Lista 10

Zadania spisane:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	X	X	X		X					X				

Zadanie 1

Grafy G_1, G_2 wczytane są jako listy krawędzi grafów:

Mamy zatem listę wierzchołków:

$v_0 \rightarrow$
$v_1 \rightarrow$
.
.
.
$v_{n-1} \rightarrow$

Oraz do każdego z wierzchołków podpięta jest lista sąsiadów:

$v_i \rightarrow$		v_4		v_l		$\dots$		v_k

```
Niech V[n] będzie tablicą wypełnioną zerami.
G1[n] - lista list sąsiadów grafu G1.
G2[n] - lista list sąsiadów grafu G2.

Niech G[j][k] - oznacza k-ty element na liście sąsiadów v_j.
Niech idx(G[j][k]) oznacza indeks wierzchołka G[j][k].

Al
Dla i = 0,1,2,...n:
    j = 0
    Dopóki G1[i][j] istnieje:
        V[idx(G1[i][j])] = 1
        j = j + 1
    k = 0
```

```
    Dopóki G2[i][k] istnieje:
        Jeśli V[idx(G2[i][k])] nierówne 1
            Zwróć fałsz
        Wpp.
            V[idx(G2[i][k])] = 0
            j = j-1
        k = k + 1
    Jeśli j nierówne 0
        Zwróć fałsz

Zwróć prawdę
```

Złożoność:

Sprawdzamy wszystkie wierzchołki oraz ich sąsiadów dla obu grafów.

Musimy przeczytać n wierzchołków, a dla każdego z nich sprawdzimy tyle elementów jaki jest stopień wierzchołka, zatem łącznie sprawdzimy: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m$. Ponieważ robimy to dla dwóch grafów to mamy złożoność $2n + 4m = O(n + m)$.

Zadanie 2

$a)$ Graf prosty o ciągu stopni wierzchołków 1,2,2,3,3.

Z lematu o uściskach dłoni mamy:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

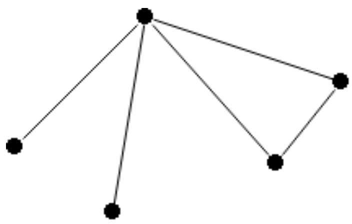
$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11 = 2m$$
$$m = 5,5$$

Ponieważ liczba krawędzi musi być całkowita to taki graf nie istnieje.

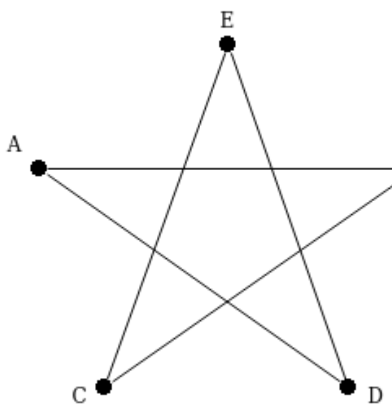
$b)$ Graf prosty o ciągu stopni wierzchołków 1,1,1,3,4.

Z lematu o uściskach dłoni $1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 5 \cdot 2$ nasz graf musiałby mieć 5 krawędzi.

Chcemy narysować graf o 5 krawędziach i wierzchołkiem stopnia 4. Ponieważ graf jest prosty to aby uzyskać wierzchołek 4 stopnia musimy wstawić krawędź z każdym pozostałym wierzchołkiem. Następnie pozostaje nam jedna krawędź aby z jednego z 1 stopniowych wierzchołków utworzyć wierzchołek stopnia 3, a do tego potrzebujemy dokładnie dwóch krawędzi.



$c)$ **Graf prosty o ciągu stopni wierzchołków 2,2,2,2,2.**

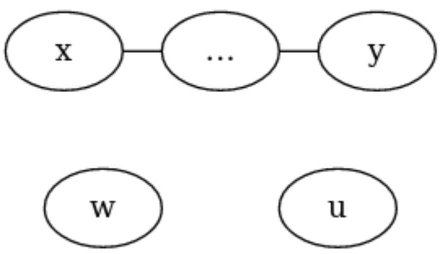


Zadanie 3

$$d(G) = max\{d(x,y) : x, y \in V(G)\}$$

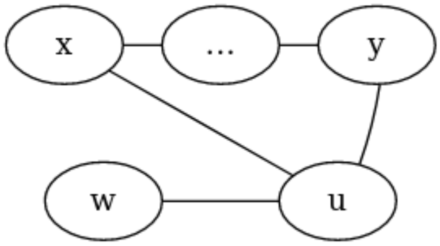
Załóżmy, że $d(G) > 3$. Zatem G ma conajmniej 4 wierzchołki. Niech $x, y \in V(G)$ oraz $d(x,y) = d(G) \geq 4$. Niech d oznacza odległość w G, natomiast $\bar{d}$ odległość w $\bar{G}$. Weźmy dowolne $u, w \in V(G \backslash \{x,y\})$ i rozpatrzmy przypadki.

1° Jeśli $\{u,w\} \notin E(G)$ to wtedy $\{u,w\} \in E(\bar{G})$ i $\bar{d}\ (u,w) = 1$.

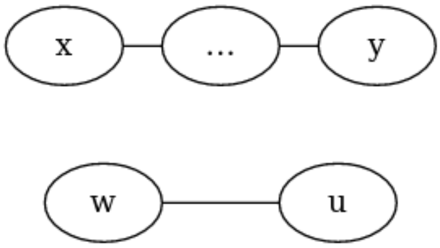


2° Jeśli $\{u,w\} \in E(G)$ to wtedy $\{u,w\} \notin E(\bar{G})$.

