

# **Algorytmy sterowania optymalnego w nieliniowej regulacji predykcyjnej**

## **Streszczenie**

W rozprawie sformułowano ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją i adaptacją wskaźnika jakości dla systemów opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Powyższy algorytm jest rozszerzeniem klasycznych algorytmów predykcyjnych i umożliwia realizację zadań sterowania czasooptymalnego i docelowego oraz stabilizacji po osiągnięciu celu. Podano szereg przykładów zastosowań algorytmu w układach magnetycznej lewitacji, technologii chemicznej, robotyce i lotach kosmicznych. Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający. Rozdział drugi rozprawy zawiera twierdzenia o stabilności i odporności algorytmu udowodnione przy założeniu, że rozwiązania problemów optymalizacji są rozwiązaniami suboptymalnymi. Ta własność pozwala zredukować nakład obliczeń. Bazując na wynikach rozdziału drugiego, w rozdziałach trzecim i czwartym zaproponowano nowy, quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny, łączący w sobie cechy sterowania czasooptymalnego i stabilizacji. Rozdział 5 zawiera szczegółowe wyniki dotyczące wyznaczania ograniczeń stanu końcowego oraz własności asymptotycznych zaproponowanych algorytmów predykcyjnych. Następnie przeanalizowano możliwości zastosowania stosunkowo nowej metody optymalizacji dynamicznej, jaką jest metoda MSE. Metoda MSE, zaadaptowana do potrzeb sterowania predykcyjnego, okazała się skuteczna. Metoda ta charakteryzuje się dużą szybkością zbieżności w pobliżu rozwiązania, co czyni ją użyteczną w zastosowaniu do algorytmów predykcyjnych, omawianych w niniejszej pracy. Praca kończy się wnioskami i spisem literatury zawierającym 98 pozycji.

## **Optimization Algorithms in Nonlinear Model Predictive Control**

## **Abstract**

This thesis presents a general Receding Horizon Control (RHC) algorithm with approximate optimization and adaptation of cost function for systems described by nonlinear ordinary differential equations. Presented algorithm is an extension of classical NMPC algorithms and allows a realisation of time-optimal and target control tasks and a stabilisation after reaching target. A series of applications of the algorithm were presented, in systems such as: magnetic levitation, chemical technology, robotics and space-flight. The first chapter has an introductory character. The second chapter contains theorems regarding stability and robustness of the algorithm on the assumption, that the optimisation problem solutions are sub-optimal. This property allows the reduction of computational effort. On the base of results of the second chapter in the third and fourth ones a new quasi-time-optimal receding horizon algorithm was introduced, that has properties of both time-optimal control and stabilisation. Chapter 5 contains specific results regarding terminal state constraints determination and asymptotic properties of proposed RHC algorithms. Subsequently, the possibilities of application of relatively new dynamical optimisation method which is the MSE method were analysed. This method, adapted for the needs of model predictive control has given successful results. The method is useful for RHC algorithms in this thesis, because of its strong convergence near the solution. Thesis ends with conclusions and a references list containing 98 positions.

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA**

---

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I ELEKTRONIKI  
KATEDRA AUTOMATYKI**

**ROZPRAWA DOKTORSKA**

**ALGORYTMY STEROWANIA OPTYMALNEGO  
W NIELINIOWEJ REGULACJI PREDYKCYJNEJ**

**MGR INŻ. PIOTR BANIA**

Promotor:  
dr hab. inż. Adam Korytowski

Kraków, 2008

*Podziękowania*

*Dziękuję panu prof. Adamowi Korytowskiemu za udzielenie mi wsparcia oraz za nieustające próby wyzwolenia mnie z pułapki nawykowego, konwencjonalnego myślenia. Dziękuję też mojej żonie za cierpliwość i podtrzymywanie mnie na duchu w trudnych momentach.*

*Piotr Bania*

## Spis treści

<b>Ważniejsze oznaczenia i skróty .....</b>	<b>s. 1</b>
<b>Wstęp oraz tezy pracy .....</b>	<b>2</b>
<b>Rozdział 1. Rozważania wstępne .....</b>	<b>8</b>
1.1 Przykłady wprowadzające .....	8
<b>Rozdział 2. Ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją .....</b>	<b>12</b>
2.1 Podstawowe definicje i twierdzenia .....	12
2.2 Algorytm predykcyjny .....	14
2.3 Stabilność algorytmu predykcyjnego .....	20
2.4 Odporność algorytmu predykcyjnego na zakłócenia i błędy modelowania .....	24
2.5 Rola algorytmu optymalizacji w sterowaniu predykcyjnym i planowaniu trajektorii .....	28
<b>Rozdział 3. Quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny ze zmiennym horyzontem i adaptacją wskaźnika jakości (<i>Quasi Time Optimal Receding Horizon Control, QTO-RHC</i>) .....</b>	<b>29</b>
3.1 Algorytm QTO-RHC .....	30
3.2 Stabilność algorytmu QTO-RHC .....	31
3.3 Odporność algorytmu QTO-RHC .....	36
3.4 Przykłady sterowania systemami nieliniowymi .....	38
<b>Rozdział 4. Quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny dla zadań, w których funkcja <math>L</math> zależy tylko od sterowania .....</b>	<b>89</b>
4.1 Algorytm QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcji .....	89
4.2 Stabilność algorytmu QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcji .....	90
4.3 Odporność algorytmu QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcji .....	95
4.4 Przykłady sterowania systemami nieliniowymi .....	97
<b>Rozdział 5. Wyznaczanie ograniczeń stanu końcowego oraz własności asymptotyczne algorytmu QTO-RHC .....</b>	<b>114</b>
5.1 Ograniczenia stanu końcowego w algorytmie 3.1.1 .....	114
5.2 Ograniczenia stanu końcowego w algorytmie 4.1.1 .....	120
5.3 Właściwości asymptotyczne algorytmu QTO-RHC .....	121
<b>Rozdział 6. Algorytm optymalizacji .....</b>	<b>126</b>
6.1 Wprowadzenie .....	126
6.2 Zadanie sterowania optymalnego .....	128
6.3 Warunki optymalności zasady maksimum .....	130
6.4 Parametryzacja sterowań oraz pochodne wskaźnika jakości względem parametrów sterowania .....	132
6.5 Procedury generacji i redukcji .....	139
6.6 Metody całkowania równań stanu i równań sprzężonych .....	148
6.7 Ogólny algorytm metody MSE .....	150
6.8 Przykłady optymalizacji sterowania .....	154
6.9 Uwagi o implementacji algorytmu MSE .....	159
<b>Rozdział 7. Porównanie algorytmów z czasem dyskretnym z algorytmem QTO-RHC .....</b>	<b>160</b>
7.1 Systemy ciągłe i dyskretnie w czasie .....	160
7.2 Sterowanie predykcyjne systemami dyskretnymi w czasie .....	161
7.3 Uwagi o dyskretyzacji równań różniczkowych .....	162
7.4 Problemy związane z konstrukcją dyskretnej wersji algorytmu QTO-RHC .....	164
7.5 Stabilność systemu ciągłego, sterowanego za pomocą algorytmu predykcyjnego z czasem dyskretnym .....	165
7.6 Zalety i wady algorytmów predykcyjnych z czasem ciągłym i z czasem dyskretnym .....	166
<b>Podsumowanie .....</b>	<b>168</b>
<b>Dodatek A. Twierdzenia pomocnicze .....</b>	<b>170</b>
<b>Dodatek B. Zasada maksimum Pontriagina .....</b>	<b>176</b>
<b>Dodatek C. Efektywność generacji jednowzlowych .....</b>	<b>193</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>203</b>

### **Ważniejsze skróty i oznaczenia**

ZSO – Zadanie Sterowania Optymalnego

RHC – *Receding Horizon Control*

MPC – *Model Predictive Control*

NMPC – *Nonlinear Model Predictive Control*

QTO-RHC – *Quasi Time Optimal Receding Horizon Control*

SGAS – słaba globalna asymptotyczna stabilność algorytmu predykcyjnego

GAS – globalna asymptotyczna stabilność algorytmu predykcyjnego w sensie Lapunowa

$I$  – macierz jednostkowa

$\text{diag}(a)$  – macierz diagonalna, której elementy na przekątnej głównej są określone wektorem  $a$

$\text{col}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – wektor kolumnowy

$H > 0$  – macierz dodatnio określona

$H^\top$  – macierz transponowana do macierzy  $H$

$|x| = \sqrt{x^\top x}$  – norma euklidesowa w  $R^n$

$\langle x, y \rangle_H = x^\top H y$  – iloczyn skalarny w przestrzeni  $R^n$  z macierzą wag  $H = H^\top > 0$

$|x|_H = \sqrt{x^\top H x}$  – norma wektora w  $R^n$  z macierzą wag  $H = H^\top > 0$ ;  $|x| = |x|_I$

$\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)$  – najmniejsza i największa wartość własna macierzy symetrycznej  $H$

rząd  $Q$  – rząd macierzy  $Q$

$N$  – zbiór liczb naturalnych  $\{0, 1, 2, \dots\}$

$R$  – przestrzeń liczb rzeczywistych

$R_0^+ = \{t \in R : t \geq 0\}$  – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych

$PC([0, T], R^m)$  – przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych o wartościach w  $R^m$

$L^p([0, T], R^n)$  – przestrzeń funkcji całkowalnych z  $p$ -tą potegą

$\|u\|_p = \sqrt[p]{\int_0^T |u(t)|^p dt}$  – norma w przestrzeni  $L^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$

$L^\infty([0, T], R^n)$  – przestrzeń funkcji mierzalnych istotnie ograniczonych z normą

$\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, T]} |u(t)|$

$W^{1,\infty}([0, T], R^n)$  – przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych z pierwszą pochodną istotnie ograniczoną

$\nabla_x q(x, y, z) = \left( \frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n} \right)^\top$  – gradient funkcji  $q$  względem zmiennej  $x$

$\nabla_x f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$  – transponowana macierz Jacobiego funkcji  $f : R^n \rightarrow R^m$

$(x)_+ = \begin{cases} x, \text{ gdy } x \geq 0, \\ 0, \text{ gdy } x < 0. \end{cases}$

$\partial\Omega$  – brzeg zbioru  $\Omega$

## **Wstęp oraz tezy pracy**

### **1. Czym jest sterowanie predykcyjne?**

Sterowanie predykcyjne lub też sterowanie z przesuwany horyzontem (MPC – *Model Predictive Control* lub RHC – *Receding Horizon Control*) jest metodą sterowania systemami dynamicznymi, polegającą na cyklicznym rozwiązywaniu zadania sterowania optymalnego (ZSO), z warunkiem początkowym równym aktualnej estymacie stanu obiektu. Początkowa część znalezionego rozwiązania (funkcji sterującej) podawana jest na wejście obiektu, po czym całą procedurę powtarza się dla nowego, aktualnie wyznaczonego stanu obiektu.

Słowo *predykcja* oznacza w kontekście tej pracy przewidywanie przyszłego zachowania układu przy zadanych sterowaniach (decyzjach) oraz przy zadanym stanie początkowym. Warto zapytać, czy i przy jakich założeniach takie przewidywanie jest możliwe. Okazuje się, że dokładne przewidywanie zachowania nieliniowego układu dynamicznego nie jest możliwe w długich okresach czasu. Przyczynami tego stanu rzeczy są zakłócenia oraz wrażliwość rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych na zmiany warunków początkowych, zwana chaosem deterministycznym. Występowanie chaosu w nieliniowych układach dynamicznych wydaje się być zjawiskiem powszechnym, a nie, jak wcześniej sądzono, marginalnym (zob. np. Abracham i Marsden 1978, Kudrewicz 1993, Prigogine 2000). Zatem chaos oraz błędy estymacji warunków początkowych w sposób naturalny ograniczają możliwości przewidywania przyszłych stanów obiektu sterowanego. Ponadto model matematyczny realnego obiektu fizycznego jest często opisem przybliżonym. Przybliżenia mają na celu pominięcie trudnych do modelowania zjawisk, których wpływ jest znikomy – ale rzadko kiedy żaden – oraz umożliwienie rozwiązywania równań modelu w dającym się zaakceptować czasie. Oddziaływanie na obiekt pominiętych w procesie modelowania zjawisk, wrażliwość rozwiązań na zmiany warunków początkowych oraz losowe decyzje operatorów powodują szybki – często wykładniczy – przyrost błędu predykcji wykonywanej w oparciu o model obiektu. Wynika stąd, że dokładne przewidywanie przyszłego zachowania obiektów fizycznych jest możliwe tylko na stosunkowo krótkim horyzoncie czasu (Penrose 2000, s.200–211). Zatem horyzont predykcji w zadaniu optymalizacji powinien być możliwie krótki, przy jednokrotnym spełnieniu wymagań stabilności. Z drugiej strony, największe zyski z optymalizacji sterowania uzyskuje się, gdy horyzont predykcji jest nieskończony. Należy zatem poszukiwać rozsądnego kompromisu, odpowiednio dobierając horyzont w czasie trwania procesu.

### **2. Uzasadnienie sterowania predykcyjnego**

Problemy sterowania optymalnego można rozwiązywać wykorzystując warunki konieczne optymalności w przestrzeni sterowań, wyrażone przez zasadę maksimum Pontriagina (zob. dodatek B, Alekseev *et al.* 1987), bądź też stosując metodę programowania dynamicznego Bellmana (zob. np. Lee i Markus 1967). Pierwszy sposób prowadzi do wyznaczenia sterowania optymalnego jako funkcji czasu, przy zadanym warunku początkowym. Metoda programowania dynamicznego pozwala wyznaczyć optymalne sprężenie zwrotne, w oparciu o rozwiązanie równania Hamiltona – Jacobiego – Bellmana (HJB). Metoda programowania dynamicznego wydaje się bardziej atrakcyjna, ponieważ rozwiązanie HJB rozwiązywane jest tylko raz na etapie projektowania regulatora. Okazuje się jednak, że znalezienie rozwiązania równania HJB w przypadku systemów nieliniowych jest praktycznie niemożliwe, za wyjątkiem szczególnych przypadków. Równanie HJB jest bowiem nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu. Znacznie łatwiejsze jest cykliczne rozwiązywanie zadania sterowania optymalnego ze skończonym horyzontem, przy aktualnie wyznaczonym, na podstawie pomiarów, warunku początkowym. Analogiczne

uzasadnienie zastosowania sterowania predykcyjnego podają Mayne i współpracownicy (Mayne *et al.* 2000). Obecnie, sterowanie predykcyjne wydaje się być jedną z niewielu metod sterowania systemami nieliniowymi przy ograniczeniach sterowania i stanu.

### **3. Rozwój algorytmów predykcyjnych**

Idea repetycyjnego wyznaczania sterowania w oparciu o rozwiązanie problemu optymalizacji dynamicznej nie jest ideą nową. Już w roku 1967 Lee i Markus w książce *Foundations of Optimal Control Theory* zauważali, że: „Jedną z technik wyznaczania regulatora na podstawie wiedzy o rozwiązaniach problemu sterowania optymalnego jest pomiar aktualnego stanu obiektu i bardzo szybkie wyznaczenie rozwiązania optymalnego. Pierwsza część tego rozwiązania jest używana do sterowania obiektem, po czym dokonuje się ponownego pomiaru stanu procesu i rozwiązuje problem sterowania optymalnego z nowym warunkiem początkowym”<sup>1</sup>. Z drugiej strony już Kalman w roku 1960 zauważał, że optymalność nie zawsze pociąga za sobą stabilność. Pierwsze praktyczne implementacje algorytmów predykcyjnych dla systemów opisywanych liniowymi równaniami różnicowymi pojawiły się w latach siedemdziesiątych i były intensywnie rozwijane do lat 90-tych ubiegłego wieku. Poniżej zestawiono chronologicznie kilka rozwiązań charakteryzujących rozwój algorytmów predykcyjnych dla systemów liniowych dyskretnych w czasie.

- Pakiet IDCOM (*Identification and Command*) – model liniowy dyskretny w postaci odpowiedzi impulsowej oraz kwadratowa funkcja kosztu (Richalet *et al.* 1976).
- DMC – *Dynamic Matrix Control* (Cutler i Ramaker 1980, Prett i Gilette 1980) – model liniowy dyskretny w postaci odpowiedzi skokowej, kwadratowa funkcja kosztu.
- QDMC – *Quadratic Dynamic Matrix Control* (Garcia i Morshedi 1986) – pełne zadanie programowania kwadratowego z uwzględnieniem ograniczeń stanu i sterowania, model liniowy dyskretny w czasie.
- GPC – *Generalized Predictive Control* (Clarke i Mothadi 1987) – model liniowy dyskretny w postaci transmitancji z uwzględnieniem zakłóceń i estymacją parametrów na bieżąco.

W przypadku systemów nieliniowych opisywanych równaniami różniczkowymi rozwój następował nieco wolniej i dopiero w roku 1990 Mayne i Michalska opublikowali pracę *Receding Horizon Control of Non-linear Systems*, w której przedstawili algorytm predykcyjny dla systemów nieliniowych opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Stabilność algorytmu osiągnęli oni nakładając ograniczenia na stan końcowy w zadaniu optymalizacji. Rozwinięciem tych wyników była praca Michalskiej i Mayne'a z roku 1993, w której uwzględniono ograniczenia stanu i sterowania oraz podano warunki odporności regulatora predykcyjnego. Kolejnym krokiem było zaproponowane przez Chena i Algowera (1998) podejście o nazwie *Quasi Infinity Horizon NMPC*, w którym wskaźnik jakości był wybrany tak, aby dobrze oszacować koszt dla zadania z nieskończonym horyzontem sterowania. Jeżeli oszacowanie takie było dostatecznie dokładne, to rozwiązania zadania ze skończonym horyzontem dobrze przybliżały rozwiązania zadań z horyzontem nieskończonym. W roku 1999 Scokaert, Mayne i Rao zwróciли uwagę, że w przypadku nieliniowych systemów dyskretnych, optymalność nie jest warunkiem koniecznym stabilności oraz zaproponowali suboptimalny algorytm predykcyjny. Obszerne omówienie algorytmów predykcyjnych dla liniowych i nieliniowych systemów dyskretnych w czasie podają Kwon

<sup>1</sup> Tłumaczenie autora.

i Han (2005), Tatjewski (2002) oraz Maciejowski (2002). Algorytmy predykcyjne są obecnie intensywnie badane i rozwijane, ciągle powstają nowe podejścia (zob. np. Mayne *et al.* 2000, Fontes 2003a, Primbs 1998, Jadbabaie 2001), a wyszukiwarka Google, po wpisaniu hasła „model predictive control”, podaje blisko 350 000 odnośników.

#### **4. Zastosowania algorytmów predykcyjnych**

Algorytmy predykcyjne odniósły sukces komercyjny. O sukcesie tym zadecydował fakt, że stanowią one jedną z niewielu metod sterowania, pozwalającą *explicite* uwzględnić ograniczenia stanu i sterowania oraz nadają się do sterowania systemami nieliniowymi. Początkowo algorytmy predykcyjne stosowane były w przemyśle petrochemicznym i chemicznym, a obecnie doczekały się zastosowań w metalurgii, lotnictwie, robotyce oraz w lotach kosmicznych. Obszerny przegląd zastosowań algorytmów predykcyjnych podają Qin i Badgwell (1997, 1998). Morari i Lee (1999) w artykule *Model predictive control: Past, present and future*, próbują określić przyszły rozwój algorytmów predykcyjnych. Tatjewski (2002) podaje szereg przykładów zastosowań algorytmów predykcyjnych w przemyśle chemicznym.

#### **5. Cele pracy**

Pierwotnym celem pracy było określenie roli i miejsca algorytmu optymalizacji w sterowaniu predykcyjnym systemami nieliniowymi, opisywanymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, przy czym klasa zadań sterowania miała obejmować zadania sterowania czasooptymalnego, docelowego oraz zadanie stabilizacji. Uzyskane wnioski miały stanowić podstawę do stworzenia efektywnego numerycznie algorytmu optymalizacji dynamicznej, dostosowanego do potrzeb sterowania predykcyjnego.

W trakcie prowadzonych przeze mnie badań okazało się, że wymagania, jakie musi spełnić algorytm optymalizacji bardzo istotnie zależą od konstrukcji samego algorytmu predykcyjnego oraz od sposobu, w jaki sformułowane jest zadanie sterowania optymalnego. W związku z powyższymi uwagami przyjąłem następujący cel badań:

***Skonstruować stabilny i odporny algorytm sterowania predykcyjnego umożliwiający realizację zadań:***

- sterowania zblżonego do czasooptymalnego,***
- sterowania docelowego,***
- stabilizacji po osiągnięciu zadanego otoczenia celu sterowania,***

***przy możliwie niskim nakładzie obliczeń.***

Uzasadnienie powyższego wyboru stanowi fakt, że algorytmy predykcyjne stosowane były dotychczas głównie do stabilizacji systemów nieliniowych, przy długim horyzoncie predykcji. Przedstawiony cel badań znaczco poszerza zakres stosowalności algorytmów predykcyjnych i nie był dotąd wyczerpująco analizowany w literaturze.

#### **6. Omówienie treści rozprawy**

Praca składa się z siedmiu rozdziałów, podsumowania, dodatków A, B i C oraz spisu literatury. Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający. Przedstawiam w nim dwa elementarne przykłady sterowania predykcyjnego oraz pewne hipotezy dotyczące stabilności algorytmu predykcyjnego. W rozdziale drugim podaję definicje podstawowych pojęć oraz przedstawiam ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją i adaptacją wskaźnika jakości. W rozdziale tym dowodzę również stabilności i odporności omawianego algorytmu. Najważniejszym wynikiem tego rozdziału są twierdzenia o stabilności

i odporności algorytmu predykcyjnego przy zastosowaniu suboptimalnych rozwiązań zadania sterowania optymalnego. Wyniki zamieszczone w rozdziale drugim stanowią podstawę konstrukcji nowego quasi-czasooptymalnego algorytmu predykcyjnego (*QTO-RHC Quasi Time Optimal Receding Horizon Control*), który omawiam w rozdziale trzecim. W początkowej fazie sterowania algorytm ten realizuje strategię zbliżoną do czasooptymalnej, po czym, po osiągnięciu pewnego otoczenia celu, rozpoczyna zmianę strategii sterowania, mającą na celu przejście do fazy stabilizacji. Korzystając z wyników rozdziału drugiego określam warunki stabilności i odporności algorytmu QTO-RHC. Następnie podaję pięć obszernie skomentowanych przykładów sterowania systemami nieliniowymi z zakresu mechaniki, robotyki i technologii chemicznej. Na szczególną uwagę zasługuje przykład sterowania robotem oraz sterowanie przepływowym reaktorem chemicznym. Algorytm przedstawiony w rozdziale czwartym jest szczególną wersją algorytmu z rozdziału trzeciego, dostosowaną do zadań, w których funkcja podcałkowa we wskaźniku jakości zależy tylko od sterowania. Korzystając z twierdzeń podanych w rozdziale drugim omawiam warunki stabilności i odporności tego algorytmu, po czym podaję przykłady sterowania ramieniem robota oraz statkiem kosmicznym. W obu przykładach kryterium jakości wyraża kompromis pomiędzy całką z kwadratu sterowania, a czasem osiągnięcia celu. Zagadnienie wyznaczania ograniczeń stanu końcowego stanowi treść rozdziału piątego. W rozdziale tym analizuję również własności asymptotyczne algorytmów z rozdziałów 3 i 4. Pokazuję tam m.in., że w przypadku systemów liniowych, przy kwadratowym wskaźniku jakości, algorytm QTO-RHC staje się lokalnie algorymem liniowo-kwadratowym. Metoda Monotonicznej Ewolucji Struktur (MSE), stanowiąca centralną część algorytmu predykcyjnego, została przedstawiona w rozdziale 6. Ostatni rozdział zawiera porównanie typowych algorytmów predykcyjnych dla systemów z czasem dyskretnym, z algorytmem QTO-RHC. Dodatki A, B i C są uzupełnieniem podstawowej treści pracy. Dodatek A zawiera pomocnicze twierdzenia i lematy używane w treści rozprawy oraz ich dowody. W dodatku B podana została wersja zasady maksimum Pontriagina dla rozważanych w pracy zadań sterowania optymalnego oraz omówione zostało zagadnienie normalności zadania sterowania optymalnego. Dodatek C zawiera wzory określające efektywność generacji w algorytmie MSE. Wszystkie obliczenia numeryczne i symulacje przedstawione w pracy zostały wykonane za pomocą pakietu MATLAB<sup>®</sup>, przy czym najbardziej złożone obliczeniowo procedury całkowania równań różniczkowych oraz procedury wyznaczania efektywności generacji napisano w języku C i skompilowano je do postaci, tzw. „mex-plików”. Praca kończy się podsumowaniem oraz spisem literatury zawierającym 98 pozycji.

## **7. Stosowana terminologia**

Sterowanie predykcyjne jest dziedziną bardzo obszerną i stosunkowo młodą, o nie ustalonym jeszcze w pełni nazewnictwie. Niektóre pojęcia rozumiane są przez różnych autorów w różny sposób. Nazwa „sterowanie predykcyjne” (*Model Predictive Control – MPC*) odnosiła się pierwotnie do algorytmów predykcyjnych opartych o liniowy dyskretny model obiektu przy kwadratowym wskaźniku jakości określającym cel sterowania. Sformułowanie *Nonlinear Model Predictive Control – NMPC* stanowi określenie algorytmu predykcyjnego dla systemu dyskretnego, opisywanego nieliniowymi równaniami różnicowymi, przy czym wskaźnik jakości niekoniecznie musi być funkcją kwadratową. Nazwa ta bywa również używana w odniesieniu do algorytmów wykorzystujących model w postaci nieliniowych równań różniczkowych. Zwykle jednak algorytmy takie znane są pod nazwą *Receding Horizon Control*, co często tłumaczy się jako „sterowanie z przesuwany horyzontem”. Wydaje się, że bardziej adekwatna byłaby nazwa „sterowanie predykcyjne z przesuwany oknem”.

Sformułowań „algorytm predykcyjny”, „algorytm z przesuwany horyzontem”, „regulator predykcyjny”, „regulacja predykcyjna”, „sterowanie predykcyjne” oraz „schemat sterowania predykcyjnego” będę używał w pracy wymiennie, za każdym razem mając na myśli sterowanie predykcyjne systemem nieliniowym, opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych, przy czym wskaźnik jakości określający cel sterowania niekoniecznie musi być funkcją kwadratową, a horyzont może być zmienną decyzyjną w zadaniu optymalizacji. Termin „obiekt” odnosi się do konkretnego, fizycznie istniejącego, bądź też symulowanego obiektu sterowania. Termin „model” oznacza model matematyczny obiektu. Będę przy tym domyślnie przyjmował, że przewidywania oparte na modelu są obarczone pewnym błędem. Jedyny wyjątek stanowić będzie badanie stabilności systemu z regulatorem predykcyjnym, gdzie zakładam pełną zgodność modelu i obiektu oraz brak zakłóceń. Czasami na określenie modelu lub obiektu będę używał słowa „system”. Przez sterowanie w systemie otwartym (*open loop control*), rozumiem zastosowanie do obiektu pewnego, arbitralnie wybranego sterowania. Termin „system zamknięty” będzie oznaczał, że do sterowania obiektem został zastosowany pewien regulator generujący sterowanie na podstawie pomiaru wyjść tego obiektu. Termin „wskaźnik jakości” będzie oznaczał funkcjonalny minimalizowany w zadaniu sterowania optymalnego. W pewnych przypadkach, zamiast wyrażenia „wskaźnik jakości”, będę używał terminów „funkcja celu” lub „funkcja kosztu”. Sformułowania „cel sterowania” oraz „stan docelowy” będą zwykle oznaczać punkt w przestrzeni stanów, do którego powinien, w wyniku działania regulatora, zmierzać stan systemu. Ponieważ w pracy rozważam wyłącznie przypadki, w których celem sterowania jest osiągnięcie zerowego punktu równowagi (zera przestrzeni stanów), to nazw „cel sterowania”, „stan docelowy”, „początek układu współrzędnych” oraz „zerowy punkt równowagi” będę używał wymiennie.

## **8. Uwagi końcowe**

Powstanie tej rozprawy nie byłoby możliwe bez udziału prof. Wojciecha Gregi, który zaproponował mi pracę w Katedrze Automatyki i któremu pragnę w tym miejscu serdecznie podziękować. Realizacja eksperymentów numerycznych wymagająca napisania odpowiedniego oprogramowania nie doszłaby do skutku bez pomocy dr. Macieja Szymkata. Udostępnione przez niego fragmenty kodu metody MSE oraz liczne uwagi umożliwiły mi zaadaptowanie i rozszerzenie metody na potrzeby sterowania predykcyjnego, za co niniejszym dziękuję. Dziękuję również prof. Andrzejowi Turnauowi za liczne dyskusje i uwagi dotyczące sterowania czasooptymalnego oraz dr. Januszowi Millerowi za udostępnienie kodu pewnych metod numerycznych. Dziękuję także prof. Piotrowi Grabowskemu, kolegom z Katedry Automatyki oraz wszystkim osobom, które zaangażowały się w powstanie tej rozprawy.

Kraków, w lutym 2008

### **Tezy pracy**

- 1.** Zaproponowany w pracy **quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny z adaptacją wskaźnika jakości** umożliwia realizację zadań sterowania czasooptymalnego lub docelowego oraz zadania stabilizacji. Połączenie tych dwóch różnych strategii sterowania w jednym algorytmie można osiągnąć poprzez adaptacyjną zmianę celu sterowania w trakcie trwania procesu.
- 2.** Algorytmy predykcyjne nie wymagają dokładnego rozwiązywania zadania sterowania optymalnego. Zastosowanie odpowiednio zdefiniowanych rozwiązań suboptymalnych nie narusza stabilności oraz odporności układu regulacji, umożliwiając jednocześnie redukcję nakładu obliczeń.
- 3.** Odpowiednio dopasowana do potrzeb sterowania predykcyjnego metoda Monotonicznej Ewolucji Struktur (MSE – *Monotone Structural Evolution*), w połączeniu z możliwościami obliczeniowymi współczesnych komputerów, nawet o niewielkiej mocy obliczeniowej, pozwala na użycie proponowanych algorytmów predykcyjnych do sterowania systemami nieliniowymi.

## Rozdział 1. Rozważania wstępne

Niniejszy rozdział ma charakter wprowadzający. Rozważymy w nim dwa elementarne przykłady sterowania predykcyjnego oraz sformułujemy na tej podstawie pewne hipotezy dotyczące zachowania się trajektorii, właściwej konstrukcji algorytmu predykcyjnego oraz stabilności systemu zamkniętego. W szczególności podamy przykład utraty stabilności systemu z regulatorem predykcyjnym, spowodowanej nieprawidłowym doborem parametrów algorytmu.

### 1.1. Przykłady wprowadzające

Aby wstępnie zapoznać się z działaniem algorytmów predykcyjnych, przeanalizujemy dwa elementarne przykłady.

**Przykład 1.1** (*trajektoria i sterowanie planowane w chwili początkowej, różnią się od trajektorii i sterowania uzyskanych po zastosowaniu regulatora predykcyjnego*).

Rozważmy prosty system liniowy

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(t), \quad u(t) \in R, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Szukamy sterowania  $u$  realizującego minimum wskaźnika jakości

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt + \frac{\rho}{2} x^2(T), \quad \rho, T > 0. \quad (1.2)$$

Zgodnie z zasadą maksimum Pontriagina (zob. dodatek B), sterowanie optymalne maksymalizuje hamiltonian

$$H = \psi(u - x) - 0,5(x^2 + u^2),$$

gdzie zmienna sprzężona  $\psi$  spełnia równanie sprzężone

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + x(t), \quad \psi(T) = -\rho x(T).$$

Maksimum hamiltonianu jest osiągane, gdy

$$\nabla_u H = \psi - u = 0.$$

Korzystając z warunku maksimum hamiltonianu otrzymuje się równania kanoniczne

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \psi(t),$$

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + x(t).$$

Rozwiązańcie układu równań kanonicznych ma postać

$$x(t) = \phi_{11}(t)x(0) + \phi_{12}(t)\psi(0),$$

$$\psi(t) = \phi_{21}(t)x(0) + \phi_{22}(t)\psi(0),$$

gdzie

$$\phi_{11}(t) = \text{ch}(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sh}(\sqrt{2}t), \quad \phi_{12}(t) = \phi_{21}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sh}(\sqrt{2}t), \quad \phi_{22}(t) = \text{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sh}(\sqrt{2}t).$$

Uwzględnienie warunków brzegowych na stan i zmienną sprzężoną pozwala wyznaczyć sterowanie jako funkcję czasu i stanu początkowego

$$u(t) = \psi(t) = k(t)x_0, \quad (1.3)$$

gdzie

$$k(t) = \phi_{21}(t) - \phi_{22}(t) \frac{\rho\phi_{11}(T) + \phi_{21}(T)}{\rho\phi_{12}(T) + \phi_{22}(T)}. \quad (1.4)$$

Rozważmy teraz następujący algorytm sterowania.

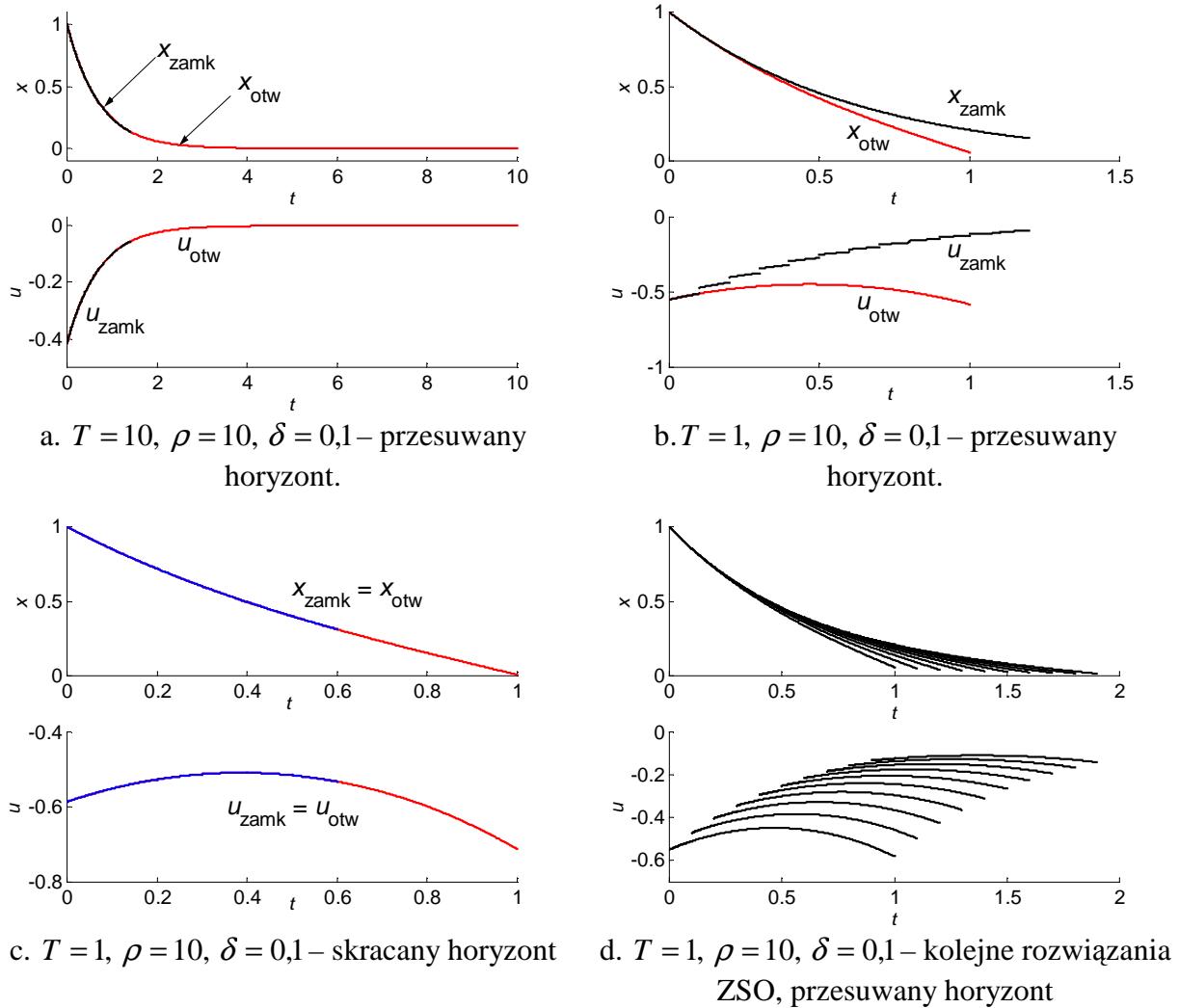
### Algorytm A

0. Dane:  $x_0$ , system (1.1), wskaźnik jakości (1.2), liczba  $\delta > 0$ ,  $i = 0$ .
1. Oblicz sterowanie  $u(t) = k(t - i\delta)x_i$  i zastosuj je w systemie (1.1), w przedziale czasu  $t \in [i\delta, (i+1)\delta]$ .
2. Podstaw  $i := i + 1$ ,  $x_i := x(i\delta)$  i idź do 1.

Algorytm A stanowi prosty przykład sterowania predykcyjnego. Zauważmy, że algorytm ten realizuje sprzężenie zwrotne od stanu. W punkcie pierwszym wyznaczamy rozwiązanie zadania sterowania optymalnego (ZSO) w zależności od aktualnego stanu obiektu. Rozwiązanie ZSO jest w tym przypadku trywialne i sprowadza się do jednokrotnego wyznaczenia funkcji  $k(t)$ . Następnie stosujemy początkowy fragment sterowania optymalnego w przedziale czasu  $t \in [i\delta, (i+1)\delta]$ . W punkcie 2 wyznaczamy stan obiektu w chwili  $t = (i+1)\delta$  i ponownie wracamy do 1. Wynik działania powyższej procedury pokazano na rys. 1.1a i b. Przez  $x_{zamk}$  oznaczono trajektorię systemu zamkniętego, będącą wynikiem działania algorytmu A, którą to trajektorię porównano z trajektorią  $x_{otw}$ , uzyskaną po zastosowaniu sterowania (1.3) w przedziale czasu  $[0, T]$ . Sterowania w układzie zamkniętym i otwartym oznaczono odpowiednio przez  $u_{zamk}$ ,  $u_{otw}$ . Na rys. 1.1c pokazano trajektorię i sterowanie w przypadku, gdy horyzont  $T$  ulega z każdym krokiem działania algorytmu skróceniu o liczbę  $\delta$ . Rys. 1.1d przedstawia kolejne rozwiązania ZSO uzyskane w algorytmie A.

Analiza powyższego przykładu pozwala stwierdzić, że:

1. Sterowanie i trajektoria składają się z kawałków sterowań i trajektorii, będących rozwiązaniami kolejnych ZSO. Sterowanie w systemie zamkniętym jest na ogół nieciągłe, nawet wtedy, gdy rozwiązanie każdego ZSO jest ciągłe.
2. Analiza przypadków z rys. 1.1b i d pokazuje, że rozwiązanie uzyskane po zamknięciu sprzężenia zwrotnego, może być istotnie różne od rozwiązania problemu sterowania uzyskanego w chwili początkowej.
3. Wydłużenie horyzontu sterowania powoduje, że trajektoria systemu zamkniętego zbliża się do optymalnej trajektorii uzyskanej w chwili początkowej (rys. 1.1a).
4. Skracanie horyzontu o liczbę  $\delta$  (rys. 1.1c) powoduje, że trajektoria systemu zamkniętego jest równa optymalnej trajektorii uzyskanej w chwili początkowej (przy braku zakłóceń).
5. Rozwiązania kolejnych ZSO mogą się od siebie znacznie różnić (rys. 1.1d). Jest to efekt niekorzystny, gdyż powoduje odstępstwa od trajektorii optymalnej dla zadania z nieskończonym (długim) horyzontem oraz utrudnia rozwiązywanie ZSO w kolejnych krokach. Z punktu widzenia optymalizacji dobrze byłoby wykorzystać poprzednio uzyskane rozwiązanie jako punkt startowy w kolejnym ZSO. Różnice pomiędzy rozwiązaniami kolejnych ZSO stają się pomijalnie małe przy odpowiednim wyborze horyzontu  $T$  i liczby  $\rho$ .



Rys. 1.1. Trajektorie i sterowania.

