady włączeń i wyłączeń mamy:

$$|A| - |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| =$$

$$|A| - \Big(\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + ... (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k| \Big) =$$

$$|A| - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \Big(\sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_i \leq n} |A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_i}| \Big) =$$

$$n! - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (n-i)!$$

Zadanie 6

Wszystkich sposobów rozmieszczenia n przedmiotów w 5 komodach, gdzie każda ma 4 szuflady jest 20^n. Niech A_i zawiera wszystkie możliwe rozłożenia n przedmiotów tak, że i-ta komoda jest pusta (czyli puste są 4 szuflady).

$|A_i| = (20-4)^n$
$|A_i \cap A_j| = (20-8)^n$
$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (20-12)^n$
...
$|A_1 \cap ... \cap A_s| = (20 - 4 \cdot s)^n$

Stosując zasadę włączeń i wyłączeń liczba sposóbów rozmieszczenia n przedmiotów w 5 4-szyfladowych komodach, gdzie żadna komoda nie jest pusta wynosi:

$$20^n - \binom{5}{1}(20-4)^n + \binom{5}{2}(20-8)^n - \binom{5}{3}(20-12)^n + \binom{5}{4}(20-16)^n$$

Zadanie 7

Niech P zbiór wszystkich permutacji liter a,b,c, P_A, P_B, P_C to zbiory zawierające permutacje elementów a,b,c, takie, że kolejno a, b, c tworzą w nich jeden blok, zbiory P_{AB}, P_{BC}, P_{AC} zawierają permutacje takie, że odpowiednio a i b, b i c, a i c tworzą bloki, a zbiór P_{ABC} zawiera permutacje, w których każda z liter tworzy blok.

$$|P| = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!}$$

$$|P_A| = \frac{(1+\gamma+\beta)}{\gamma! \cdot \beta!}$$

$$|P_B| = \frac{(1+\gamma+\alpha)}{\gamma! \cdot \alpha!}$$

$$|P_C| = \frac{(1+\alpha+\beta)}{\alpha! \cdot \beta!}$$

$$|P_{AB}| = \frac{(1+\gamma+1)}{\gamma!}$$

$$|P_{BC}| = \frac{(1+\alpha+1)}{\alpha!}$$

$$|P_{AC}| = \frac{(1+\beta+1)}{\beta!}$$

$$|P_{ABC}| = 3!$$

Wtedy liczba wszystkich permutacji, w których żadne z liter nie stanowią jednego bloku wynosi:

$|P| - |P_A| - |P_B| - |P_C| + |P_{AB}| + |P_{BC}| + |P_{AC}| - |P_{ABC}|$

Zadanie 14

G - grupa symetrii dwunastościanu foremnego.

Niech x leży na środku jednej ze ścian. Wtedy $|G| = |G_x||O_x|$, gdzie orbita x – $|O_x| = 12$ (jest 12 ścian, na które może przejść x), a stabilizator x – $|G_x| = 10$ (5 obrotów i 5 osi symetrii)
$|G| = 12 \cdot 10 = 120$
Zatem rząd grupy symetrii dwunastościanu foremnego wynosi 120.

tags: `mdm`