Lista 5

Zadanie 3

Pokażmy, że iloczyn k kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} =$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Co należało pokazać.

Zadanie 5

Mając liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokaż, że istnieje i, j, takie że $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielne przez n.

Zdefiniujmy sumy prefiksowe: $A_k = \sum_0^k a_k$.

Mamy zatem $n+1$ sum prefiksowych oraz n reszt z dzielenia przez n. Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że istnieją $A_i, A_j (j > i)$, które dają taką samą resztę przy dzieleniu przez n.

Czyli $A_j \equiv A_i \pmod{n} \iff A_j - A_i \equiv 0 \pmod{n}$.

Skoro $A_j - A_i = a_j + a_{j-1} + \ldots + a_{i+1}$, kończy to dowód.

Zadanie 6

W zbiorze S znajduje się 10 liczb naturalnych. Sumy elementów podzbiorów zbioru S mogą przyjmować wartości $\{0, 1, 2 \ldots 945\}$ (0 – np. zbiór pusty, 945 – gdy zbiór S składa się z $99, 98, \ldots, 90$). Liczba podzbiorów S to $2^{10} = 1024$.

Mając 1024 podzbiory oraz 946 możliwych do uzyskania sum elementów podzbiorów i korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, wnioskujemy, iż muszą istnieć co najmniej dwa podzbiory o takiej samej sumie elementów.

Zadanie 9

Liczba 5 cyfrowych numerów telefonu, w których dokładnie jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz.

Niech A to zbiór wszystkich takich numerów telefonów, a A_i to zbiór telefonów, w których dokładnie jedna cyfra występuje i razy. Wtedy $|A| = |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|$. Przyjmuję, że numery telefonów dopuszczają zera wiodące.

$|A_5| = 10$ (numery telefonów złożone tylko z jednej cyfry)

$|A_4| = 10 \cdot \binom{5}{4} \cdot 9 = 450$ (wybieramy cyfrę, ustawiamy ją na 4 miejscach i dobieramy piątą)

$|A_3| = 10 \cdot \binom{5}{3} \cdot 9 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 = 7200$ (wybieramy cyfrę i ustawiamy ją na 3 miejscach, następnie dobieramy dwie inne cyfry)

$|A_2| = 10 \cdot \binom{5}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 7200 \cdot 7 = 50400$ (wybieramy cyfrę ustawiamy ją na 2 miejscach i dobieramy 3 inne cyfry)

$|A| = 10 + 450 + 7200 + 50400 = 58060$

Czyli jest 58060 takich numerów telefonu.

Liczba 5 cyfrowych numerów telefonu, w których przynajmniej jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz.

Wszstkich 5 cyfrowych numerów telefonów jest 10^5, a takich, których każda cyfra występuje tylko raz jest $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Zatem 5 cyfrowych telefonów, w których przynajmniej jedna cyfra występuje więcej niż jeden raz jest $10^5 - 30240 = 69760$

Zadanie 15

$$a^p \equiv a \pmod p$$

1° $a = 1,\ 1^p \equiv 1 \pmod p$

2° Załóżmy, że $a^p \equiv a \pmod p$.

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k \cdot 1^{p-k}$$

$(*)$ Dla każdego $0 < k < p$ zachodzi $p \Big| \binom{p}{k}$. Mamy:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k \equiv a^0 + a^p \pmod p \equiv a^p + 1 \pmod p$$

$$\overset{zzał.ind.}{\equiv} a + 1 \pmod p$$

Co kończy dowód.

Dowód $(*)$:

Dla $0 < k < p$ mamy:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{(p-(k-1)) \cdot (p-(k-2)) \cdot \ldots \cdot p}{k!}$$

Ponieważ $\binom{p}{k}$ jest liczbą naturalną to $k! \Big| p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-(k-1))$

Skoro p jest liczbą pierwszą, a $k < p$ to k i p są względnie pierwsze.

Zatem $\gcd(p, k!) = 1$.

Musi zatem zachodzić $k! \Big| (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-(k-1))$.

$$\binom{p}{k} = p \frac{(p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-(k-1))}{k!} = pR$$

Gdzie $R \in \mathbb{N}$. Zatem $p \Big| \binom{p}{k}$.

tags: `mdm`