Zadanie 11

Wiktoria

Wykazać, że: $V(Y_1) = \frac{a^2}{36}, V(Y_2) = \frac{a^2}{20}$.

$Y_1 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, Y_2 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$

Zmienne $X_1, X_2, X_3 \sim U[0,a]$, możemy policzyć ich wariancję:

$$V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = \int_0^a x^2 \frac{1}{a}\, dx - (\int_0^a \frac{1}{a} x\, dx)^2 =$$
$$\frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^a - \frac{1}{a^2}\Big(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^a\Big)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

Teraz, korzystając ze znanych własności wariancji, liczymy $V(Y_1)$:

$$V(Y_1) = V\Big(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\Big) = \frac{V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)}{9} = \frac{a^2}{36}$$

$\square$

Do policzenia $V(Y_2)$ wystarczy, że policzymy $E(Y_2^2)$, resztę już znamy.

$$V(Y_2) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^a x^2 f_{(2)}(x)\, dx - \frac{a^2}{4} =$$
$$\int_0^a x^2 (6 \cdot F(X) \cdot (1 - F(X)) \cdot f(x))\, dx - \frac{a^2}{4} =$$
$$6\frac{1}{a}\int_0^a x^2 \cdot \frac{x}{a} \cdot (1 - \frac{x}{a})\, dx - \frac{a^2}{4} =$$
$$\frac{6}{a^2}\int_0^a x^3 - \frac{x^4}{a}\, dx - \frac{a^2}{4} =$$
$$\frac{6}{a^2}(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{5}) - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2} - \frac{6a^2}{5} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{20}$$

$\square$