Lista 2

Zadeklarowane zadania:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓				✓	✓

Zadanie 1

Wykazać $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$, gdzie $a \in \mathbb{IQ}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor n - an \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor n + (-an) \rfloor \stackrel{1}{=} \lfloor an \rfloor + n + \lfloor -an \rfloor =$$

$$\lfloor an \rfloor + n - \lceil an \rceil \stackrel{2}{=} n - 1$$

1. $n \in \mathbb{N}$, stąd $\lfloor n + (-an) \rfloor = n + \lfloor -an \rfloor$
2. $an \in \mathbb{IQ}$, zatem $\lfloor an \rfloor - \lceil an \rceil = -1$

Analogiczna równość dla powały:

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = n+1$$

Dowód:

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = \lceil an \rceil + n + \lceil -an \rceil = \lceil an \rceil + n - \lfloor an \rfloor = n+1$$

Zadanie 2

Obliczyć:

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{m} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x+m-1}{m} \right\rfloor$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $m \in \mathbb{N}$.

Niech $x = dm + r$, gdzie $d \in \mathbb{N}, r \in [0, m)$.

Mamy wtedy:

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{dm+r+i}{m} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m-1} d + \left\lfloor \frac{r+i}{m} \right\rfloor$$

Wiemy, że $r + i \in [0, 2m - 1)$, zatem $\lfloor \frac{r+i}{m} \rfloor \in \{0, 1\}$

$$a_i = \begin{cases} d, & r + i < m \\ d + 1, & r + i \geq m \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i = dm + \sum_{\lceil m-r \rceil}^{m-1} 1 = dm + \sum_{m-\lfloor r \rfloor}^{m-1} 1 = dm + \lfloor r \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Zadanie 3

a) $a_n = na_{n-2}$
Chcąc policzyć $a_0 \ i \ a_1$ z zależności rekurencyjnej musielibyśmy odwoływać się do nieistniejących wyrazów ciągu. Dla policzenia a_2 wystarczy a_0, a dla a_3 potrzeba a_1.
Potrzebne są zatem tylko **2** warunki początkowe.

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$
Chcąc policzyć $a_0, \ a_1, \ a_2$ z zależności rekurencyjnej musielibyśmy odwoływać się do nieistniejących wyrazów ciągu. Dla a_3 wystarczą nam $a_0, \ a_2$, a dla a_4 – a_2, a_3.
Stąd potrzebujemy **3** warunki początkowe.

c) $a_n = 2a_{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} + n$
Chcąc policzyć a_0 mamy $a_0 = 2a_0 + 0$, czyli $a_0 = 0$.
Potrzebujemy zatem **0** warunków początkowych.

Zadanie 4

Policzyć zależności rekurencyjne:

- a) $fn = fn - 1 + 3^n$ dla $n > 1 \ i \ f_1 = 3$

$$f_n = f_{n-1} + 3^n = f_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = f_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n =$$

$$3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \sum_{i=1}^{n} 3^i$$

- b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1 \ i \ h_1 = 1$

$$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n = h_{n-2} + (-1)^n(n-1) + (-1)^{n+1}n =$$

$$h_{n-3} + (-1)^{n-1}(n-2) + (-1)^n(n-1) + (-1)^{n+1}n =$$

$$(-1)^2 1 + (-1)^3 2 + \ldots + (-1)^{n-1}(n-2) + (-1)^n(n-1) + (-1)^{n+1}n =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i$$

- c) $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$ dla $n > 2\ i\ l_1 = l_2 = 2$

$$l_n = l_{n-1}l_{n-2} = l_{n-2}l_{n-3}l_{n-2} = (l_{n-2})^2 l_{n-3} = (l_{n-3}l_{n-4})^2 l_{n-3} =$$
$$(l_{n-3})^3(l_{n-4})^2 = (l_{n-4})^5(l_{n-5})^3 = (l_{n-5})^8(l_{n-6})^5 = \ldots =$$
$$(l_{n-(n-1)})^{F_{n-2}}(l_{n-(n-2)})^{F_{n-1}} = 2^{F_{n-2}}2^{F_{n-1}} = 2^{F_n}$$

Zadanie 8

Rozwiązać zależność rekurencyjną:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1+a_{n-1}}{a_{n-2}} \\ a_0 = \alpha \\ a_1 = \beta \end{cases}$$

Policzmy kilka początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \beta \\ a_2 = \frac{1+\beta}{\alpha} \\ a_3 = \frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha\beta} \\ a_4 = \frac{1+\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{(1+\beta)\beta} = \frac{\alpha(\beta+1)+(\beta+1)}{(1+\beta)\beta} = \frac{\alpha+1}{\beta} \\ a_5 = \frac{1+\frac{\alpha+1}{\beta}}{\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha\beta}} = \frac{\alpha+\beta+1}{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha}} = \alpha \\ a_6 = \frac{1+\alpha}{\frac{\alpha+1}{\beta}} = \beta \end{cases}$$

Zauważmy, że wartości odpowiednich wyrazów ciągu będą się powtarzać. Zależność rekurencyjna wymaga 2 ostatnich elementów ciągu, ponieważ a_0, a_1 odpowiadają a_5, a_6, stąd a_7 wyliczymy do tej samej wartości co a_2 i dalej analogicznie.

