Lista 8

Zadanie 1

Oblicz sumę: $\sum 2^{-k}$ dla $k \in \mathbb{N}$ i $2, 3, 5, 7$ nie dzieli k.

Niech $n \in \mathbb{N}$.
Korzystamy z zasady włączeń i wyłączeń:

$$\sum 2^{-k} = \sum 2^{-n} - \sum 2^{-2n} - \sum 2^{-3n} - \sum 2^{-5n} - \sum 2^{-7n}$$

$$+\sum 2^{-2\cdot3n} + \sum 2^{-2\cdot5n} + \sum 2^{-2\cdot7n} + \sum 2^{-3\cdot5n} + \sum 2^{-3\cdot7n} + \sum 2^{-5\cdot7n}$$

$$-\sum 2^{-2\cdot3\cdot5n} - \sum 2^{-2\cdot3\cdot7n} - \sum 2^{-2\cdot5\cdot7n} - \sum 2^{-3\cdot5\cdot7n}$$

$$+\sum 2^{-2\cdot3\cdot5\cdot7n}$$

$$\sum 2^{-k} = \sum (2^{-1})^n - \sum (2^{-2})^n - \sum (2^{-3})^n - \sum (2^{-5})^n - \sum (2^{-7})^n$$

$$+\sum (2^{-2\cdot3})^n + \sum (2^{-2\cdot5})^n + \sum (2^{-2\cdot7})^n + \sum (2^{-3\cdot5})^n + \sum (2^{-3\cdot7})^n + \sum (2^{-5\cdot7})^n$$

$$-\sum (2^{-2\cdot3\cdot5})^n - \sum (2^{-2\cdot3\cdot7})^n - \sum (2^{-2\cdot5\cdot7})^n - \sum (2^{-3\cdot5\cdot7})^n$$

$$+(\sum 2^{-2\cdot3\cdot5\cdot7})^n$$

Korzystamy ze wzoru na nieskończoną sumę ciągu geometrycznego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-m})^n = \frac{1}{1-2^{-m}} = \frac{2^m}{2^m-1}$$

$$\sum 2^{-k} = 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{32}{31} - \frac{128}{127}$$

$$+\frac{64}{63} + \frac{1024}{1023} + \frac{2^{14}}{2^{14}-1} + \frac{2^{15}}{2^{15}-1} + \frac{2^{21}}{2^{21}-1} + \frac{2^{35}}{2^{35}-1}$$

$$-\frac{2^{30}}{2^{30}-1} - \frac{2^{42}}{2^{42}-1} - \frac{2^{70}}{2^{70}-1} - \frac{2^{105}}{2^{105}-1}$$

$$+\frac{2^{210}}{2^{210}-1}$$

$$\sum 2^{-k} \approx \frac{1}{2}$$

Zadanie 4

$$
\begin{gathered}
((1+x)^a)' = a(1+x)^{a-1} \\
((1+x)^a)'' = a(a-1)(1+x)^{a-2} \\
\dots \\
((1+x)^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}
\end{gathered}
$$

Rozwińmy funkcję w punkcie $x = 1$:

$$
\begin{gathered}
(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{(x+1-1)^k}{k!}f^{(k)}(1)\Big) = \\
\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{x^k}{k!}a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)\Big) = \\
\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{x^k}{k!}a^{\underline{k}}\Big)
\end{gathered}
$$

Co należało pokazać.