Algorytm predykcyjny na ogół nie zapewnia stabilności systemu zamkniętego (rozumianej tutaj roboczo jako zmierzanie trajektorii do zera). Aby się o tym przekonać, rozważmy następujący

**Przykład 1.2 (utrata stabilności systemu z regulatorem predykcyjnym).**

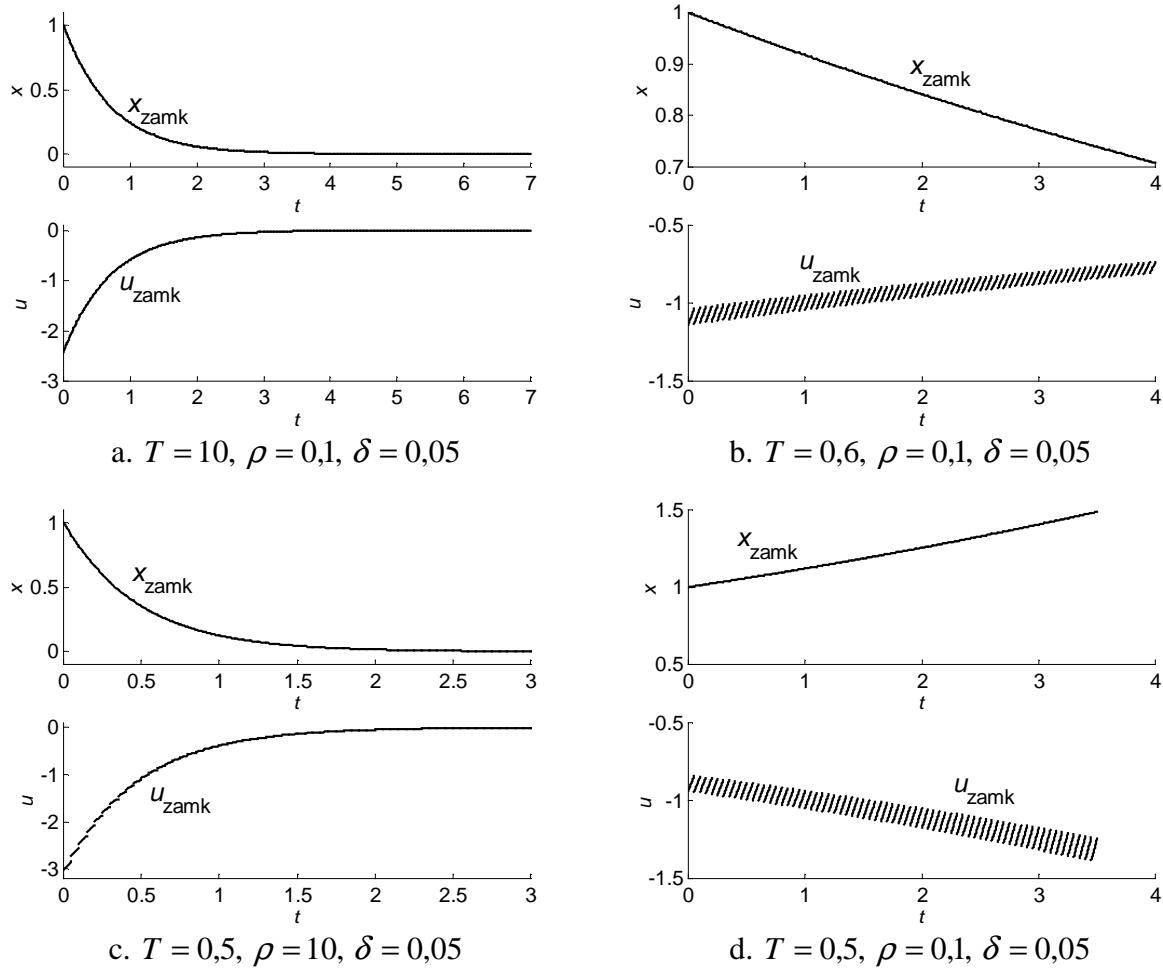
Weźmy prosty system liniowy (niestabilny)

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(t), u(t) \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Sterowanie zapewniające minimum wskaźnika jakości (1.2) jest określone wzorami (1.3) i (1.4), przy czym

$$\phi_{11}(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{2}t), \quad \phi_{12}(t) = \phi_{21}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{2}t), \quad \phi_{22}(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{2}t). \quad (1.6)$$

Do sterowania systemem (1.5) zastosowano algorytm A z przykładu 1.1. Na rys. 1.2a przedstawiono trajektorię i sterowanie dla horyzontu  $T = 10$ . Zmniejszenie horyzontu do  $T = 0,6$  (rys. 1.2b) nie powoduje jeszcze utraty stabilności, ale znacznie wydłuża czas osiągnięcia stanu ustalonego. Zwiększenie wagi w funkcji stanu końcowego do  $\rho = 10$  (rys. 1.2c) skraca czas osiągnięcia stanu ustalonego do około 2. Krótki horyzont  $T = 0,5$  i mała wartość  $\rho = 0,1$  prowadzą do utraty stabilności (rys. 1.2d).



Rys. 1.2. Trajektorie i sterowania w systemie zamkniętym – przykład utraty stabilności przy nieodpowiednim wyborze wskaźnika jakości (rys. d).

Mamy następujące dwa wnioski dotyczące analizowanego przykładu.

1. Zbyt krótki horyzont może spowodować utratę stabilności.
2. Wprowadzenie funkcji kary za niespełnienie warunku końcowego pozwala ustabilizować system – nawet przy krótkich horyzontach.

W dalszych rozdziałach pracy uściślimy i rozwiniemy przedstawione powyżej spostrzeżenia. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że skracanie horyzontu o liczbę  $\delta$  w każdym kroku algorytmu powoduje, że trajektoria w systemie zamkniętym jest dokładnie równa optymalnej trajektorii planowanej w chwili początkowej.

## Rozdział 2. Ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją

W tym rozdziale formułujemy ogólną postać algorytmu predykcyjnego. Algorytm dopuszcza możliwość ewolucji wskaźnika jakości w trakcie procesu sterowania, co wydaje się istotną – z punktu widzenia zastosowań – własnością. Następnie podajemy warunki dostateczne stabilności układu regulacji z regulatorem predykcyjnym. Warunki te wymagają jedynie znajdowania rozwiązań suboptimalnych odpowiedniego problemu optymalizacji, co pozwala na znaczną redukcję nakładu obliczeń. W dalszej części rozdziału zajmujemy się analizą odporności układu sterowania na zakłócenia i błędy modelowania. Następnie podajemy warunki, przy których trajektoria stanu, generowana przez algorytm w obecności zakłóceń, osiąga w skończonym czasie pewne otoczenie celu i pozostaje w tym otoczeniu. Promień otoczenia maleje do zera przy zmniejszaniu amplitudy zakłóceń.

### 2.1. Podstawowe definicje i twierdzenia

#### **Model obiektu**

Zakładamy, że dysponujemy modelem obiektu w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p_0), \quad x(0) = x_0, \quad t \in R^+_0. \quad (2.1)$$

Funkcja  $f : R^n \times R^m \times R^l \rightarrow R^n$  jest klasy  $C^1$  względem wszystkich argumentów oraz  $f(0, 0, p_0) = 0$ . Funkcja ta jest zależna od  $l$  parametrów danych wektorem  $p_0 \in R^l$ . Ponadto  $f$  spełnia globalnie (dla wszystkich  $\xi_1, \xi_2 \in R^n, v \in R^m$ ) warunek Lipschitza

$$|f(\xi_1, v, p_0) - f(\xi_2, v, p_0)| \leq \hat{L} |\xi_1 - \xi_2|, \quad (2.1a)$$

ze stałą  $\hat{L} > 0$ , niezależną od  $\xi_1, \xi_2, v, p_0$ . Zakładamy też, że istnieje ciągła funkcja  $L_u : R^n \rightarrow R$ , taka że dla wszystkich  $\xi \in R^n, v_1, v_2 \in R^m$  zachodzą warunki

$$|f(\xi, v_1, p_0) - f(\xi, v_2, p_0)| \leq L_u(\xi) |v_1 - v_2|, \quad (2.1b)$$

$$L_u(\xi) > 0. \quad (2.1c)$$

Ograniczenia wartości sterowania mają postać

$$u(t) \in U, \quad U = \{u \in R^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, u_{\min} < 0, u_{\max} > 0\}. \quad (2.2)$$

Sterowanie  $u$  jest funkcją mierzalną istotnie ograniczoną. Ponieważ przestrzeń  $L^\infty$  jest bardzo „bogata”, to w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że sterowanie  $u$  jest funkcją przedziałami ciągłą oraz że  $u(t) \in U$ . Przyjmujemy umowę, że funkcje przedziałami ciągłe mają skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym przedziale skończonym, są ograniczone, prawostronne ciągłe w przedziale  $[0, T)$  oraz lewostronne ciągłe w punkcie  $T$  (o ile  $T < \infty$ ). Zbiór sterowań spełniających powyższe warunki będziemy oznaczać przez  $PC([0, \infty), U)$  lub  $PC([0, T], U)$ . Jest oczywiste, że  $PC([0, T], U) \subset L^\infty([0, T], U)$ .

#### **Obiekt**

Rzeczywisty obiekt sterowania różni się na ogół od modelu. Będziemy zakładać, że obiekt jest opisany następującym równaniem różniczkowym zwyczajnym

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t) + a(t), p_0 + p(t)) + w(t), \quad x^*(0) = x_0^*. \quad (2.3)$$

Sterowanie  $u^*$  spełnia takie same założenia jak sterowanie  $u$ . Funkcje  $a, w, p$  reprezentują zakłócenia w generacji sterowań, zakłócenia zewnętrzne oraz zmiany parametrów obiektu. Ponieważ stan systemu nie jest na ogół bezpośrednio dostępny, konieczne jest zastosowanie estymatora stanu. Zakładamy, że dysponujemy odpowiednio dokładnym estymatorem stanu (może to być np. estymator typu *high-gain*, Bornard 1991, Busawon 2000, Gauthier 1994, Findeisen 2003a,b lub estymator z przesuwany oknem, Michalska i Mayne 1995, Rao i Rawlings 1998).

Niech  $\hat{x}(t)$  oznacza estymatę stanu obiektu oraz niech

$$e(t) = \hat{x}(t) - x^*(t) \quad (2.4)$$

będzie błędem estymacji stanu. Funkcje  $a, w, p, e$  będąmy wspólnie nazywać zakłóceniami. Zakładamy, że zakłócenia są przedziałami ciągłe na  $R_0^+$  oraz ograniczone, tzn.

$$\|a\|_\infty < \eta_a, \|w\|_\infty < \eta_w, \|p\|_\infty < \eta_p, \|e\|_\infty < \eta_e.$$

Liczبę  $\delta > 0$  będziemy nazywać okresem wyliczania sterowania. W chwilach  $t_k = k\delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dokonujemy estymacji stanu obiektu. Sterowanie jest wyliczane w przedziale czasu  $[t_k, t_{k+1})$  i stosowane do obiektu w przedziale czasu  $[t_{k+1}, t_{k+2})$ . W pewnych wypadkach, liczba  $\delta$  może zależeć od  $k$ . Horyzont optymalizacji oznaczany przez  $T$ , jest zmienną decyzyjną w zadaniu optymalizacji. Minimalny horyzont optymalizacji oznaczamy przez  $T_{\min}$ . Zakładamy, że

$$T \geq T_{\min} \geq \delta. \quad (2.5)$$

Rozwiążanie równania (2.1) ze sterowaniem  $u$ , startujące z punktu  $\xi$  będziemy oznaczać przez  $x(s; \xi; u)$ . W pewnych przypadkach zamiast  $x(s; \xi; u)$  będziemy pisać krótko  $x(s)$ .

**Definicja 2.1.1** (sterowanie dopuszczalne). Sterowanie  $u : [t, t+T] \rightarrow R^m$  jest dopuszczalne, jeżeli  $u \in PC([t, t+T], U)$ . Zbiór sterowań dopuszczalnych oznaczamy przez  $U_{ad}$ .  $\square$

**Definicja 2.1.2** (asymptotyczna sterowalność). Jeżeli dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  i dla dowolnego warunku początkowego  $x_0 \in R^n$  i końcowego  $x_f \in R^n$ , istnieje horyzont  $T_D < +\infty$  oraz sterowanie dopuszczalne  $u^D : [0, T_D] \rightarrow U$ , takie że  $|x(T_D; x_0; u^D) - x_f| < \varepsilon$ , to system (2.1) nazwiemy asymptotycznie sterowalnym.  $\square$

**Założenie Z0.** System (2.1) jest asymptotycznie sterowalny.

**Definicja 2.1.3** (funkcje klasy  $\mathcal{K}^n$ ). Jeżeli funkcja  $\varphi : R_0^+ \rightarrow R_0^+$  jest klasy  $C^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ściśle rosnąca oraz  $\varphi(0) = 0$ , to mówimy, że funkcja ta jest klasy  $\mathcal{K}^n$  i piszemy  $\varphi \in \mathcal{K}^n$ . Jeżeli  $n = 0$ , to mówimy, że funkcja  $\varphi$  jest klasy  $\mathcal{K}$  i piszemy  $\varphi \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Definicja 2.1.4** (zbiór końcowy). Niech  $\Omega \subset R^n$  będzie zbiorem zwartym i jednospójnym oraz niech  $\Omega$  zawiera pewną kulę otwartą o środku w zerze. Zbiór  $\Omega$  będziemy nazywać zbiorem końcowym.  $\square$

**Twierdzenie 2.1.1.** Niech  $x : [t, t+T] \rightarrow R^n$  będzie rozwiązaniem równania (2.1) ze sterowaniem  $u \in PC([t, t+T], U)$ . Wówczas dla wszystkich  $s \in [t, t+T]$

(i) spełniona jest nierówność

$$|x(s)| \leq \left( |x(t+T)| + L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \left( \int_t^{t+T} |u(s)|^p ds \right)^{1/p} \right) \exp(\hat{L}T),$$

gdzie  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

(ii) ponadto jeżeli  $x(t+T) \in \Omega$ , to zachodzi oszacowanie

$$|x(s)| \leq M_1 \exp(\hat{L}T),$$

gdzie

$$M_1 = \sup_{\xi \in \Omega} |\xi| + L_u(0)\hat{L}^{-1} \sup_{v \in U} |v|. \quad \square$$

Dowód twierdzenia znajduje się w dodatku A.

**Lemat 2.1.1.** Niech  $\mathbf{L}_M$  będzie zbiorem wszystkich funkcji  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  spełniających warunki:

**W1)**  $|x(t)| \leq M_0 \quad \forall t \in [0, T]$ , gdzie  $M_0 > 0$  jest ustaloną liczbą,

**W2)**  $|x(t_1) - x(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|$ ,  $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ , gdzie  $M > 0$  jest ustaloną liczbą.

Niech będzie dana funkcja  $h \in \mathcal{K}$  oraz funkcjonał  $Q : \mathbf{L}_M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,

$$Q(x) = \int_0^T h(|x(t)|) dt.$$

Niech

$$\mathbf{L}_{M,q} = \{x \in \mathbf{L}_M : Q(x) \leq q\},$$

będzie zbiorem poziomиковym funkcjonału  $Q$ , przy czym  $q \in \mathbb{R}_0^+$ .

Wówczas:

**T1)** istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że dla dowolnego  $q \in \mathbb{R}_0^+$  oraz dla wszystkich  $x \in \mathbf{L}_{M,q}$ , spełniony jest warunek

$$\sup_{t \in [0, T]} |x(t)| \leq \varphi(q),$$

**T2)** jeżeli dodatkowo  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = \infty$ , to warunek **W1** może być pominięty i zachodzi **T1**.  $\square$

Dowód lematu znajduje się w dodatku A.

## 2.2. Algorytm predykcyjny

Niech  $\tilde{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie funkcją przedziałami ciągłą, ze skońzoną liczbą punktów nieciągłości pierwszego rodzaju w każdym przedziale ograniczonym. Niech będą dane odwzorowania  $S : N \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $S_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  oraz niech ciąg  $\varepsilon_k$  spełnia równanie

$$\varepsilon_{k+1} = S(k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k), \hat{x}(t_k)), \quad \varepsilon_0 = S_0(\hat{x}(0)). \quad (2.6)$$

Niech  $x^k : [t_k, t_k + T_k] \rightarrow R^n$  dla  $T_k \geq 0$  będzie rozwiązaniem równania (2.1), z warunkiem początkowym  $\tilde{x}(t_k)$  i sterowaniem dopuszczalnym  $u^k$ . Wskaźnik jakości w  $k$ -tym kroku czasowym jest dany równością

$$J(u^k, T_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) = T_k + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + T_k} L(x^k(s), u^k(s)) ds + q(x^k(t_k + T_k)), \quad (2.7)$$

przy czym funkcja  $L$  jest różniczkowalna w sposób ciągły względem obu argumentów oraz

$$L(\xi, v) \geq 0, \quad L(0, 0) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi \in R^n, \quad v \in R^m. \quad (2.8)$$

Zakładamy, że funkcja  $q$  jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz

$$\nabla_x q(x) \neq 0, \quad \text{dla } x \neq 0. \quad (2.9)$$

Ponadto zakładamy, że

$$q(0) = 0 \quad (2.10)$$

oraz że istnieje funkcja  $w \in \mathcal{K}$ , spełniająca warunek  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = \infty$  i taka, że

$$q(x) \geq w(|x|). \quad (2.11)$$

Z powyższych założeń wynika, że funkcja  $q$  ma dokładnie jedno minimum w punkcie  $x = 0$ . Założenie (2.9) pozwala wykluczyć pojawiające się w zadaniu optymalizacji dodatkowe minima lokalne. Założenia (2.10), (2.11) są zwykle spełnione w praktycznych problemach. Wskaźnik jakości zależy w sposób ciągły od  $u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k$ , przy czym ciągłość względem  $u^k$  rozumiemy w sensie jednej z norm  $\|\cdot\|_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \infty$ . Konstrukcja wskaźnika jakości (2.7) umożliwia, poprzez odpowiedni dobór współczynnika  $\varepsilon_k$ , zmianę celu sterowania w czasie trwania procesu. W opinii autora istnieje szereg problemów sterowania, **w których cel sterowania powinien zmieniać się w zależności od czasu i stanu procesu**. Konkretnie przykłady sterowania ze zmieniającym się kryterium jakości, zostaną przedstawione w rozdziałach trzecim i czwartym.

Sformułujemy teraz zadanie sterowania optymalnego. Zakładamy, że zbiór  $\Omega$  jest ustalony.

**Problem  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ :** Znajdź sterowanie dopuszczalne  $u^k$  oraz horyzont  $T_k$ , minimalizujące wskaźnik jakości (2.7) na trajektoriach systemu (2.1), przy ograniczeniach

- i)  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ ,
- ii)  $T_k \geq T_{\min}$ .  $\square$

Rozwiązanie problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  oraz odpowiadającą mu trajektorię oznaczamy symbolami  $\bar{u}^k(s, \tilde{x}(t_k))$ ,  $\bar{T}_k$ ,  $\bar{x}^k(s, \tilde{x}(t_k); \bar{u}^k)$ . Zakładamy, że rozwiązanie powyższego problemu istnieje dla dowolnego warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k) \in R^n$ . Ograniczenie horyzontu  $T_k \geq T_{\min}$  podiktowane jest względami praktycznymi. Po pierwsze, sterowanie musi być wyznaczone co najmniej w przedziale czasu  $[t_k, t_k + \delta]$ . Po drugie, w stanach awaryjnych, gdy nie jest możliwa estymacja stanu bądź wyliczenie nowego sterowania, chcemy na ogół dysponować sterowaniem na horyzoncie dłuższym niż  $\delta$ . Jeżeli  $\varepsilon_k = 0$  i  $T_{\min} = 0$  oraz funkcja  $q$  rośnie dostatecznie szybko, to rozwiązanie zadania sterowania

optymalnego jest zbliżone do rozwiązania zadania czasooptymalnego, a norma stanu końcowego jest bliska zeru. Ograniczenie  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$  może, ale nie musi występować. Ograniczenie to będziemy wykorzystywać przy dowodzeniu stabilności systemu zamkniętego (por. np. Fontes 2000, Findeisen 2003a).

**Definicja 2.2.1.** Niech para  $(\bar{u}^k, \bar{T}_k)$  będzie rozwiązaniem  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ . Wyrażenie

$$V(\tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) = J(\bar{u}^k, \bar{T}_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min},$$

będziemy nazywać funkcją wartości (*value function*) dla problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ .  $\square$

W pewnych przypadkach będziemy pomijać drugi argument funkcji  $V$ .

**Wniosek 2.2.1.** Funkcja wartości jest ciągła,  $V(0) = 0$  oraz  $V(\xi) \geq 0$ ,  $\xi \in R^n$ .  $\square$

### Algorytm optymalizacji – procedury $\Pi$ , $\bar{\Pi}$ oraz sterowania $\omega$ -suboptymalne

Do rozwiązywania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  będziemy na ogół używać procedur numerycznych. Występują tu trzy podstawowe trudności:

- Problemy  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  są często niewypukłe i charakteryzują się występowaniem wielu minimów lokalnych;
- Przestrzeń decyzyjna jest nieskończona wymiarowa (poszukujemy sterowania optymalnego w nieskończonym wymiarowej przestrzeni funkcjnej);
- Sterowanie musi być wyznaczane *on-line* w każdym kroku algorytmu, w czasie krótszym niż  $\delta$ .

Problem wielu minimów lokalnych można częściowo rozwiązać dopuszczając rozwiązania przybliżone, spełniające warunek  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ . Drugą trudność omija się zwykle poprzez wybór odpowiednio bogatej, skończonej wymiarowej parametryzacji sterowań, w taki sposób, aby procedura numeryczna była zbieżna do zadowalającego przybliżenia rozwiązania optymalnego. Problemu ograniczonego czasu obliczeń nie da się rozwiązać w pełni. Jednakże, jak zobaczymy poniżej, można tak skonstruować algorytm predykcyjny, aby procedura numeryczna mogła zakończyć obliczenia po znalezieniu rozwiązania suboptymalnego, spełniającego odpowiednie kryteria. Ponieważ zbiór rozwiązań suboptymalnych ma zwykle niezerową miarę, to znajdowanie takich rozwiązań jest znacznie łatwiejsze niż znajdowanie rozwiązań optymalnych. Na obecnym etapie rozważań będziemy zakładać, że istnieje pewna iteracyjna procedura

$$\Pi : R_0^+ \times R_0^+ \times R^n \rightarrow U_{ad} \times R_0^+ \times W^{1,\infty}([t_k, t_k + T_k], R^n), \quad (u^k, T_k, x^k) = \Pi(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$$

zdolna do znalezienia odpowiednio dokładnego przybliżonego rozwiązania problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ , takiego że  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ . Fakt, że rozwiązanie przybliżone znajdujemy za pomocą procedury  $\Pi$  będziemy zapisywać wzorem

$$(u^k, T_k, x^k) = \Pi(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k)). \quad (2.12)$$

Procedurę, która znajduje rozwiązanie problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  oznaczamy  $\bar{\Pi}$  i piszemy

$$(\bar{u}^k, \bar{T}_k, \bar{x}^k) = \bar{\Pi}(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k)). \quad (2.12a)$$

**Definicja 2.2.2.** Procedura  $\Pi$  jest  $\omega$ -suboptimalna, jeżeli istnieje funkcja  $\omega \in \mathcal{K}$ , taka że dla dowolnych  $\tilde{x}(t_k) \in R^n$ ,  $\varepsilon_k \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  i dowolnej liczby  $\eta > 0$ , trójką  $(u^k, T_k, x^k)$ , wygenerowana przez tę procedurę, spełnia następujące warunki:

- i)  $J(u^k, T_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min} \leq \omega(|\tilde{x}(t_k)|)$ ,
- ii)  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ ,
- iii)  $T_k \geq T_{\min}$ ,
- iv)  $J(u^k, T_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min} - V(\tilde{x}(t_k); \varepsilon_k) < \eta$ .

Trójkę  $(u^k, T_k, x^k)$  spełniającą i), ii), iii) nazywamy rozwiązaniem  $\omega$ -suboptimalnym.  $\square$

**Założenie Z1.** Procedura  $\Pi$  jest  $\omega$ -suboptimalna.

Jest rzeczą oczywistą, że procedura  $\bar{\Pi}$  jest  $\omega$ -suboptimalna.

### Predykcja krótkoterminowa

Rozwiązywanie problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  jest czasochłonne, a czas wyliczania sterowania musi być *explicite* uwzględniony w algorytmie predykcyjnym. Zauważmy bowiem, że sterowanie  $u^{k+1}$  stosowane w przedziale czasu  $[t_{k+1}, t_{k+2}]$  musi być znane już w chwili  $t_{k+1}$ , a zatem musi być ono wyznaczone w przedziale czasu  $[t_k, t_{k+1}]$ . Do wyznaczenia  $u^{k+1}$  konieczna jest znajomość stanu obiektu przewidywanego na chwilę  $t_{k+1}$ . Stan przewidywany oznaczamy przez  $\tilde{x}$ . Aby wyznaczyć ten stan, rozwiązujemy, w przedziale czasu  $[t_k, t_{k+1}]$ , równanie modelu obiektu z warunkiem początkowym  $\hat{x}(t_k)$  i sterowaniem  $u^k$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), u^k(t), p_0), \quad \tilde{x}(t_k) = \hat{x}(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (2.13)$$

Opisaną powyżej procedurę będziemy nazywać predykcją krótkoterminową.

Dysponując stanem przewidywanym  $\tilde{x}(t_{k+1})$ , sterowanie  $u^{k+1}$  oraz trajektorię  $x^{k+1}$  wyznaczamy za pomocą procedury  $\Pi$ , tzn.  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1}) = \Pi(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ . Przy niedokładnej estymacji stanu oraz w obecności zakłóceń, rozwiązanie przewidywane  $\tilde{x}$  jest na ogół różne od trajektorii  $x^k$ , uzyskanej przy użyciu procedury  $\Pi(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ . Ponieważ rozwiązanie równania (2.13) wyznaczane jest na stosunkowo krótkim odcinku czasu (na podstawie estymaty stanu  $\hat{x}(t_k)$ ), to błąd predykcji krótkoterminowej jest niewielki. Jeżeli estymacja stanu jest dokładna i nie występują zakłócenia, to predykcja krótkoterminowa nie jest konieczna, gdyż dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  zachodzi równość  $x^k(t) = \tilde{x}(t) = x^*(t)$ .

### Ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją

Zanim podamy algorytm, zdefiniujemy ciąg

$$r_k = J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

który dla sterowań  $\omega$ -suboptimalnych spełnia oczywistą nierówność

$$r_k \geq 0. \quad (2.15)$$

Ponadto przyjmiemy, że dane są: liczba  $\mu \in (0, 1]$  oraz ciągła funkcja  $h: R^n \rightarrow R_0^+$ , taka że  $h(0) = 0$ ,  $h(y) > 0$  dla  $y \neq 0$ . Wszystkie algorytmy predykcyjne, jakie będziemy analizować

w dalszych rozdziałach, będą miały postać analogczną do przedstawionego poniżej, ogólnego schematu. Analiza warunków stabilności i odporności tego schematu pozwoli określić wymagania wobec procedury  $\Pi$  oraz maksymalnej dopuszczalnej amplitudy zakłóceń.

**Schemat 2.2.1** (*ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją*).

**Dane:**  $\delta$ ,  $T_{\min}$ , model obiektu (2.1), estymata warunku początkowego  $\hat{x}(0)$ , funkcja  $h$ , liczba  $\mu \in (0,1]$ .

**Inicjalizacja:** Oblicz  $\varepsilon_0 = S_0(\hat{x}(0))$ . Za pomocą procedury  $\Pi$  lub  $\bar{\Pi}$  oblicz sterowanie początkowe  $(u^0, T_0, x^0) = \Pi(0, \varepsilon_0, \hat{x}(0))$  lub  $(u^0, T_0, x^0) = \bar{\Pi}(0, \varepsilon_0, \hat{x}(0))$ .

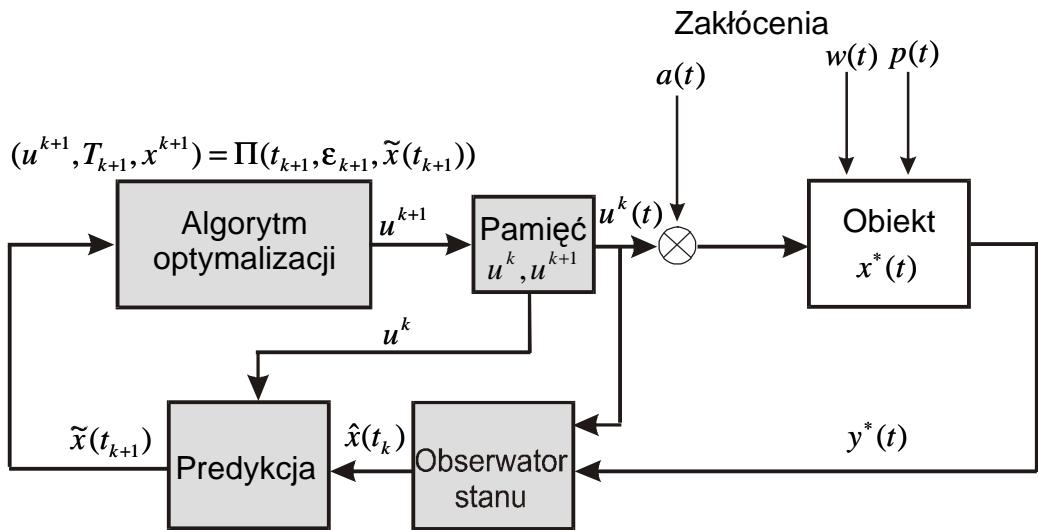
1. Postaw  $k := 0$ ,  $t_k := k\delta$ ,  $\tilde{x}(t_k) := \hat{x}(0)$ .
2. W przedziale czasu  $[t_k, t_k + \delta]$  stosuj do obiektu sterowanie  $u^k$  oraz jednocześnie wykonuj czynności 3–7.
3. Wyznacz estymatę stanu  $\hat{x}(t_k)$ .
4. Oblicz  $r_k = J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min}$ .
5. Oblicz  $\varepsilon_{k+1} = S(k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k), \hat{x}(t_k))$  oraz wyznacz predykcję krótkoterminową  $\tilde{x}(t_{k+1})$ .
6. Za pomocą procedury  $\Pi$  spróbuj wyznaczyć rozwiązanie  $\omega$ -suboptymalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1}) = \Pi(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ , spełniające warunek  

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu h(\tilde{x}(t_k)).$$

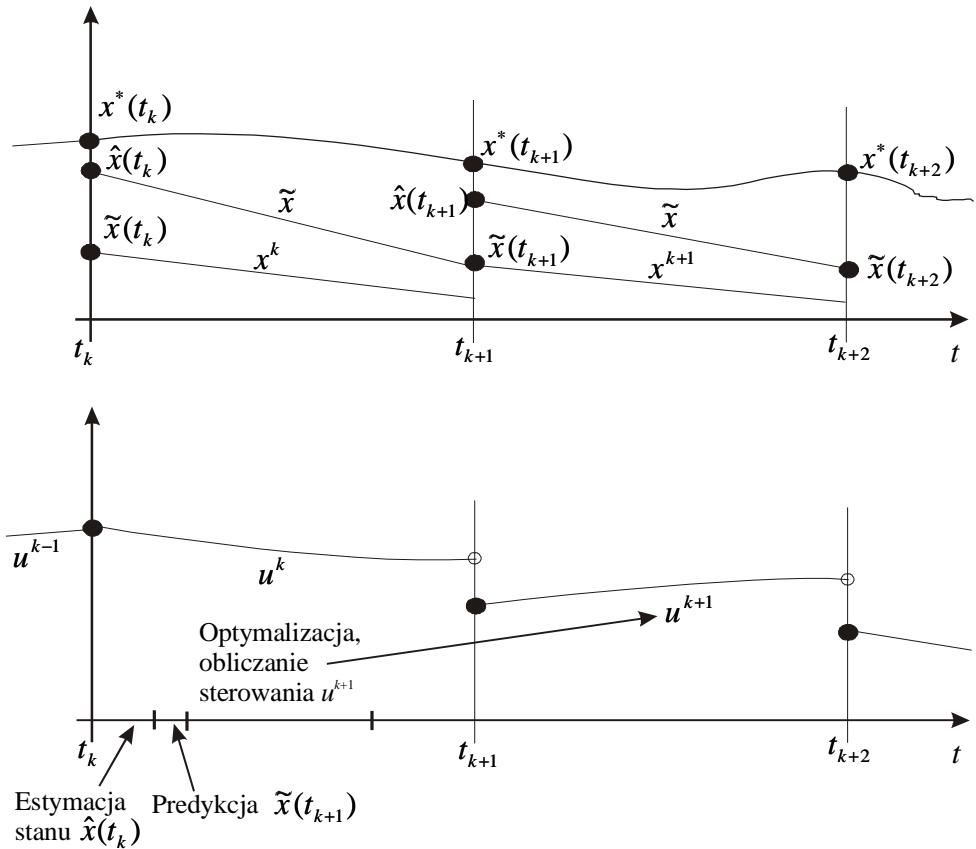
Jeżeli takiego rozwiązania nie da się znaleźć, to wyznacz możliwie najlepsze przybliżenie rozwiązania optymalnego.

7. Wykonaj obliczenia pomocnicze (aktualizacje współczynników, testy stabilności itp.).
8. Podstaw  $k := k + 1$ ,  $t_k := k\delta$ .
9. Idź do 2.

Sterowanie w systemie zamkniętym otrzymujemy poprzez konkatenację sterowań  $u^k$  zastosowanych do obiektu w przedziałach czasu  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Sterowanie to oznaczamy przez  $u^*$ . Trajektoria obiektu  $x^*$  jest funkcją ciągłą, natomiast sterowanie  $u^*$  jest funkcją przedziałami ciągłą. Sterowanie  $u^0$  może być w zasadzie dowolnym sterowaniem  $\omega$ -suboptymalnym, jednakże wskazane jest, aby było ono dostatecznie dokładnym przybliżonym rozwiązaniem problemu  $P(0, \varepsilon_0, \hat{x}(0))$ . W związku z tym, w praktycznych realizacjach algorytmu, wyposaża się go w bibliotekę sterowań początkowych, wyliczonych off-line dla różnych warunków początkowych. Przy starcie algorytmu wybiera się z biblioteki rozwiązanie wyliczone dla warunku początkowego najbliższego aktualnej estymacie stanu  $\hat{x}(0)$ . Czynności opisane w kroku 2 oraz w krokach 3 – 7 wykonuje się równolegle w czasie, tzn. układy wykonawcze zajmują się realizacją sterowania  $u^k$  i jednocześnie realizowane są kroki 3 – 7. Krok 7 algorytmu jest opcjonalny i nie musi występować. Na rys. 2.1 pokazano, w formie graficznej, przebieg obliczeń w schemacie 2.2.1, a na rys. 2.2 zobrazowano zależności czasowe. Przykład 1.2 poucza, że podany powyżej algorytm może generować trajektorie  $x^*$ , takie że  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x^*(t)| = \infty$ , nawet przy braku zakłóceń. Dlatego w dalszym ciągu zajmiemy się badaniem stabilności i odporności schematu 2.2.1.



Rys. 2.1. Graficzna reprezentacja schematu 2.2.1



Rys. 2.2. Zależności czasowe w schemacie 2.2.1.

### 2.3. Stabilność algorytmu predykcyjnego

Zajmiemy się stabilnością schematu 2.2.1 w przypadku nominalnym, gdy estymacja stanu jest dokładna i nie występują żadne zakłócenia. W przypadku tym zachodzą równości  $x^k(t) = x^*(t)$  dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  oraz  $\tilde{x}(t_k) = x^k(t_k) = \hat{x}(t_k)$ . Będziemy rozważać następujące definicje stabilności.

**Definicja 2.3.1** (*stabilność w sensie Lapunowa*). Schemat 2.2.1 będziemy nazywać stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli dla dowolnej liczby  $\lambda > 0$  istnieje liczba  $\eta > 0$ , taka że  $|x^*(0)| < \eta \Rightarrow |x^*(t)| < \lambda$  dla wszystkich  $t \in R_0^+$ .  $\square$

**Definicja 2.3.2** (*słaba globalna asymptotyczna stabilność*). Schemat 2.2.1 będziemy nazywać słabo globalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli dla każdego  $x^*(0) \in R^n$  zachodzi warunek  $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = 0$ .  $\square$

**Definicja 2.3.3** (*globalna asymptotyczna stabilność w sensie Lapunowa*). Schemat 2.2.1 będziemy nazywać globalnie asymptotycznie stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli jest on stabilny w sensie Lapunowa oraz słabo globalnie asymptotycznie stabilny.  $\square$

Dla uproszczenia, schemat stabilny w sensie Lapunowa będziemy nazywać krótko schematem stabilnym. Słabą globalną asymptotyczną stabilność będziemy oznaczać przez SGAS, a globalną asymptotyczną stabilność w sensie Lapunowa będziemy oznaczać przez GAS.

Każdy algorytm predykcyjny, rozważany w niniejszej pracy, generuje ciągi rozwiązań i trajektorii  $u^k, T_k, x^k$  oraz ciąg wartości wskaźnika jakości  $J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Temu ostatniemu ciągowi można przypisać ciąg  $r_k$  określony równością (2.14). Podstawową ideą przy dowodzeniu stabilności algorytmów predykcyjnych jest użycie wskaźnika jakości, jako miary odległości trajektorii stanu obiektu od zera i wykazanie, że wskaźnik ten maleje w kolejnych krokach. Niech  $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Następujące własności decydują o stabilności i odporności algorytmu predykcyjnego.

**WS1. a.** Mówimy, że schemat 2.2.1 ma własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0$ , jeżeli przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu istnieje funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , taka że dla wszystkich  $k \geq k_0$  i dowolnego rozwiązania  $\omega$ -suboptimalnego  $(u^k, T_k, x^k)$ , procedura  $\Pi$  generuje rozwiązanie  $\omega$ -suboptimalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , spełniające nierówność

$$r_{k+1} \leq r_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_L(|x^k(t)|) dt. \quad (2.16)$$

**b.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0$  oraz dodatkowo  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \alpha_L(\xi) = \infty$ , to mówimy, że schemat 2.2.1 ma mocną własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0$ .  $\square$

**WS2. a.** Mówimy, że schemat 2.2.1 ma słabą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$ , jeżeli przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu istnieje ciągła funkcja  $h: R^n \rightarrow R_0^+$ ,  $h(0) = 0$ ,  $h(y) > 0$  dla  $y \neq 0$ , taka że dla wszystkich  $k \geq k_0$  i dowolnego rozwiązania  $\omega$ -suboptimalnego  $(u^k, T_k, x^k)$ , procedura  $\Pi$  generuje rozwiązanie  $\omega$ -suboptimalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , spełniające nierówność

$$r_{k+1} \leq r_k - h(\tilde{x}(t_k)). \quad (2.17)$$

**b.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma słabą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$  oraz dodatkowo istnieje funkcja  $\beta_L \in \mathcal{K}$ , taka że  $h(y) \geq \beta_L(|y|)$  dla wszystkich  $y \in R^n$ , to mówimy, że schemat 2.2.1 ma własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$  w sensie zwykłym (zwykłą własność **WS2**).

**c.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma zwykłą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$  oraz dodatkowo  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \beta_L(\xi) = \infty$ , to mówimy, że schemat 2.2.1 ma mocną własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$ .  $\square$

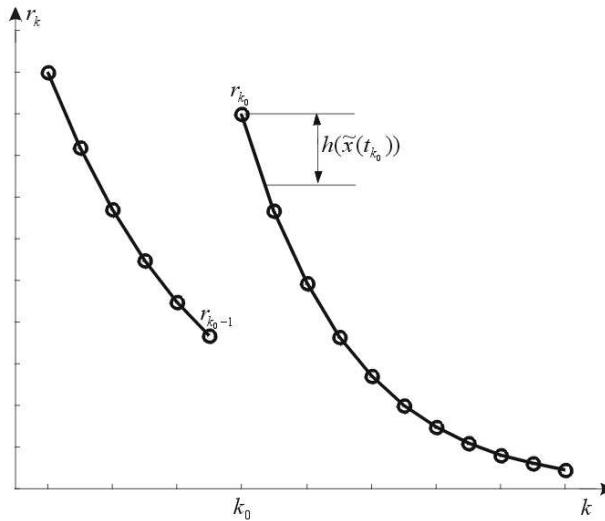
**WS3.** Mówimy, że schemat 2.2.1 ma własność **WS3** ze wskaźnikiem  $k_0$ , jeżeli istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że nierówność

$$|x^k(t)| \leq \varphi(r_k) \quad (2.18)$$

jest spełniona dla wszystkich wskaźników  $k \geq k_0$  oraz wszystkich  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .  $\square$

Łatwo zauważyc, że prawdziwe są następujące implikacje:

- (i) mocna własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0 \Rightarrow$  zwykła własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0$
- (ii) mocna własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \Rightarrow$  zwykła własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$   
 $\Rightarrow$  słaba własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0$ .



Rys. 2.3. Możliwe zachowanie ciągu  $r_k$  w przypadku, gdy schemat 2.2.1 ma własność **WS2a**.

Od tej chwili zakładamy, że spełnione są wszystkie założenia odnośnie prawej strony równań modelu (2.1) i obiektu (2.3) oraz problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  przyjęte w punktach 2.1 i 2.2 niniejszego rozdziału.

**Lemat 2.3.1.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma własność **WS1** (mocną własność **WS1**) ze wskaźnikiem  $k_0$ , to ma zwykłą własność **WS2** (mocną własność **WS2**) ze wskaźnikiem  $k_0$ .

*Dowód:* Pokażemy, że całka w (2.16) ma niezerowe oszacowanie dolne. Schemat 2.2.1 generuje trajektorie takie, że  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ . Z twierdzenia 2.1.1 wynika, że  $|x^k(t)| \leq M_1 \exp(\hat{L}T_k)$ , dla  $t \in [t_k, t_k + T_k]$ . Z (2.16) wynika, że ciąg  $r_k$  nie rośnie dla  $k \geq k_0$ .

Ponieważ  $T_k \leq r_{k_0} + T_{\min} < \infty$ , to wszystkie trajektorie  $x^k$  są ograniczone przez wspólną stałą. Funkcja  $f$  jest ciągła, zatem wszystkie pochodne  $\dot{x}^k = f(x^k, u^k, p_0)$  są także ograniczone przez wspólną stałą  $M > 0$ . Wynika stąd, że

$$\max(0, |\tilde{x}(t_k)| - M(t - t_k)) \leq |x^k(t)|, \quad t \geq t_k.$$

Funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , zatem musi być

$$\alpha_L(\max(0, |\tilde{x}(t_k)| - M(t - t_k))) \leq \alpha_L(|x^k(t)|).$$

Całkując tę nierówność w granicach  $[t_k, t_k + \delta]$  otrzymujemy oszacowanie

$$\int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt \geq \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(\max(0, |\tilde{x}(t_k)| - M(t - t_k))) dt. \quad (2.19)$$

Wyrażenie

$$\beta_L(|\tilde{x}(t_k)|) = \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(\max(0, |\tilde{x}(t_k)| - M(t - t_k))) dt \quad (2.20)$$

określa dla  $\delta > 0$  ciągłą i ściśle rosnącą funkcję normy warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k)$ . Ponieważ  $\beta_L(0) = 0$ , to  $\beta_L \in \mathcal{K}$ . Na mocy (2.16), (2.19) i (2.20) otrzymujemy

$$r_{k+1} \leq r_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_L(|x^k(t)|) dt \leq r_k - \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|).$$

Przyjmując  $h(\tilde{x}(t_k)) = \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|)$  otrzymujemy nierówność (2.17), co kończy dowód.  $\square$

**Lemat 2.3.2.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0$ , to ma również własność **WS3** ze wskaźnikiem  $k_0$ .

*Dowód:* Pokażemy, że spełnione są założenia lematu 2.1.1. Z (2.16) wynika, że

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_L(|x^k(t)|) dt \leq r_k, \quad k \geq k_0.$$

Schemat 2.2.1 generuje trajektorie takie, że  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ . Z twierdzenia 2.1.1 wynika, że  $|x^k(t)| \leq M_1 \exp(\hat{L}T_k)$  dla  $t \in [t_k, t_k + T_k]$ . Ponieważ  $T_k \leq r_{k_0} + T_{\min} < \infty$ , to wszystkie trajektorie  $x^k$  są ograniczone przez wspólną stałą. Funkcja  $f$  jest ciągła, zatem wszystkie pochodne  $\dot{x}^k = f(x^k, u^k, p_0)$  są także ograniczone przez wspólną stałą. Ponieważ funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , to na mocy lematu 2.1.1 wnioskujemy, że istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że  $|x^k(t)| \leq \varphi(r_k)$  dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \geq k_0$ .  $\square$

**Twierdzenie 2.3.1 (o stabilności schematu 2.2.1).**

- a. Jeżeli schemat 2.2.1 ma słabą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$  oraz własność **WS3** ze wskaźnikiem  $k_0$ , to jest on słabo globalnie asymptotycznie stabilny.
- b. Jeżeli dodatkowo  $k_0 = 0$ , to schemat ten jest globalnie asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa.