2.1° Zauważmy, że nie może zachodzić $\{x,u\}, \{u,y\} \in E(G)$ (analogicznie dla w), ponieważ $d(x,y) \geq 4$.

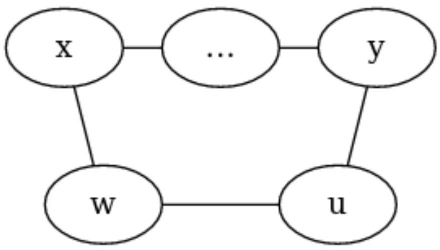


2.2° Jeśli zachodzi $\{u, x\}, \{x, w\}(\mathrm{lub}\{u, y\}, \{y, w\}) \notin E(G)$ to mamy $\bar{d}\ (u, w) = 2$.



2.3° Pozostają przypadki, w których:

- $\{x, u\}, \{w, y\} \in E(G)$ oraz $\{x, w\}, \{u, y\} \notin E(G)$ lub
- $\{x, w\}, \{u, y\} \in E(G)$ oraz $\{x, u\}, \{w, y\} \notin E(G)$



Ale wtedy $d(x, y) = 3$, zatem nie może dość do takiej sytuacji.

Ponieważ rozważyliśmy wszystkie przypadki to mamy $\bar{d}\ (\bar{G}) < 3$ o ile $d(G) > 3$.

Zadanie 4

Załóżmy, że $d(G) = 2$ i $\max\{\deg(v) | v \in V(G)\} = n - 2$.

Weźmy wierzchołek $x \in V(G)$ incydentny do $n - 2$ krawędzi. Mamy zatem $n - 1$ wierzchołków.

Jeśli n-ty wierzchołek – nazwijmy go y – byłby rozłączny to $d(G) = \infty$.

Jeśli dla dowolnego u ($u \neq x$) utworzylibyśmy krawędź $\{u, y\}$ to $d(G) = 4$ (dla $w \neq u, w \neq x$, $d(w, y) = 4$). Analogiczny przypadek zachodzi dla $1, 2 \ldots n - 3$ takich krawędzi.

Jeśli dla każdego u ($u \neq x$) dołożymy krawędź $\{u, y\}$ to nie istnieje takie w jak w powyższym przypadku i średnicą jest $d(x, y) = 3$.

Mamy zatem $n - 2$ krawędzi incydentnych do wierzchołka x oraz $n - 2$ krawędzi incydentnych do y. Stąd liczba krawędzi dla grafu spełniającego te warunki musi wynosić co najmiej $2n - 4$.

Zadanie 5

$$\begin{gathered} d(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\} \\ r(v) = \max\{d(x, v) : x \in V(G)\} \\ r(G) = \min r(v) : v \in V(G) \end{gathered}$$

$a)$ $r(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot r(G)$

1° $r(G) \leq d(G)$ wynika bezpośrednio z definicji – d jest najdłuższą drogą w grafie G, zatem jakakolwiek inna droga w grafie jest od niej mniejsza lub równa.

2° $d(G) \leq 2 \cdot r(G)$

Weźmy dwa wierzchołki $u, v \in V(G)$, takie że $d(u, v) = d(G)$. Niech $x \in V(G)$ będzie wierzchołkiem centralnym. Wtedy $d(u, x) \leq r(G)$ oraz $d(x, v) \leq r(G)$, czyli $d(G) = d(u, x) + d(x, v) \leq 2 \cdot r(G)$.

$b)$ **Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo dwóch sąsiednich.**

Jeśli w drzewie jest jeden wierzchołek – wierzchołkiem centralnym jest ten wierzchołek.

Jeśli w drzewie są dwa wierzchołki – to obydwa są wierzchołkami centralnymi.

Załóżmy, że drzewo o n wierzchołkach ma 1 lub 2 wierzchołki centralne.

Zadanie 6

Niech w drzewie T będą dane wierzchołki a, b, c, d.

Załóżmy, że drogi łączące a z b i c z d nie mają wspólnego wierzchołka. Załóżmy nie wprost, że drogi a z c i b z d są rozłączne.

Wtedy, możemy przejść z a do do wierzchołka b: drogą a – b oraz złączonymi drogami a – c – d – b, ale ponieważ $c - d$ i $a - b$ są rozłączne to musi istnieć cykl, zatem sprzeczność z założeniem, że T to drzewo.

Zadanie 11

Liczba różnych drzew o wierzchołkach $\{1, 2, ..., n\}$ wynosi n^{n-2} (tw. Cayleya)

Weźmy zatem wierzchołki $\{2, ..., n\}$. Wszystkich drzew o takich wierzchołkach jest $(n-1)^{(n-3)}$. Następnie, weźmy wierzchołek o indeksie 1 i spróbujmy dołączyć go do tego drzewa. Możemy połączyć go z każdym z wierzchołków w utworzonym drzewie tworząc nowe odgałęzienie.

Zatem wszystkich takich drzew, że wierzchołek 1 jest liściem jest $(n-1)^{(n-3)} \cdot (n-1) = (n-1)^{(n-2)}$.

Prawdopodobieństwo uzyskania takiego drzewa wynosi: $\frac{(n-1)^{(n-2)}}{n^{(n-2)}} = (\frac{n-1}{n})^{(n-2)}$.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})^{(n-2)} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^{(n-2)} = \frac{1}{e}$$