Otrzymujemy zatem wzór:
(Niech % oznacza działanie modulo).

$$a_n = \begin{cases} \alpha, & n\%5 = 0 \\ \beta & n\%5 = 1 \\ \frac{1+\beta}{\alpha}, & n\%5 = 2 \\ \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha\beta}, & n\%5 = 3 \\ \frac{\alpha+1}{\beta}, & n\%5 = 4 \end{cases}$$

Aby ciąg a_n był określony dla wszystkich n, żaden jego wyraz nie może być równy 0, zatem:

- $\alpha \neq 0$
- $\beta \neq 0$
- $\frac{1+\beta}{\alpha} \neq 0 \implies \beta \neq -1$
- $\frac{\alpha+1}{\beta} \neq 0 \implies \alpha \neq -1$
- $\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha\beta} \neq 0 \implies \alpha + \beta \neq -1$

Zadanie 9

Rozwiązać zależności rekurencyjne:

a)
$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1 \end{cases}$

Teza: $f(n) = 2n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Dowód indukcyjny:
1°

- $n = 1$

$$f(1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1 \checkmark$$

- $n = 2$

$$f(2) \stackrel{zal.rek.}{=} f(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 2 - 1 \checkmark$$

2°
Załóżmy, że dla każdego $k < n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(k) = 2k - 1$. Pokażmy, że zachodzi $f(n) = 2n - 1$.

- Dla n parzystego mamy:

$$f(n) \stackrel{zal.rek.}{=} f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1 \stackrel{n\ parzyste}{=} f(\frac{n}{2}) + f(\frac{n}{2}) + 1 \stackrel{zał.ind.}{=}$$

$$n - 1 + n - 1 + 1 = 2n - 1$$

- Dla n nieparzystego mamy:

$$f(n) \stackrel{zal.rek.}{=} f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1 \stackrel{n\ nieparzyste}{=} f(\frac{n-1}{2}) + f(\frac{n+1}{2}) + 1 \stackrel{zał.ind.}{=}$$

$$(n - 1 - 1) + (n + 1 - 1) + 1 = 2n - 1$$

Co należało pokazać.

b)

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(n) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor log_2 n \rfloor \end{cases}$$

Teza: $g(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor log_2 n \rfloor} k = \frac{(1+\lfloor log_2 n \rfloor)\lfloor log_2 n \rfloor}{2}$

Dowód indukcyjny:

1°

- $n = 1$

$$g(1) \overset{zal.rek.}{=} g(0) + \lfloor log_2 1 \rfloor = 0 = \frac{(1+\lfloor log_2 1 \rfloor)\lfloor log_2 1 \rfloor}{2} \checkmark$$

2°

Załóżmy, że dla każdego $k < n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi $\frac{(1+\lfloor log_2 k \rfloor)\lfloor log_2 k \rfloor}{2}$. Pokażmy, że zachodzi $g(n) = \frac{(1+\lfloor log_2 n \rfloor)\lfloor log_2 n \rfloor}{2}$.

- Dla n parzystego mamy:

$$g(n) \overset{zal.rek.}{=} g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor log_2 n \rfloor = g(\frac{n}{2}) + \lfloor log_2 n \rfloor \overset{zał.ind.}{=}$$

$$\frac{(1+\lfloor log_2 \frac{n}{2} \rfloor)\lfloor log_2 \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \lfloor log_2 n \rfloor =$$

$$\frac{(1+\lfloor log_2 n - 1 \rfloor)\lfloor log_2 n - 1 \rfloor}{2} + \lfloor log_2 n \rfloor =$$

$$\frac{(\lfloor log_2 n \rfloor)^2 - \lfloor log_2 n \rfloor + 2\lfloor log_2 n \rfloor}{2} =$$

$$\frac{(1+\lfloor log_2 n \rfloor)\lfloor log_2 n \rfloor}{2}$$

- Dla n nieparzystego mamy:

$$g(n) \overset{zal.rek.}{=} g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor log_2 n \rfloor = g(\frac{n-1}{2}) + \lfloor log_2 n \rfloor \overset{zał.ind.}{=}$$

$$\frac{(1+\lfloor log_2 \frac{n-1}{2} \rfloor)\lfloor log_2 \frac{n-1}{2} \rfloor}{2} + \lfloor log_2 n \rfloor =$$

$$\frac{(\lfloor log_2 (n-1) \rfloor)^2 - \lfloor log_2 (n-1) \rfloor + 2\lfloor log_2 n \rfloor}{2} =$$

Zauważmy, że dla nieparzystych n zachodzi:

$$\lfloor log_2 (n-1) \rfloor = \lfloor log_2 n \rfloor$$

Uzasadnienie:

Niech $\lfloor log_2 n \rfloor = l, l, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ i n nieparzyste.

Wiemy, że $log_2 n \neq l$ (n jest nieparzyste, więc $n \neq 2^l$).

Ponieważ $\lfloor log_2 n \rfloor = l$ i $n \neq 2^l$ to $2^l < n < 2^{l+1}$.

Czyli $2^l - 1 < n - 1 < 2^{l+1} - 1 \iff 2^l \leq n - 1 < 2^{l+1}$.

Po nałożeniu logarytmu otrzymujemy $l \leq log_2(n-1) < l + 1$.

Z definicji podłogi: $\lfloor log_2(n-1) \rfloor = l = \lfloor log_2 n \rfloor$.

Zatem

$$g(n) = \frac{(1 + \lfloor log_2 n \rfloor)\lfloor log_2 n \rfloor}{2}$$

Co należało pokazać.