*Dowód:* **a.** Ponieważ zakłócenia nie występują i estymacja stanu jest dokładna, to  $\tilde{x}(t_k) = x^k(t_k) = \hat{x}(t_k) = x^*(t_k)$ . W przedziale czasu  $[0, k_0\delta]$ , trajektoria  $x^*$  jest ograniczona. W chwili  $k_0\delta$  znajdujemy  $\omega$ -suboptimalne rozwiązanie problemu  $P(t_{k_0}, \varepsilon_{k_0}, \tilde{x}(t_{k_0}))$ . Rozwiążaniu temu odpowiada skończona wartość  $r_{k_0}$ . Bezpośrednio z własnością **WS2** (zob. wzór (2.17)) i z konstrukcji algorytmu wynika, że ciąg  $r_{k_0+i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , jest nierosnący i ograniczony od dołu, a zatem jest zbieżny. Ponieważ każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego, to z własnością **WS2** mamy

$$0 \leq h(\tilde{x}(t_k)) \leq r_k - r_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

A zatem  $h(\tilde{x}(t_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Na mocy własności **WS3** istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że

$$|x^k(t)| \leq \varphi(r_k) \text{ dla } t \in [t_k, t_k + \delta], \quad k \geq k_0. \quad (2.21)$$

Ponieważ ciąg  $r_k$  jest nierosnący dla  $k \geq k_0$ , to z (2.21) wynika, że ciąg  $\tilde{x}(t_k) = x^k(t_k)$  jest ograniczony. Funkcja  $h$  jest ciągła oraz  $h(0) = 0$  i  $h(y) > 0$  dla  $y \neq 0$ . Wynika stąd, że warunek  $h(\tilde{x}(t_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  implikuje  $\tilde{x}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . (Uwaga: gdyby ciąg  $\tilde{x}(t_k)$  nie był ograniczony, to na ogół nie byłby zbieżny do zera). Procedura  $\Pi$  jest  $\omega$ -suboptimalna (zob. def. 2.2.2), zatem  $r_k \leq \omega(|\tilde{x}(t_k)|)$ , gdzie  $\omega \in \mathcal{K}$ . Ponadto na mocy (2.21) mamy  $|x^k(t)| \leq \varphi(\omega(|\tilde{x}(t_k)|))$ . Ponieważ przy braku zakłóceń dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  zachodzi równość  $x^k(t) = x^*(t)$ , to  $|x^*(t)| \leq \varphi(\omega(|\tilde{x}(t_k)|))$ , dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Przechodząc do granicy  $k \rightarrow \infty$  otrzymujemy  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x^*(t)| = 0$ . A zatem schemat 2.2.1 jest SGAS.

**b.** Ponieważ schemat 2.2.1 ma słabą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 = 0$ , to ciąg  $r_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  nie rośnie. Z (2.21) i z definicji  $\omega$ -suboptimalności (def. 2.2.2) mamy

$$|x^k(t)| \leq \varphi(r_k) \leq \varphi(r_0) \leq \varphi(\omega(|\tilde{x}(0)|)), \text{ gdzie } \varphi \circ \omega \in \mathcal{K}.$$

Ponieważ przy braku zakłóceń dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  zachodzi równość  $x^k(t) = x^*(t)$  oraz  $\tilde{x}(t_k) = x^*(t_k)$ , to  $|x^*(t)| \leq \varphi(\omega(|x^*(0)|))$  dla wszystkich  $t \geq 0$ , co dowodzi, że schemat 2.2.1 jest stabilny. Z punktu **a** twierdzenia przy  $k_0 = 0$  wynika, że schemat 2.2.1 jest SGAS. A zatem schemat 2.2.1 jest GAS.  $\square$

**Twierdzenie 2.3.2 (o stabilności schematu 2.2.1).**

- a.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$ , to jest on słabo globalnie asymptotycznie stabilny.
- b.** Jeżeli dodatkowo  $k_0 = 0$ , to schemat ten jest globalnie asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa.

*Dowód:* Ponieważ schemat 2.2.1 ma własność **WS1**, to z lematów 2.3.1 i 2.3.2 wynika, że ma zwykłą (a zatem i słabą) własność **WS2** oraz własność **WS3**. Teza wynika natychmiast z twierdzenia 2.3.1.  $\square$

### Komentarz

Z twierdzeń 2.3.1 i 2.3.2 wynika, że stabilny algorytm predykcyjny należy konstruować w taki sposób, aby wskaźnik jakości malał w kolejnych krokach, przy czym wskaźnik ten powinien stanowić pewnego rodzaju miarę odległości trajektorii  $x^k$  od celu (własność **WS3**).

O tym, że algorytmy posiadające własności **WS1–3** rzeczywiście istnieją, przekonamy się w rozdziałach 3 i 4. Własności **WS1** i **WS2** są analogiczne do warunku ujemnej określoności pochodnej funkcjonału Lapunowa w klasycznej teorii stabilności (zob. np. Demidowicz 1972). Własność **WS2** jest słabsza niż własność **WS1**. Fundamentalnym wymaganiem jest ograniczoność trajektorii  $x^k$ . Spełnienie tego wymagania gwarantowane jest przez warunki Lipschitza oraz poprzez żądanie, aby  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$ . Jeżeli skądinął wiadomo, że trajektorie są ograniczone, to globalny warunek Lipschitza względem  $x$  może być zastąpiony warunkiem lokalnym. Znaczenie warunku końcowego  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$  można wyrazić nieco nieprecyzyjnie stwierdzając, że regulator musi „widzieć” cel. Optymalność nie jest warunkiem koniecznym stabilności. Ilościowe kryterium wcześniejszego przerwania obliczeń podane w punkcie 6 schematu 2.2.1, pozwala unikać nadmiernej liczby iteracji w końcowej fazie optymalizacji. Jest oczywiste, że nadmierne odejście od optymalności nie jest wskazane ze względu na cel sterowania (wyrażany przez wskaźnik jakości), jednak niewielka utrata optymalności pozwala – zdaniem autora – znaczaco odciążyć algorytm optymalizacji, zwłaszcza w obecności zakłóceń. W przypadku nominalnym należy w algorytmie wybrać  $\mu = 1$ . Przypadek  $\mu < 1$  ma znaczenie w obecności zakłóceń.

## 2.4. Odporność algorytmu na zakłócenia i błędy modelowania

Zajmiemy się teraz badaniem odporności schematu 2.2.1.

**Definicja 2.4.1** (*odporność schematu 2.2.1*). Jeżeli dla dowolnej liczby  $\gamma > 0$  można dobrać liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , takie że każda trajektoria  $x^*$  wygenerowana przez schemat 2.2.1 spełnia relację

$$\exists \bar{t}(x^*) \quad \forall t \geq \bar{t}(x^*) : |x^*(t)| \leq \gamma,$$

to schemat 2.2.1 nazywamy odpornym.  $\square$

Prawa strona równania obiektu (2.3) spełnia założenia twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania od parametru i warunku początkowego (Palczewski 1999). Zatem dla dowolnej liczby  $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$  istnieją liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , takie że rozwiązanie  $x^k : [t_k, t_k + T_k] \rightarrow R^n$ , gdzie  $T_k \geq T_{\min}$ , równania (2.1) z warunkiem początkowym  $\tilde{x}(t_k)$  i sterowaniem dopuszczalnym  $u^k : [t_k, t_k + T_k] \rightarrow U$  oraz rozwiązanie równania (2.3) z warunkiem początkowym  $x^*(t_k)$  i z tym samym sterowaniem, spełniają na odcinku  $[t_k, t_{k+1}]$  warunek  $|x^k(t) - x^*(t)| < \tilde{\varepsilon}_0$ . Założymy, że schemat 2.2.1 ma zwykłą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 = 0$ . Na mocy tego założenia procedura  $\Pi$  wygeneruje sterowanie dopuszczalne  $u^{k+1}$ , takie że

$$J(u^{k+1}, T_{k+1}, x^k(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1}) \leq J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|). \quad (2.22)$$

Ponieważ  $J(u^{k+1}, T_{k+1}, x^k(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1})$  zależy w sposób ciągły od  $x^k(t_{k+1})$ , to zastępując stan  $x^k(t_{k+1})$  stanem przewidywanym  $\tilde{x}(t_{k+1})$  wnioskujemy, że dla dowolnej liczby  $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$  istnieje liczba  $\alpha_1 > 0$  taka, że warunek

$$|\tilde{x}(t_{k+1}) - x^k(t_{k+1})| < \alpha_1, \quad (2.23)$$

implikuje nierówność

$$J(u^{k+1}, T_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1}) < J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) + \tilde{\varepsilon}_1. \quad (2.24)$$

W chwili  $t_{k+1}$  (rys. 2.2) stan obiektu wynosi  $x^*(t_{k+1})$ , natomiast stan przewidywany jest równy  $\tilde{x}(t_{k+1})$  i jest on na ogół różny od stanu  $x^k(t_{k+1})$ , uzyskanego na podstawie rozwiązania równania (2.1) z warunkiem początkowym  $\tilde{x}(t_k)$  i sterowaniem  $u^k$ . Odległość pomiędzy stanem  $\tilde{x}(t_{k+1})$  i stanem  $x^k(t_{k+1})$ , występującą w warunku (2.23), można uczynić dowolnie małą, wybierając odpowiednio małe liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ . Korzystając z (2.22) i (2.24) otrzymujemy

$$J(u^{k+1}, T_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1}) \leq J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) + \tilde{\varepsilon}_1 - \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|) \quad (2.25)$$

Położymy  $\varepsilon > 0$  oraz  $\tilde{\varepsilon}_0 \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{\varepsilon}_1 \leq \varepsilon$ . Na mocy ciągłej zależności rozwiązań równań (2.1) i (2.3) od parametrów i warunków początkowych wnioskujemy, że dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  takie, że zachodzi nierówność

$$J(u^{k+1}, T_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1}) \leq J(u^k, T_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) + \varepsilon - \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|) \quad (2.26)$$

Korzystając z definicji ciągu  $r_k$  (zob. wzór (2.14)) możemy napisać

$$r_{k+1} < r_k + \varepsilon - \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|). \quad (2.27)$$

Wzór (2.27) określa możliwe zachowanie wskaźnika jakości w następnym kroku czasowym. Liczba  $\varepsilon$  reprezentuje wpływ zakłóceń na zmiany wskaźnika jakości. Jeżeli  $\varepsilon < \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|)$ , to istnieje para  $(u^{k+1}, T_{k+1})$ , taka że wskaźnik jakości w następnym kroku zmaleje. W przeciwnym przypadku może nie istnieć para  $(u^{k+1}, T_{k+1})$ , gwarantująca zmniejszenie wskaźnika jakości w następnym kroku. Należy wówczas zagwarantować możliwie najmniejszą wartość wskaźnika jakości w kroku  $k+1$ . Przypuśćmy teraz, że  $\mu \in (0, 1)$  oraz dla pewnego  $k \geq 0$  spełniona jest nierówność

$$0 < \varepsilon \leq (1 - \mu)\beta_L(|\tilde{x}(t_k)|). \quad (2.28)$$

Wówczas z (2.27) wynika, że

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu\beta_L(|\tilde{x}(t_k)|), \quad (2.29)$$

Gdybyśmy ustalili liczbę  $\varepsilon > 0$  i znaleźli odpowiadające jej liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , to proces obliczania sterowania w algorytmie 2.2.1 mógłby być przerywany po znalezieniu rozwiązania  $\omega$ -suboptimalnego gwarantującego spełnienie nierówności (2.27). Wskaźnik jakości malałby wówczas dla wszystkich  $\tilde{x}(t_k)$  spełniających warunek  $\varepsilon < \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|)$ . Ponieważ na ogół nie znamy liczb  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  odpowiadających zadanej liczbie  $\varepsilon > 0$ , to jako warunek wcześniejszego zakończenia obliczeń w algorytmie 2.2.1, przyjmujemy spełnienie nierówności (2.29).

**Wniosek 2.4.1.** Jeżeli schemat 2.2.1 ma zwykłą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$  oraz dla pewnego  $k \geq k_0$  spełniona jest nierówność (2.28), to istnieją liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  takie, że procedura  $\Pi$  może wygenerować rozwiązanie  $\omega$ -suboptimalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , spełniające warunek (2.29).  $\square$

Zachodzi następujące

**Twierdzenie 2.4.1** (*o odporności schematu 2.2.1*). Jeżeli schemat 2.2.1 ma zwykłą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$ , własność **WS3** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$  oraz  $\mu \in (0, 1)$ , to schemat 2.2.1 jest odporny.

*Dowód:* Będziemy badać zachowanie trajektorii  $x^k(t)$ . Niech  $\varepsilon \in (0, E_{\max})$ , gdzie  $E_{\max} = (1 - \mu) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \beta_L(\xi) > 0$ . Ponadto niech  $\bar{K}_\varepsilon$  będzie kulą domkniętą o środku w zerze i promieniu  $R_0(\varepsilon) = \beta_L^{-1}(\varepsilon(1 - \mu)^{-1})$ , gdzie  $\beta_L^{-1}$  jest funkcją odwrotną do  $\beta_L$ . Przypuśćmy, że ciąg  $\tilde{x}(t_k)$  pozostaje zawsze na zewnątrz kuli  $\bar{K}_\varepsilon$ , tzn.

$$|\tilde{x}(t_k)| > \beta_L^{-1}(\varepsilon(1 - \mu)^{-1}) \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Z (2.30) i z wniosku 2.4.1 wynika, że dla każdego  $\varepsilon \in (0, E_{\max})$  istnieją liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , takie że procedura  $\Pi$  może wygenerować rozwiązanie  $\omega$ -suboptymalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , spełniające warunek (2.29). Ze wzorów (2.14), (2.15), (2.29) i (2.30) oraz z własności **WS2** wynika, że przy odpowiednio małych liczbach  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  wyrazy ciągu  $r_k$  będą spełniać nierówności

$$0 \leq r_{k+1} \leq r_k - \mu \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|) \leq r_k - \frac{\mu \varepsilon}{1 - \mu} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Po skończonej ilości kroków wyrazy ciągu  $r_k$  musiałyby przyjmować wartości ujemne, co jest sprzeczne z definicją tego ciągu. Istnieje zatem taki wskaźnik  $k \geq 0$ , że

$$|\tilde{x}(t_k)| \leq \beta_L^{-1}(\varepsilon(1 - \mu)^{-1}).$$

Ponieważ procedura  $\Pi$  jest  $\omega$ -suboptymalna, to z definicji 2.2.2 oraz z ostatniej nierówności mamy oszacowanie wskaźnika jakości

$$r_k \leq \omega(|\tilde{x}(t_k)|) \leq \omega(\beta_L^{-1}(\varepsilon(1 - \mu)^{-1})). \quad (2.31)$$

Przypuśćmy teraz, że na skutek działania zakłóceń stan przewidywany opuszcza kulę  $\bar{K}_\varepsilon$ , tzn.  $\tilde{x}(t_k) \in \bar{K}_\varepsilon$  oraz  $\tilde{x}(t_{k+1}) \notin \bar{K}_\varepsilon$ . Może się wówczas zdarzyć, że  $r_{k+1} > r_k$ , jednak z nierówności (2.27) wynika, że przyrosty ciągu  $r_k$  są mniejsze niż  $\varepsilon$ , tzn.

$$r_{k+1} < r_k + \varepsilon.$$

Ponieważ  $\tilde{x}(t_{k+1}) \notin \bar{K}_\varepsilon$ , to przy odpowiednio małych liczbach  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , następny wyraz tego ciągu musi spełniać nierówność

$$r_{k+2} \leq r_{k+1} - \mu \beta_L(|\tilde{x}(t_{k+1})|) \leq r_{k+1} - \frac{\mu \varepsilon}{1 - \mu} < r_k + \varepsilon - \frac{\mu \varepsilon}{1 - \mu} < r_k + \varepsilon.$$

Od tej chwili ciąg  $r_{k+i}$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , maleje aż do momentu, gdy  $\tilde{x}(t_{k+i}) \in \bar{K}_\varepsilon$ . Zatem wszystkie wyrazy ciągu  $r_{k+i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , spełniają oszacowanie

$$r_{k+i} < r_k + \varepsilon.$$

Korzystając z nierówności (2.31) mamy

$$r_{k+i} < \omega(\beta_L^{-1}(\varepsilon(1 - \mu)^{-1})) + \varepsilon. \quad (2.32)$$

Ponieważ schemat 2.2.1 ma własność **WS3**, to istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że

$$|x^{k+i}(t)| \leq \varphi(r_{k+i}). \quad (2.33)$$

Łacząc ze sobą nierówności (2.32) i (2.33) otrzymujemy

$$|x^{k+i}(t)| < \varphi(\omega(\beta_L^{-1}(\varepsilon(1-\mu)^{-1})) + \varepsilon) \text{ dla } i = 0, 1, 2, \dots$$

Jeżeli  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  są odpowiednio małe, to  $x^*$  i  $x^k$  są sobie bliskie, tzn.  $|x^*(t) - x^{k+i}(t)| < \varepsilon$  dla  $t \in [t_{k+i}, t_{k+i+1}]$ , a zatem

$$|x^*(t)| < \varphi(\omega(\beta_L^{-1}(\varepsilon(1-\mu)^{-1})) + \varepsilon) + \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \geq t_k.$$

Przyjmując

$$\rho(\varepsilon) = \varphi(\omega(\beta_L^{-1}(\varepsilon(1-\mu)^{-1})) + \varepsilon) + \varepsilon, \quad (2.34)$$

możemy napisać  $|x^*(t)| < \rho(\varepsilon)$  dla wszystkich  $t \geq t_k$ . Ponieważ  $\varphi, \omega \in \mathcal{K}$ , funkcja  $\beta_L^{-1}$  jest ciągła i ściśle rosnąca dla  $\varepsilon \in [0, E_{\max}]$  oraz  $\beta_L^{-1}(0) = 0$ , to funkcja  $\rho$  jest także ciągła i ściśle rosnąca dla  $\varepsilon \in [0, E_{\max}]$  oraz  $\rho(0) = 0$ . A zatem dla dowolnej liczby  $\gamma > 0$  istnieje liczba  $\varepsilon \in (0, E_{\max})$ , taka że  $\rho(\varepsilon) < \gamma$  oraz istnieją liczby  $\eta_a(\varepsilon), \eta_p(\varepsilon), \eta_w(\varepsilon), \eta_e(\varepsilon) > 0$  i  $\bar{t}(x^*)$ , takie że trajektoria  $x^*$  spełnia nierówność  $|x^*(t)| < \rho(\varepsilon) < \gamma$  dla wszystkich  $t \geq \bar{t}(x^*)$ .  $\square$

**Twierdzenie 2.4.2** (*o odporności schematu 2.2.1*). Jeżeli schemat 2.2.1 ma własność **WS1** (mocną własność **WS1**) ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$  oraz  $\mu \in (0, 1)$ , to schemat ten jest odporny.

*Dowód:* Ponieważ schemat 2.2.1 ma własność **WS1** (mocną własność **WS1**), to z lematów 2.3.1 i 2.3.2 wynika, że ma zwykłą (mocną) własność **WS2** oraz własność **WS3**. Teza wynika natychmiast z twierdzenia 2.4.1.  $\square$

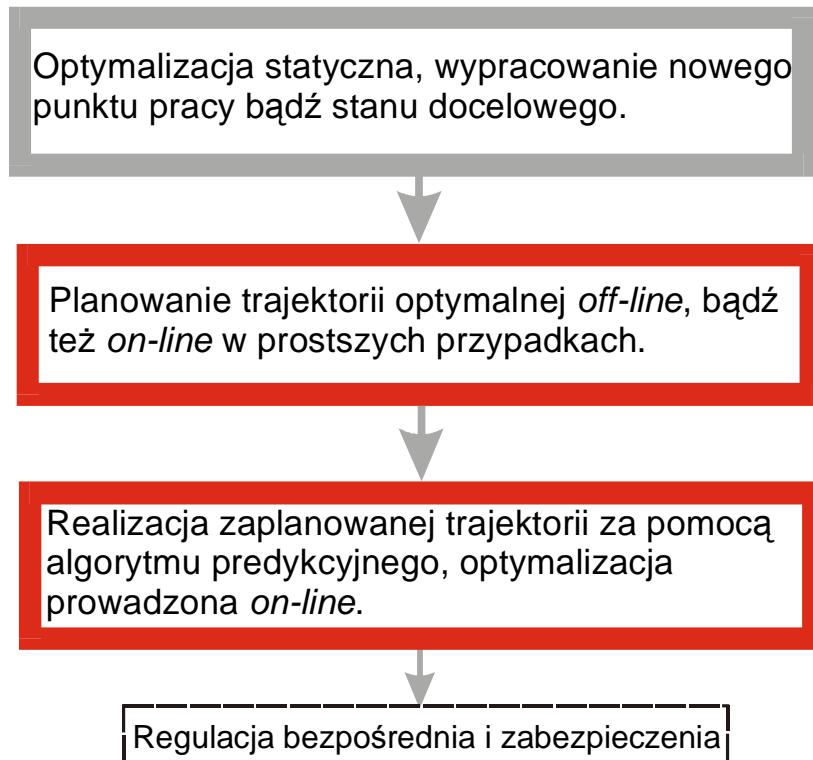
### Komentarz

Twierdzenia 2.4.1 i 2.4.2 określają warunki odporności schematu 2.2.1. Dowód twierdzenia 2.4.1 nie jest konstruktywny, ponieważ dla systemu nieliniowego nie jesteśmy w stanie określić relacji pomiędzy liczbami  $\eta_a, \eta_p, \eta_w, \eta_e$  oraz  $\gamma$ . Gdybyśmy taką relację znali, to wykorzystując oszacowania podane w dowodzie twierdzenia 2.4.1, można by podać jawną postać wzoru na  $\eta_a(\gamma), \eta_p(\gamma), \eta_w(\gamma), \eta_e(\gamma)$ . Sama definicja odporności różni się od spotykanych w literaturze (por. np. Sastry 1994, s. 221) i została skonstruowana na potrzeby tej pracy. Odporność jest konsekwencją własności **WS2** (zwykłej). Własność ta stanowi odpowiednik żądania, aby istniał funkcjonał Lapunowa, którego pochodna względem czasu obliczana na trajektoriach systemu jest ujemna (wszędzie poza zerem). Istnienie takiego funkcjonału implikuje odporność (por. np. Sastry 1994, tw. 5.3.1, s. 221, oraz tw. 1.5.1, s. 28). W dowodach zarówno stabilności jak i odporności, nie nakładamy na wskaźnik jakości żadnych dodatkowych warunków regularności, co jest istotnym osłabieniem założeń w stosunku do podejścia przedstawionego w pracy Findeisen (2003b).

Odporność opisana powyżej może być określona jako *inherent robustness*, co oznacza naturalną odporność (Mayne *et al.* 2000). W literaturze można napotkać sformułowania odpornych algorytmów NMPC, w których rozwiązuje się problem mini-maksowy, przy czym maksimum wskaźnika jakości brane jest po wszystkich możliwych zakłóceniami, a minimum po sterowaniach (Mayne *et al.* 2000, Fontes 2003b). Zadanie takie, w porównaniu z podejściem proponowanym w niniejszej pracy, ma na ogół dużo większą złożoność obliczeniową.

## 2.5. Rola algorytmu optymalizacji w sterowaniu predykcyjnym i planowaniu trajektorii

Dotychczasowe rozważania pozwalają sformułować wnioski odnośnie roli algorytmu optymalizacji dynamicznej w planowaniu trajektorii i sterowaniu predykcyjnym. Obiekty przemysłowe są zwykle sterowane i prowadzone w strukturze warstwowej (rys. 2.4). Warstwa nadzędna odpowiada za wyznaczenie optymalnego punktu pracy (optymalnego stanu ustalonego).



Rys. 2.4.

Szczegółową analizę metod wyznaczania punktów pracy można znaleźć w monografii Tatjewskiego (2002) oraz w pracach Brdysia (1986, 1994). Z doświadczeń autora wynika, że próby znalezienia rozwiązań optymalnych „na ślepo” w trybie *on-line* na ogół kończą się niepowodzeniem. Podobne stwierdzenie można znaleźć w pracy Findeisena i innych (2003a). Dlatego w drugim etapie następuje planowanie trajektorii optymalnej, przy użyciu algorytmu optymalizacji dynamicznej. Planowanie trajektorii wymaga na ogół dużego nakładu obliczeń i w bardziej skomplikowanych przypadkach musi być wykonane *off-line*. Często wyznacza się wiele trajektorii i sterowań optymalnych dla różnych warunków początkowych (Turnau 2002, Pesch 1989 a,b). Utworzona w ten sposób biblioteka podpowiadająca jest wykorzystywana w czasie pracy algorytmu predykcyjnego. Przy pracy w czasie rzeczywistym, algorytm optymalizacji ma za zadanie *on-line* wyznaczać  $\omega$ -suboptimalne rozwiązania kolejnych problemów optymalizacji. Ograniczenie czasu obliczeń wymaga maksymalnego odciążenia algorytmu optymalizacji. Jedną z możliwości jest przedstawiona powyżej koncepcja sterowań  $\omega$ -suboptimalnych. Obliczenia optymalizacyjne mogą być przerwane bez utraty stabilności, po uzyskaniu poprawy wskaźnika jakości, określonej w punkcie 6 algorytmu 2.2.1. W praktyce, obliczenia są przerywane tylko w jednym przypadku – gdy zostanie wyczerpany limit czasu.

### **Rozdział 3. Quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny ze zmiennym horyzontem i adaptacją wskaźnika jakości**

Obserwując celowe działania zwierząt i ludzi oraz rozmaite systemy biologiczne, można dojść do wniosku, że w układach tych cel sterowania osiągany jest w dwóch etapach. W pierwszym etapie podejmowane decyzje mają zagwarantować szybkie (czasooptymalne) dotarcie do pewnego otoczenia celu. W drugiej fazie – w miarę zbliżania się do celu – sterowanie staje się coraz bardziej precyzyjne (miękkie, oszczędne). Na tym etapie ważniejsza jest dokładność. Tym dwóm fazom sterowania odpowiadają dwa różne kryteria jakości. W pierwszej fazie istotny jest czas osiągnięcia celu. W drugim etapie istotna jest minimalizacja odchyłek stanu i sterowania. Powyższe spostrzeżenie można też uzasadnić analizując wrażliwość układu sterowania na zakłócenia oraz niepewność parametrów modelu. Wiadomo (Turnau 2002), że sterowanie czasooptymalne jest bardzo wrażliwe na zakłócenia i błędy modelu. Największa wrażliwość występuje zwykle pod koniec procesu, gdy trajektoria leży na powierzchni przełączeń (Turnau 2002). Należy wówczas stosować sterowania uodpornione (Turnau *et al.* 2005). Wiadomo również, że algorytmy liniowo-kwadratowe (*LQR* – *Linear Quadratic Regulator*) oraz ich nieliniowe wersje (*NLQR* – *Nonlinear Quadratic Regulator*) są mniej wrażliwe na błędy modeli i zakłócenia. Można zatem oczekwać, że przechodząc w odpowiednio regularny sposób od sterowania czasooptymalnego do sterowania stabilizującego, osiągniemy kompromis pomiędzy czasem osiągnięcia celu oraz wrażliwością. W podejściu zaproponowanym przez Michalską (1993), regulator liniowy przejmuje sterowanie, gdy stan systemu osiągnie odpowiednio „małe” otoczenie celu. Poza tym otoczeniem sterowanie obliczane jest w oparciu o rozwiązanie ZSO ze swobodnym horyzontem. W pracy z roku 1997 Michalska badała algorytm z przesuwany horyzontem, w którym funkcja celu zawiera dwa składniki. Pierwszy z nich reprezentuje czas osiągnięcia celu, natomiast drugi składnik stanowi karę nałożoną na stan końcowy w ZSO. Odpowiedni dobór funkcji kary umożliwił sformułowanie ZSO bez ograniczeń stanu końcowego. W tym rozdziale przedstawiamy rozwinięcie powyższego podejścia dla zadań ze stanem docelowym i proponujemy nowy quasi-czasooptymalny algorytm z przesuwany horyzontem (*QTO-RHC* – *Quasi Time Optimal Receding Horizon Control*), realizujący opisaną powyżej ideę zmiany kryteriów sterowania. W podejściu tym, funkcja celu zawiera trzy składniki. Pierwszy składnik reprezentuje czas sterowania i stanowi zmienną decyzyjną. Kiedy stan systemu osiągnie pewne otoczenie celu  $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$  (na ogół kulę o dowolnie zadanym promieniu), algorytm stopniowo „włącza” do wskaźnika jakości drugi człon, całkowy. Trzeci człon stanowi karę za niespełnienie warunku końcowego. Adaptacja wskaźnika jakości, polegająca na stopniowym „włączaniu” członu całkowego, umożliwia regularne przejście od sterowania zbliżonego do czasooptymalnego, do sterowania stabilizującego z całkowym (często kwadratowym) wskaźnikiem jakości. Wcześniejszego jezycie z trajektorii czasooptymalnej pozwala uniknąć dużej liczby przełączeń sterowania, występującej pod koniec procesu (por. np. Turnau 2002). Częste przełączenia sterowania od wartości maksymalnej do minimalnej oddziałują na ogólnie niekorzystnie na układy wykonawcze oraz są przyczyną drgań, rezonansów i awarii. Reguły adaptacji wskaźnika jakości gwarantują stabilność i odporność systemu zamkniętego. Algorytm dopuszcza rozwiązania suboptimalne, co umożliwia wcześniejszego zakończenie obliczeń i uniknięcie zbędnych iteracji w końcowej fazie procesu optymalizacji sterowania. W punkcie 3.1 podajemy algorytm QTO-RHC. W punktach 3.2 i 3.3 analizujemy własności algorytmu oraz dowodzimy jego stabilności i odporności. Na koniec pokazujemy przykłady sterowania systemami nieliniowymi. Będziemy przyjmować, że spełnione są założenia o problemach  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  i prawych stronach równania stanu, przyjęte w punktach 2.1 i 2.2.

### 3.1. Algorytm QTO-RHC

Niech  $\mathbf{B} \subset R^n$  będzie zbiorem zwartym i jednospójnym oraz niech  $\mathbf{B}$  zawiera pewną kulę otwartą o środku w zerze.

#### Algorytm 3.1.1 (QTO-RHC)

**Dane:**  $\delta, T_{\min}$  ( $T_{\min} \geq \delta > 0$ ), model obiektu (2.1), wskaźnik jakości (2.7), estymata warunku początkowego  $\hat{x}(0)$ , funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , zbiór  $\mathbf{B}$ , liczby  $\mu \in (0, 1]$ ,  $\xi \in (0, 1)$  (np.  $\xi = 0,1$ ),  $\varepsilon_{\min} \in (0, 1]$  (np.  $\varepsilon_{\min} = 0,01$ ).

**Inicjalizacja:** Podstaw  $k := 0$ ,  $t_k := k\delta$ ,  $\tilde{x}(t_k) := \hat{x}(0)$ ,  $\varepsilon_k := 0$ . Jeżeli  $\hat{x}(0) \in \mathbf{B}$ , to podstaw  $\varepsilon_k := \varepsilon_{\min}$ . Oblicz rozwiązanie początkowe  $(u^0, T_0, x^0) = \Pi(0, \varepsilon_0, \hat{x}(0))$ .

1. W przedziale czasu  $[t_k, t_k + \delta]$  stosuj do obiektu sterowanie  $u^k$  oraz równolegle wykonuj czynności 2–5.
2. Wyznacz estymatę stanu  $\hat{x}(t_k)$ .
3. Wyznacz na podstawie równania (2.13) predykcję krótkoterminową  $\tilde{x}(t_{k+1})$ .
4. Podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon_k$  oraz oblicz  $r_k = J(u^k, T^k, \tilde{x}(t_k)) - T_{\min}$ .
  - a. Jeżeli  $\varepsilon_k = 0 \wedge T_k \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$ , to podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon_{\min}$  i idź do 5.
  - b. Jeżeli  $\hat{x}(t_k) \in \mathbf{B}$ , to podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \min(\varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k, 1)$ , gdzie

$$\Delta\varepsilon_k = (1 - \xi) \frac{\delta + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k} L(x^k, u^k) dt} \quad \text{dla } T_k \geq T_{\min} + \delta, \quad (3.1)$$

$$\Delta\varepsilon_k = (1 - \xi) \frac{T_k - T_{\min} + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k} L(x^k, u^k) dt + q(x^k(t_k + T_k))} \quad \text{dla } T_k \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]. \quad (3.2)$$

5. a. Jeżeli  $\varepsilon_{k+1} = 0$ , to za pomocą procedury  $\Pi$  spróbuj wyznaczyć rozwiązanie  $\omega$ -suboptymalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1}) = \Pi(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ , spełniające warunek  $r_{k+1} \leq r_k - \mu\delta$ .

5. b. Jeżeli  $\varepsilon_{k+1} > 0$ , to za pomocą procedury  $\Pi$  spróbuj wyznaczyć rozwiązanie  $\omega$ -suboptymalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1}) = \Pi(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ , spełniające warunek

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu \xi \varepsilon_{\min} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_L(|x^k(t)|) dt.$$

5. c. Jeżeli nie da się znaleźć rozwiązania  $\omega$ -suboptymalnego spełniającego warunki w punktach 5a lub 5b, to za  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$  podstaw możliwie najlepsze przybliżenie rozwiązania optymalnego.

6. Podstaw  $k := k + 1$ ,  $t_k := k\delta$  i idź do 1.

### Komentarz

Algorytm QTO-RHC łączy w sobie cechy algorytmu czasooptymalnego oraz klasycznego algorytmu predykcyjnego. W chwili początkowej wyznaczane jest sterowanie początkowe. Dopóki stan obiektu leży poza zbiorem  $\mathbf{B}$ , to algorytm wyznacza sterowania  $\omega$ -suboptimalne zbliżone do sterowania czasooptymalnego. W tej fazie współczynnik  $\varepsilon_k$  jest równy zeru i wykonywane są punkty 1, 2, 3, 4, 5a i 6. Ponieważ sterowanie wyznaczane jest na jeden krok naprzód, to do wykonania procedury  $\Pi(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$  wymagane jest wyznaczenie predykcji krótkoterminowej oraz współczynnika  $\varepsilon_{k+1}$ . Czynności te wykonywane są w punktach 3 i 4. Po pewnym czasie zachodzi jeden z warunków w punktach 4a lub 4b. Od tej chwili algorytm przechodzi do fazy stabilizacji, współczynnik  $\varepsilon_k$  przyjmuje pierwszy raz dodatnią wartość i rozpoczyna się adaptacja wskaźnika jakości. W fazie tej wykonywane są punkty 1, 2, 3, 4b, 5b i 6.

### 3.2. Stabilność algorytmu QTO-RHC

Zauważmy, że istnieje pełna analogia pomiędzy algorytmem 3.1.1 i schematem 2.2.1 z rozdziału 2. Wykażemy, że przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu, algorytm 3.1.1 jest GAS. Jeżeli zakłócenia nie występują, to  $x^*(t_k) = \hat{x}(t_k) = x^k(t_k) = \tilde{x}(t_k)$  oraz  $x^*(t) = x^k(t)$  dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Rozpoczniemy od analizy działania algorytmu przy  $\varepsilon_k = 0$ .

**Lemat 3.2.1.** Jeżeli w algorytmie 3.1.1  $\varepsilon_k = 0$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ , to przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu spełniona jest nierówność

$$V(x^*(t_{k+1})) \leq r_k - \min(\delta, T_k - T_{\min}). \quad (3.3)$$

*Dowód:* Niech para  $(u^k, T_k)$  będzie rozwiązaniem  $\omega$ -suboptimalnym oraz niech para  $(u^{k+1}, T_{k+1})$  będzie rozwiązaniem  $P(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ . Założymy, że  $T_k - T_{\min} \geq \delta$ . Ponieważ  $(u^{k+1}, T_{k+1})$  minimalizuje  $J(u; T; x^*(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1})$ , to zastępując sterowanie  $\bar{u}^{k+1}$  przez sterowanie  $u^k$ , obcięte do przedziału  $[t_k + \delta, t_k + T_k]$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} V(x^*(t_{k+1})) &= \bar{T}_{k+1} - T_{\min} + q(\bar{x}^{k+1}(t_{k+1} + \bar{T}_{k+1})) \leq T_k - \delta - T_{\min} + q(x^k(t_k + T_k)) = \\ &= J(u^k, T_k, x^*(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min} - \delta = r_k - \delta. \end{aligned}$$

Jeżeli  $T_k - T_{\min} < \delta$ , to zastępując sterowanie  $\bar{u}^{k+1}$  przez sterowanie  $u^k$  obcięte do przedziału  $[t_k + (T_k - T_{\min}), t_k + T_k]$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} V(x^*(t_{k+1})) &= \bar{T}_{k+1} - T_{\min} + q(\bar{x}^{k+1}(t_{k+1} + \bar{T}_{k+1})) \leq T_k - (T_k - T_{\min}) - T_{\min} + q(x^k(t_k + T_k)) = \\ &= J(u^k, T_k, x^*(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min} - (T_k - T_{\min}) = r_k - (T_k - T_{\min}). \square \end{aligned}$$

**Lemat 3.2.2.** W algorytmie 3.1.1, przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu istnieje wskaźnik  $j \geq 0$  taki, że zachodzi co najmniej jeden z warunków:

$$(i) T_j \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta],$$

$$(ii) \hat{x}(t_j) \in \mathbf{B}.$$

*Dowód:* Założmy, że  $\hat{x}(0) \notin \mathbf{B}$  i  $T_0 \geq T_{\min} + \delta$ . Zatem dla pewnego  $k$ ,  $\varepsilon_k = 0$ ,  $\hat{x}(t_k) \notin \mathbf{B}$  i  $T_k \geq T_{\min} + \delta$ . Rozpatrzmy teraz rozwiązanie  $\omega$ -suboptimalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , spełniające warunek

$$r_{k+1} \leq V(x^*(t_{k+1})) + (1 - \mu) \min(\delta, T_k - T_{\min}).$$

Rozwiązanie takie istnieje, ponieważ założyliśmy, że istnieją rozwiązania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  oraz procedura  $\Pi$  jest  $\omega$ -suboptimalna. Na mocy lematu 3.2.1 otrzymujemy

$$r_{k+1} - (1 - \mu) \min(\delta, T_k - T_{\min}) \leq V(x^*(t_{k+1})) \leq r_k - \min(\delta, T_k - T_{\min}).$$

A zatem dla  $\varepsilon_k = 0$ , istnieją rozwiązania  $\omega$ -suboptimalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$  takie, że

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu \min(\delta, T_k - T_{\min}). \quad (3.3)$$

W  $k$ -tym kroku mamy

$$0 \leq r_k = T_k - T_{\min} + q(x^k(t_k + T_k)) \leq r_0 - \mu \sum_{i=0}^{k-1} \min(\delta, T_i - T_{\min}). \quad (3.4)$$

Ponieważ  $T_k \leq r_k + T_{\min}$ , to z twierdzenia 2.1.1 wynika, że  $|x^k(t)| \leq M_1 \exp(\hat{L}(r_k + T_{\min}))$ . Z (3.4) i ostatniej nierówności wynika, że w pewnej chwili  $j\delta$  horyzont  $T_j$  zmalaże na tyle, że  $T_j \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$  lub będzie spełniony warunek  $\hat{x}(t_j) \in \mathbf{B}$ .  $\square$

Mówiąc nieco nieprecyzyjnie: albo nie można już zmniejszyć horyzontu o  $\delta$ , albo osiągnięty został zbiór  $\mathbf{B}$ . Następujący wniosek podsumowuje dotychczasowe rozważania.

**Wniosek 3.2.1.** Przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu algorytm 3.1.1 ma następujące własności:

(i) istnieje wskaźnik  $k_0 \in N$ , taki że dla wszystkich  $k \geq k_0$  spełniony jest warunek

$$\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_k \leq 1,$$

(ii) warunek w punkcie 4a zachodzi tylko raz,

(iii) jeżeli  $\varepsilon_k = 0$  oraz  $T_k \geq T_{\min} + \delta$ , to istnieją rozwiązania  $\omega$ -suboptimalne gwarantujące spełnienie nierówności w punkcie 5a.

*Dowód:* (i) Jeżeli  $\hat{x}_0 \in \mathbf{B}$ , to w fazie inicjalizacji algorytmu mamy  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}$ . W przeciwnym wypadku teza wynika bezpośrednio z lematu 3.2.2 oraz z punktów 4a i b algorytmu. (ii) Wynika bezpośrednio z lematu 3.2.2 i z faktu, że  $\Delta\varepsilon_k \geq 0$ . (iii) Wynika bezpośrednio ze wzoru (3.3).  $\square$

Warunki stabilności algorytmu 3.1.1 określa następujące

**Twierdzenie 3.2.1 (o stabilności algorytmu QTO-RHC).** Przyjmijmy następujące założenia.

**1.** Rozwiązania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  istnieją dla wszystkich

$$(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k)) \in R_0^+ \times [0, 1] \times R^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**2.** Istnieje funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , taka że funkcja podcałkowa  $L$  we wskaźniku jakości (2.7) spełnia dla wszystkich  $(\xi, v) \in R^n \times R^m$  warunek

$$L(\xi, v) \geq \alpha_L(|\xi|). \quad (3.5)$$

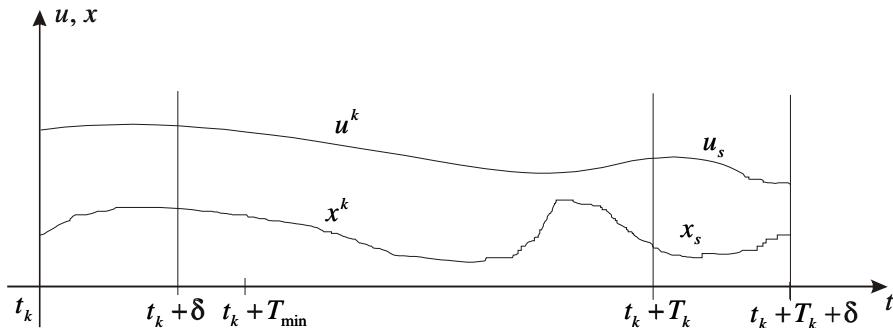
**3.** Dla każdego  $x_s(0) \in \Omega$  istnieje przedziałami ciągłe sterowanie  $u_s : [0, \delta] \rightarrow U$ , takie że trajektoria  $x_s$  systemu (2.1) wygenerowana przez to sterowanie pozostaje w zbiorze  $\Omega$  oraz spełniony jest warunek

$$\frac{d}{d\tau} q(x_s(\tau)) + L(x_s(\tau), u_s(\tau)) \leq 0, \quad \tau \in [0, \delta]. \quad (3.6)$$

Wówczas, przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu algorytm 3.1.1 jest GAS.