Zadanie 5

$(a) a_0 = a_1 = a_2 = 1$

$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$

$$
\begin{gathered}
A(x) = 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3}x^{n+3} = \\
1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \\
\frac{1}{1-x} + x(A(x) - a_0 - a_1 x) + x^2(A(x) - a_0) + x^3 A(x) = \\
\frac{1}{1-x} + xA(x) - a_0 x - a_1 x^2 + x^2 A(x) - a_0 x^2 + x^3 A(x) \\
A(x)(1 - x - x^2 - x^3) = \frac{1}{1-x} - x - 2x^2 \\
A(x) = \frac{1 - x + x^2 - 2x^2 + 2x^3}{(1-x)(1-x-x^2-x^3)} = \\
\frac{1 - x - x^2 - 2x^3}{(1-x)(1-x-x^2-x^3)}
\end{gathered}
$$

$(b) a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \frac{1}{n+1}$

$$
A(x) = 0 + x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} =
$$

$$x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2} =$$
$$x + x(A(x) - a_0) + x^2 A(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$
$$x + xA(x) + x^2 A(x) - x \ln(1-x)$$
$$A(x)(1 - x - x^2) = x(1 - \ln(1-x)) A(x) = \frac{x(1 - \ln(1-x))}{1 - x - x^2}$$

$(c) a_0 = 1$
$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$

$$A(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n+1} a_{n-k} \frac{1}{k!} \Big) x^{n+1} \overset{(1)}{=}$$
$$1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + xA(x) \cdot e^x$$
$$A(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

(1) Działania na funkcjach tworzących (mnożenie):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{gdzie } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Zadanie 11

(a) Funkcja tworząca dla liczby podziałów n, gdy ma składniki parzyste.

$$P_a(x) = \sum_{k_2, k_4, k_6} x^{2k_2 + 4k_4 + 6k_6 + \dots} = \Big(\sum_{k_2=0}^{\infty} x^{2k_2} \Big) \Big(\sum_{k_4=0}^{\infty} x^{4k_4} \Big) \dots =$$
$$\frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^4} \dots = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i}}$$

(b) Funkcja tworząca dla liczby podziałów n, gdy ma składniki mniejsze od m.

$$P_b(x) = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$$

(c) Funkcja tworząca dla liczby podziałów n, gdy ma różne składniki nieparzyste.

$$P_c(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + x^{2i+1})$$

(d) Funkcja tworząca dla liczby podziałów n, na różne potęgi dwójki.

$$P_d(x) = \prod_{i=0}^{\infty}(1 + x^{2^i})$$

Zadanie 12

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}$$
$$R(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$$

$$R(x)P(x^2) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2i}} =$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)\frac{1}{(1 - x^i)(1 + x^i)} =$$
$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i} = P(x)$$

Zadanie 13

Zauważmy, że permutacja będzie inwolucją wtedy, gdy będzie składać się z cykli jedno- i dwu-elementowych.

Przykład:

KaTeX parse error: Unknown column alignment: 1 at position 16: \begin{array} 1i̲ \\ \sigma(i) …

Dla cyklu jednoelementowego:

$$\sigma(\sigma(5)) = \sigma(5) = 5$$

Dla cyklów dwuelementowych mamy:

$$\sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) = 1$$
$$\sigma(\sigma(3)) = \sigma(4) = 3$$

Otrzymujemy zatem identyczność.

Zatem a_n będzie oznaczał liczbę permutacji n-elementowych, które składają się z cykli jedno- lub dwu- elementowych.

Dodając $n + 1$-szy element do inwolucji może on przechodzić sam na siebie – i takich inwolucji będzie a_n. Wpp, możemy połączyć go w cykl z jakimkolwiek poprzednim elementem, a z

pozostałych $n-1$ elementów uwtorzyć inwolucję.
Możemy więc zapisać zależność rekurencyjną:

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$$

$$A'(x) = \Big(1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big)' =$$
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + na_{n-1}) \frac{x^n}{n!} =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1} \frac{x^n}{n!} =$$

$$1 + A(x) - a_0 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$A(x) + xA(x)$$

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = 1 + x$$

$$(\ln A(x))' = 1 + x$$

$$\ln A(x) = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$A(x) = e^{x + \frac{x^2}{2} + C}$$

Ale mamy

$$A(0) = a_0 = 1 = e^C \implies C = 0$$

Zatem

$$A(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

tags: `mdm`