Zadanie 6

Wiktoria

(a) Dane są gęstości $\{f_i\}_{i=1}^n$ oraz ciąg skalarów $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ takich, że $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geqslant 0$. Wykazać, że $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

Aby $f(x)$ mogła być gęstością zmiennej losowej musi zachodzić:

1° $f(x) \geqslant 0$

Wiemy, że $f_i(x) \geqslant 0$ (bo są to gęstości) oraz $\alpha_i \geqslant 0$.

Stąd dla każdego $\alpha_i f_i(x) \geqslant 0$, zatem $\sum_{i=1}^n \alpha_i \geqslant 0$.

2° $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

$$\int_R f(x)\,dx = \int_R \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)\,dx =$$
$$\int_R \alpha_1 f_1(x)\,dx + \int_R \alpha_2 f_2(x)\,dx + ... + \int_R \alpha_n f_n(x)\,dx =$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$$

Stąd $f(x)$ jest gęstością dla jakiejś zmiennej losowej.

□

(b) Niezależne zmienne Y_1, Y_2 mają rozkład jednostajny na $[0,1]$.

Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z = \frac{Y_1+Y_2}{2}$.

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2) = 1$$

$(Y_1, Y_2) \to (Z, T)$, gdzie $T = Y_2$. Zatem $Y_1 = 2Z - Y_2, Y_2 = T$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z} & \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z} & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$g(z,t) = f(y_1(z,t), y_2(z,t)) \cdot |J| = 2$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant y_1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y_2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leqslant 2z - t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z - 1 \leqslant t \leqslant 2z \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Widzimy, że $z \in [0,1]$. Przedział całkowania zmiennej t to $[\max\{0, 2z-1\}, \min\{2z, 1\}]$. Dla $z \in [0, \frac{1}{2}]$ mamy $t \in [0, 2z]$, a dla $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ mamy $t \in [2z-1, 1]$.

Policzmy całkę nieoznaczoną:

$$\int g(z,t)\, dt = \int 2\, dt = 2t$$

Rozkład zmiennej Z to jeden z rozkładów brzegowych dwuwymiarowej zmiennej (Z,T). Mamy:

$$g_1(z) = \begin{cases} [2t]_{t=0}^{2z} & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ [2t]_{t=2z-1}^{1} & z \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} 4z & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4 - 4z & z \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Możemy sprawdzić także, czy na pewno wyliczyliśmy gęstość:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 4z\, dz + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4 - 4z\, dz =$$
$$4[\frac{z^2}{2}]_{z=0}^{\frac{1}{2}} + 4[z]_{z=\frac{1}{2}}^{1} - 4[\frac{z^2}{2}]_{z=\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1$$

□