*Dowód:* Jeżeli  $\hat{x}(0) \notin \mathbf{B}$ , to  $\varepsilon_0 = 0$  i z wniosku 3.2.1 wynika, że istnieją sterowania  $\omega$ -suboptimalne gwarantujące spełnienie nierówności w punkcie 5a algorytmu. Współczynnik  $\varepsilon_k$  będzie równy zeru aż do osiągnięcia zbioru  $\mathbf{B}$ , bądź też do spełnienia warunku w punkcie 4a algorytmu. Z wniosku 3.2.1 wynika, że istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$  taki, że dla wszystkich  $k \geq k_0$  jest  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{\min}$ . Jeżeli  $\hat{x}(0) \in \mathbf{B}$ , to  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{\min}$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Wykażemy, że dla wszystkich  $k \geq k_0$  istnieją rozwiązania  $\omega$ -suboptimalne gwarantujące spełnienie nierówności w punkcie 5b algorytmu. Będziemy rozważać dwa przypadki.

**Przypadek A.** Niech trójka  $(u^k, T_k, x^k)$  będzie rozwiązaniem  $\omega$ -suboptimalnym oraz niech  $T_k \geq T_{\min} + \delta$  (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Struktura czasowa sterowania dla przypadku A.

Przy warunku początkowym  $x^*(t_k)$  mamy

$$r_k = T_k - T_{\min} + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + T_k} L(x^k, u^k) dt + q(x^k(t_k + T_k)). \quad (3.7)$$

Po czasie  $\delta$  wykonujemy nową optymalizację z warunkiem początkowym  $x^*(t_{k+1})$ . Funkcja wartości jest równa

$$V(x^*(t_{k+1})) = \bar{T}_{k+1} - T_{\min} + \varepsilon_{k+1} \int_{t_k + \delta}^{t_k + \bar{T}_{k+1} + \delta} L(\bar{x}^{k+1}, \bar{u}^{k+1}) dt + q(\bar{x}^{k+1}(t_k + \bar{T}_{k+1} + \delta)). \quad (3.8)$$

Ponieważ para  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1})$  minimalizuje  $J(u, T, x^*(t_{k+1}), \varepsilon_{k+1})$ , to zastępując tę parę rozwiązaniem suboptimalnym  $(u^k, T_k, x^k)$  obciętym do przedziału  $[t_k + \delta, t_k + T_k]$  otrzymujemy nierówność

$$V(x^*(t_{k+1})) \leq T_k - T_{\min} - \delta + \varepsilon_{k+1} \int_{t_k + \delta}^{t_k + T_k} L(x^k, u^k) dt + q(x^k(t_k + T_k)). \quad (3.9)$$

Szacując różnicę  $V(x^*(t_{k+1})) - r_k$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} V(x^*(t_{k+1})) - r_k &\leq -\delta + \mathcal{E}_{k+1} \int_{t_k+\delta}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt + q(x^k(t_k + T_k)) - \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt - q(x^k(t_k + T_k)) \leq \\ &\leq -\delta - \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k+\delta} L(x^k, u^k) dt + \Delta \mathcal{E}_k \int_{t_k+\delta}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt. \end{aligned}$$

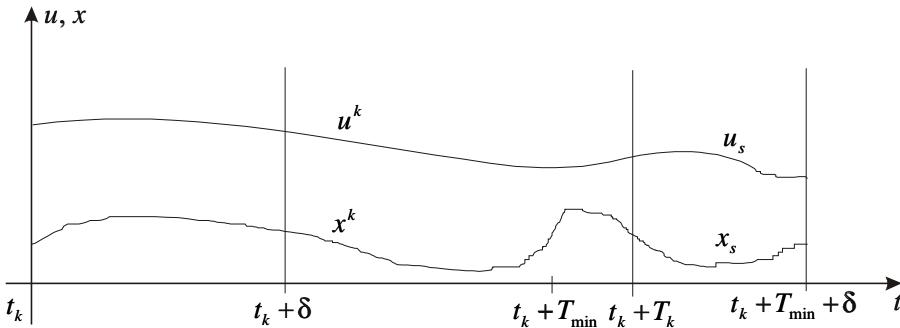
Podstawiając za  $\Delta \mathcal{E}_k$  wyrażenie (3.1) oraz korzystając z założenia 2 otrzymujemy

$$V(x^*(t_{k+1})) - r_k \leq -\xi \delta - \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k+\delta} L(x^k, u^k) dt \leq -\xi \delta - \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k+\delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt < 0. \quad (3.10)$$

**Przypadek B.** Niech trójka  $(u^k, T_k, x^k)$  będzie rozwiązaniem  $\omega$ -suboptymalnym oraz niech  $T_k \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$  (rys. 3.2). W tym przypadku nie można już zmniejszyć horyzontu o  $\delta$ . Niech sterowanie  $u_s$  spełnia założenie 3. Rozważmy następujące sterowanie

$$u_s^k(t) = \begin{cases} u^k(t), & t \in [t_k + \delta, t_k + T_k], \\ u_s(t), & t \in [t_k + T_k, t_k + T_{\min} + \delta]. \end{cases}$$

Sterowanie to jest określone na odcinku  $[t_k + \delta, t_k + T_{\min} + \delta]$ , a odpowiadająca mu trajektoria  $x_s^k$  spełnia warunek  $x_s^k(t_k + T_{\min} + \delta) \in \Omega$ .



Rys. 3.2. Struktura czasowa sterowania dla przypadku B.

Po czasie  $\delta$  wykonujemy nową optymalizację z warunkiem początkowym  $x^*(t_{k+1})$ . Funkcja wartości jest określona równością (3.8). Ponieważ para  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1})$  minimalizuje  $J(u, T, x^*(t_{k+1}), \mathcal{E}_{k+1})$ , to zastępując tę parę parą  $(u_s^k, T_{\min})$  otrzymujemy nierówność

$$V(x^*(t_{k+1})) \leq \mathcal{E}_{k+1} \int_{t_k+\delta}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt + \mathcal{E}_{k+1} \int_{t_k+T_k}^{t_k+T_{\min}+\delta} L(x_s, u_s) dt + q(x_s(t_k + T_{\min} + \delta)).$$

Szacując różnicę  $V(x^*(t_{k+1})) - r_k$  mamy

$$\begin{aligned} V(x^*(t_{k+1})) - r_k &\leq -(T_k - T_{\min}) + (\mathcal{E}_k + \Delta \mathcal{E}_k) \int_{t_k+\delta}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt + (\mathcal{E}_k + \Delta \mathcal{E}_k) \int_{t_k+T_k}^{t_k+T_{\min}+\delta} L(x_s, u_s) dt + \\ &+ q(x_s(t_k + T_{\min} + \delta)) - \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k+T_k} L(x^k, u^k) dt - q(x^k(t_k + T_k)) = \end{aligned}$$

$$= -(T_k - T_{\min}) - \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt + \Delta \mathcal{E}_k \left( \int_{t_k + \delta}^{t_k + T_k} L(x^k, u^k) dt + \int_{t_k + T_k}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt \right) + \\ + \mathcal{E}_k \int_{t_k + T_k}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt + q(x_s(t_k + T_{\min} + \delta)) - q(x^k(t_k + T_k)).$$

Z założenia 3 twierdzenia oraz z faktu, że  $\mathcal{E}_k \in [0, 1]$ , wynika nierówność

$$\mathcal{E}_k \int_{t_k + T_k}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt + q(x_s(t_k + T_{\min} + \delta)) - q(x^k(t_k + T_k)) \leq 0.$$

Otrzymujemy zatem

$$V(x^*(t_{k+1})) - r_k \leq -(T_k - T_{\min}) - \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt + \Delta \mathcal{E}_k \left( \int_{t_k + \delta}^{t_k + T_k} L(x^k, u^k) dt + \int_{t_k + T_k}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt \right). \quad (3.11)$$

Z założenia 3 twierdzenia wynika nierówność

$$\int_{t_k + T_k}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt \leq q(x^k(t_k + T_k)).$$

Z równości (3.2) oraz z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\Delta \mathcal{E}_k = (1 - \xi) \frac{T_k - T_{\min} + \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^i, u^i) dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k + T_k} L(x^k, u^k) dt + q(x^k(t_k + T_k))} \leq (1 - \xi) \frac{T_k - T_{\min} + \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k + T_{\min} + \delta} L(x_s, u_s) dt}.$$

Podstawiając powyższą nierówność do (3.11) dostajemy

$$V(x^*(t_{k+1})) - r_k \leq -\xi(T_k - T_{\min}) - \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} L(x^k, u^k) dt \leq -\xi(T_k - T_{\min}) - \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt < 0. \quad (3.12)$$

Z nierówności (3.10) i (3.12) wynika, że dla dowolnego rozwiązania  $\omega$ -suboptymalnego  $(u^k, T_k, x^k)$  istnieje rozwiązanie optymalne  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1}, \bar{x}^{k+1})$ , takie że

$$V(x^*(t_{k+1})) - r_k \leq -\xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt < 0. \quad (3.13)$$

Biorąc teraz rozwiązanie  $\omega$ -suboptymalne  $(u^{k+1}, T_{k+1}, x^{k+1})$ , takie że

$$r_{k+1} \leq V(x^*(t_{k+1})) + (1 - \mu) \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt,$$

otrzymujemy na mocy (3.13)

$$r_{k+1} - (1 - \mu) \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt \leq V(x^*(t_{k+1})) \leq r_k - \xi \mathcal{E}_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt,$$

czyli

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu \xi \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(|x^k(t)|) dt.$$

Zatem dla wszystkich  $k \geq k_0$  istnieją sterowania  $\omega$ -suboptymalne gwarantujące spełnienie nierówności w punkcie 5b algorytmu. Ale to oznacza, że algorytm 3.1.1 ma własność **WS1** z pewnym wskaźnikiem  $k_0$ . Ponadto, jeżeli  $\hat{x}(0) \in \mathbf{B}$ , to  $k_0 = 0$ . Korzystając z twierdzenia 2.3.2 widzimy, że algorytm ten jest GAS. Twierdzenie zostało udowodnione.  $\square$

### Komentarz

Twierdzenie 3.2.1 podaje warunki stabilności algorytmu QTO-RHC. Z dowodu wynika, że rozwiązywanie  $\omega$ -suboptymalne w kroku  $k$ -tym, może posłużyć do wyznaczenia rozwiązywania  $\omega$ -suboptymalnego w kroku  $k+1$ . Założenie 2 nakłada ograniczenia na funkcję podcałkową  $L$  we wskaźniku jakości. Dla przykładu funkcja  $L(x, u) = (x_1 - x_2)^2 + u^2$  nie spełnia tego założenia, natomiast często spotykany kwadratowy wskaźnik jakości  $L(x, u) = x^\top W x + u^\top R u$ ,  $W = W^\top > 0$ ,  $R = R^\top > 0$  spełnia założenie 2, przy czym  $\alpha_L(|x|) = \lambda_{\min}(W) |x|^2$ . Znacznie trudniejsze do spełnienia jest założenie 3. Jeżeli istnieje prawo sterowania  $u = K(x)$ , takie że funkcja  $q$  jest lokalnie funkcjonałem Lapunowa systemu (2.1) ze sterowaniem  $u = K(x)$ , to zbiór  $\Omega$  może być wybrany jako zbiór poziomcowy funkcjonału  $q$  (por. Chen i Algoer 1998, Jadbababie 2001, Fontes 2000). Jeżeli system (2.1) nie jest stabilizowalny (tzn. jego linearyzacja w otoczeniu zera nie jest stabilizowalna), to problem znacznie się komplikuje. Jako zbiór  $\Omega$  wybiera się wówczas pewien zbiór złożony z tych punktów przestrzeni stanu, z których możliwe jest sprowadzenie systemu do zera. Szczegóły takiego podejścia podaje Fontes (2000, 2003a). Problem wyboru zbioru  $\Omega$  oraz funkcji  $q$  dla systemów stabilizowalnych zostanie szczegółowo omówiony w rozdziale piątym.

### 3.3. Odporność algorytmu QTO-RHC

Odporność algorytmu 3.1.1 będziemy analizować metodami opisanymi w punkcie 2.4. W początkowej fazie działania (o ile  $x_0 \notin \mathbf{B}$  i  $T_k \geq T_{\min} + \delta$ ), algorytm generuje sterowanie zblżone do czasooptymalnego, minimalizując wskaźnik jakości (2.7), przy  $\varepsilon_k = 0$ . Z konstrukcji algorytmu oraz z dowodu lematu 3.2.2 wynika, że dopóki  $\varepsilon_k = 0$ , to przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu algorytm generuje sterowania takie, że spełniona jest nierówność

$$r_{k+1} \leq r_k - \mu \delta. \quad (3.14)$$

Rozumując analogicznie jak w punkcie 2.4 można pokazać, że dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , istnieją dostatecznie małe liczby  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , takie że wyrazy ciągu  $r_k$  spełniają nierówność

$$r_{k+1} \leq r_k + \varepsilon - \mu \delta. \quad (3.15)$$

Jeżeli  $\varepsilon < \mu \delta$ , to z powyższej nierówności wynika, że dla dostatecznie małych liczb  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$ , istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$  taki, że  $T_{k_0} \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$  lub  $\hat{x}(t_{k_0}) \in \mathbf{B}$ . Warunki w punkcie 4 algorytmu gwarantują, że  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{\min}$  dla wszystkich  $k > k_0$ . Mamy następujące

**Twierdzenie 3.3.1** (o odporności algorytmu QTO-RHC). Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.2.1 oraz  $\mu \in (0, 1)$ , to algorytm QTO-RHC jest odporny.

*Dowód:* Wykazaliśmy już, że w obecności zakłóceń i błędów estymacji stanu, istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$  taki, że  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{\min}$  dla wszystkich  $k > k_0$ . Z dowodu twierdzenia 3.2.1 wynika, że algorytm 3.1.1 ma własność **WS1** ze wskaźnikiem  $k_0 + 1$ . Teza wynika natychmiast z twierdzenia 2.4.2.  $\square$

### Komentarz

Dopuszczalna amplituda zakłóceń zapewniająca zmniejszanie wskaźnika jakości w początkowej fazie sterowania (dla  $\varepsilon_k = 0$ ), jest określona przez dość restrykcyjny warunek  $\varepsilon < \mu \delta$ . Niespełnienie tego warunku może spowodować, że trajektoria  $x^*$  oddali się dowolnie daleko od początku układu współrzędnych. Powyższe rozumowanie prowadzi do wniosku, że w początkowej fazie działania (dopóki  $\varepsilon_k = 0$ ), odporność algorytmu 3.1.1 na zakłócenia i błędy modelowania może być mała. Wniosek ten pokrywa się z wynikami dotyczącymi sterowania czasooptymalnego, uzyskanymi przez Turnaua i Korytowskiego (Turnau 2002, Korytowski 2002), którzy pokazali i potwierdzili eksperymentalnie, że wrażliwość stanu końcowego w zadaniu czasooptymalnym może być nawet nieskończona. Duża wrażliwość występuje zwykle w pobliżu celu i dlatego należy wówczas zrezygnować ze strategii czasooptymalnej, dołączając do wskaźnika jakości człon całkowy. Moment zejścia z trajektorii czasooptymalnej może być wybrany poprzez odpowiedni dobór horyzontu minimalnego, zbioru **B** oraz okresu wyliczania sterowania  $\delta$ . Wielkości te należy dobrą eksperymentalnie w zależności od konkretnego zadania sterowania. Zbiór **B** powinien być na tyle obszerny, aby trajektoria stanu obiektu nie opuszczała **B** na skutek działania zakłóceń. Na tym zakończymy rozważania o stabilności i odporności i przejdziemy do przykładów obliczeniowych.

### 3.4. Przykłady sterowania systemami nieliniowymi

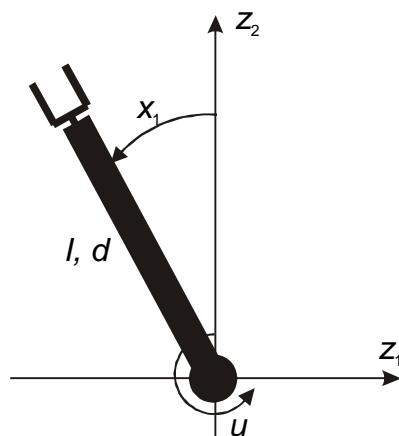
Aby wyjaśnić działanie algorytmu i przerwać nieco nużace rozważania teoretyczne, w niniejszym podrozdziale przeanalizujemy pięć przykładów sterowania systemami nieliniowymi. Jako zadania przykładowe wybrano następujące problemy:

1. Sterowanie ramieniem manipulatora.
2. Sterowanie układem lewitacji magnetycznej.
3. Sterowanie wahadłem na wózku.
4. Sterowanie manipulatorem o dwóch stopniach swobody.
5. Sterowanie przepływowym reaktorem chemicznym.

W powyższych przykładach zadanie czasoptymalne oraz zadanie stabilizacji stanowią naturalnie nasuwające się zagadnienia sterowania. Przykłady 2-5 celowo wybrano w taki sposób, aby prawa strona równań stanu nie spełniała globalnego warunku Lipschitza. Można zatem podejrzewać, że warunek ten nie jest nazbyt istotny. W opinii autora znacznie większe znaczenie ma ograniczoność rozwiązań i nieskończony czas ucieczki. W przypadku systemów ze skończonym czasem ucieczki algorytm QTO-RHC może nie działać. Przykłady zostały uszeregowane pod względem rosnącej złożoności obiektów sterowania. Przykład pierwszy ma charakter wprowadzający. Obiekty z przykładów 2, 3 i 5 są rzeczywistymi obiektami laboratoryjnymi. Wahadło na wózku oraz reaktor przepływowego są znany w literaturze, silnie nieliniowymi obiektami testowymi (Turnau 2002, Chen 1995, Tyagunov 2004). Algorytm predykcyjny opisany w rozdziałach 2 i 3 wymaga na ogół estymatora stanu. Ponieważ teoria estymacji stanu w systemach nieliniowych znacznie wykracza poza ramy tej pracy, w tym miejscu zaznaczamy jedynie, że we wszystkich przykładach stosowany był estymator typu *high-gain* (Bornard 1991, Busawon 2000, Gauthier 1994). W symulacjach uwzględniono dwa przypadki: nominalny i zakłócony. W pierwszym z nich, estymacja stanu jest dokładna oraz nie występują zakłócenia i błędy modelowania. W drugim przypadku symulowane są zakłócenia i błędy modelowania oraz estymacja stanu nie jest dokładna. Algorytm optymalizacji, użyty do wyliczania sterowania, zostanie opisany w rozdziale 6.

#### Przykład 3.4.1. Ramię manipulatora

Rozważmy na początek elementarny przykład ramienia manipulatora pracującego w płaszczyźnie pionowej i napędzanego za pomocą silnika elektrycznego.



Rys. 3.3. Ramię manipulatora.

Pomijając tarcie i dynamikę silnika oraz zakładając, że moment wytwarzany przez silnik jest proporcjonalny do napięcia podawanego na sterownik silnika, można przyjąć, że dynamika pewnego hipotetycznego ramienia manipulatora opisana jest układem równań:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \sin x_1 + ku,$$

przy czym kąt  $x_1$  jest wyrażony w radianach, prędkość kątowa  $x_2$  w rad/s, a moment napędowy  $u$  w Nm. Przyjęto, że parametr  $k = 0,3$  rad/(Nm·s<sup>2</sup>).

Zadanie sterowania polega na przeprowadzeniu ramienia z dolnego stabilnego punktu równowagi  $x_0 = [-\pi, 0]^\top$  do górnego niestabilnego położenia równowagi  $x_0 = [0, 0]^\top$ . Maksymalna i minimalna wartość sterowania wynosiły odpowiednio  $u_{\max} = 1$ ,  $u_{\min} = -1$ . Zgodnie z konwencją przyjętą na początku rozdziału, zadanie to przekształcono na zadanie ze swobodnym horyzontem i stanem końcowym. Wskaźnik jakości miał postać daną wzorem (2.7), przy czym funkcja podcałkowa  $L$  oraz funkcja kary za niespełnienie warunku końcowego były dane równościami

$$L(x, u) = \|x\|_W^2 + \|u\|_R^2, \quad q = \|x\|_H^2, \quad W = I_{2 \times 2}, \quad R = 10, \quad H = \begin{bmatrix} 22,3721 & 22,2721 \\ 22,2721 & 22,2721 \end{bmatrix}.$$

Zbiór końcowy  $\Omega$  był dany równością  $\Omega = \{x \in R^2 : x^\top H x \leq 0,1\}$ . Dodatnio określona macierz  $H$  oraz zbiór końcowy  $\Omega$  wyznaczono metodami opisanymi w rozdziale piątym. Wybór macierzy  $H$  i zbioru  $\Omega$  gwarantuje spełnienie założeń twierdzeń 3.2.1 i 3.3.1. W eksperymentach numerycznych przyjęto współczynnik  $\xi = 0,1$ . Zbiór  $\mathbf{B}$ , w którym następuje adaptacja wskaźnika jakości, był dany równością  $\mathbf{B} = \{x \in R^2 : |x_i| \leq 0,5, i = 1, 2\}$ . Założono, że błędy w generacji momentu napędowego w silniku nie przekraczają 10% jego maksymalnej wartości. Błędy te symulowano poprzez dodanie do sterowania wyliczonego przez algorytm szumu o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 0,1 Nm. Założono, że maksymalne błędy estymacji kąta  $x_1$  nie przekraczają wartości  $2\pi/4096$  rad, podyktowanej rozdzielcością typowego 12-bitowego enkodera. Przyjęto, że prędkość kątowa ramienia manipulatora jest estymowana z dokładnością do 0,02 rad/s. Błędy estymacji stanu symulowano dodając do wyjść obiektu symulowanego szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą  $2\pi/4096$  rad dla pomiaru kąta oraz 0,02 rad/s dla pomiaru prędkości kątowej. Symulator obiektu był osobną, napisaną w języku C procedurą całkowania równej różniczkowych, wykorzystującą do generacji zakłóceń generatory liczb pseudolosowych (zob. Press 1992). We wszystkich eksperymentach numerycznych okres wyliczania sterowania wynosił  $\delta = 0,1$  s. Optymalizacja miała charakter przybliżony i była przerywana po spełnieniu warunków w punktach 5a,b algorytmu 3.1.1.

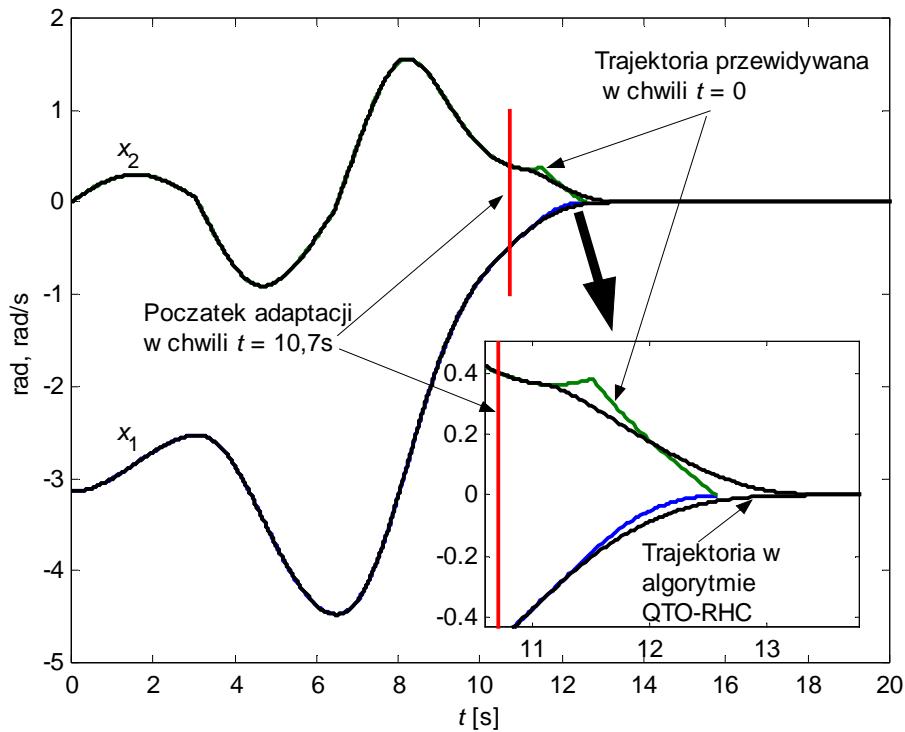
W pierwszym eksperymencie numerycznym zakłócenia nie występowały. Rys. 3.4-5 przedstawiają trajektorię i sterowanie generowane przez algorytm QTO-RHC oraz trajektorię i sterowanie przewidywane w chwili początkowej. Przyjęto, że stan docelowy jest osiągnięty, jeżeli odchylenie pierwszej zmiennej stanu od zera jest mniejsze niż 0,5 stopnia dla przypadku nominalnego i 2 stopnie dla przypadku zakłóczonego oraz odchylenie prędkości od zera jest mniejsze niż 0,5 stopnia/s w przypadku nominalnym i 1,5 stopnia/s w przypadku zakłóconym. Przewidywany w chwili początkowej czas osiągnięcia celu wynosił 12,553 s. Po czasie około 10,7 s trajektoria osiąga zbiór  $\mathbf{B}$  i następuje adaptacja wskaźnika jakości. Wskutek wprowadzenia do wskaźnika jakości członu całkowego, czas osiągnięcia celu wydłużył się do około 13,2 s (około 5% więcej w porównaniu z czasem optymalnym). Mechanizm adaptacji usunął ze sterowania ostatnie przełączenie i zastąpił sterowanie bang-bangowe sterowaniem leżącym wewnątrz ograniczeń. Pierwsze dwa czasy przełączeń nie

uległy zmianie w porównaniu ze sterowaniem przewidywanym w chwili początkowej. Wskaźnik jakości monotonicznie malał, a horyzont malał aż do momentu osiągnięcia minimalnej dopuszczalnej wartości.

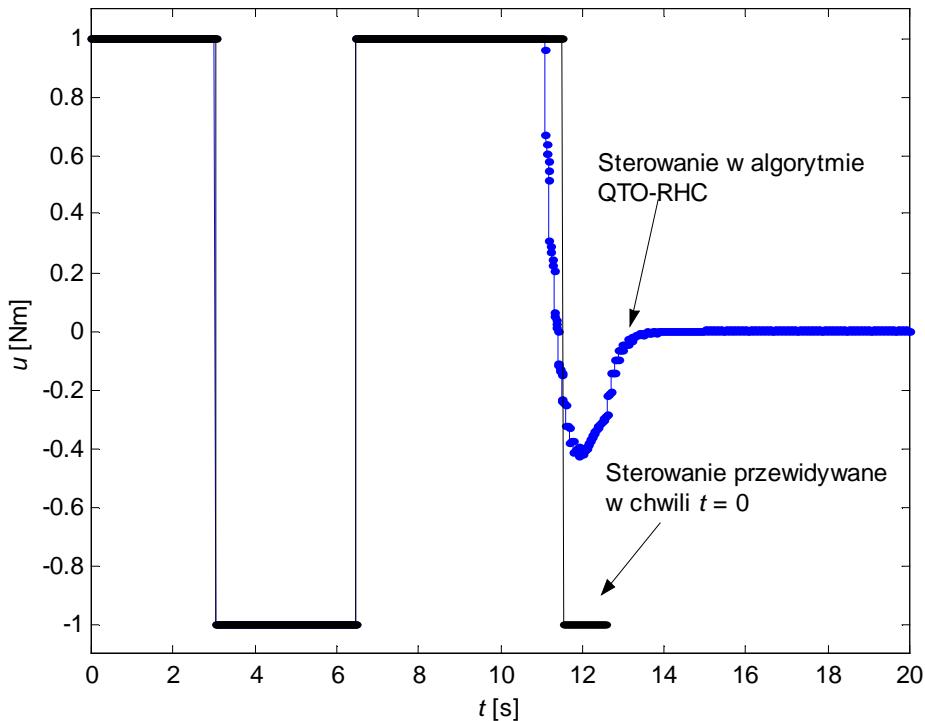
W drugim eksperymencie symulowano zakłócenia w generacji sterowań i błędy estymacji stanu. Na rys. 3.7-8 pokazano trajektorię i sterowanie generowane przez algorytm oraz trajektorię i sterowanie przewidywane w chwili początkowej. Na skutek działania zakłóceń trajektoria generowana przez algorytm różni się od trajektorii przewidywanej już w początkowej fazie sterowania. Czas osiągnięcia zbioru **B** był większy niż w przypadku nominalnym i wynosił 11,1 s. Czas osiągnięcia celu wynosił ok. 14,5 s (ok. 15% więcej w porównaniu z czasem optymalnym). Wystąpiła nieznaczna zmiana czasów przełączeń sterowania. Adaptacja wskaźnika jakości odbywała się podobnie jak w przypadku nominalnym, jednakże na skutek obecności zakłóceń i błędów estymacji stanu wskaźnik jakości nie malał już monotonicznie. Horyzont optymalny malał (lecz nie monotonicznie), aż do osiągnięcia wartości minimalnej. Odchylenie standardowe drugiej zmiennej stanu w końcowej fazie eksperymentu wynosiło 0,45 °/s (odchylenie standardowe dla pierwszej zmiennej stanu było kilkakrotnie mniejsze).

Wyłączenie mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości spowodowało większe odchylenia trajektorii od zera w końcowej fazie sterowania oraz generację bardzo dużej liczby przełączeń sterowania, co może być przyczyną szybkiego zużywania się elementów wykonawczych manipulatora, nadmiernego przegrzewania silników oraz wzbudzania drgań w układzie. Na rys. 3.10–11 pokazano trajektorie i sterowania przy wyłączonym mechanizmie adaptacji. Odchylenie standardowe drugiej zmiennej stanu w końcowej fazie eksperymentu wynosiło 0,63 °/s i było o ok. 41% większe, niż w przypadku włączonego mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości. Całka z kwadratu sterowania, która często stanowi miarę energii zużywanej przez układ sterowania, była w przypadku wyłączonego mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości ponad 25 razy większa, niż analogiczna całka obliczona dla przypadku z włączonym mechanizmem adaptacji wskaźnika jakości. **Powyższe dwa wyniki stanowią istotne uzasadnienie celowości stosowania mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości w czasie trwania procesu sterowania.**

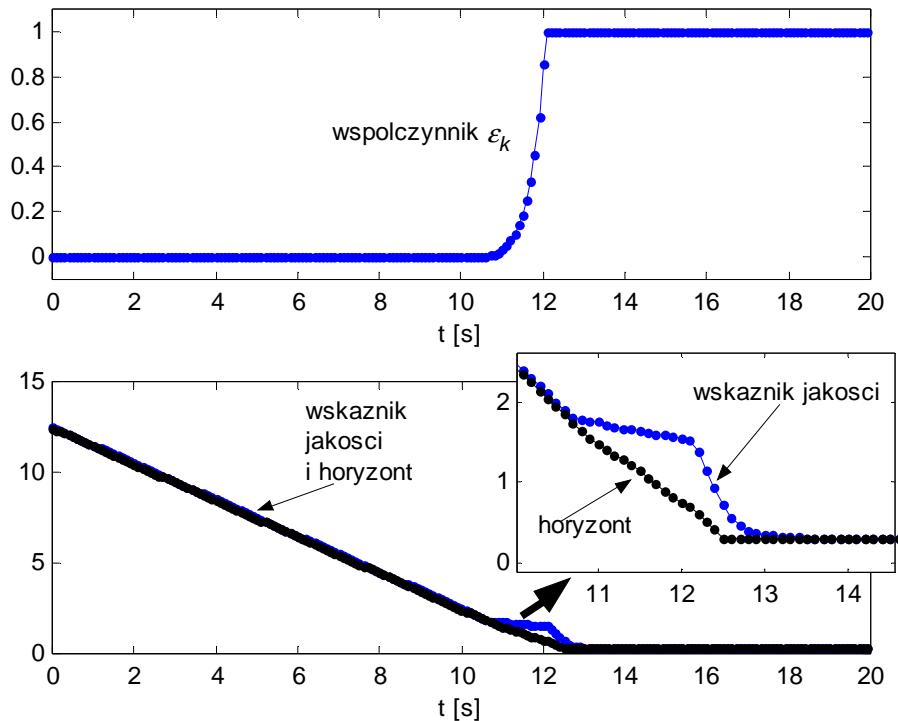
W ostatnim eksperymencie rozważono przypadek  $\mathbf{B} = R^n$ , w którym adaptacja wskaźnika jakości odbywa się od samego początku procesu sterowania. Na rys. 3.12-14 pokazano wyniki symulacji przy zakłóceniami i błędach estymacji stanu. Czas osiągnięcia celu wynosił ok. 15 s i był o ok. 20% dłuższy niż czas optymalny. Widoczne są znaczące różnice pomiędzy trajektorią generowaną przez algorytm i trajektorią przewidywaną w chwili początkowej. Adaptacja wskaźnika jakości przebiegała bardzo wolno w początkowej fazie sterowania i kończyła się po ok. 10 s. W sterowaniu nie występowały już przełączenia, ale tzw. quasi-przełączenia, które zostaną dokładniej omówione w rozdziale 6. Horyzont malał w przybliżeniu liniowo, aż do osiągnięcia minimalnej wartości, natomiast tempo zmniejszania się wskaźnika jakości było istotnie zależne od zmian współczynnika  $\varepsilon_k$ . Przypadek ten można uznać za pośredni pomiędzy minimalizacją czasu a minimalizacją kwadratowego wskaźnika jakości.



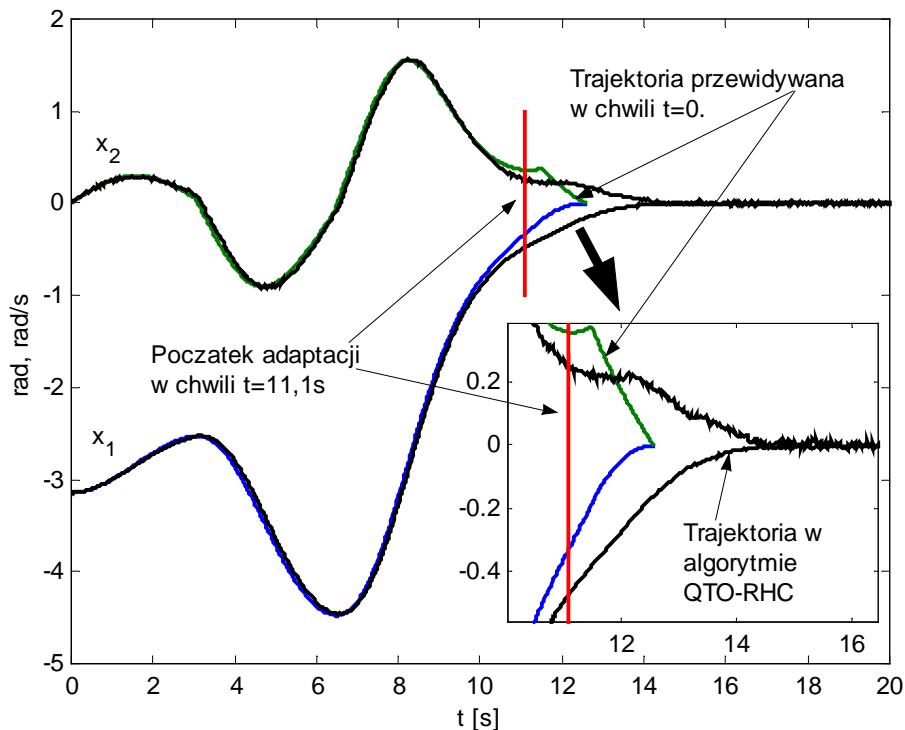
Rys. 3.4. Algorytm QTO–RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku bez zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości obie trajektorie pokrywają się.



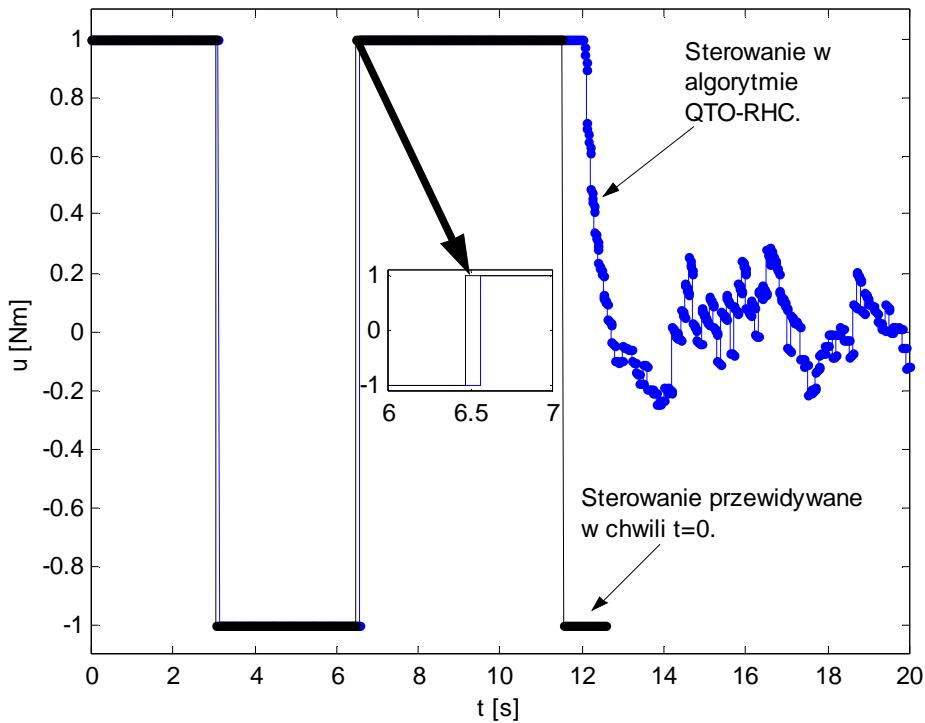
Rys. 3.5. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku bez zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości oba sterowania pokrywają się.



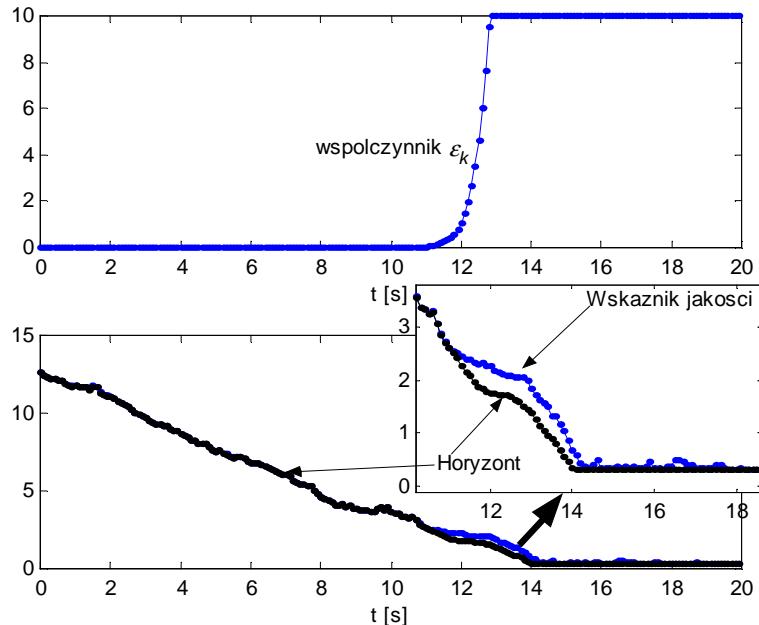
Rys. 3.6. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości w poszczególnych iteracjach. Przypadek nominalny.



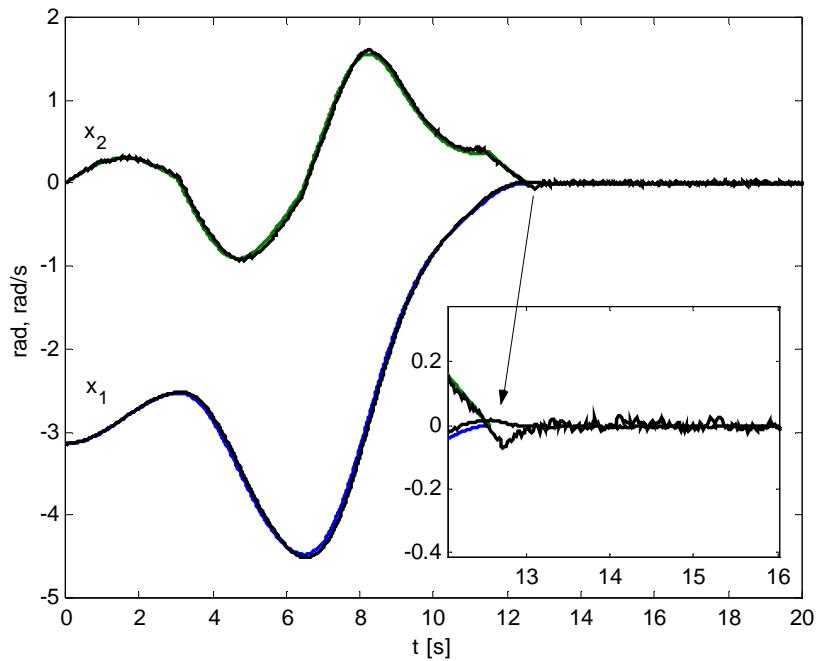
Rys. 3.7. Algorytm QTO–RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku zakłóceń w generacji sterowania oraz przy błędnej estymacji stanu. Odchylenie standardowe drugiej zmiennej stanu w przedziale czasu 15–20 s wynosi  $0,45^{\circ}/s$ .



