Zadanie 1 Lista 4

Wiktoria

Dla funkcji $f(x,y) = C(x+y)exp\{-(x+y)\}$, gdzie $x > 0, y > 0$.

(a) Wyznaczyć stałą C taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej (X,Y).

Wiemy, że musi zachodzić: $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = 1$. Zatem

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty C(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy = 1$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty C(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy = C\int_0^\infty e^{-y}\left(\int_0^\infty xe^{-x}\,dx + \int_0^\infty ye^{-x}dx\right)dy =$$
$$C\int_0^\infty e^{-y}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx - y\left[e^{-x}\right]_0^\infty\right)dy =$$
$$C\int_0^\infty e^{-y}\left(1+y\right)\,dy = C\left(\int_0^\infty e^{-y}\,dy + \int_0^\infty ye^{-y}\,dy\right) =$$
$$C\left(\left[-e^{-y}\right]_0^\infty + \left[-ye^{-y}\right]_0^\infty + \left[-e^{-y}\right]_0^\infty\right) = C(1+0+1) = 2C = 1$$
$$C = \frac{1}{2}$$

(b) Sprawdzić, czy zmienne losowe X, Y są niezależne.

Zmienne losowe X, Y są niezależne $\iff \forall x, y > 0\ f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Policzmy zatem gęstości brzegowe.

$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x+y)e^{-(x+y)}\,dy =$$
$$\frac{1}{2}\left(xe^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\,dy + e^{-x}\int_0^\infty ye^{-y}\,dy\right) =$$
$$\frac{1}{2}(xe^{-x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)$$

$$
\begin{gathered}
f_2(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x+y)e^{-(x+y)}\,dx = \\
\frac{1}{2}\left(e^{-y}\int_0^\infty xe^{-x}\,dx + ye^{-y}\int_0^\infty e^{-x}\,dy\right) = \\
\frac{1}{2}\left(e^{-y} + ye^{-y}\right) = \frac{1}{2}e^{-y}(y+1)
\end{gathered}
$$

Sprawdźmy, czy zmienne X, Y są niezależne:

$$
\begin{gathered}
f_1(x)\cdot f_2(y) = \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{-y}(y+1) = \\
\frac{1}{4}e^{-(x+y)}(xy+x+y+1)
\end{gathered}
$$

Zmienne nie są niezależne. Kontrprzykład dla np. $x=1, y=1$.

$$
f_1(1)\cdot f_2(1) = e^{-2} \neq 4e^{-2} = f(1,1)
$$

(c) Obliczyć momenty m_{10}, m_{01}.

$$
\begin{gathered}
m_{10} = \int_0^\infty\int_0^\infty x^1y^0 f(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\int_0^\infty (x+y)e^{-y}\,dy\,dx = \\
\frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\left(x\int_0^\infty e^{-y}\,dy + \int_0^\infty ye^{-y}\,dy\right)\,dx = \\
\frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}\,(x+1)\,dx = \\
\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx + \int_0^\infty xe^{-x}\,dx\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
m_{01} = \int_0^\infty\int_0^\infty x^0y^1 f(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\int_0^\infty y^1(x+y)e^{-y}\,dy\,dx = \\
\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\left(x\int_0^\infty ye^{-y}\,dy + int_0^\infty y^2e^{-y}\,dy\right)\,dx = \\
\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}(x+2)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty xe^{-x}\,dx + 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}
\end{gathered}
$$