

Zadanie 7 Lista 4

Wiktorja

Niech X będzie ciągłą zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0; 1]$.

Zauważmy, że $Y \in [0, 1]$.

Niech $G(y) = \inf\{x : F_X(x) \geq y\}$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F_X(X) < y) = P(G(F_X(X)) < G(y)) \stackrel{(*)}{=} \\ &P(X < G(y)) = F_X(G(y)) = y \end{aligned}$$

(*) Zauważmy, że nie wiemy, czy F_X jest rosnąca. Może istnieć więc kilka zdarzeń, dla których dystrybuanta się nie zmienia. Oznacza to, że istnieje zdarzenie(a), których prawdopodobieństwo wystąpienia jest zerowe. Stąd możemy wziąć najmniejsze takie zdarzenie, w których dystrybuanta przyjmuje stałą wartość.

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = y' = 1 = \frac{1}{1-0}$$

Zatem $Y \sim U[0; 1]$.