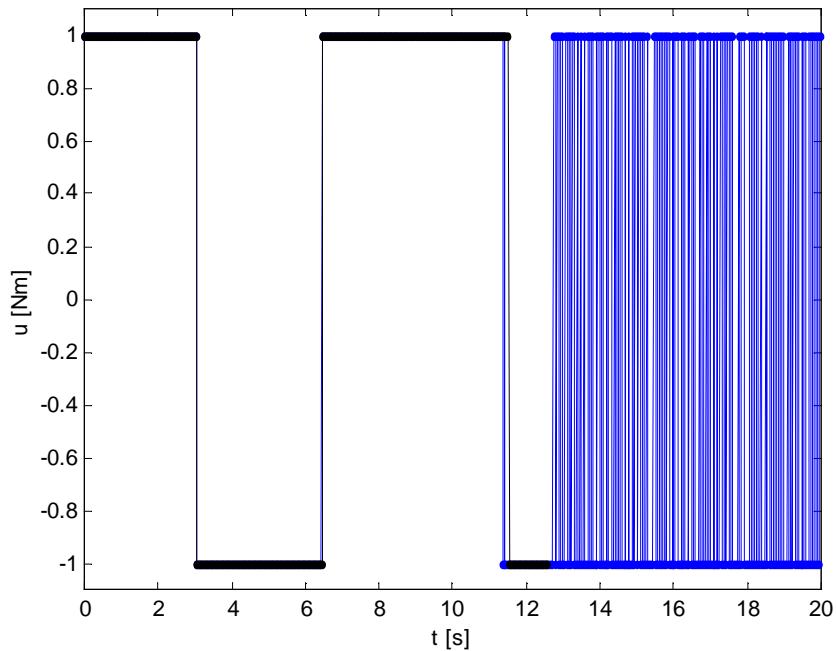
Rys. 3.8. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku zakłóceń w generacji sterowania oraz przy błędnej estymacji stanu. Na rysunku pokazano też zmianę czasów przełączeń, spowodowaną obecnością zakłóceń i błędów estymacji stanu. Całka z kwadratu sterowania w przedziale czasu 15-20 s wynosi około 0,2.



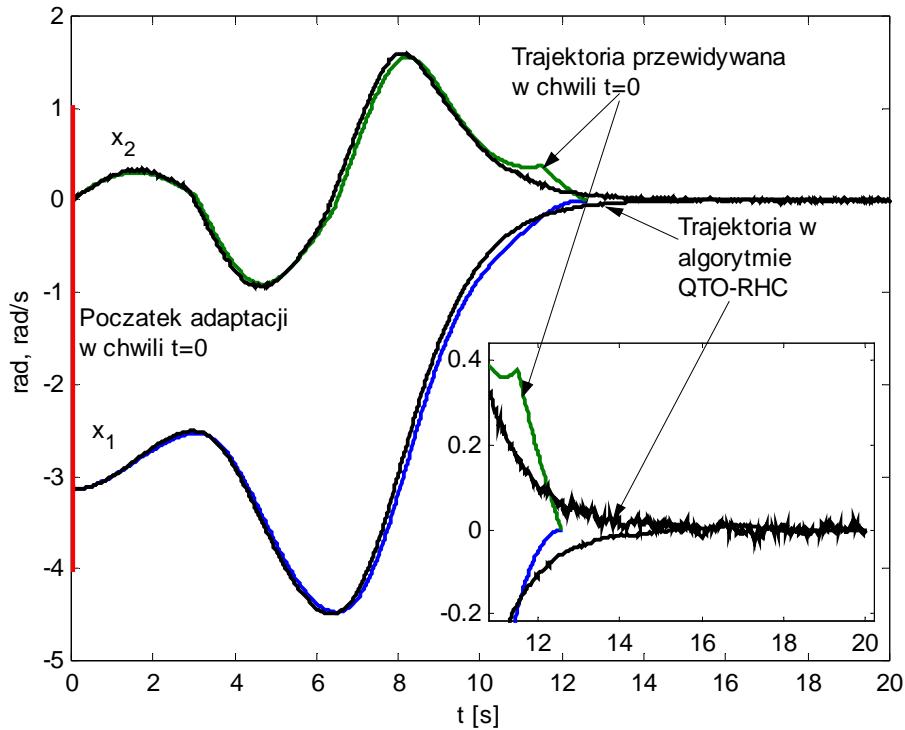
Rys. 3.9. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości w poszczególnych iteracjach w przypadku zakłócanym. Wskutek obecności zakłóceń wskaźnik jakości nie maleje monotonicznie.



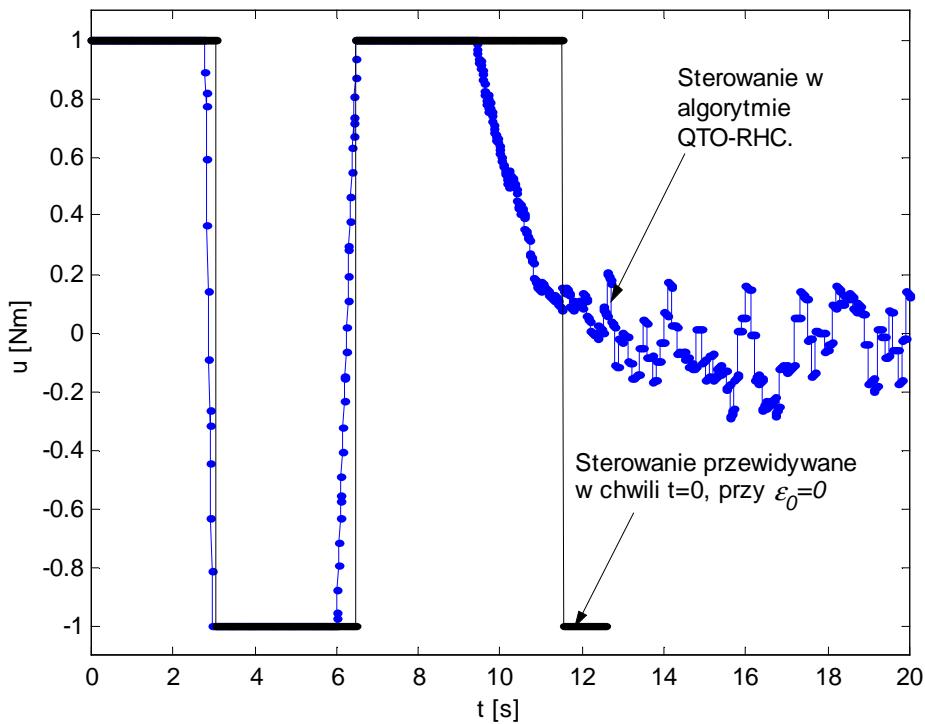
Rys. 3.10. Trajektoria generowana przez algorytm QTO-RHC z wyłączeniem mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości, przy występowaniu zakłóceń i błędnej estymacji stanu. Odchylenie standardowe drugiej zmiennej stanu w przedziale czasu 15-20 s wynosi  $0,63^{\circ}/s$  i jest o 41% większe niż analogiczne odchylenie obliczone dla przypadku złączonym mechanizmem adaptacji.



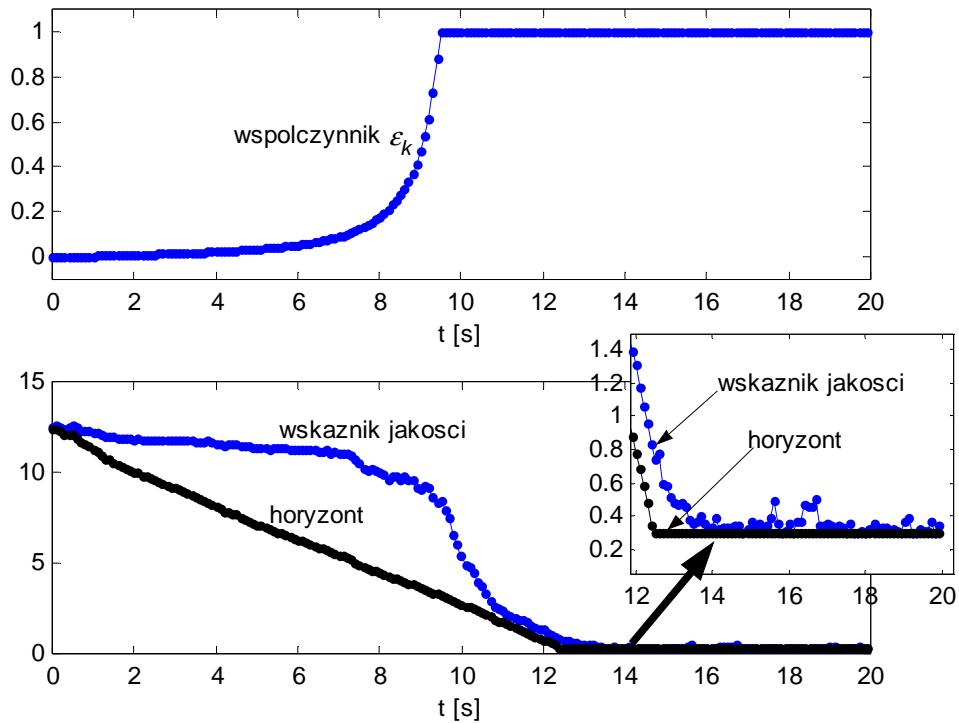
Rys. 3.11. Sterowanie generowane przez algorytm QTO-RHC z wyłączeniem mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości, przy występowaniu zakłóceń i błędnej estymacji stanu. Całka z kwadratu sterowania w przedziale czasu 15-20 s wynosi ok. 5,0 i jest ponad 25 razy większa niż analogiczna całka obliczona dla przypadku złączonym mechanizmem adaptacji wskaźnika jakości.



Rys. 3.12. Algorytm QTO–RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku, gdy zbiór  $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ . Symulowano zakłócenia w generacji sterowania oraz błędy estymacji stanu. Odchylenie standardowe drugiej zmiennej stanu w przedziale czasu 15–20 s wynosi  $0,51^\circ/\text{s}$ .



Rys. 3.13. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku, gdy zbiór  $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ . Symulowano zakłócenia w generacji sterowania oraz błędy estymacji stanu.

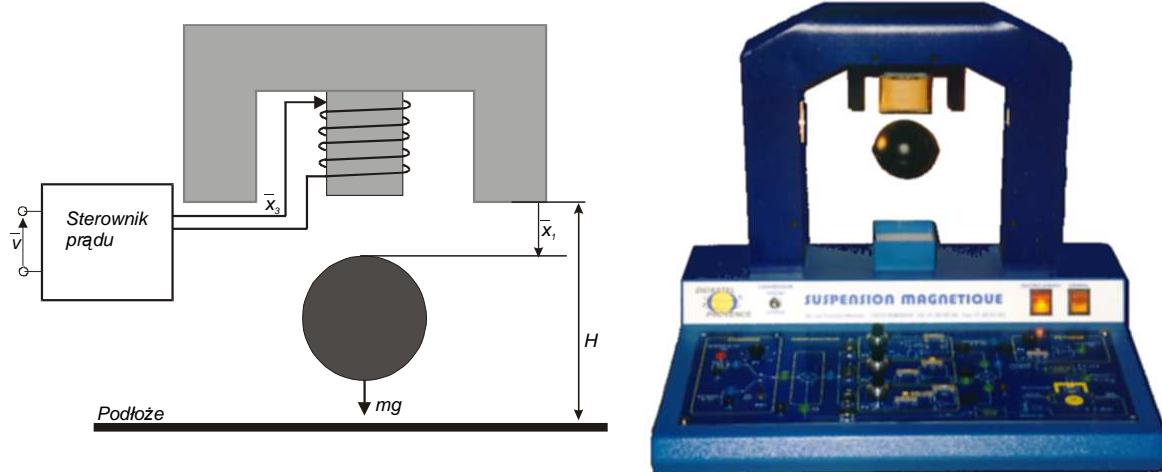


Rys. 3.14. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości w poszczególnych iteracjach w przypadku, gdy zbiór  $\mathbf{B} = R^n$ . Symulowano zakłócenia w generacji sterowania oraz błędy estymacji stanu. W przypadku obecności zakłóceń wskaźnik jakości nie maleje monotonicznie.

### Przykład 3.4.2. Lewitacja magnetyczna

Na przestrzeni ostatnich dwudziestu lat systemy magnetycznego zawieszenia (MZ) znalazły wiele zastosowań w rozmaitych dziedzinach nauki i techniki. Do najbardziej rozpowszechnionych zastosowań należy zaliczyć szybką kolej na poduszce magnetycznej, łożyska magnetyczne, aktywne tłumienie drgań i wibracji oraz pomiary masy i gęstości w ekstremalnych warunkach (np. w kwasach). Więcej informacji na temat zawieszenia magnetycznego można znaleźć w pracach Piłata (2004) i autora (1999). Sterowanie systemami MZ polega zazwyczaj na ich stabilizacji w otoczeniu wybranego punktu pracy. Należy uznać, że stosowane powszechnie techniki stabilizacji magnetycznego zawieszenia za pomocą liniowych sprzężeń zwrotnych od stanu lub położenia są dobrze opanowane zarówno w aspekcie teoretycznym, jak i praktycznym. Zdaniem autora, zastosowanie technik nieliniowych, a w szczególności algorytmu QTO-RHC, do sterowania systemem MZ może poprawić jego niezawodność i zagwarantować stabilność w przypadku znacznych odchyлеń od zadanego punktu pracy (punktu linearyzacji równań).

W stanie normalnej pracy podstawowym algorytmem służącym do stabilizacji systemu MZ jest zwykle liniowy algorytm PID lub LQ. Do stabilizacji w otoczeniu punktu pracy można także stosować regulatory rozmyte i nieliniowe. Przykład nieliniowego regulatora stabilizującego dla MZ można znaleźć w pracy autora (2001). W przypadku znacznego odchylenia od punktu pracy, spowodowanego obecnością krótkotrwałego zakłócenia, a także przy rozruchu bądź kończeniu pracy systemu, stosowanie regulatorów liniowych nie gwarantuje na ogół stabilności systemu MZ. Wówczas, aby możliwie szybko doprowadzić system MZ do stanu równowagi, można – jako algorytm „awaryjny” – zastosować algorytm QTO-RHC, dla którego obszar przyciągania punktu równowagi jest znacznie większy niż obszar przyciągania regulatorów liniowych. Opisany poniżej system MZ znajdujący się w laboratorium Katedry Automatyki AGH posłużył jako ilustracja możliwości zastosowania algorytmu QTO-RHC.



Rys. 3.15. Schemat systemu magnetycznego zawieszenia oraz widok układu laboratoryjnego.

W dalszym ciągu będziemy rozważać system MZ przedstawiony na rys. 3.15, w którym lewitującym obiektem jest kula z materiału ferromagnetycznego. Niech  $\bar{x}_1$  w m,  $\bar{x}_2$  w m/s,  $\bar{x}_3$  w A,  $\bar{v}$  w V oznaczają odpowiednio odległość kuli od elektromagnesu, jej prędkość, prąd w cewce oraz napięcie sterujące. Prąd w cewce elektromagnesu kontrolowany jest przez sterownik prądowy, który eliminuje wpływ ruchu kuli na prąd cewki oraz zapewnia liniową zależność pomiędzy prądem cewki, a napięciem sterującym w stanie ustalonym. Pomiary wykonane przez autora (Bania 1999) pokazały, że dynamika elektromagnesu wraz ze

sterownikiem prądu może być dobrze aproksymowana za pomocą liniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu. Równania stanu systemu MZ wyprowadzone w pracach (Bania 1999, Piłat 2004) mają postać:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \frac{L'(\bar{x}_1)}{2m} \bar{x}_3^2 + g, \quad \dot{\bar{x}}_3 = \frac{1}{\tau} (k\bar{v} - i_s - \bar{x}_3), \quad (3.16)$$

gdzie

$$L'(\bar{x}_1) = -\frac{L_0}{s} \exp\left(\frac{-\bar{x}_1}{s}\right) \quad (3.17)$$

jest pochodną indukcyjności cewki względem położeniu kuli w H/m,  $m = 0,06$  kg oznacza masę lewitującego obiektu,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> jest przyspieszeniem ziemskim,  $L_0 = 0,1091$  H jest indukcyjnością cewki dla  $\bar{x}_1 = 0$ ,  $s = 0,0077$  m jest parametrem elektromagnesu,  $\tau = 10,7$  ms jest stałą czasową elektromagnesu wraz ze sterownikiem prądu,  $i_s = 1,506$  A jest stałym prądem płynącym przez cewkę oraz  $k = 0,29703$  A/V jest współczynnikiem wzmacnienia sterownika prądu. Minimalna i maksymalna wartość napięcia sterującego wynoszą odpowiednio  $\bar{v}_{\min} = 5,56$  V i  $\bar{v}_{\max} = 9,56$  V. Nominalny punkt pracy systemu MZ był określony równościami

$$\bar{x}_{1r} = 14,00 \text{ mm}, \quad \bar{x}_{2r} = 0 \text{ m/s}, \quad \bar{x}_{3r} = 0,7139 \text{ A}, \quad \bar{v}_r = 7,4734 \text{ V}. \quad (3.18)$$

Aby zminimalizować liczbę mnożeń w trakcie obliczeń numerycznych oraz maksymalnie uprościć konieczne do wykonania rachunki, wprowadzono skalowanie sterowania, zmiennych stanu oraz czasu

$$\bar{x}_1 = \alpha x_1, \quad \bar{x}_2 = \beta x_2, \quad \bar{x}_3 = \gamma x_3, \quad \bar{v} = \frac{\eta u \tau + i_s}{k}, \quad \bar{t} = \xi t, \quad (3.19)$$

gdzie

$$\alpha = s, \quad \beta = \sqrt{gs}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2msg}{L_0}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{s}{g}}, \quad \eta = g \sqrt{\frac{2m}{L_0}}.$$

Współczynniki skalowania były równe

$$\alpha = 0,00773746 \text{ m}, \quad \beta = 0,27550768156260 \text{ m/s}, \quad \gamma = 0,28890446065998 \text{ A},$$

$$\xi = 0,02808437120924 \text{ s}, \quad \eta = 10,28701901522286 \text{ A/s}.$$

Po zamianie zmiennych równania (3.16) przyjmują prostą, bezwymiarową postać

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.20)$$

$$\dot{x}_2 = -\exp(-x_1)x_3^2 + 1, \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_3 = -cx_3 + u, \quad (3.22)$$

$$c = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{s}{g}} = 2,62627844778518. \quad (3.23)$$

Nominalny punkt pracy oraz graniczne wartości sterowania po skalowaniu wynosiły

$$x_{1r} = 1,8094, \quad x_{2r} = 0, \quad x_{3r} = 2,4712, \quad u_r = 6,4899, \quad (3.24)$$

$$u_{\min} = \frac{k\bar{v}_{\min} - i_s}{\eta\tau} = 1,32, \quad u_{\max} = \frac{k\bar{v}_{\max} - i_s}{\eta\tau} = 12,12. \quad (3.25)$$

### Opis eksperymentów numerycznych

W pierwszym eksperymencie założono, że w stanie początkowym kula spoczywa na podłożu w odległości 18 mm od elektromagnesu oraz że prąd w cewce elektromagnesu odpowiada stanowi ustalonemu dla położenia 18 mm. Celem sterowania było doprowadzenie systemu do nominalnego punktu pracy danego równościami (3.18).

Zgodnie z konwencją przyjętą na początku rozdziału, zadanie to przekształcono na zadanie ze swobodnym horyzontem. Wskaźnik jakości dla systemu przeskalowanego (3.20-22) miał postać daną wzorem (2.7), przy czym funkcja podcałkowa  $L$  oraz funkcja kary za niespełnienie warunku końcowego były dane równościami

$$L(x, u) = \|x - x_r\|_W^2 + \|u - u_r\|_R^2, \quad q = \|x - x_r\|_H^2, \quad (3.26)$$

$$W = 2\text{diag}([1 \ 1 \ 0,01]), \quad R = 1, \quad H = \begin{bmatrix} 42,4305 & 41,4305 & -9,1576 \\ 41,4305 & 41,4305 & -9,1576 \\ -9,1576 & -9,1576 & 2,0353 \end{bmatrix}.$$

Zbiór końcowy  $\Omega$  był dany równością  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - x_r\|_H^2 \leq 0,1\}$ . Dodatnio określona macierz  $H$  oraz zbiór końcowy  $\Omega$  wyznaczono metodami opisanymi w rozdziale piątym. Wybór macierzy  $H$  i zbioru  $\Omega$  gwarantuje spełnienie założeń twierdzeń 3.2.1 i 3.3.1. W eksperymetach numerycznych przyjęto współczynnik  $\xi = 0,1$ . Zbiór  $\mathbf{B}$  był dany równością  $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_{ir}| \leq 0,08, i = 1, 2\}$ . Założono, że błędy w generacji sterowania nie przekraczają 50 mV. Błędy te symulowano poprzez dodanie do sterowania wyliczonego przez algorytm szumu o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 50 mV. Założono, że maksymalne błędy estymacji położenia kuli nie przekraczają wartości 0,02 mm. Przyjęto, że prędkość kuli jest estymowana z dokładnością do 2,5 mm/s. Błędy estymacji stanu symulowano dodając do wyjścia obiektu symulowanego szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 0,02 mm dla pomiaru położenia oraz 2,5 mm/s dla pomiaru prędkości. Symulowano również zaburzenia parametrów obiektu, dodając do wszystkich współczynników równań (3.16) szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 10% wartości nominalnej każdego współczynnika. Symulator obiektu był odrębna, napisaną w języku C procedurą całkowania równań różniczkowych, wykorzystującą do generacji zakłóceń generatory liczb pseudolosowych (zob. Press 1992). W obliczeniach sterowania wykorzystywano model skalowany (3.20-22).

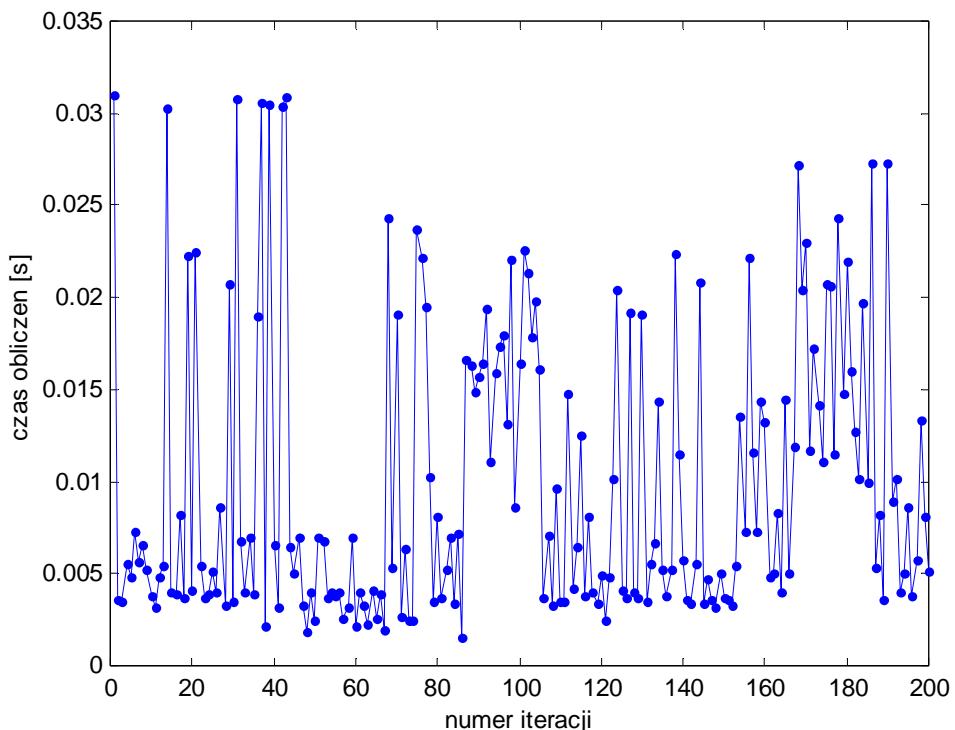
We wszystkich eksperymetach numerycznych okres wyliczania sterowania wynosił  $\delta = 0,7$  ms. Okres próbkowania był równy 0,1 ms. Optymalizacja miała charakter przybliżony i była przerywana po spełnieniu warunków w punktach 5a,b algorytmu 3.1.1.

Na rys. 3.17 pokazano wyniki symulacji działania algorytmu QTO-RHC oraz algorytmu liniowo-kwadratowego z czasem dyskretnym, z macierzami wagowymi jak we wzorze (3.26), i z okresem próbkowania 0,7 ms. Wpływ zakłóceń powoduje, że trajektoria przewidywana w chwili początkowej i trajektoria generowana przez algorytm QTO-RHC różnią się od siebie. W sterowaniu występują dwa dodatkowe przełączenia. „Mały rozmiar” przekroju zbioru  $\mathbf{B}$  płaszczyzną  $x_1 x_2$  powoduje, że adaptacja wskaźnika jakości rozpoczęta się ok. 5 ms przed planowanym osiągnięciem celu. W końcowej fazie sterowania regulator QTO-RHC wykazuje nieco większe niż LQ odchyłki zmiennych stanu i sterowania od stanu ustalonego, co wynika z obecności zakłóceń oraz z faktu, że sterowanie optymalne jest

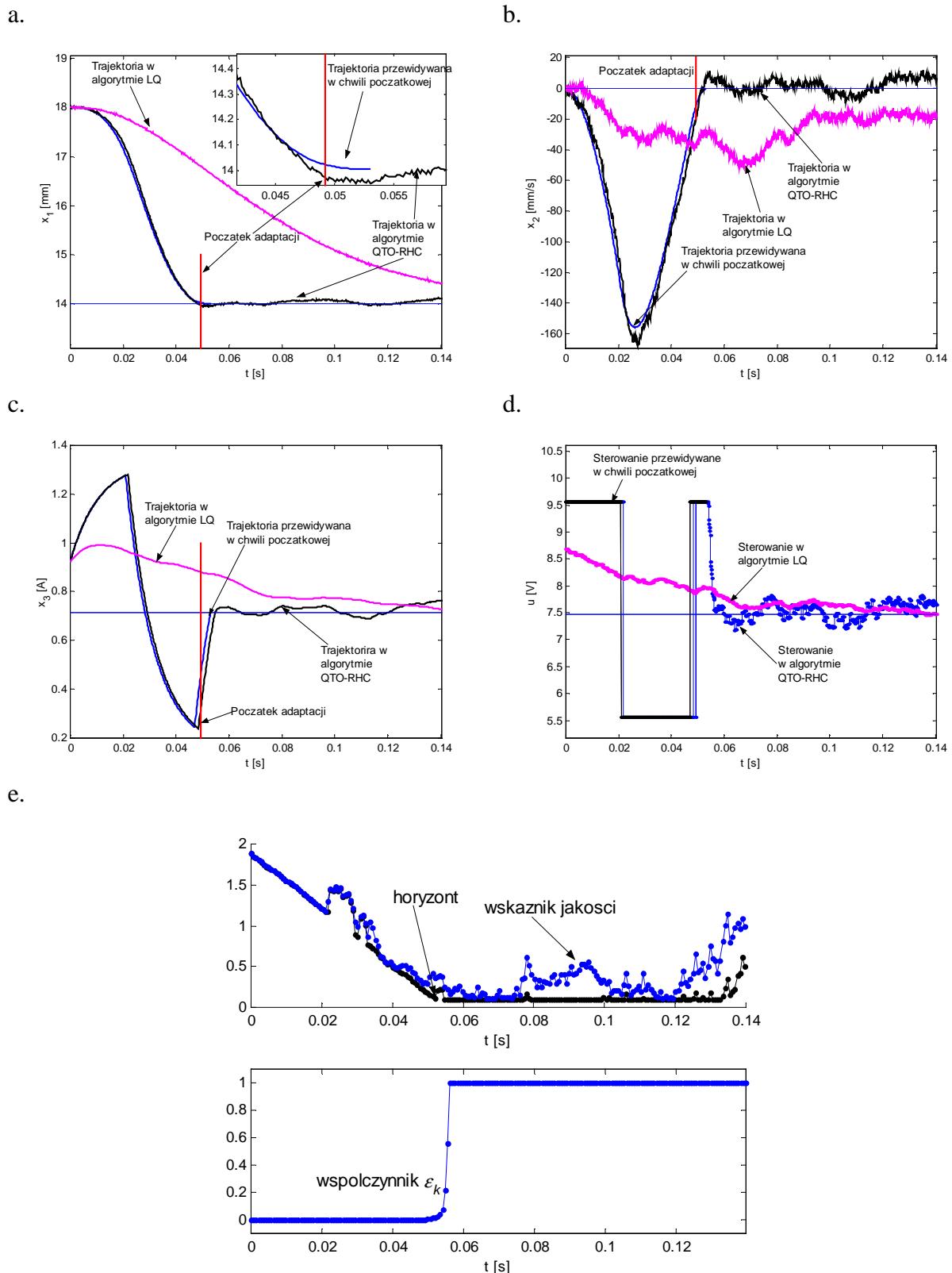
wrażliwe na zakłócenia i błędy modelowania. Czas, po którym błąd położenia kuli jest mniejszy niż 0,05 mm wynosił ok. 0,055 s. Dla algorytmu liniowo-kwadratowego czas ten wynosił ok. 0,17 s.

W drugim eksperymencie założono, że w stanie początkowym kula lewituje w odległości 10 mm od elektromagnesu oraz że prąd w cewce elektromagnesu odpowiada stanowi ustalonemu dla położenia 10 mm. Celem sterowania było doprowadzenie systemu do nominalnego punktu pracy danego równościami (3.18). Wszystkie parametry były takie same jak w poprzednim eksperymencie. Wyniki symulacji przy zakłócenach i błędach modelowania przedstawiono na rys. 3.18.

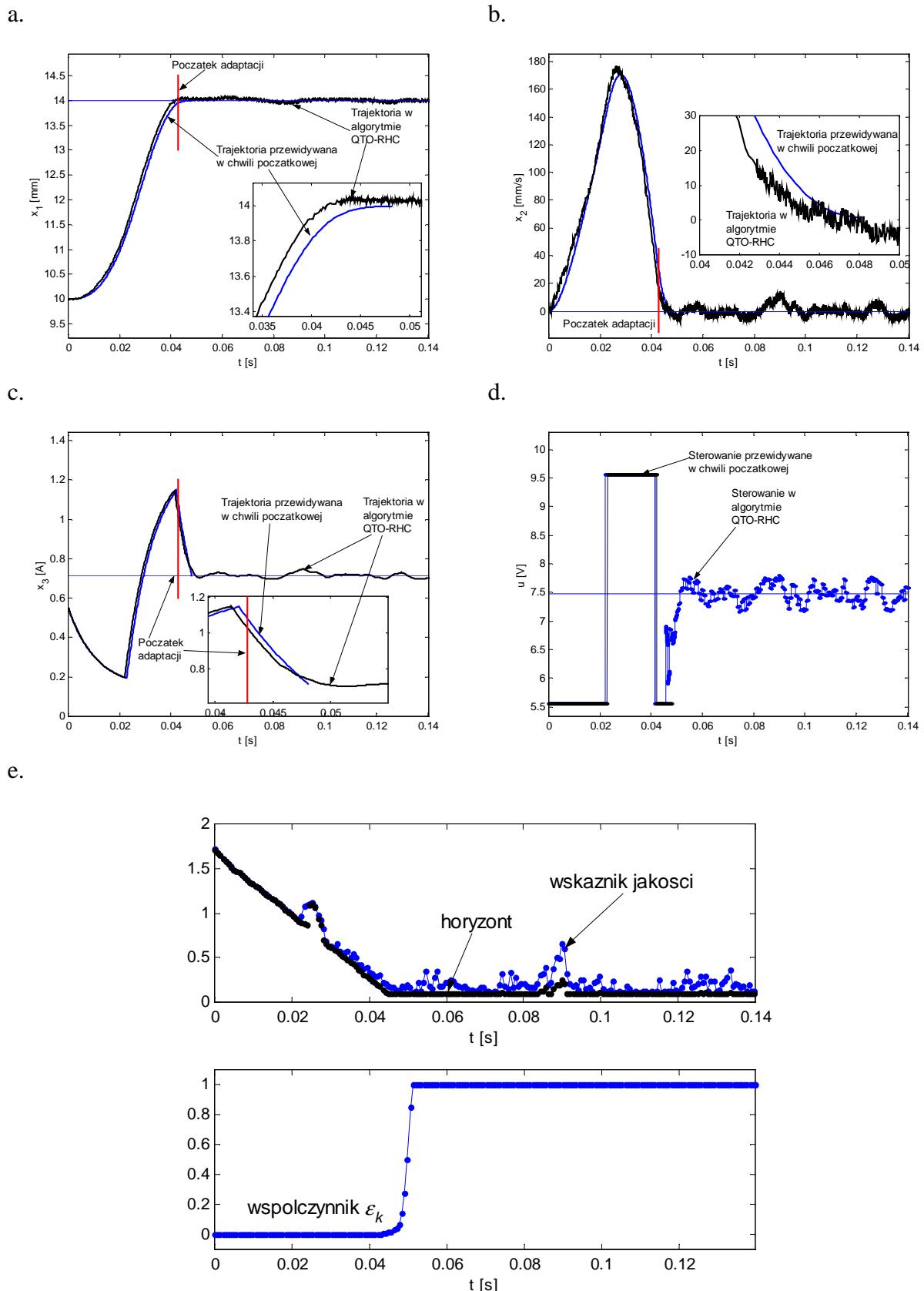
System magnetycznego zawieszenia jest układem niestabilnym o silnych nieliniowościach i dużej wrażliwości na zakłócenia. Pomimo tych cech algorytm QTO-RHC działał poprawnie. Podstawowym problemem przy implementacji algorytmu jest duża złożoność obliczeniowa zadania optymalizacji. Maksymalny czas obliczeń dla pojedynczej optymalizacji był równy ok. 0,03 s, co ponad czterokrotnie przekracza założony okres wyliczania sterowania. Pomiary czasu obliczeń prowadzonych w MATLABIE ver. 5.3, przeprowadzone na maszynie *Notebook Amilo Pro Fujitsu Siemens* z systemem operacyjnym Windows XP z procesorem Intel 740 wyposażonym w 2 MB pamięci podręcznej (*cash*) i z zegarem 1,73 GHz pokazano na rys. 3.16. Otrzymany wynik pozwala sądzić, że zastosowanie wyspecjalizowanych procesorów oraz przepisanie algorytmu na kod języka C, pozwoli na implementację algorytmu w czasie rzeczywistym.



Rys. 3.16. Czasy obliczeń sterowania w zadaniu podniesienia kuli.



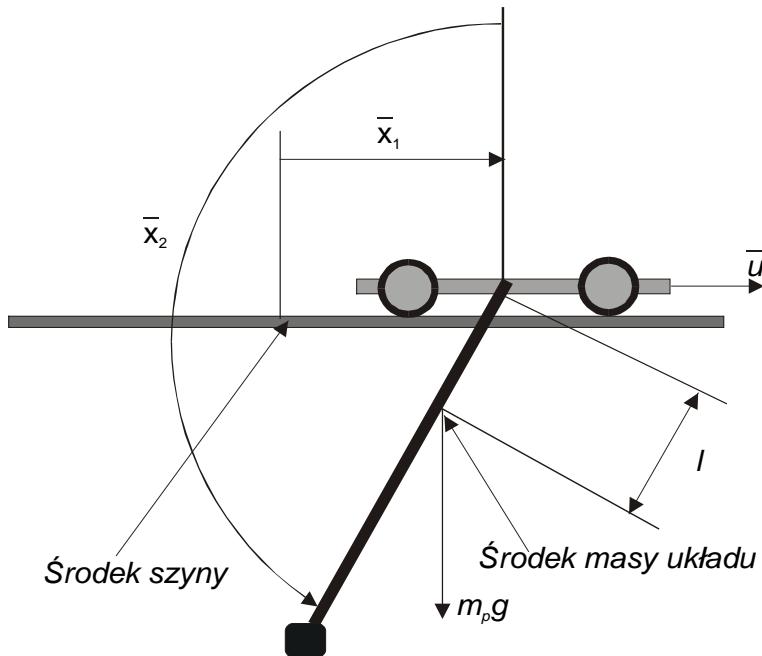
Rys. 3.17. Trajektoria stanu, sterowanie i wskaźnik jakości w zadaniu podniesienia kuli z położenia początkowego  $x_{10} = 18 \text{ mm}$  do położenia równowagi  $x_{1r} = 14 \text{ mm}$ . a) Położenie kuli, b) prędkość kuli, c) prąd w cewce elektromagnesu, d) sterowanie, e) wskaźnik jakości oraz horyzont w zmiennych bezwymiarowych. Trajektorię oraz sterowanie generowane przez algorytm QTO-RHC porównano z trajektorią i sterowaniem wygenerowanymi przez algorytm liniowo-kwadratowy z czasem dyskretnym z okresem próbkowania 0,7 ms.



Rys. 3.18. Trajektoria stanu, sterowanie i wskaźnik jakości w zadaniu opuszczenia kuli z położenia początkowego  $x_1(0) = 10 \text{ mm}$  do położenia równowagi  $x_{1r} = 14 \text{ mm}$ . a) Położenie kuli, b) prędkość kuli, c) prąd w cewce elektromagnesu, d) sterowanie, e) wskaźnik jakości oraz horyzont w zmiennych bezwymiarowych.

### Przykład 3.4.3. Układ wahadła na wózku

Układ wahadła na wózku jest znanym i dobrze zbadanym testowym przykładem układu nieliniowego czwartego rzędu (Turnau 2002, 1999, literatura tamże). Silne nieliniowości oraz niestabilność górnego położenia równowagi stanowią źródło znaczących trudności przy sterowaniu i stabilizacji tego systemu. W niniejszym przykładzie przetestujemy działanie algorytmu QTO-RHC w zadaniu postawienia wahadła. Zadanie to było wielokrotnie rozwiązywane rozmaitymi metodami numerycznymi. Szczegółowy opis metod rozwiązywania zadania czasooptymalnego dla układu wahadła na wózku można znaleźć w pracy Korytowskiego, Szymkata i Turnaua (1998). Przykłady sterowania czasooptymalnego w czasie rzeczywistym podaje Turnau (2002). Opisany poniżej system wahadła na wózku znajduje się w laboratorium Katedry Automatyki AGH.



Rys. 3.19. Układ wahadła na wózku.

Parametry systemu zebrane w tabeli 3.1.

**Tabela 3.1.** Parametry systemu wahadła na wózku.

$m_c + m_p = 1,22 \text{ kg}$	Masa wózka i wahadła
$f_p = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2/\text{s}$	Współczynnik tarcia w łożysku wahadła
$f_c = 0,25 \text{ kg/s}$	Współczynnik tarcia w łożyskach wózka
$l = 0,01707 \text{ m}$	Odległość środka masy układu od osi wahadła
$J_0 = 0,01197 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	Moment bezwładności wahadła
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$	Przyspieszenie ziemskie
$\mu = l(m_c + m_p) = 0,0208 \text{ kg}\cdot\text{m}$	Parametr
$a = l^2 + \frac{J_0}{m_c + m_p} = 0,0101 \text{ m}^2$	Parametr
$\bar{u}_{\max} = 10,5 \text{ N}$	Maksymalna siła sterująca

W pracy Korytowskiego i współautorów (1998) wyprowadzono następujące równania stanu systemu:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_3, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_4, \\ \dot{\bar{x}}_3 &= \frac{a(\bar{u} - \mu\bar{x}_4^2 \sin \bar{x}_2 - f_c \bar{x}_3) + l \cos x_2 (\mu g \sin \bar{x}_2 - f_p \bar{x}_4)}{J_0 - \mu l \cos^2 \bar{x}_2}, \\ \dot{\bar{x}}_4 &= \frac{l \cos \bar{x}_2 (\bar{u} - \mu\bar{x}_4^2 \sin \bar{x}_2 - f_c \bar{x}_3) + \mu g \sin \bar{x}_2 - f_p \bar{x}_4}{J_0 - \mu l \cos^2 \bar{x}_2}, \\ \bar{u} &\in [-\bar{u}_{\max}, \bar{u}_{\max}],\end{aligned}\quad (3.27)$$

gdzie:  $\bar{x}_1$  – położenie wózka w m,  $\bar{x}_2$  – kąt wahadła w rad,  $\bar{x}_3$  – prędkość wózka w m/s,  $\bar{x}_4$  – prędkość wahadła w rad/s,  $\bar{u}$  – siła sterująca w N.

W celu uproszczenia zapisu równań oraz zredukowania liczby mnożeń zmienne stanu, czas oraz sterowanie zostały przeskalowane. Skalowanie miało następującą postać:  $\bar{t} = a_0 t$ ,  $\bar{x}_i = a_i x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $\bar{u} = \gamma_0 u$ , przy czym kreska nad symbolem oznacza zmienne w systemie rzeczywistym. Współczynniki skalowania podane w pracy (Korytowski *et al.* 1998), wynosiły  $a_0 = 0,24562406233833$ ,  $a_1 = 0,59184887579590$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2,40957205153899$ ,  $a_4 = 4,07126236118749$ ,  $\gamma_0 = 0,34518469554456$ . W nowych współrzędnych równania stanu przyjmują prostszą postać (Korytowski *et al.* 1998)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \frac{v_1(x, u) + v_2(x) \cos x_2}{d(x)}, \\ \dot{x}_4 &= \frac{v_1(x, u) \cos x_2 + c_4 v_2(x)}{d(x)}, \\ d(x) &= c_4 - \cos^2 x_2, \\ v_1(x, u) &= u - x_4^2 \sin x_2 - b_2 x_3, \\ v_2(x) &= \sin x_2 - b_3 x_4, \\ u &\in [-u_{\max}, u_{\max}].\end{aligned}\quad (3.28)$$

Parametry modelu przeskalowanego wynosiły:  $b_2 = 1,74513244839669$ ,  $b_3 = 4,184909067069975 \cdot 10^{-4}$ ,  $c_4 = 34,67187321592872$ ,  $u_{\max} = 30,41849808385986$  oraz  $u_{\min} = -u_{\max}$ .

### **Pierwsze zadanie sterowania**

Celem sterowania było przeprowadzenie wahadła z dolnego stabilnego położenia równowagi  $x_0 = [0, \pi, 0, 0]^T$  do górnego niestabilnego punktu równowagi  $x_f = [0, 0, 0, 0]^T$  oraz późniejsza stabilizacja wahadła w tym położeniu.

Zgodnie z konwencją przyjętą na początku rozdziału, zadanie to przekształcono na zadanie ze swobodnym horyzontem i stanem końcowym. Wskaźnik jakości miał postać daną

wzorem (2.7), przy czym funkcja podcałkowa  $L$  oraz funkcja kary za niespełnienie warunku końcowego były dane równościami

$$L(x, u) = \|x\|_W^2 + \|u\|_R^2, \quad q = \|x\|_H^2, \quad W = 100I_{4 \times 4}, \quad R = 1. \quad (3.29)$$

$$H = 10^4 \begin{bmatrix} 0,0483 & -0,1451 & 0,1114 & -0,1451 \\ -0,1451 & 1,0611 & -0,5555 & 1,0473 \\ 0,1114 & -0,5555 & 0,3867 & -0,5552 \\ -0,1451 & 1,0473 & -0,5552 & 1,0436 \end{bmatrix}.$$

Zbiór końcowy  $\Omega$  był dany równością  $\Omega = \{x \in R^4 : x^T H x \leq 0,1\}$ . Dodatnio określona macierz  $H$  oraz zbiór końcowy  $\Omega$  wyznaczono metodami opisanymi w rozdziale piątym. Sposób doboru macierzy  $H$  i zbioru  $\Omega$  zapewnia spełnienie założeń twierdzeń 3.2.1 i 3.3.1. Przyjęto współczynnik  $\xi = 0,1$ .

