Zadanie 8

Wiktoria

X jest zmienną losową taką, że $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Obliczyć k-ty moment zwykły zmiennej X oraz $\mathrm{Var}(X)$.

Weźmy $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$, wiemy że $Z \sim N(0,1)$. Szukamy k-tego momentu X, czyli $E[X^k]$.

$$E[X^k] = E[e^{kY}] = E[e^{k(\sigma Z+\mu)}] = E[e^{k\sigma Z + k\mu + \frac{(k\sigma)^2}{2} - \frac{(k\sigma)^2}{2}}] =$$
$$e^{k\mu + \frac{(k\sigma)^2}{2}} E[e^{k\sigma Z - \frac{(k\sigma)^2}{2}}]$$

Policzmy $E[e^{k\sigma Z - \frac{(k\sigma)^2}{2}}]$:

$$E[e^{k\sigma Z - \frac{(k\sigma)^2}{2}}] = e^{-\frac{(k\sigma)^2}{2}} E[e^{k\sigma Z}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2} + (k\sigma)z - \frac{(k\sigma)^2}{2}} \, dz =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-k\sigma)^2}{2}} \, dz = 1$$

Zatem $E[X^k] = e^{k\mu + \frac{(k\sigma)^2}{2}}$.

Teraz z łatwością możemy wyznaczyć $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

$$\mathrm{Var}(X) = e^{2\mu + \frac{(2\sigma)^2}{2}} - (e^{\mu + \frac{(\sigma)^2}{2}})^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$