Niepewność parametrów modelu symulowano poprzez zaburzanie współczynników w równaniu obiektu (3.27). Zaburzenia te były szumem o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 10% wartości nominalnej danego współczynnika. Założono, że błędy w generacji siły napędzającej wózek nie przekraczają 2% jej maksymalnej wartości. Błędy te symulowano dodając do sterowania wyliczonego przez algorytm szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 0.21 N. Założono, że maksymalne błędy estymacji kątów  $x_1$  i  $x_2$  nie przekraczają wartości  $2\pi/4096$  rad, podyktowanej rozdzielcością typowego 12-bitowego enkodera. Przyjęto, że prędkość kątowa wahadła jest estymowana z dokładnością do 0,0153 rad/s. Błędy estymacji stanu symulowano dodając do wyjść obiektu symulowanego szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą  $2\pi/4096$  rad dla pomiaru kąta oraz 0,0153 rad/s dla pomiaru prędkości kątowej. Symulator obiektu był odrębna, napisaną w języku C procedurą całkowania równań różniczkowych (3.27), wykorzystującą do generacji zakłóceń generatory liczb pseudolosowych. Do obliczeń sterowania wykorzystywano model przeskalowany (3.28). We wszystkich eksperymentach numerycznych okres wyliczania sterowania wynosił  $\delta = 25$  ms. Założono, że okres próbkowania wynosi 5 ms, a horyzont minimalny był równy 50 ms. Optymalizacja sterowania miała charakter przybliżony.

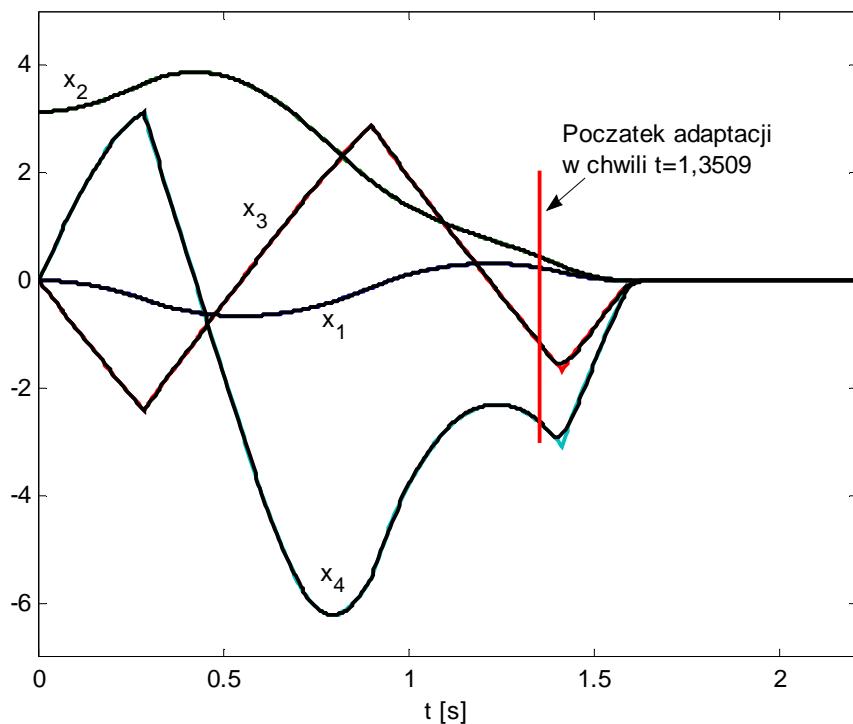
W pierwszym eksperymencie numerycznym rozważono przypadek braku zakłóceń i idealnej zgodności pomiędzy modelem i obiektem. Wyniki symulacji pokazano na rys. 3.20-23. Na rys. 3.20 pokazano trajektorię przewidywaną w chwili początkowej oraz trajektorię generowaną przez algorytm QTO-RHC. Optymalny czas osiągnięcia celu wynosił 1,597 s. Do momentu rozpoczęcia adaptacji obie trajektorie pokrywały się.

W pracy Turnaua (2002, s. 151) stwierdzono, że największa wrażliwość trajektorii i rozwiązania optymalnocoszowego występuje pod koniec procesu. W związku z tym zbiór  $\mathbf{B} = \{x \in R^4 : |x_i| \leq 0,5, i = 1, 2\}$ , w którym następuje adaptacja wskaźnika jakości, wybrano w taki sposób, aby system zszedł z trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej około 0,1 s przed ostatnim przełączeniem. Zejście z trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej pokazano na rys. 3.21. Na skutek działania mechanizmu adaptacji wystąpiło nieznaczne (0,02 s) wydłużenie czasu osiągnięcia celu. Sterowanie pokazano na rys. 3.22. Zamiast ostatniego przełączenia występuje tzw. quasi-przełączenie, które będzie opisane szczegółowo w rozdziale 6. Horyzont oraz wskaźnik jakości w kolejnych chwilach wyliczania sterowania pokazano na rys. 3.23. Do momentu rozpoczęcia adaptacji horyzont i wskaźnik jakości

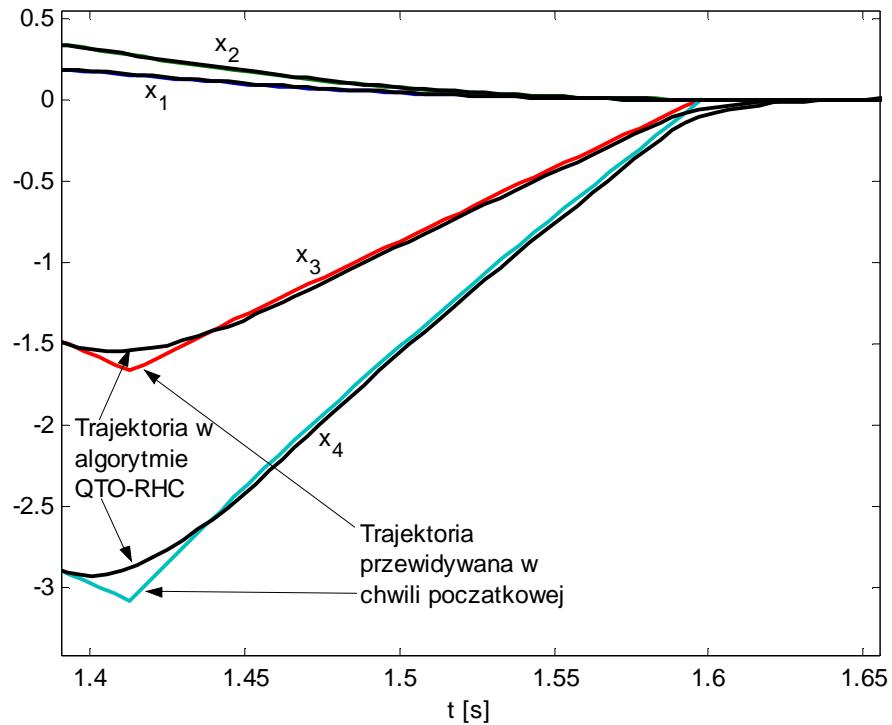
praktycznie nie różnią się. Adaptacja przebiega stosunkowo szybko w porównaniu z czasem sterowania.

W drugim eksperymencie numerycznym (rys. 3.24-25) mechanizm adaptacji wskaźnika jakości był wyłączony oraz występuły zakłócenia, błędy modelowania i błędy estymacji stanu. Algorytm w każdym kroku wyliczał sterowanie zbliżone do czasoptymalnego. Na skutek obecności zakłóceń pojawiły się dodatkowe przełączenia. W końcowej fazie procesu wystąpiła duża liczba częstych przełączeń, a trajektoria stanu znacznie odchylała się od zera.

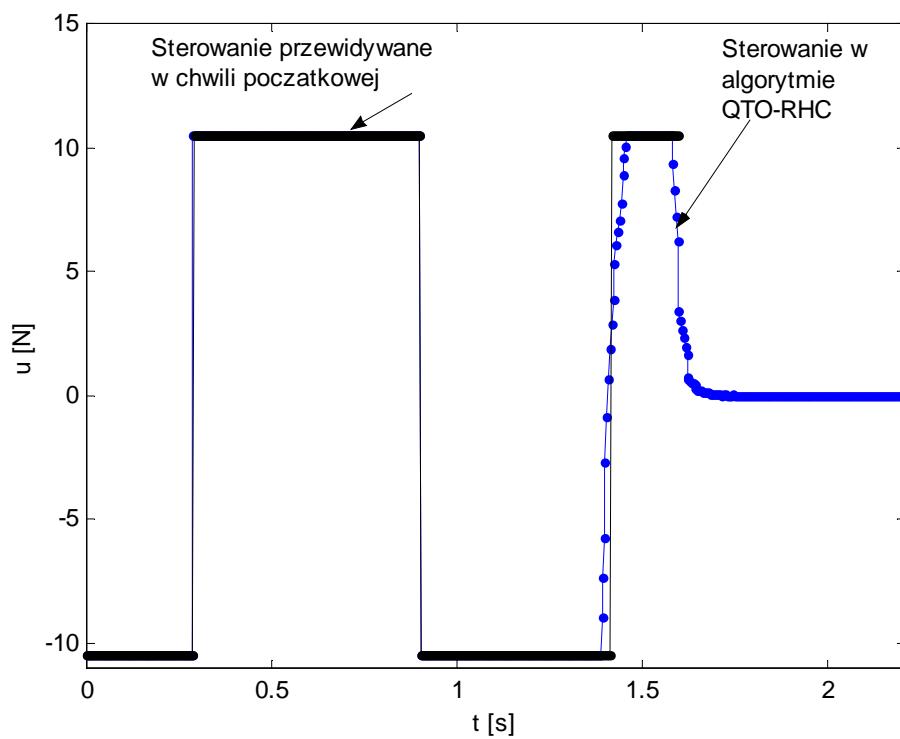
W trzecim eksperymencie włączono mechanizm adaptacji przy niezmienionych pozostałych parametrach. Po czasie 1,3755 s trajektoria obiektu osiągnęła zbiór **B** i rozpoczęła się adaptacja wskaźnika jakości. Włączenie do wskaźnika jakości członu całkowitego znacznie zmniejszyło wpływ zakłóceń na trajektorię, zmniejszając ok. 10 razy jej maksymalne odchylenie od zera w końcowej fazie procesu. Amplituda sterowania wydatnie zmalała w porównaniu z maksymalną wartością sterowania. Czas po którym odchylenie wahadła było mniejsze niż 2 stopnie był ok. 2% dłuższy od czasu optymalnego obliczonego w chwili początkowej. Na skutek obecności zakłóceń wskaźnik jakości nie malał już monotonicznie. Wzrost współczynnika  $\varepsilon_k$  do jego maksymalnej wartości trwał około 8 razy dłużej niż w przypadku nominalnym. Porównanie rys. 3.24 i 3.26 pozwala sądzić, że zmianianie kryteriów sterowania w trakcie trwania procesu jest techniką w pełni uzasadnioną.



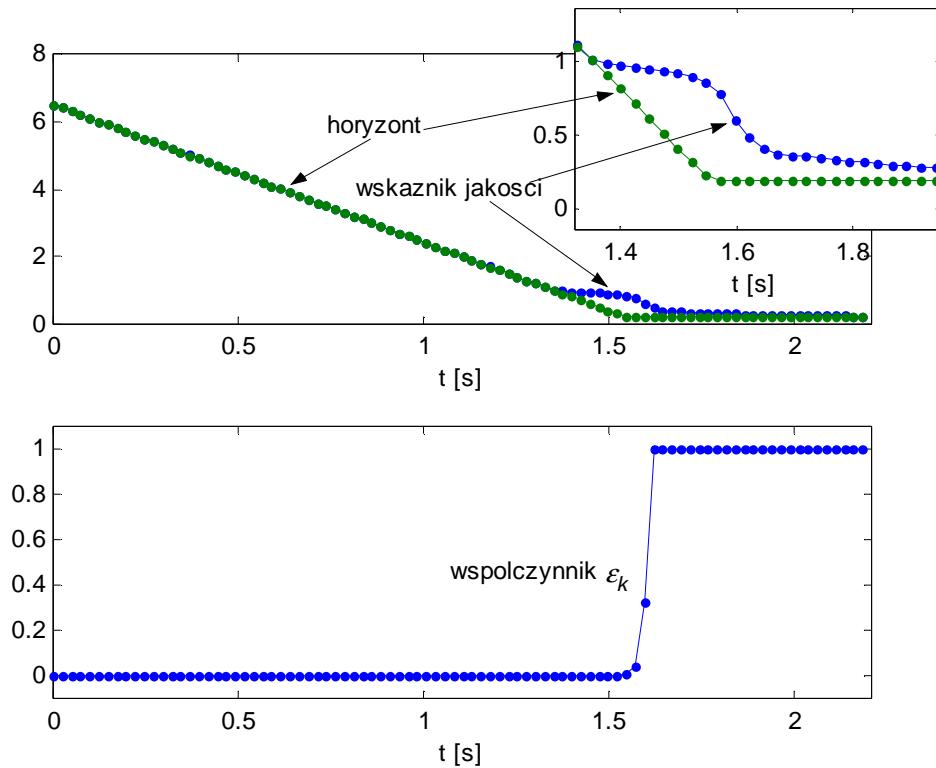
Rys. 3.20. Algorytm QTO-RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku bez zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości obie trajektorie pokrywają się.



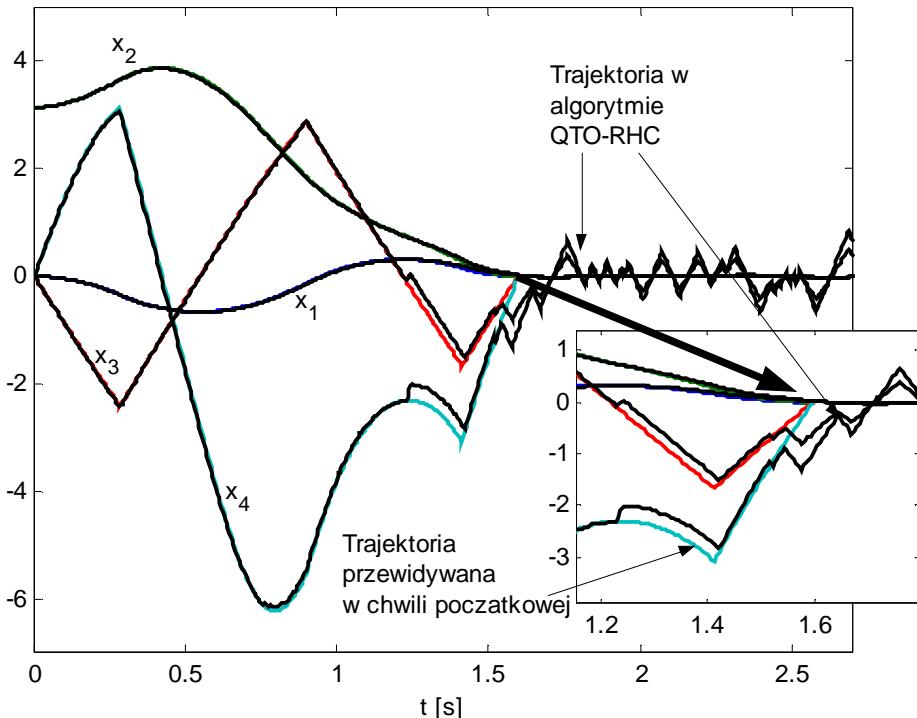
Rys. 3.21. Algorytm QTO–RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku braku zakłóceń. Powiększony fragment rys. 3.20. Widoczny jest efekt zejścia z trajektorii czasooptymalnej.



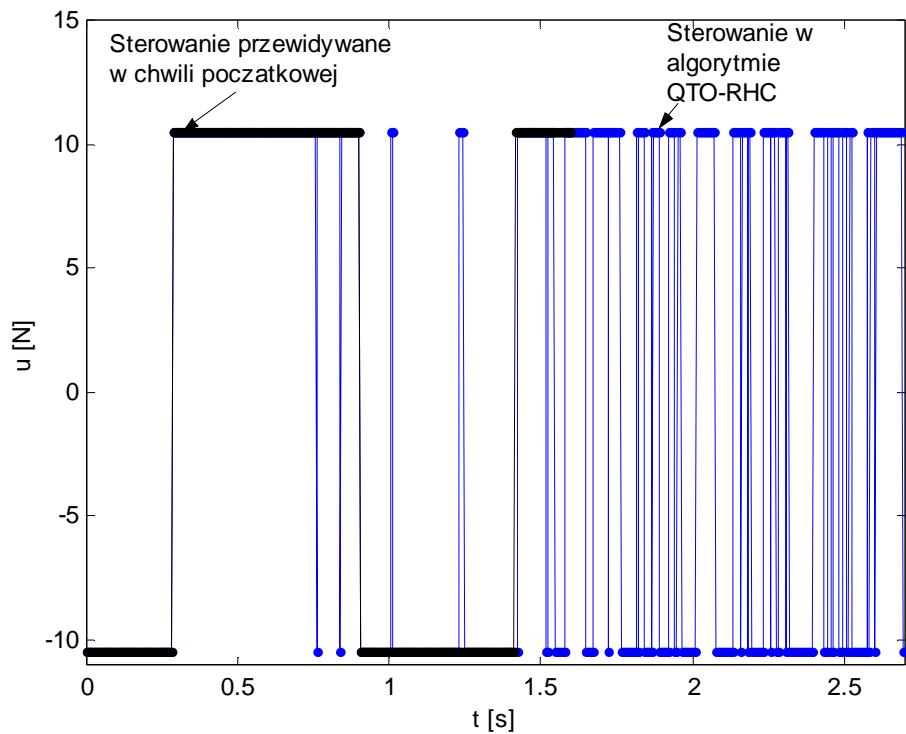
Rys. 3.22. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku braku zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości oba sterowania pokrywają się.



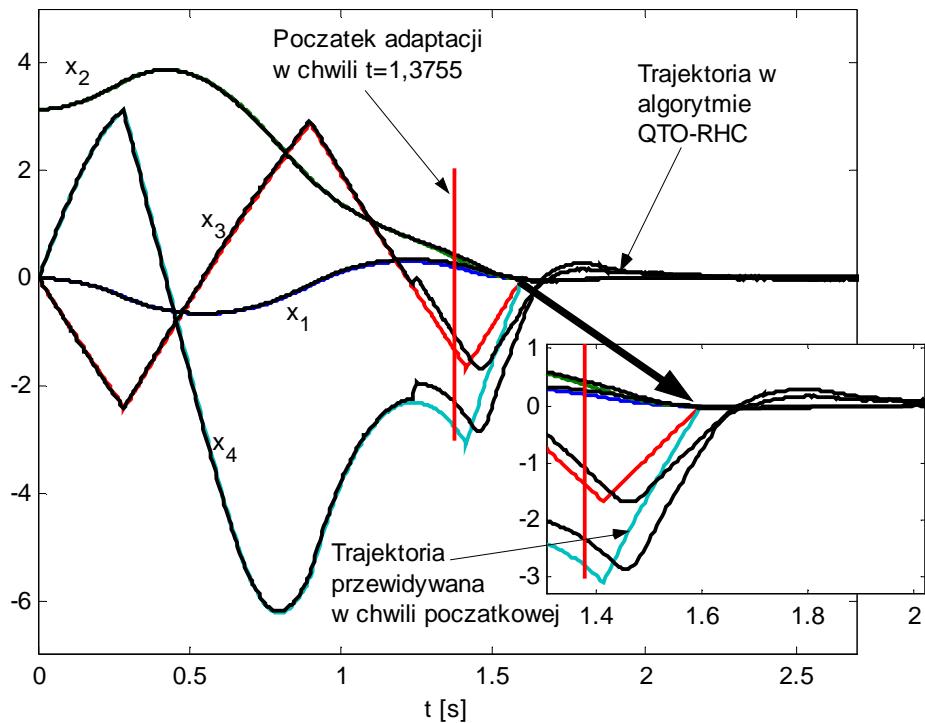
Rys. 3.23. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\epsilon_k$  oraz wskaźnik jakości i horyzont w poszczególnych iteracjach. Horyzont oraz wskaźnik jakości podano po przeskalowaniu.



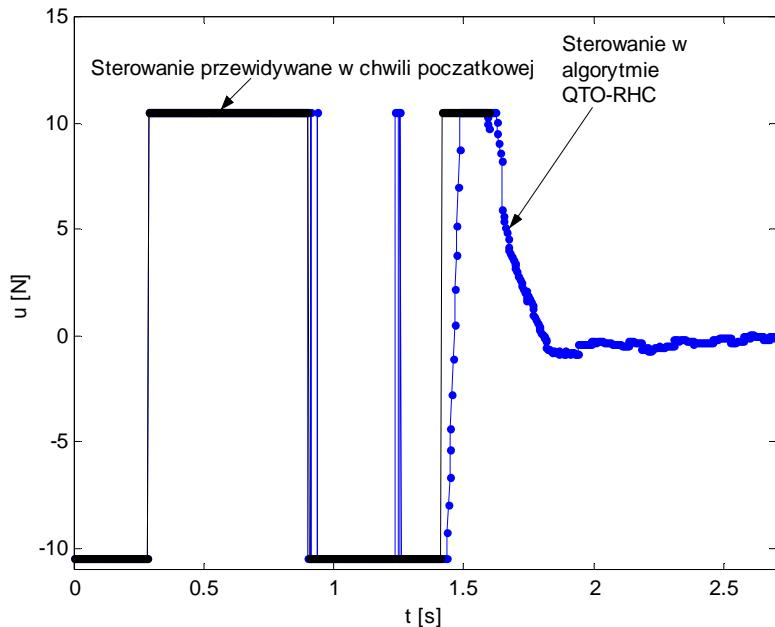
Rys. 3.24. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku zakłócanym przy wyłączonym mechanizmie adaptacji.



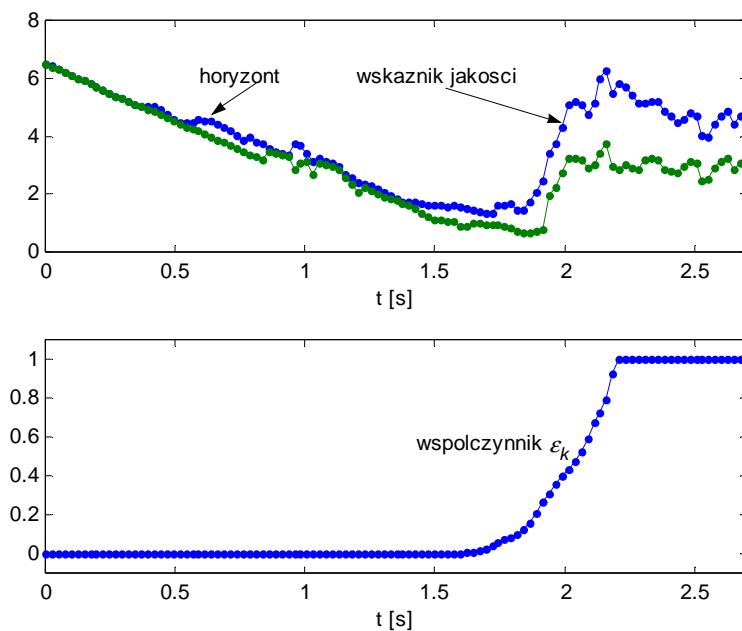
Rys. 3.25. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku zakłócanym przy wyłączonym mechanizmie adaptacji.



Rys. 3.26. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w przypadku obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt.



Rys. 3.27. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w przypadku obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt.

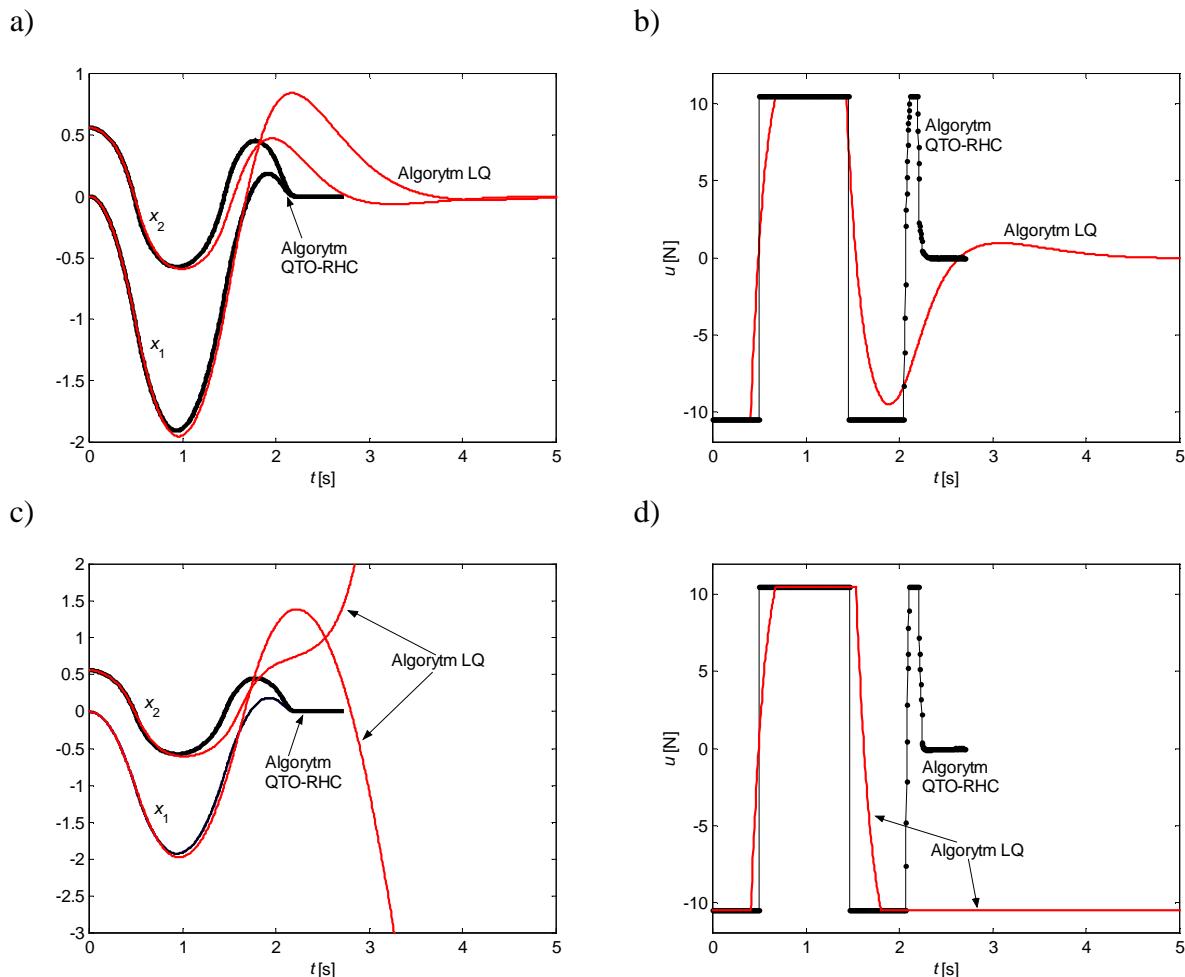


Rys. 3.28. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości i horyzont w poszczególnych iteracjach w przypadku zakłócanym. Horyzont oraz wskaźnik jakości podano po przeskalowaniu.

### **Porównanie regulatora QTO-RHC z regułatorem liniowo-kwadratowym**

Działanie algorytmu QTO-RHC porównano z działaniem regulatora liniowo-kwadratowego z nieskończonym czasem sterowania i z macierzami wagowymi, jak we wzorze (3.29). Rozważono przypadek idealnej zgodności pomiędzy modelem i obiektem przy braku zakłóceń i błędów estymacji stanu. Zbiór **B** był dany równością

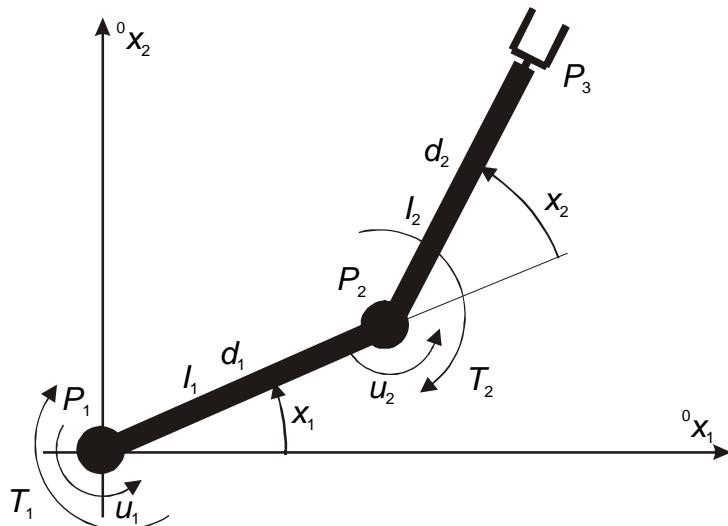
$\mathbf{B} = \{x \in R^4 : |x_i| \leq 0,3, i = 1, 2\}$ , a pozostałe parametry były takie same jak w poprzednim eksperymencie. Przebadano działanie algorytmów LQ i QTO-RHC dla zbioru warunków początkowych danego równością  $x_0 = [0, \alpha, 0, 0]^\top$ ,  $\alpha \in [-0,6, 0,6]$ . Zbiór ten odpowiadał początkowym wychyleniom wahadła od położenia równowagi o kąt  $\alpha$ . Sterowanie otrzymane z algorytmu LQ podlegało obcięciu zgodnie z ograniczeniami (3.27). Na drodze symulacyjnej stwierdzono, że algorytm LQ stabilizuje system, gdy  $\alpha \in [-32^\circ, 32^\circ]$ . Na rys. 3.29 a,b porównano trajektorie i sterowania dla algorytmów LQ i QTO-RHC w przypadku  $\alpha = 32^\circ$ . W drugim eksperymencie (rys. 3.29 c, d) zwiększoñ kąt  $\alpha$  do wartości  $\alpha = 32,1^\circ$ , co spowodowało utratę stabilności systemu z regulatorem LQ. Trajektorie i sterowania uzyskane dla regulatora QTO-RHC nie uległy znaczącym zmianom. Przykład ten, w połączeniu z wcześniejszymi eksperymentami numerycznymi pokazuje, że algorytm QTO-RHC ma znacznie szerszy obszar stabilności niż algorytm LQ. Warto też zwrócić uwagę, że optymalny czas postawienia wahadła (1,597 s) przy starcie z dolnego punktu równowagi jest o ok. 0,6 s krótszy, niż optymalny czas postawienia wahadła (2,22 s) uzyskany w tym eksperymencie.



Rys. 3.29. Porównanie działania regulatora liniowo-kwadratowego z działaniem regulatora QTO-RHC. a,b) – Położenie wózka i kąt wahadła oraz sterowanie dla początkowego kąta wahadła  $\alpha = 32^\circ$ , c,d) – położenie wózka i kąt wahadła oraz sterowanie dla początkowego kąta wahadła  $\alpha = 32,1^\circ$ . Pozostałe warunki początkowe były zerowe. Na rys. c,d widoczna jest utrata stabilności systemu z regulatorem LQ.

### Przykład 3.4.4. Manipulator 2D

Rozpatrzmy prosty model manipulatora planarnego typu SCARA, pracującego w płaszczyźnie poziomej. Uproszczony schemat manipulatora pokazano na rys. 3.30. Manipulatory typu SCARA znalazły szerokie zastosowanie w robotyce, a zwłaszcza w zadaniach montażu i pakowania (Jezierski 2006). Realizacja takich zadań wymaga szybkiego przemieszczania się końcówki manipulatora od punktu do punktu. Uzasadnione jest zatem postawienie zadania czasooptymalnego lub quasi-czasooptymalnego przemieszczenia końcówki manipulatora. Manipulator napędzany jest przez dwa bezszczotkowe silniki elektryczne z magnesami trwałymi na wirniku (Jezierski 2006). Zmiennymi sterującymi są momenty sił  $u_1$  i  $u_2$ , wytwarzane przez silniki. Graniczne wartości momentów sił oznaczamy przez  $u_{\min, i}$ ,  $u_{\max, i}$ ,  $i = 1, 2$ . Stosowane obecnie układy zasilania silników bezszczotkowych pozwalają precyjnie sterować wytwarzanym momentem (Jezierski 2006). Momenty bezwładności ramion manipulatora obliczane względem punktów  $P_1$  i  $P_2$  oznaczamy symbolami  $I_1$  i  $I_2$ , natomiast odległości pomiędzy punktami  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  oznaczamy symbolami  $d_1$  i  $d_2$ . Punkt  $P_3$  określa położenie środka chwytaka manipulatora. Masy ramion manipulatora oznaczamy przez  $m_1$  i  $m_2$ . Momenty sił tarcia występujące przy ruchu układu oznaczamy przez  $T_1$  i  $T_2$ . Chwytak manipulatora traktujemy jako nieruchomy względem drugiego ramienia i w dalszych rozważaniach będziemy uwzględniać jedynie dynamikę dwóch pierwszych członów manipulatora.



Rys. 3.30. Schemat manipulatora.

Z każdym ramieniem manipulatora wiążemy układ współrzędnych, tak jak to pokazano na rys. 3.31. Położenia punktów w układach  $P_1, {}^0x_1, {}^0x_2$ ,  $P_1, {}^1x_1, {}^1x_2$ ,  $P_2, {}^2x_1, {}^2x_2$  oznaczamy odpowiednio przez  $r_j^0$ ,  $r_j^1$ ,  $r_j^2$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Współrzędne środków mas ramion manipulatora w układach  $P_1, {}^1x_1, {}^1x_2$  oraz  $P_2, {}^2x_1, {}^2x_2$  oznaczamy  $x_{c1}, y_{c1}$  i  $x_{c2}, y_{c2}$ . Położenie elementów pierwszego i drugiego członu manipulatora w układzie nieruchomym  $P_1, {}^0x_1, {}^0x_2$  wyznaczamy ze wzorów

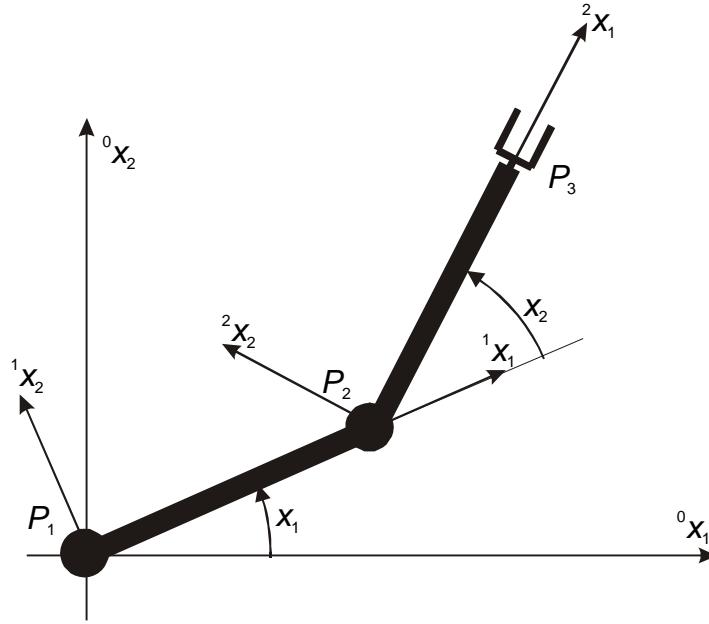
$$r_j^0 = R(x_1)r_j^1, \quad (3.30)$$

$$r_j^0 = R(x_1)[d_1, 0]^\top + R(x_1)R(x_2)r_j^2, \quad (3.31)$$

gdzie

$$R(x_i) = \begin{bmatrix} \cos x_i & -\sin x_i \\ \sin x_i & \cos x_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (3.32)$$

jest macierzą obrotu. Równanie (3.31) stanowi rozwiązanie prostego zadania kinematyki dla rozważanego manipulatora. Zadanie odwrotne kinematyki polega na wyznaczeniu z równania (3.31) zmiennych konfiguracyjnych  $x_1$  oraz  $x_2$ . Zadanie odwrotne nie ma jednoznacznego rozwiązania.



Rys. 3.31. Układy współrzędnych manipulatora.

Równanie ruchu manipulatora (zob. Jezierski 2006, s. 78–81, Spong i Vidyasagar 1997) ma postać

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

gdzie

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_2 d_1^2 + 2B,$$

$$M_{12} = B,$$

$$B = m_2 d_1 (x_{c2} \cos x_2 - y_{c2} \sin x_2),$$

$$M_{22} = I_2,$$

$$V_1 = B_{x_2} (2\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2),$$

$$V_2 = -B_{x_2} \dot{x}_1^2,$$

$$B_{x_2} = -m_2 d_1 (x_{c2} \sin x_2 + y_{c2} \cos x_2),$$

$$T_1 = s_1 \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + f_1 \dot{x}_1, \quad (3.34)$$

$$T_2 = s_2 \operatorname{sgn} \dot{x}_2 + f_2 \dot{x}_2. \quad (3.35)$$

Lewa strona równania (3.33) reprezentuje uogólnione siły bezwładności. Poszczególne czynniki po prawej stronie reprezentują kolejno: momenty napędowe, siły odśrodkowe i siły Coriolisa oraz siły tarcia. Macierz mas i momentów bezwładności występująca po lewej

stronie równania (3.33) jest macierzą nieosobliwą, symetryczną i dodatnio określona (zob. Spong i Vidyasagar 1997). Macierz tę będziemy oznaczać literą  $M$ . Macierz odwrotna do macierzy  $M$  jest dana wzorem

$$\bar{M} = \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{12} & M_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Równanie (3.33) ma nieciągłą prawą stronę, co może powodować problemy związane z istnieniem jego rozwiązań. Aby temu zaradzić, nieciągły model tarcia (3.34-35) zastępujemy jego gładkim przybliżeniem

$$T_1 = s_1 \tanh(k_t \dot{x}_1) + f_1 \dot{x}_1, \quad (3.37)$$

$$T_2 = s_2 \tanh(k_t \dot{x}_2) + f_2 \dot{x}_2, \quad k_t = 10 \div 100. \quad (3.38)$$

Oznaczając  $x_3 = \dot{x}_1$ ,  $x_4 = \dot{x}_2$ , oraz uwzględniając równości (3.33) i (3.36-38) możemy zapisać równania manipulatora w przestrzeni stanu, w postaci afiniczej względem sterowania

$$\dot{x} = f_0(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x), \quad (3.39)$$

przy czym

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\bar{M}_{11}(V_1 + T_1) - \bar{M}_{12}(V_2 + T_2) \\ -\bar{M}_{12}(V_1 + T_1) - \bar{M}_{22}(V_2 + T_2) \end{bmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Parametry przykładowego manipulatora zestawiono w tabeli 3.2.

**Tabela 3.2.** Parametry przykładowego manipulatora.

	$I_i$ kg·m <sup>2</sup>	$m_i$ kg	$d_i$ m	$x_{ci}$ m	$y_{ci}$ m	$s_i$ N·m	$f_i$ W <sup>-1</sup>	$u_{\min, i}$ N·m	$u_{\max, i}$ N·m
Ramię 1	1,00	10,0	1,00	0,50	0,00	0,10	0,01	-1,00	1,00
Ramię 2	1,00	5,0	0,70	0,35	0,00	0,10	0,01	-1,00	1,00

### Porównawczy algorytm sterowania (algorytm PD)

Powszechnie stosowaną w robotyce (zob. Jezierski 2006, s. 227) metodą stabilizacji manipulatorów jest zastosowanie w systemie (3.39-40) sprzężenia zwrotnego

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 + T_1 \\ V_2 + T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

gdzie  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  są nowymi sterowaniami. Po podstawieniu do (3.39) otrzymuje się dwa niezależne od siebie systemy liniowe:

$$\Lambda_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_3 = \eta_1, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \Lambda_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \eta_2, \end{cases} \quad (3.42)$$

gdzie  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  są nowymi sterowaniami. Jak widać, sprzężenie zwrotne (3.41) jednocześnie linearyzuje system (3.39) oraz eliminuje oddziaływanie skrośne pomiędzy osiami

manipulatora. Stabilizujące sprzężenie zwrotne dla systemu (3.42) można wyznaczyć na wiele sposobów. W szczególności można poszukiwać minimum wskaźnika jakości

$$J = \int_0^{\infty} (|x|^2 + r|\eta|^2) dt, \quad \eta = [\eta_1, \eta_2]^T, \quad r > 0, \quad (3.43)$$

na trajektoriach systemu (3.42). Ponieważ systemy  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$  są od siebie niezależne, to minimalizacja całki (3.43) jest równoważna minimalizacji całek

$$J_{\Lambda_1} = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_3^2 + r\eta_1^2) dt, \quad J_{\Lambda_2} = \int_0^{\infty} (x_2^2 + x_4^2 + r\eta_2^2) dt, \quad (3.44)$$

na trajektoriach systemów  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$ . Minimum całek (3.44) osiągane jest w klasie liniowych sprzężeń zwrotnych od położień i prędkości manipulatora

$$\eta_1 = -K_p x_1 - K_d x_3, \quad \eta_2 = -K_p x_2 - K_d x_4. \quad (3.45)$$

Współczynniki wzmacnienia regulatora optymalnego wyznaczamy z równości (zob. np. Mitkowski 1991)

$$K_p = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad K_d = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}.$$

Jeżeli  $r = 1$ , to  $K_p = 1$ ,  $K_d = \sqrt{3}$ . Opisany powyżej algorytm sterowania będziemy porównywać z algorytmem QTO-RHC.

### Pierwsze zadanie sterowania

Celem sterowania było przeprowadzenie końcówki manipulatora z punktu początkowego o współrzędnych  $[{}^0x_1, {}^0x_2] = [0,35, 1,6062]^T$  do punktu końcowego  $[{}^0x_{1f}, {}^0x_{2f}] = [1,7 0]^T$ , przy czym prędkości manipulatora w punkcie początkowym i końcowym były zerowe. Po rozwiązaniu odwrotnego zadania kinematyki otrzymano warunek początkowy  $x_0 = [1,5708 -0,5236 0 0]^T$  oraz końcowy  $x_f = [0 0 0 0]^T$  dla równania stanu (3.39). Zgodnie z konwencją przyjętą na początku rozdziału zadanie to sformułowano jako zadanie ze swobodnym horyzontem. Wskaźnik jakości miał postać daną wzorem (2.7), przy czym funkcja podcałkowa  $L$  oraz funkcja kary za niespełnienie warunku końcowego były dane równościami

$$L(x, u) = |x|_W^2 + |u|_R^2, \quad q = |x|_H^2, \quad W = 2I_{4x4}, \quad R = 2I_{2x2},$$

$$H = \begin{bmatrix} 3,9558 & 0,4140 & 6,9000 & 1,2250 \\ 0,4140 & 1,9618 & 1,2250 & 1,0000 \\ 6,9000 & 1,2250 & 20,8335 & 4,0227 \\ 1,2250 & 1,0000 & 4,0227 & 1,4590 \end{bmatrix}.$$

Zbiór końcowy  $\Omega$  był dany równością  $\Omega = \{x \in R^4 : x^T H x \leq 0,2\}$ . Dodatnio określoną macierz  $H$  oraz zbiór końcowy  $\Omega$  wyznaczono metodami opisanymi w rozdziale piątym. Sposób doboru macierzy  $H$  i zbioru  $\Omega$  zapewnia spełnienie założeń twierdzeń 3.2.1 i 3.3.1. Przyjęto współczynnik  $\xi = 0,1$ . Zbiór  $\mathbf{B}$ , w którym następuje adaptacja wskaźnika jakości, był dany równością  $\mathbf{B} = \{x \in R^4 : |x_i| \leq 0,5, i = 1, \dots, 4\}$ .

Niepewność parametrów modelu symulowano poprzez zaburzanie współczynników tarcia w równaniu obiektu. Zaburzenia te były szumem o rozkładzie równomiernym ze średnią zero

i amplitudą równą 10% wartości nominalnej danego współczynnika. Założono, że błędy w generacji momentów napędowych w silnikach nie przekraczają 2% ich maksymalnej wartości. Błędy te symulowano dodając do sterowania wyliczonego przez algorytm szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą 0,02 Nm. Założono, że maksymalne błędy estymacji kątów  $x_1$  i  $x_2$  nie przekraczają wartości  $2\pi/4096$  rad, podyktowanej rozdzielcością typowego 12-bitowego enkodera. Przyjęto, że prędkości kątowe ramion manipulatora są estymowane z dokładnością do 0,02 rad/s. Błędy estymacji stanu symulowano dodając do wyjść obiektu symulowanego szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą równą  $2\pi/4096$  rad dla pomiaru kąta oraz 0,02 rad/s dla pomiaru prędkości kątowej. Symulator obiektu był oddzielną, napisaną w języku C procedurą całkowania równań różniczkowych, wykorzystującą do generacji zakłóceń generatory liczb pseudolosowych. We wszystkich eksperymentach numerycznych okres wyliczania sterowania wynosił  $\delta = 0,1$  s.

W pierwszym eksperymencie numerycznym zakłócenia nie występowały. Na rys. 3.32 pokazano trajektorię stanu systemu (3.39), uzyskaną w wyniku działania algorytmu QTO-RHC oraz trajektorię zbliżoną do czasooptymalnej, przewidywaną w chwili początkowej. Przy braku zakłóceń obie trajektorie pokrywają się aż do momentu osiągnięcia zbioru **B**. Wówczas następuje adaptacja wskaźnika jakości i stan systemu schodzi z trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej. Przewidywany w chwili początkowej czas, po którym odchylenie zmiennych kątowych  $x_1$  i  $x_2$  jest mniejsze niż 0,5 stopnia, wynosił 5,24 s. Na skutek wcześniejszego zejścia z trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej, czas po którym odchylenie zmiennych kątowych  $x_1$  i  $x_2$  jest mniejsze niż 0,5 stopnia wzrósł do 5,45 s. Na rys. 3.33 pokazano sterowanie generowane przez algorytm QTO-RHC oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej. Rys. 3.34 pozwala porównać algorytm QTO-RHC z algorymem PD. Dla tego ostatniego, czas po którym odchylenie zmiennych kątowych  $x_1$  i  $x_2$  jest mniejsze niż 0,5 stopnia wynosi około 7,5 s. Na rys. 3.35 porównano sterowania dla obu algorytmów. W przypadku braku ograniczeń sterowania system (3.39) z algorymem PD jest GAS. W obecności ograniczeń sterowania nie można zagwarantować stabilności systemu (3.39) z algorymem PD, podczas gdy algorytm QTO-RHC jest GAS.

Rys. 3.36 pokazuje wartości współczynnika  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnika jakości w chwilach wyliczania sterowania. Adaptacja wskaźnika jakości odbywa się stosunkowo szybko, w porównaniu z czasem sterowania, a wskaźnik jakości ściśle maleje.

W kolejnym eksperymencie numerycznym symulowano zakłócenia i błędy modelowania manipulatora. Rys. 3.37 pokazuje trajektorię systemu (3.39) wygenerowaną przez algorytm QTO-RHC w obecności zakłóceń i przy niezgodności modelu z obiektem oraz trajektorię przewidywaną w chwili początkowej. Widoczne są odchylenia trajektorii od trajektorii przewidywanej. Podobnie jak poprzednio adaptacja wskaźnika jakości rozpoczyna się w momencie osiągnięcia zbioru **B**. Wpływ zakłóceń objawia się większym odchyleniem trajektorii od zera niż w przypadku nominalnym. Rys. 3.38 pokazuje sterowania wyliczane w obecności zakłóceń. W pierwszej składowej sterowania pojawiają się dwa nowe przełączenia oraz czasy wszystkich przełączeń ulegają zaburzeniu. Można jednak przyjąć, że struktura sterowania nie zmienia się istotnie. Rys. 3.39 pokazuje zachowanie się wskaźnika jakości oraz współczynnika  $\varepsilon_k$ . Adaptacja wskaźnika jakości przebiega podobnie jak w przypadku nominalnym, jednakże w końcowej fazie sterowania wskaźnik jakości nie jest już ściśle malejący i jedynie utrzymuje się średnio na pewnym stałym poziomie.

Na rys. 3.40 pokazano wyniki pomiarów czasu obliczeń prowadzonych w MATLABie ver. 5.3, na maszynie *Notebook Amilo Pro Fujitsu Siemens* z systemem operacyjnym Windows XP, z procesorem Intel 740 wyposażonym w 2MB pamięci podręcznej (*cash*), z zegarem 1,73 GHz. Maksymalny czas obliczeń nie przekraczał 0,1 s, co pozwala sądzić, że

proponowany algorytm można z powodzeniem stosować do sterowania w czasie rzeczywistym.

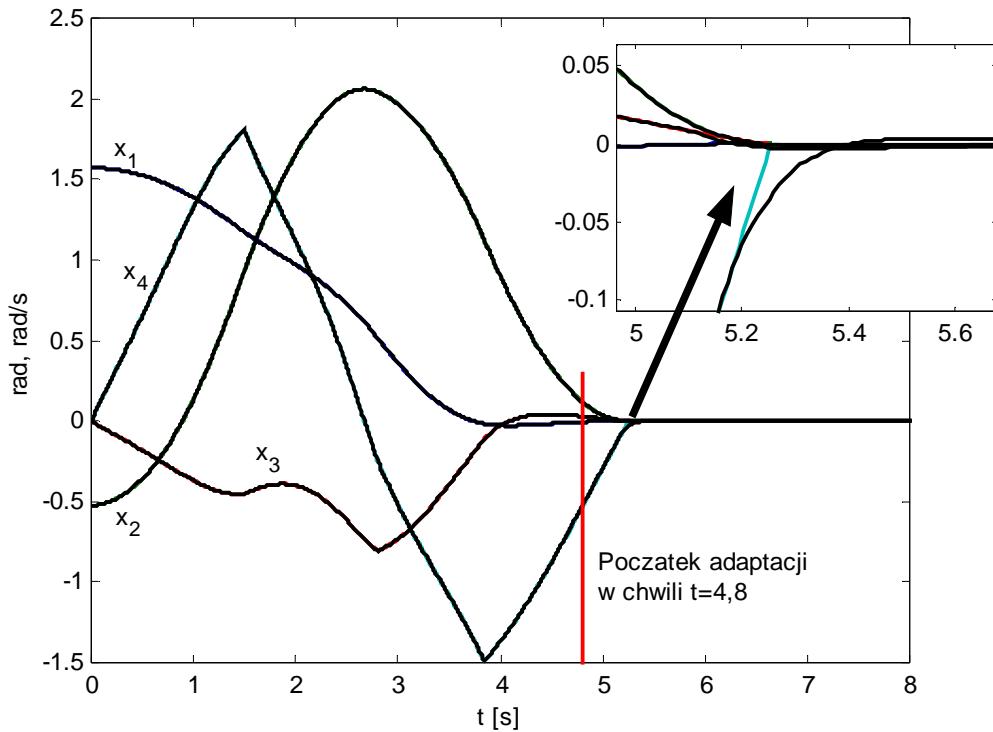
Wyłączenie mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości powoduje znaczne odchylenia trajektorii od zera oraz generację bardzo dużej liczby przełączeń sterowania. Częste przełączenia są przyczyną szybkiego zużywania się elementów manipulatora, nadmiernego przegrzewania silników oraz wzbudzają drgania w układzie. Na rys. 3.41-42 pokazano trajektorie i sterowania przy wyłączonym mechanizmie adaptacji. Tory ruchu końcówki manipulatora dla obu algorytmów porównano na rys. 3.43. W tabeli 3.3 porównano czas regulacji w obu algorytmach oraz wartość całki z kwadratu sterowania, która w pewnych przypadkach może być miarą zużywanej energii. Jako czas końcowy przyjęto pierwszą chwilę, w której zmienne kątowe odchylają się od zera mniej niż 0,5 stopnia w przypadku nominalnym oraz 5 stopni w przypadku zakłócanym. W przypadku występowania zakłóceń i błędów modelowania wartość średnia czasu, po którym odchylenie zmiennych kątowych  $x_1$  i  $x_2$  jest mniejsze niż 5 stopni oraz wartość średnia całki z kwadratu sterowania były obliczane po przeprowadzeniu siedemdziesięciu symulacji. W obu algorytmach występuje nieznaczne zwiększenie czasu regulacji oraz całki z kwadratu sterowania, spowodowane obecnością zakłóceń. Algorytm QTO-RHC zużywa o około 75% więcej energii niż algorytm PD przy trzydziestoprocentowym w porównaniu z PD skróceniu czasu regulacji.

**Tabela 3.3.** Porównanie algorytmów QTO-RHC i PD.

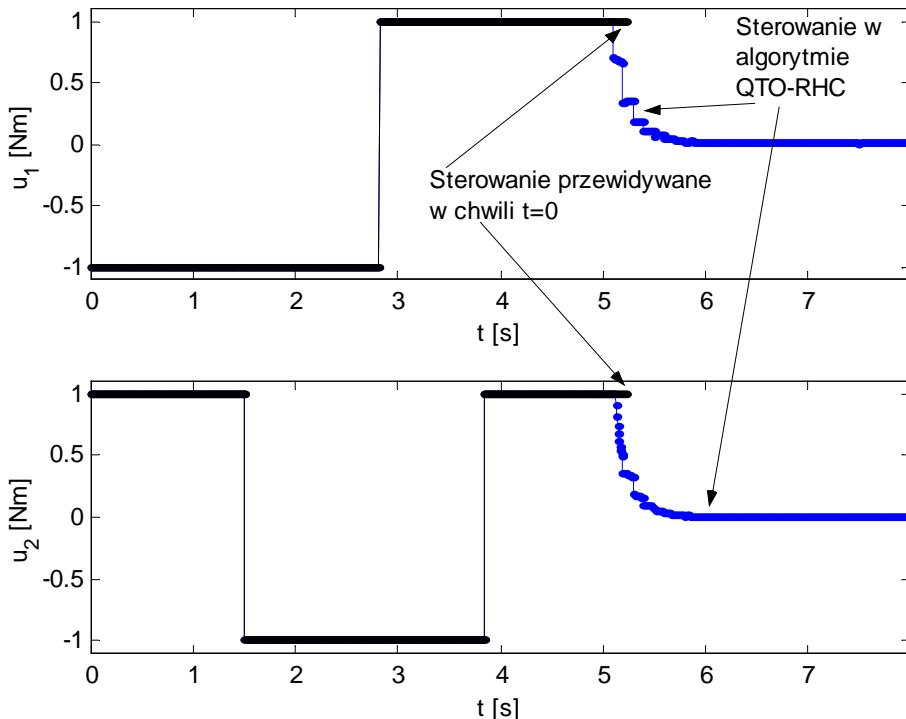
ALGORYTM	Pełna zgodność modelu i obiektu, brak zakłóceń.		Zakłócenia i błędy modelowania	
	Czas $T$ , po którym odchylenie zmiennych kątowych $x_1$ i $x_2$ jest mniejsze niż 0,5 stopnia	$\int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt$	Sredni czas $T$ , po którym odchylenie zmiennych kątowych $x_1$ i $x_2$ jest mniejsze niż 5 stopni	$\int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt$ wartość średnia
QTO-RHC	5,21 s	10,4749 J <sup>2</sup> ·s	5,4 s	10,7476 J <sup>2</sup> ·s
PD	7,5 s	5,2038 J <sup>2</sup> ·s	7,8 s	5,2049 J <sup>2</sup> ·s

### Drugie zadanie sterowania

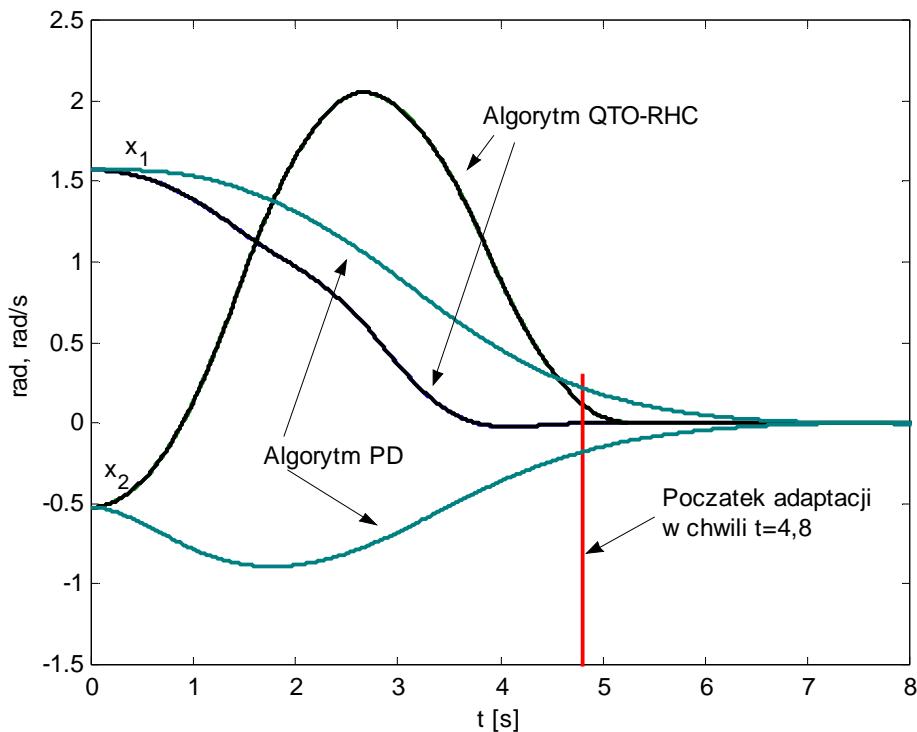
W drugim zadaniu sterowania zmieniono punkt początkowy i końcowy. Celem sterowania było przeprowadzenie końcówki manipulatora z punktu początkowego o współrzędnych  $[{}^0x_1, {}^0x_2] = [1,7 \ 0]^T$  do punktu  $[{}^0x_{1f}, {}^0x_{2f}] = [0,35, 1,6062]^T$ , przy czym prędkości manipulatora w punkcie początkowym i końcowym były zerowe. Ze względu na asymetrię oraz obecność sił tarcia zadanie to nie jest równoważne poprzedniemu zadaniu. Warunki początkowy i końcowy wynosiły  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  i  $x_f = [1,5708 \ -0,5236 \ 0 \ 0]^T$ . Wszystkie pozostałe parametry były takie same jak w poprzednim zadaniu sterowania. Na rys. 3.44-45 pokazano trajektorię oraz sterowania generowane przez algorytm w obecności zakłóceń. Na rys. 3.46 pokazano pełny cykl pracy manipulatora przy przejściu z punktu  $x_0$  do  $x_f$  i z powrotem. Różnice pomiędzy torami wynikają przede wszystkim z asymetrii zadania, obecności tarcia oraz w bardzo niewielkim stopniu z obecnością zakłóceń.



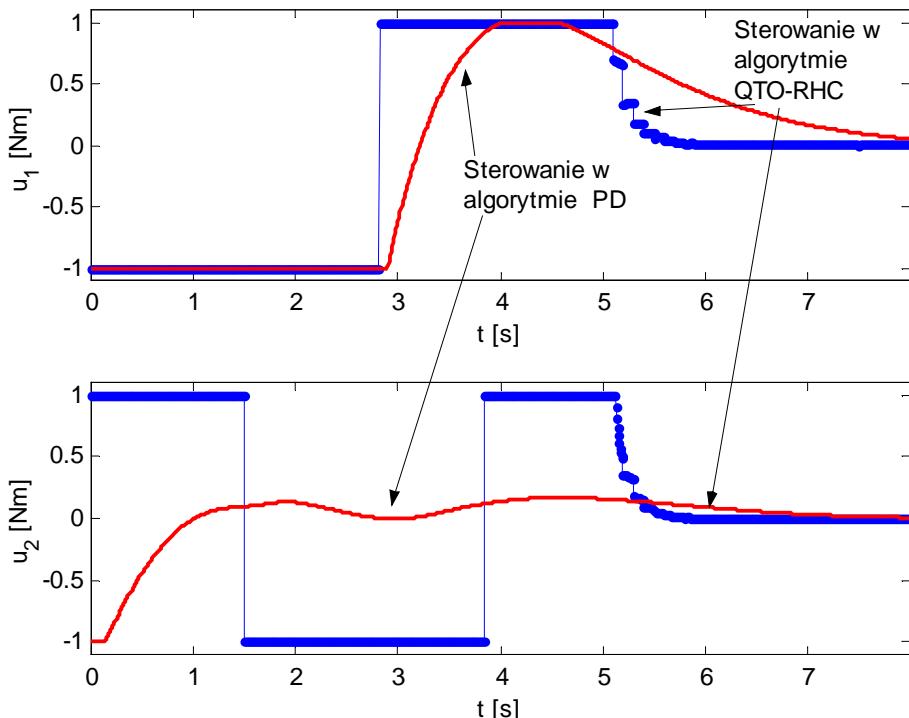
Rys. 3.32. Algorytm QTO-RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej przy braku zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości obie trajektorie pokrywają się.



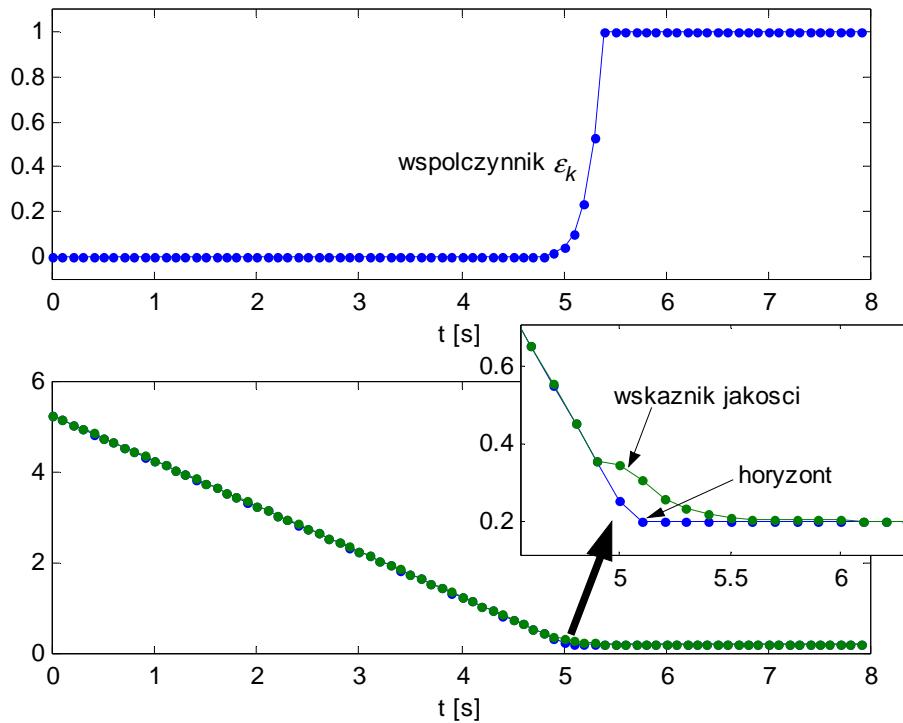
Rys. 3.33. Algorytm QTO-RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej przy braku zakłóceń. Do momentu rozpoczęcia adaptacji wskaźnika jakości oba sterowania pokrywają się.



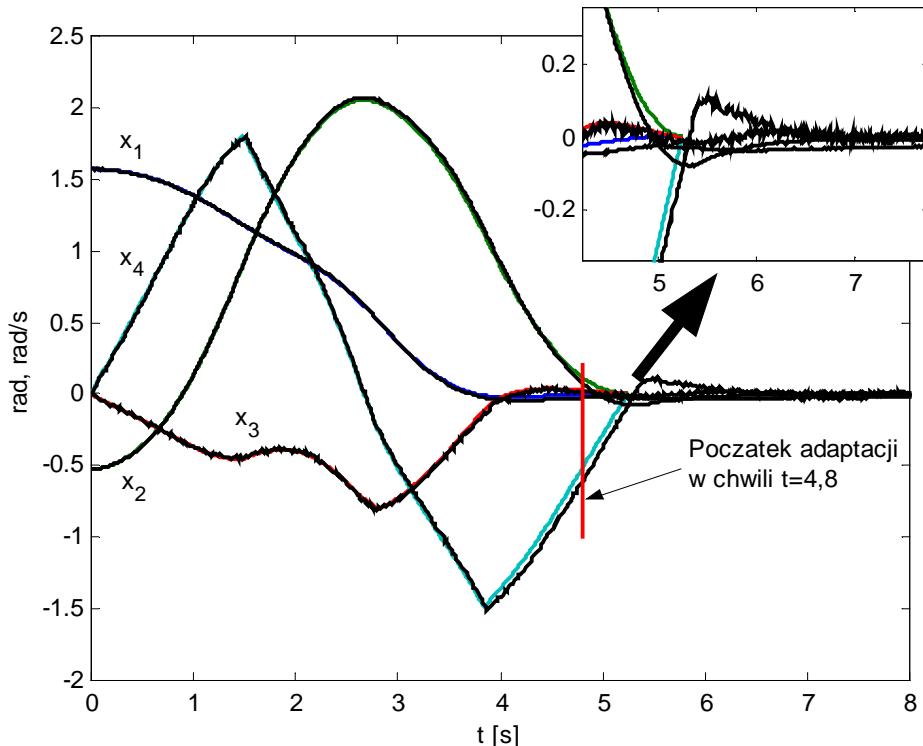
Rys. 3.34. Porównanie dwóch pierwszych składowych stanu generowanych przez algorytmy QTO-RHC oraz PD. Przypadek nominalny.



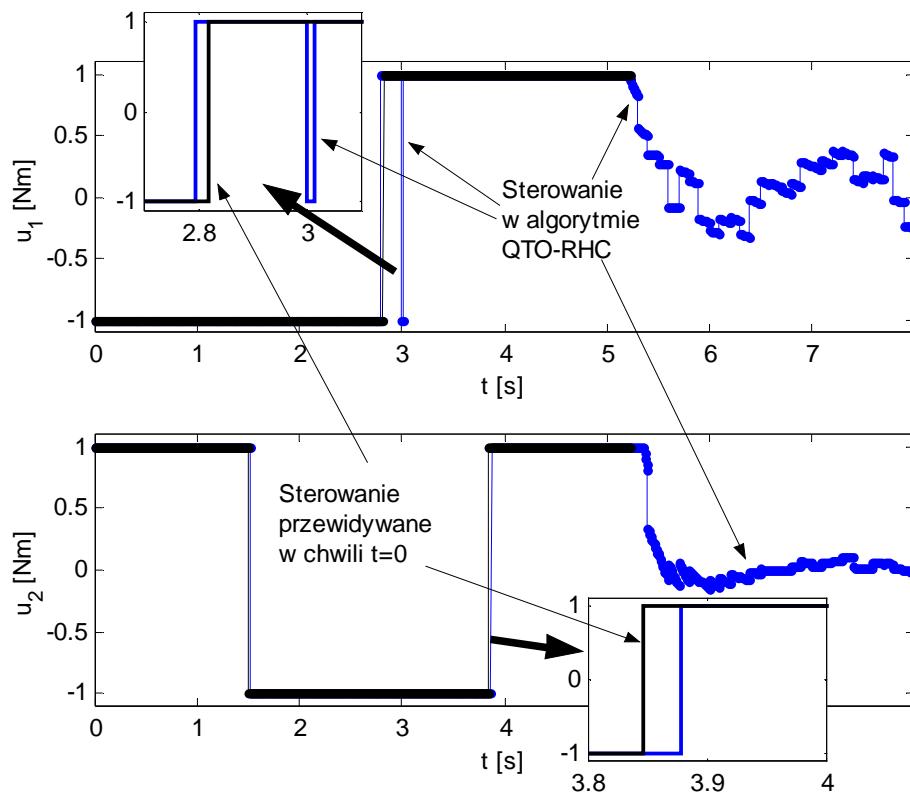
Rys. 3.35. Porównanie sterowań generowanych przez algorytmy QTO-RHC oraz PD. Przypadek nominalny.



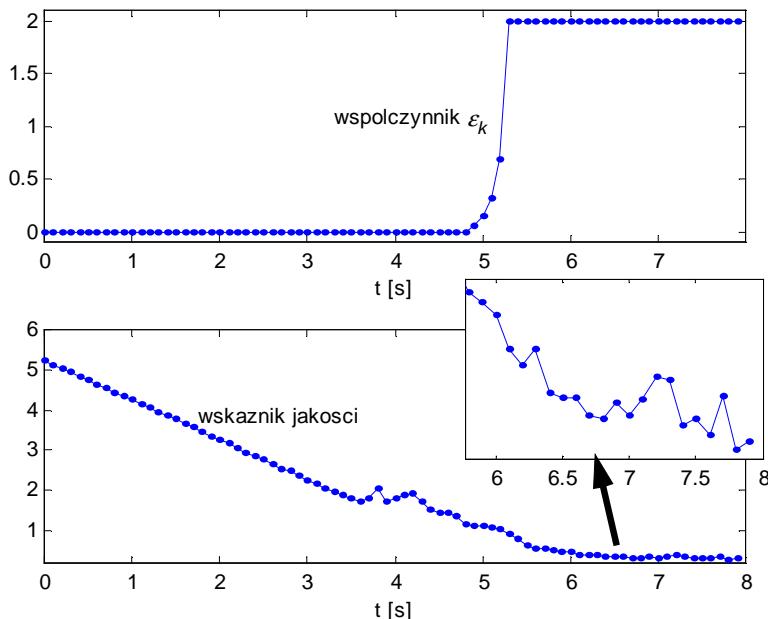
Rys. 3.36. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości i horyzont w poszczególnych iteracjach. Przypadek nominalny.



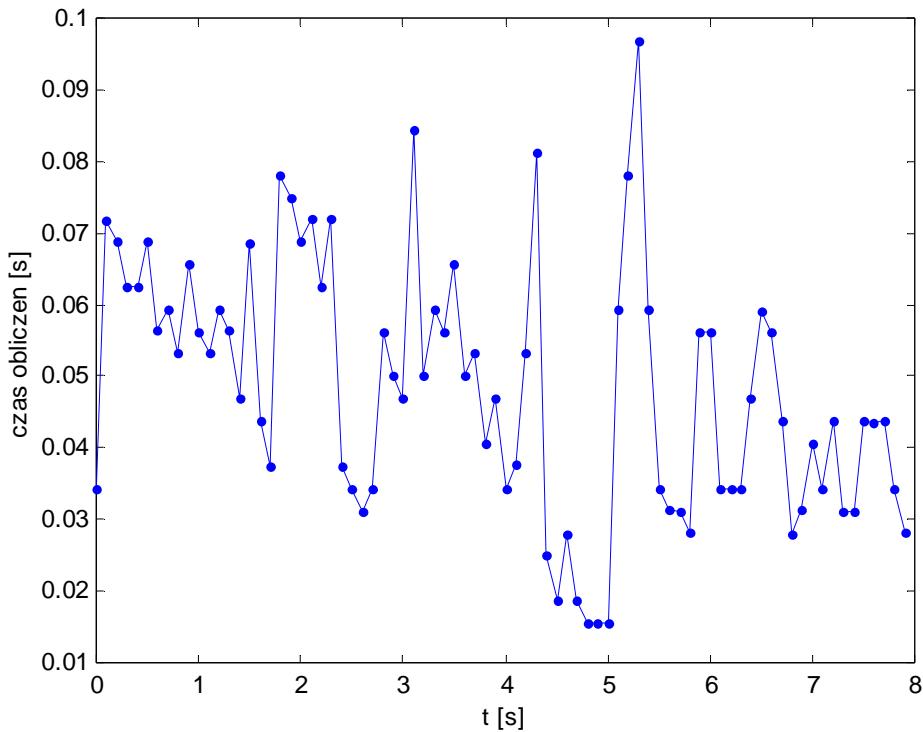
Rys. 3.37. Algorytm QTO–RHC. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt.



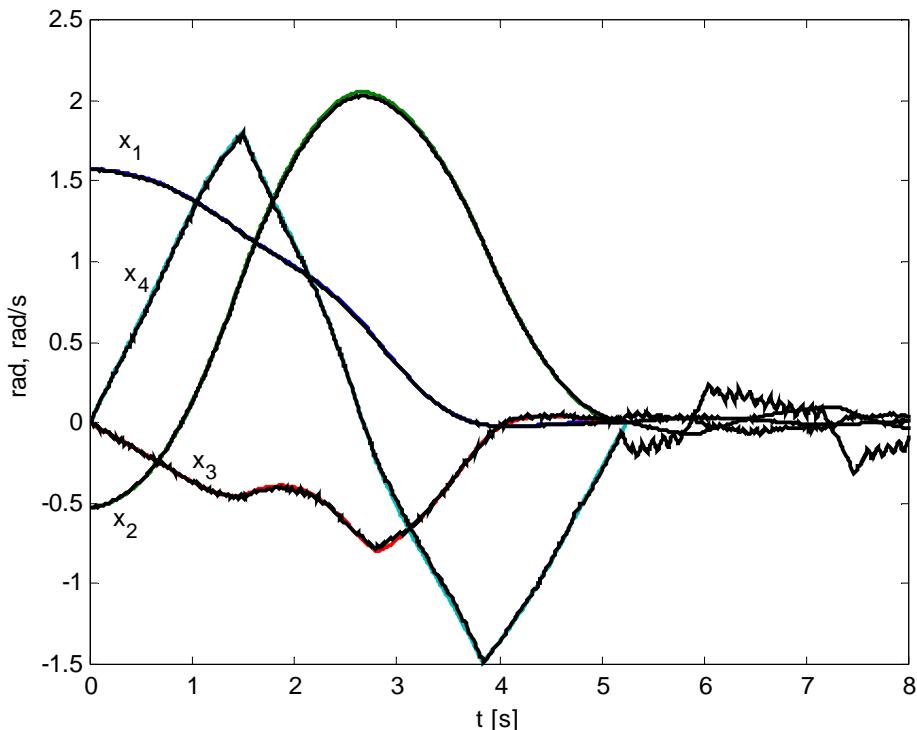
Rys. 3.38. Algorytm QTO–RHC. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt. Na rysunku pokazano zmiany czasów przełączeń oraz dwa nowe przełączenia, występujące na skutek obecności zakłóceń i błędów modelowania.



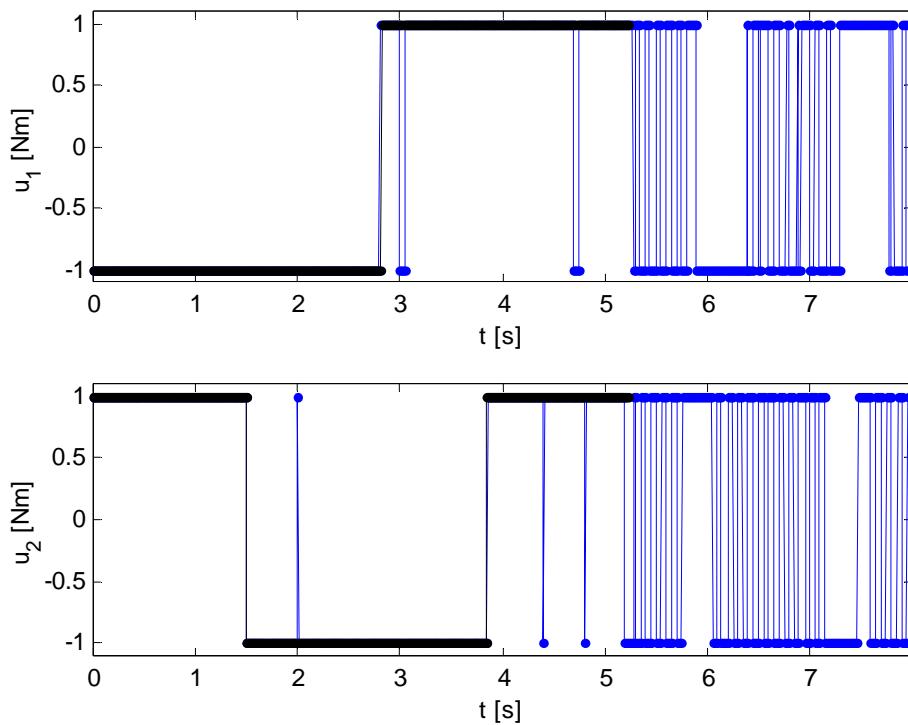
Rys. 3.39. Algorytm QTO–RHC. Współczynnik  $\varepsilon_k$  oraz wskaźnik jakości w poszczególnych iteracjach w przypadku zakłócanym. Wskutek obecności zakłóceń wskaźnik jakości nie maleje monotonicznie.



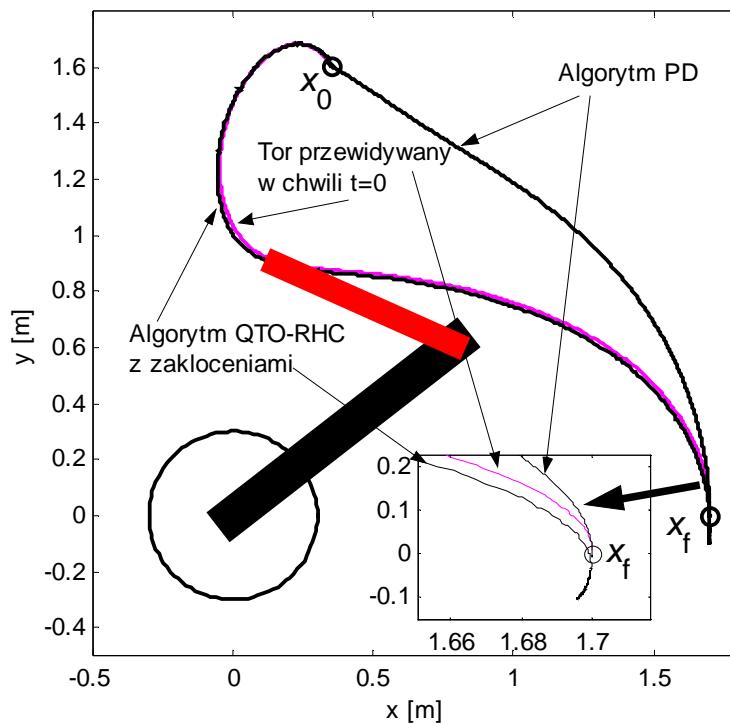
Rys. 3.40. Czasy obliczen sterowania .



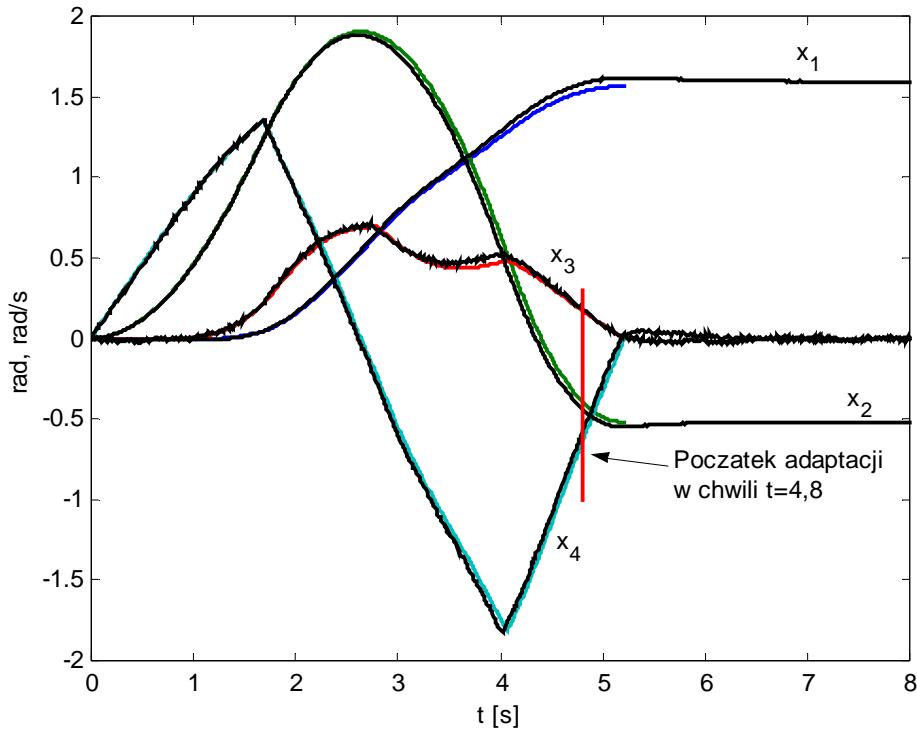
Rys. 3.41. Trajektoria generowana przez algorytm QTO-RHC z wyłączonym mechanizmem adaptacji wskaźnika jakości przy występowaniu zakłóceń i niedokładnym modelowaniu.



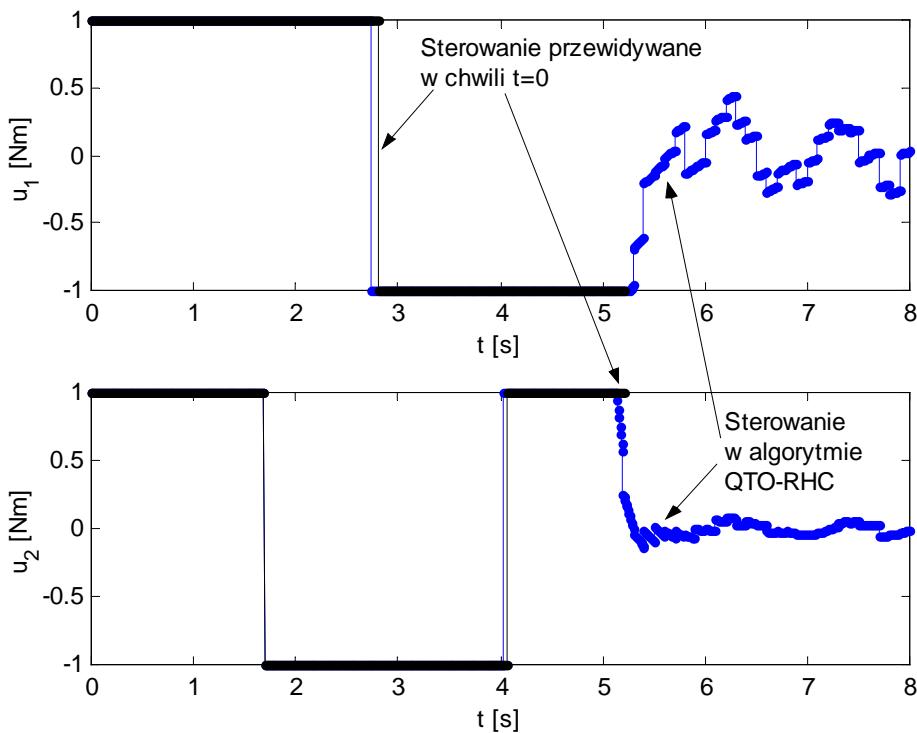
Rys. 3.42. Sterowania generowane przez algorytm QTO-RHC z wyłączeniem mechanizmu adaptacji wskaźnika jakości przy występowaniu zakłóceń i niedokładnym modelowaniu.



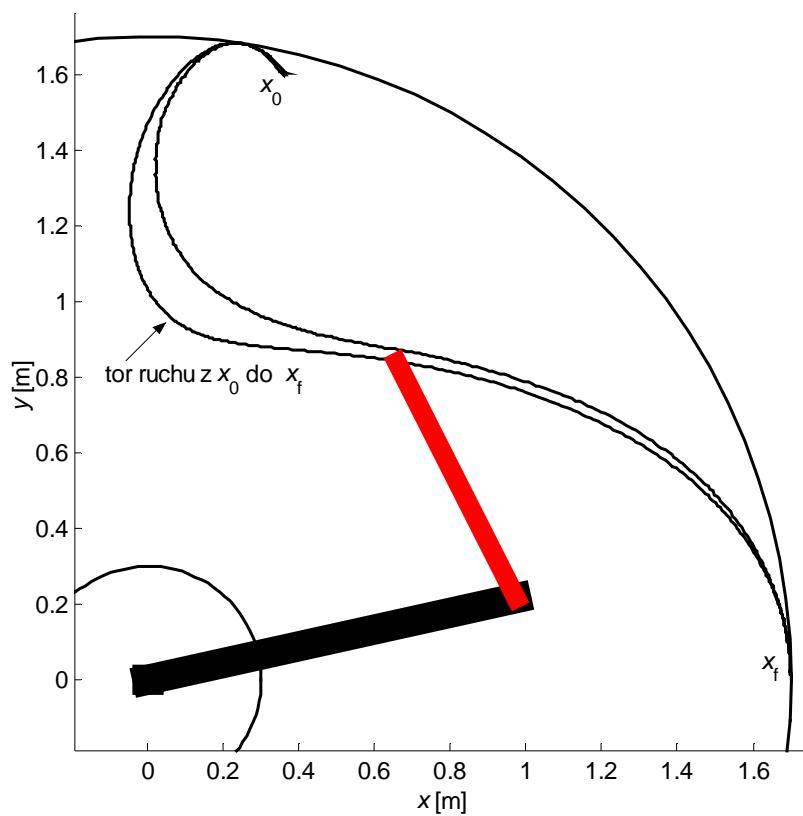
Rys. 3.43. Tor ruchu końcówki manipulatora dla algorytmu QTO-RHC w obecności zakłóceń i błędów modelowania oraz tor ruchu dla algorytmu PD w przypadku nominalnym. Wpływ zakłóceń powoduje odchylenie się toru ruchu od toru przewidywanego w chwili początkowej.



Rys. 3.44. Algorytm QTO–RHC, drugie zadanie sterowania. Trajektoria stanu oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej w obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt.



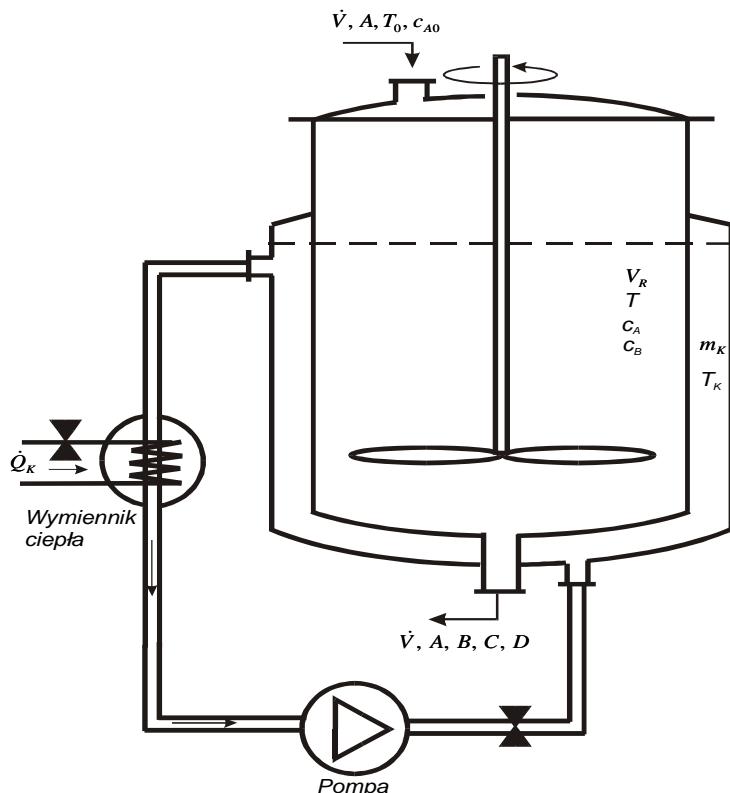
Rys. 3.45. Algorytm QTO–RHC, drugie zadanie sterowania. Sterowanie oraz sterowanie przewidywane w chwili początkowej w obecności zakłóceń i niezgodności model–obiekt.



Rys. 3.46. Cykl pracy manipulatora. Tor ruchu końcówki manipulatora dla algorytmu QTO-RHC w obecności zakłóceń i błędów modelowania, przy przejściu z punktu  $x_0$  do punktu  $x_f$  i z powrotem. Różnice pomiędzy oboma torami wynikają z asymetrii zadania, obecności sił tarcia oraz w bardzo niewielkim stopniu z obecnością zakłóceń.

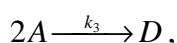
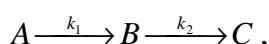
### Przykład 3.4.5. Reaktor przepływowo – problem testowy

W niniejszym przykładzie przetestujemy działanie algorytmu QTO-RHC w zadaniu sterowania reaktorem przepływowym. Reaktory tego typu są powszechnie stosowane w przemyśle chemicznym, charakteryzują się silnymi nieliniowościami oraz ze względu na nieminimalnofazowość, uważane są za obiekty trudne do sterowania (Luyben 1976, Morari 1983). Podany poniżej przykład rzeczywistego reaktora, zaczerpnięty z pracy (Chen *et al.* 1995), jest znany problemem testowym używanym do sprawdzania nieliniowych algorytmów sterowania.



Rys. 3.47. Schemat reaktora przepływowego.

Podstawową reakcją zachodzącą w reaktorze jest przekształcenie cyklopentadienu (substancja  $A$ ) w produkt cyklopentanol (substancja  $B$ ). Cyklopentanol ( $B$ ) reaguje także w drugiej niepożądanej reakcji, tworząc cyklopentanodiol (substancja  $C$ ). Ponadto w układzie zachodzi trzecia, również niepożądana reakcja, w której cyklopentadien ( $A$ ) przechodzi w dicyklopentadien (substancja  $D$ ). Opisany schemat reakcji, znany pod nazwą reakcji typu Van der Vusse'a, pokazano na poniższym diagramie



gdzie przez  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  oznaczono prędkości reakcji.

Na rys. 3.47 przedstawiono uproszczony schemat reaktora. Ciecz zawierająca substancję  $A$  o stężeniu  $c_{A0}$  mol/l jest podawana do reaktora z prędkością  $\dot{V}$  1/h, a jej temperatura wynosi  $T_0$  K. Reaktor otoczony jest płaszczem z cieczą chłodzącą, krążącą w obiegu zamkniętym. Ciecz chłodząca wymienia ciepło w wymienniku ciepła z prędkością  $\dot{Q}_K$  kJ/h. Przy wyprowadzaniu równań modelu autorzy (Chen *et al.* 1995) przyjęli założenie idealnego

mieszania cieczy w reaktorze i w płaszczu oraz pominęli opóźnienia transportowe w obwodzie chłodzenia reaktora. Korzystając z bilansu mas i energii można wyprowadzić następujące równania stanu opisujące dynamikę reaktora.

### Bilans mas

$$\dot{c}_A = \frac{\dot{V}}{V_R} (c_{A0} - c_A) - k_1(T)c_A - k_3(T)c_A^2, \quad (3.46)$$

$$\dot{c}_B = -\frac{\dot{V}}{V_R} c_B + k_1(T)c_A - k_2(T)c_B. \quad (3.47)$$

### Bilans energii

$$\dot{T} = \frac{\dot{V}}{V_R} (T_0 - T) - \frac{1}{\rho C_p} (k_1(T)c_A \Delta H_{RAB} + k_2(T)c_B \Delta H_{RBC} + k_3(T)c_A^2 \Delta H_{RAD}) + \frac{k_w A_R}{\rho C_p V_R} (T_K - T), \quad (3.48)$$

$$\dot{T}_K = \frac{1}{m_K C_{PK}} (\dot{Q}_K + k_w A_R (T - T_K)), \quad c_A \geq 0, \quad c_B \geq 0. \quad (3.49)$$

przy czym  $c_A$ ,  $c_B$  (w mol/l),  $T$ ,  $T_K$  (w K) oznaczają odpowiednio stężenie substancji A, stężenie substancji B, temperaturę reaktora oraz temperaturę cieczy chłodzącej. Zależność prędkości reakcji od temperatury określa prawo Arrheniusa

$$k_i(T) = k_{i0} \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.50)$$

Parametry reaktora zebrane w tabeli 3.4.

**Tabela 3.4.** Parametry reaktora.

Nazwa	Symbol	Wartość	Jednostka
Współczynnik szybkości reakcji	$k_{10}$ , $k_{20}$	$1,287 \cdot 10^{12}$	$\text{h}^{-1}$
Współczynnik szybkości reakcji	$k_{30}$	$9,043 \cdot 10^9$	$\text{l}/(\text{mol} \cdot \text{h})$
Stosunek energii aktywacji do stałej gazowej	$E_1 / R$ , $E_2 / R$	9758,3	K
Stosunek energii aktywacji do stałej gazowej	$E_3 / R$	8560,0	K
Entalpia reakcji 1	$\Delta H_{RAB}$	4200	kJ/mol
Entalpia reakcji 2	$\Delta H_{RBC}$	-11000	kJ/mol
Entalpia reakcji 3	$\Delta H_{RAD}$	-41850	kJ/mol
Gęstość mieszaniny w reaktorze	$\rho$	0,9342	kg/l
Pojemność cieplna mieszaniny w reaktorze	$C_p$	3,01	kJ/(kg·K)
Współczynnik przejmowania ciepła	$k_w$	4032	kJ/(h·m <sup>2</sup> ·K)
Powierzchnia wymiany ciepła	$A_R$	0,2150	m <sup>2</sup>
Objętość reaktora	$V_R$	0,01	m <sup>3</sup>
Masa cieczy chłodzącej	$m_K$	5,0	kg
Pojemność cieplna cieczy chłodzącej	$C_{PK}$	2,0	kJ/(kg·K)

**Uwaga 3.1.** Wyrażenie (3.50) zawiera iloczyn dwóch liczb różniących się o kilkadesiąt rzędów wielkości i jest niekorzystne z punktu widzenia obliczeń numerycznych. W związku z powyższym należy je zastąpić wyrażeniem

$$k_i(T) = \exp\left(\bar{k}_{i0} - \frac{E_i}{RT}\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.50a)$$

gdzie  $\bar{k}_{i0} = \ln k_{i0}$ ,  $\bar{k}_{10} = \bar{k}_{20} = 27,8833$ ,  $\bar{k}_{30} = 22,9253$ .

Sterowanie reaktorem odbywa się poprzez zmianę stosunku  $\frac{\dot{V}}{V_R}$  oraz poprzez kontrolowanie prędkości odprowadzania ciepła z reaktora ( $\dot{Q}_k$  we wzorze (3.49)). Wielkości te spełniają ograniczenia

$$3,0 \leq \frac{\dot{V}}{V_R} \leq 35,0 \text{ l/h}, \quad -9000 \leq \dot{Q}_k \leq 0 \text{ kJ/h}. \quad (3.51)$$

Odchylenia temperatury  $T_0$  oraz stężenia  $c_{A0}$  od wartości ustalonych stanowią zakłócenia. Założono, że odchylenia te są ograniczone i nie przekraczają odpowiednio  $\pm 5$  K oraz  $\pm 0,1 \text{ mol/l}$ . Aby uprościć zapis równań stanu i zredukować liczbę mnożeń wprowadzamy oznaczenia

$$x_1 = c_A, \quad x_2 = c_B, \quad x_3 = T, \quad x_4 = T_K, \quad u_1 = \frac{\dot{V}}{V_R}, \quad u_2 = -\frac{\dot{Q}_k}{m_K C_{PK}}, \quad z_1 = c_{A0}, \quad z_2 = T_0, \quad (3.52)$$

$$H_1 = \frac{\Delta H_{RAB}}{\rho C_p}, \quad H_2 = \frac{\Delta H_{RBC}}{\rho C_p}, \quad H_3 = \frac{\Delta H_{RAD}}{\rho C_p}, \quad A_1 = \frac{k_w A_R}{\rho C_p V_R}, \quad A_2 = \frac{k_w A_R}{m_K C_{PK}}. \quad (3.53)$$

W nowych oznaczeniach równania (3.46-49) przyjmują postać:

$$\dot{x}_1 = u_1(z_1 - x_1) - k_1 x_1 - k_3 x_1^2, \quad (3.54)$$

$$\dot{x}_2 = -u_1 x_2 + k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad (3.55)$$

$$\dot{x}_3 = u_1(z_2 - x_3) - (k_1 x_1 H_1 + k_2 x_2 H_2 + k_3 x_1^2 H_3) + A_1(x_4 - x_3), \quad (3.56)$$

$$\dot{x}_4 = -u_2 + A_2(x_3 - x_4), \quad (3.57)$$

$$k_i(x_3) = \exp\left(\bar{k}_{i0} - \frac{E_i}{R x_3}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.58)$$

Model (3.46-50) będzie wykorzystywany jako symulator obiektu, a model (3.54-58) będzie służył do obliczania sterowania. Parametry modelu przeskalonego oraz graniczne wartości sterowania wynoszą

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 1,49362966945975 \text{ K}\cdot\text{l/mol}, \\
 H_2 &= -3,91188722953745 \text{ K}\cdot\text{l/mol}, \\
 H_3 &= -14,88295277783112 \text{ K}\cdot\text{l/mol}, \\
 A_1 &= 30,82851637764932 \text{ h}^{-1}, \quad A_2 = 86,688 \text{ h}^{-1}, \\
 u_{1\min} &= 3,0 \text{ h}^{-1}, \quad u_{1\max} = 35 \text{ h}^{-1}, \\
 u_{2\min} &= 0 \text{ K/h}, \quad u_{2\max} = 900 \text{ K/h}.
 \end{aligned}$$

### **Wybór punktu pracy oraz lokalna analiza dynamiki reaktora**

Niech  $u_{1r}$ ,  $u_{2r}$ ,  $z_{1r}$ ,  $z_{2r}$  oznaczają ustalone wartości sterowań i wejść niesterowanych. Przyrównując do zera prawe strony równań (3.54-57) i zakładając, że  $u_1 = u_{1r}$ ,  $u_2 = u_{2r}$ ,  $z_1 = z_{1r}$ ,  $z_2 = z_{2r}$  otrzymuje się następujący układ równań określający stan ustalony reaktora:

$$x_{1r} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2}, \quad b = \frac{k_1(x_{3r}) + u_{1r}}{k_3}, \quad c = \frac{u_{1r}z_{1r}}{k_3(x_{3r})}, \quad (3.59)$$

$$x_{2r} = \frac{k_1(x_{3r})}{k_2(x_{3r}) + u_{1r}} x_{1r}, \quad (3.60)$$

$$z_{2r} = x_{3r} + \frac{H + \frac{A_1 u_{2r}}{A_2}}{u_{1r}}, \quad H = k_1(x_{3r})x_{1r}H_1 + k_2(x_{3r})x_{2r}H_2 + k_3(x_{3r})x_{1r}^2H_3, \quad (3.61)$$

$$x_{4r} = x_{3r} - \frac{u_{2r}}{A_2}, \quad (3.62)$$

gdzie  $k_i$  dane są równością (3.58).

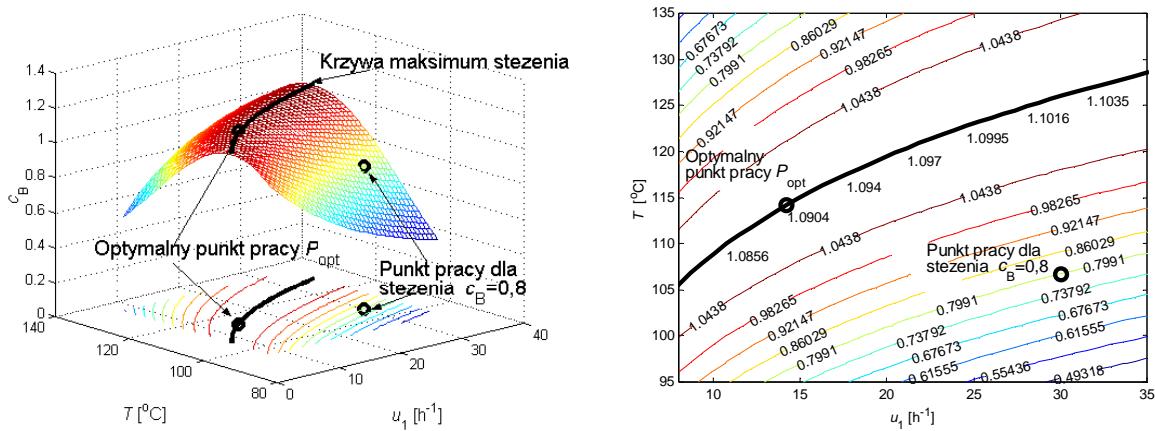
Optymalny punkt pracy reaktora wyznacza się metodami numerycznymi maksymalizując stężenie produktu przy uwzględnieniu kryteriów ekonomicznych. Punkt pracy wyznaczony przez Chena (Chen *et al.* 1995) wynosił:

$$\begin{aligned}
 x_{1r} &= 2,13959274764266 \text{ mol/l}, \quad x_{2r} = 1,09030127640364 \text{ mol/l}, \\
 x_{3r} &= 387,35 \text{ K}, \quad x_{4r} = 386,0655084902178 \text{ K}, \\
 z_{1r} &= 5,1 \text{ mol/l}, \quad z_{2r} = 378,0578585593333 \text{ K}, \\
 u_{1r} &= 14,19 \text{ h}^{-1}, \quad u_{2r} = 111,35 \text{ K/h}.
 \end{aligned}$$

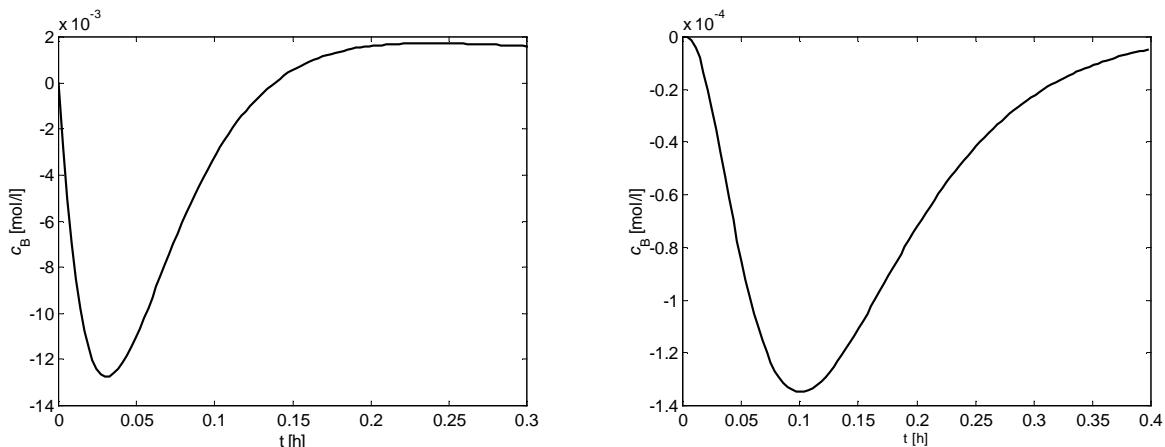
Ponieważ celem niniejszego przykładu jest badanie zachowania algorytmu QTO-RHC pod kątem optymalizacji stanów dynamicznych reaktora, to w dalszym ciągu będziemy zakładać, że punkt pracy reaktora jest ustalony, stężenie oraz temperatura wlotowa podlegają losowym, ograniczonym zmianom, a celem sterowania jest doprowadzenie stanu systemu do zadanego punktu pracy oraz stabilizacja. Zagadnienia optymalizacji stanu ustalonego przemysłowych obiektów chemicznych wykraczają poza zakres tej pracy, a ich szczegółowe omówienie czytelnik może znaleźć w książce Tatjewskiego (2002) oraz w pracach Brdysia (1986, 1994).

Korzystając z pierwszych dwóch równań układu (3.59-62) można wyznaczyć stężenie produktu  $x_{2r}$  w funkcji temperatury reaktora  $x_{3r}$  oraz sterowania  $u_{1r}$ , przy ustalonej wartości  $z_{1r}$ . Zależność tę pokazano na rys. 3.48, gdzie przedstawiono również położenie optymalnego punktu pracy ( $P_{\text{opt}}$ ) oraz położenie drugiego punktu pracy ( $P_2$ ), odpowiadającego stężeniu  $c_B = 0,8$ . Optymalny punkt pracy leży na krzywej zapewniającej maksimum stężenia produktu. Łatwo zauważać, że w punkcie tym współczynniki wzmacnienia obiektu zmieniają znak, co powoduje, że utrzymanie reaktora w optymalnym punkcie pracy jest znacznie

utrudnione i nie jest możliwe przy użyciu klasycznych regulatorów PID (szczegóły, zob. Morari 1983). Analiza dynamiki reaktora w otoczeniu optymalnego punktu pracy pokazuje, że jest on obiektem nieminimalnofazowym. Odpowiednie odpowiedzi skokowe pokazano na rys. 3.49. Powyższe trudności stanowią uzasadnienie dla zastosowania nieliniowych technik sterowania, takich jak algorytm QTO-RHC.



Rys. 3.48. Zależność stężenia od sterowania i temperatury reaktora.



Rys. 3.49. Odpowiedzi skokowe reaktora wyliczone w optymalnym punkcie pracy.  
a) Skokowa zmiana przepływu , b) skokowa zmiana prędkości chłodzenia.

### **Opis eksperymentów numerycznych**

W eksperymetach numerycznych symulowano zachowanie reaktora korzystając z modelu (3.46-49). Zakłócenia symulowano dodając do współczynników modelu szum o rozkładzie równomiernym i amplitudzie równej 5% wartości danego współczynnika. Zakłócenia w generacji sterowań symulowano poprzez losowe zaburzanie wyznaczonych przez algorytm sterowań o  $1,5 \text{ h}^{-1}$  dla przepływu oraz  $100 \text{ kJ/h}$  dla chłodzenia. Losowe zakłócenia temperatury wlotowej i stężenia  $c_{A0}$  symulowano dodając do wartości nominalnych szum o rozkładzie równomiernym ze średnią zero i amplitudą  $0,1 \text{ mol/l}$  dla stężenia i  $5 \text{ K}$  dla temperatury. Założono, że błędy pomiaru temperatur są nie większe niż  $0,5 \text{ K}$  oraz że stężenia składników są estymowane z dokładnością do  $0,01 \text{ mol/l}$ . Sterowania wyznaczano w oparciu o model (3.54-57) przy nominalnych wartościach współczynników.

Wskaźnik jakości dla systemu przeskalowanego (3.54-57) miał postać daną wzorem (2.7) przy czym funkcja podcałkowa  $L$  oraz funkcja kary za niespełnienie warunku końcowego były dane równościami

$$L(x, u) = \|x - x_r\|_W^2 + \|u - u_r\|_R^2, \quad q = \|x - x_r\|_H^2, \quad (3.63)$$

gdzie  $x_r$ ,  $u_r$  oznaczają odpowiednio jeden z punktów pracy reaktora ( $P_{\text{opt}}$  lub  $P_2$ ) oraz wartości sterowań w stanie ustalonym, odpowiadające danemu punktowi pracy. Macierze wagowe były dane równościami

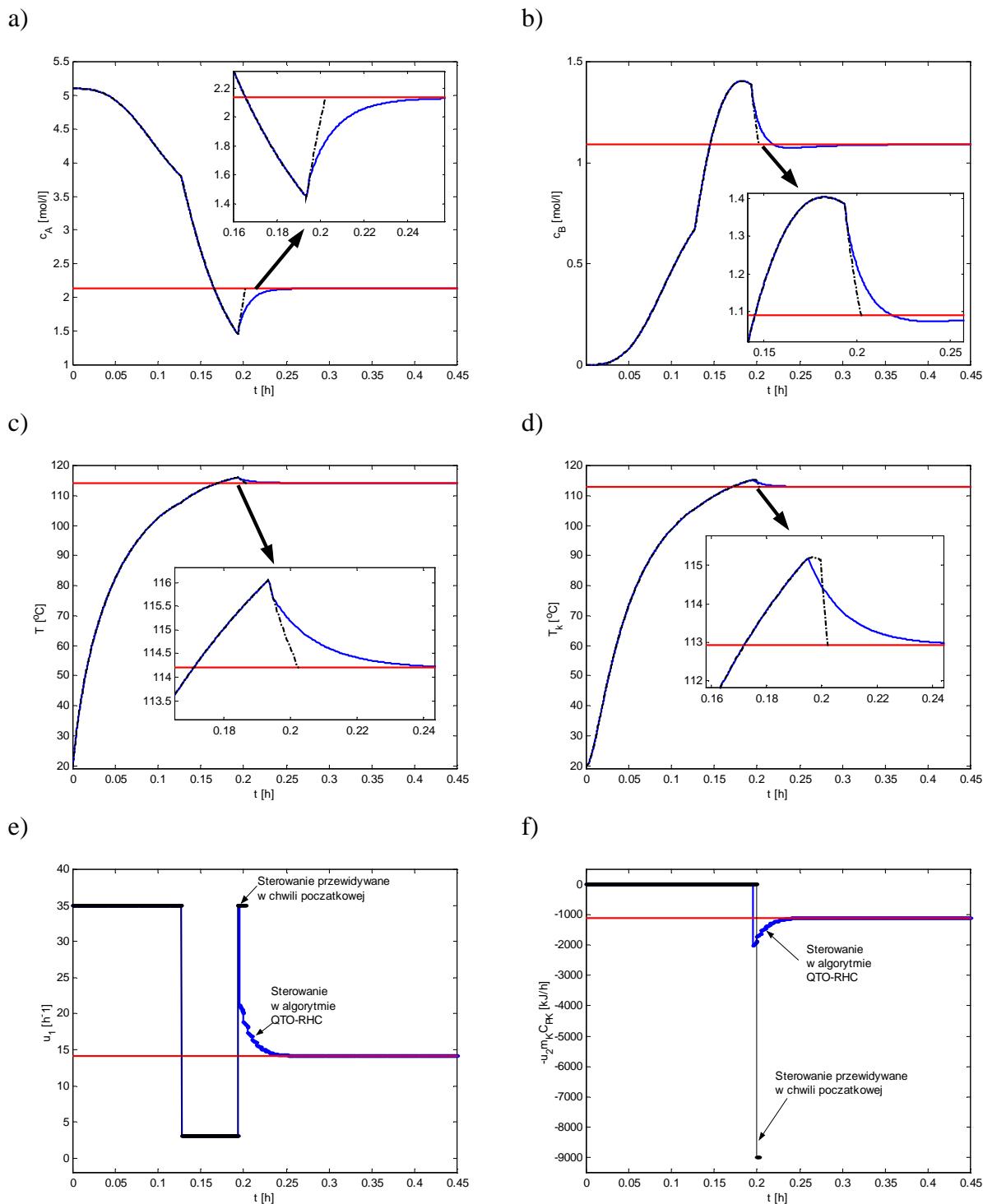
$$W = 100 \text{ diag}(20, 40, 8, 8), \quad R = \text{diag}(2, 0, 02), \quad (3.63a)$$

$$H = \begin{bmatrix} 42,2800 & 20,9432 & 9,0835 & 1,6322 \\ 20,9432 & 39,0047 & 2,5435 & 0,4351 \\ 9,0835 & 2,5435 & 3,9353 & 0,7764 \\ 1,6322 & 0,4351 & 0,7764 & 1,4022 \end{bmatrix}. \quad (3.63b)$$

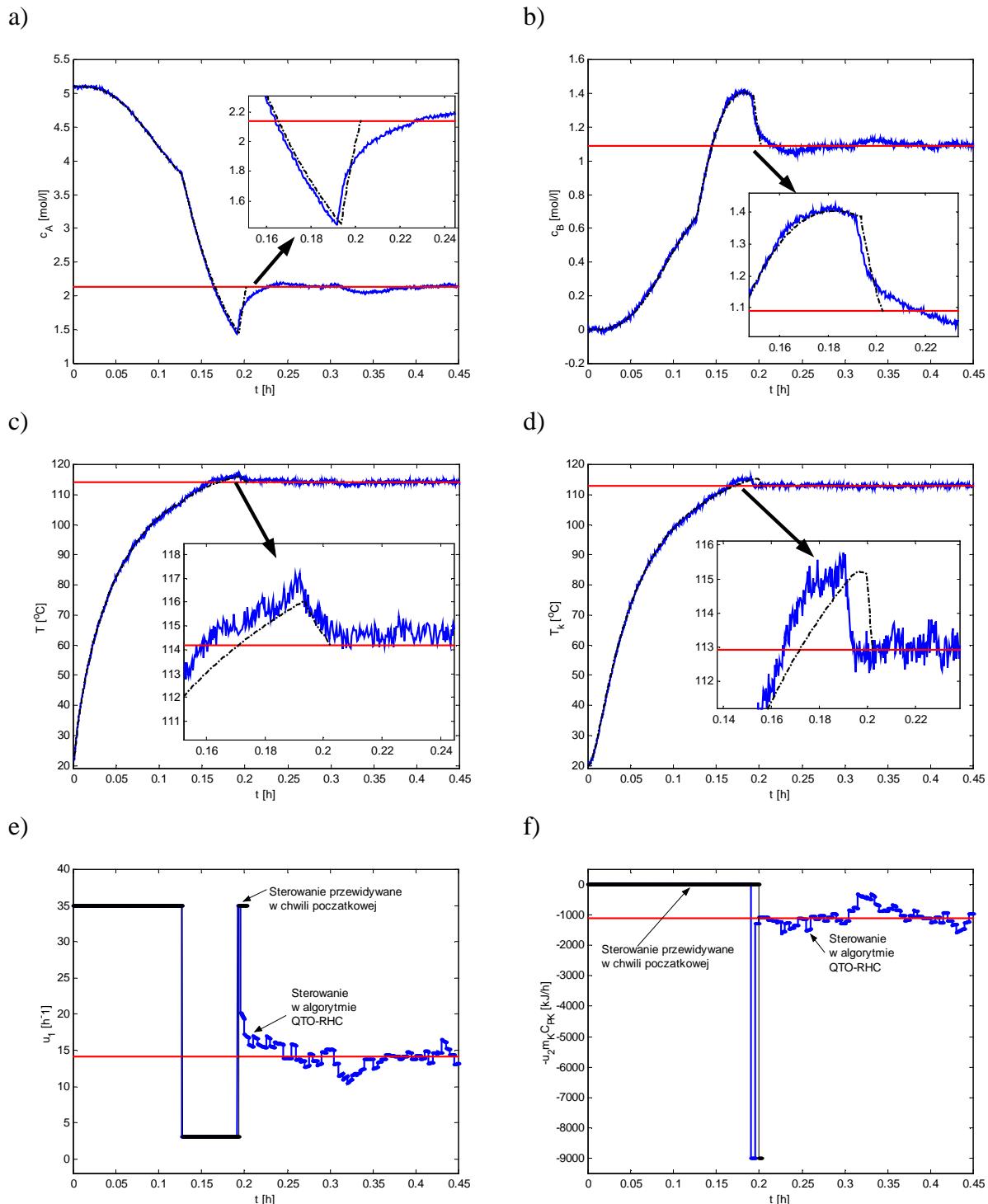
Zbiór końcowy  $\Omega$  był dany równością  $\Omega = \{x \in R^4 : \|x - x_r\|_H^2 \leq 0,1\}$ . Dodatnio określona macierz  $H$  oraz zbiór końcowy  $\Omega$  wyznaczono metodami opisanymi w rozdziale piątym. Wybór macierzy  $H$  i zbioru  $\Omega$  gwarantuje spełnienie założeń twierdzeń 3.2.1 i 3.2.2. W eksperymentach przyjęto współczynnik  $\xi = 0,1$ . Zbiór  $\mathbf{B}$ , w którym następuje adaptacja wskaźnika jakości, był dany równością  $\mathbf{B} = \{x \in R^4 : |x_i - x_{ir}| \leq 0,1, i = 1, 2\}$  i określał obszar przestrzeni stanów, w którym odchyłki stężeń od stanu ustalonego były mniejsze niż 0,1 mol/l. Okres wyliczania sterowania  $\delta$  wynosił 18 s, a horyzont minimalny wynosił 36 s.

W początkowych eksperymentach stosowano strategię adaptacji opisaną w algorytmie 3.1.1, jednakże w przypadku reaktora, pod koniec procesu występowali bardzo krótkie quasi-przełączenia (szybkie ciągłe zmiany sterowania od wartości minimalnej do maksymalnej i na odwrót) nie wnoszące istotnej poprawy wskaźnika jakości. Dlatego strategia adaptacji wskaźnika jakości miała nieco inny charakter niż w poprzednich przykładach. W pierwszym etapie procesu wyznaczano i stosowano sterowanie zbliżone do czasooptymalnego, aż do momentu, gdy stan obiektu osiągnął zbiór  $\mathbf{B}$ , bądź też gdy horyzont osiągnął pierwszy raz minimalną wartość 36 s. Od tej chwili zwiększano horyzont minimalny do 12 min, a współczynnik  $\varepsilon_k$  przyjmował wartość 1,0 i nie zmieniał się w dalszych etapach procesu. Zgodnie z teorią przedstawioną w rozdziałach 2 i 3, strategia ta nie powoduje utraty stabilności układu sterowania z regulatorem QTO-RHC.

W pierwszym eksperymencie numerycznym symulowano rozruch reaktora ze stanu początkowego  $c_A(0) = x_1(0) = 5,1 \text{ mol/l}$ ,  $c_B(0) = x_2(0) = 0 \text{ mol/l}$ ,  $T(0) = x_3(0) = 293,15 \text{ K}$ ,  $T_K(0) = x_4(0) = 293,15 \text{ K}$  i doprowadzenie go do optymalnego punktu pracy w przypadku nominalnym. Wyniki przedstawiono na rys. 3.50. W końcowej fazie procesu algorytm schodzi z trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej i rozpoczyna się faza stabilizacji. W drugim eksperymencie symulowano zakłócenia i błędy modelowania przy identycznych warunkach początkowych. Wyniki eksperymentu pokazano na rys. 3.51. Widoczne są nieznaczne zmiany czasów przełączeń oraz dodatkowe przełączenie występujące w drugim sterowaniu, spowodowane obecnością zakłóceń.



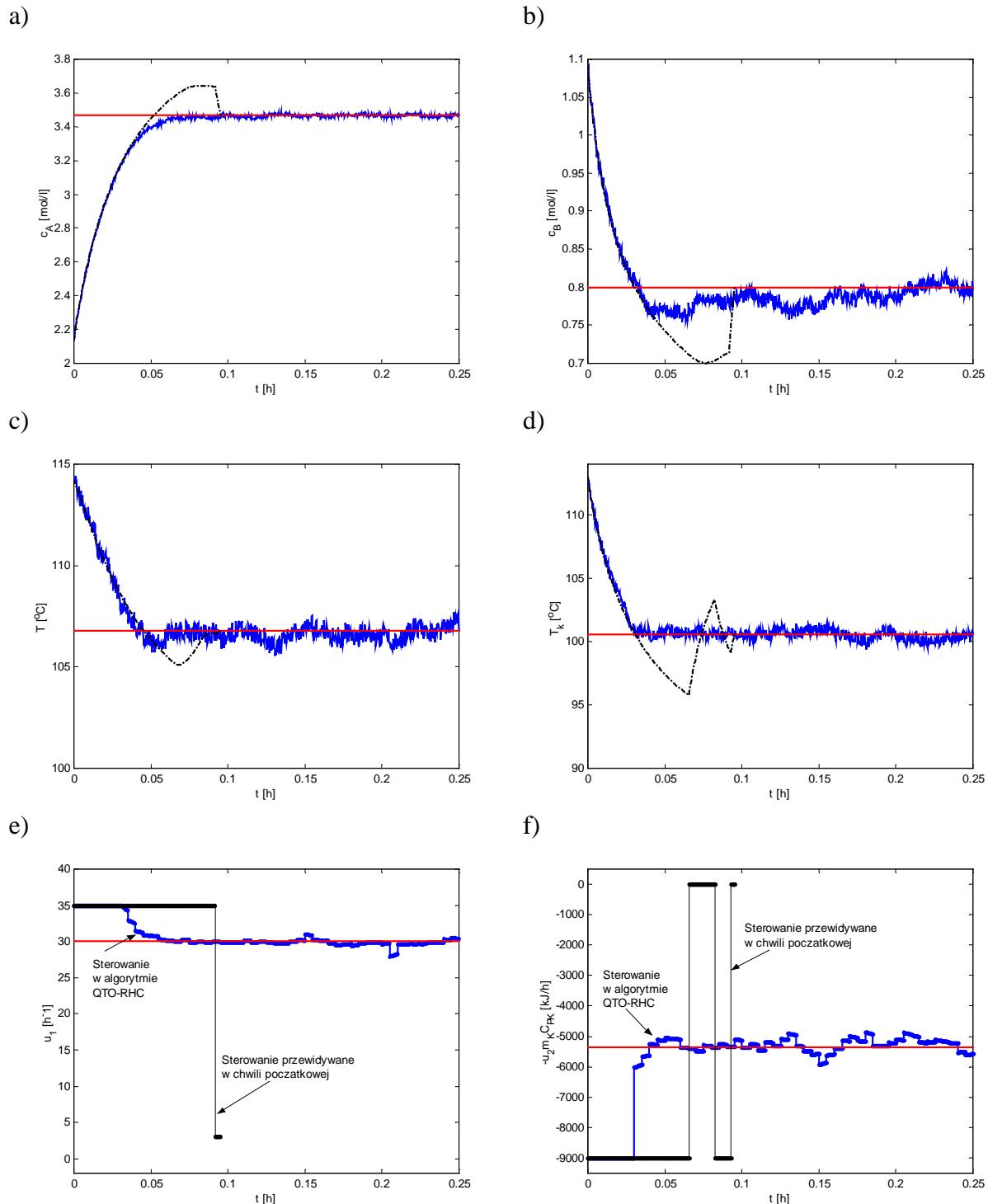
Rys. 3.50. Rozruch reaktora w przypadku nominalnym. a) Stężenie składnika A, b) stężenie składnika B, c) temperatura mieszaniny w reaktorze, d) temperatura cieczy chłodzącej, e) stosunek przepływu do zapełnienia reaktora, f) prędkość odprowadzania ciepła. Na rys. a, b, c, d, linią przerywaną zaznaczono trajektorię przewidywaną w chwili początkowej.



Rys. 3.51. Rozruch reaktora przy zakłóceniami i błędach modelowania. a) Steżenie składnika A, b) steżenie składnika B, c) temperatura mieszaniny w reaktorze, d) temperatura cieczy chłodzącej, e) stosunek przepływu do zapełnienia reaktora, f) prędkość odprowadzania ciepła. Na rys. a, b, c, d, linią przerywaną zaznaczono trajektorię przewidywaną w chwili początkowej.

W trzecim eksperymencie numerycznym zadanie sterowania polegało na przeprowadzeniu reaktora z optymalnego punktu pracy do punktu pracy odpowiadającego stężeniu produktu 0,8 mol/l w obecności zakłóceń. Wyniki przedstawiono na rys. 3.52. Widoczna jest znaczna różnica pomiędzy sterowaniem czasooptymalnym, przewidywanym w chwili początkowej, a sterowaniem wygenerowanym przez algorytm QTO\_RHC. Różnica ta spowodowana jest

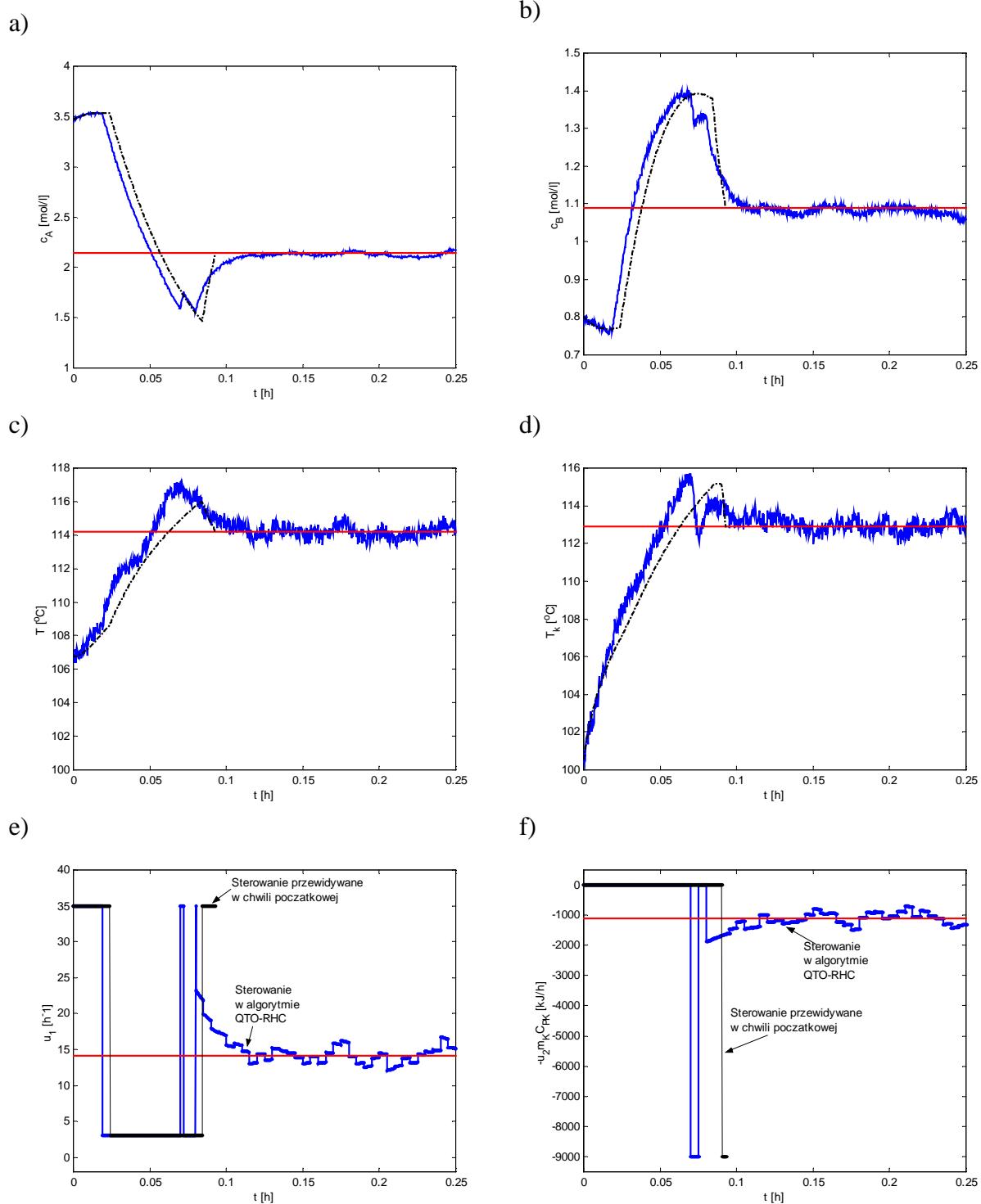
szbkiem osiągnięciem zbioru **B**, co spowodowało usunięcie z drugiego sterowania trzech końcowych przełączeń.



Rys. 3.52. Zmiana punktu pracy z  $P_{\text{opt}}$  do  $P_2$  przy zakłócenach i błędach modelowania. a) Stężenie składnika A, b) stężenie składnika B, c) temperatura mieszaniny w reaktorze, d) temperatura cieczy chłodzącej, e) stosunek przepływu do zapełnienia reaktora, f) prędkość odprowadzania ciepła. Na rys. a, b, c, d, linią przerywaną zaznaczono trajektorię przewidywaną w chwili początkowej.

W czwartym eksperymencie numerycznym zadanie sterowania polegało na przeprowadzeniu reaktora z punktu pracy odpowiadającego stężeniu produktu 0,8 mol/l do optymalnego punktu pracy w obecności zakłóceń. Wyniki przedstawiono na rys. 3.53. Wpływ

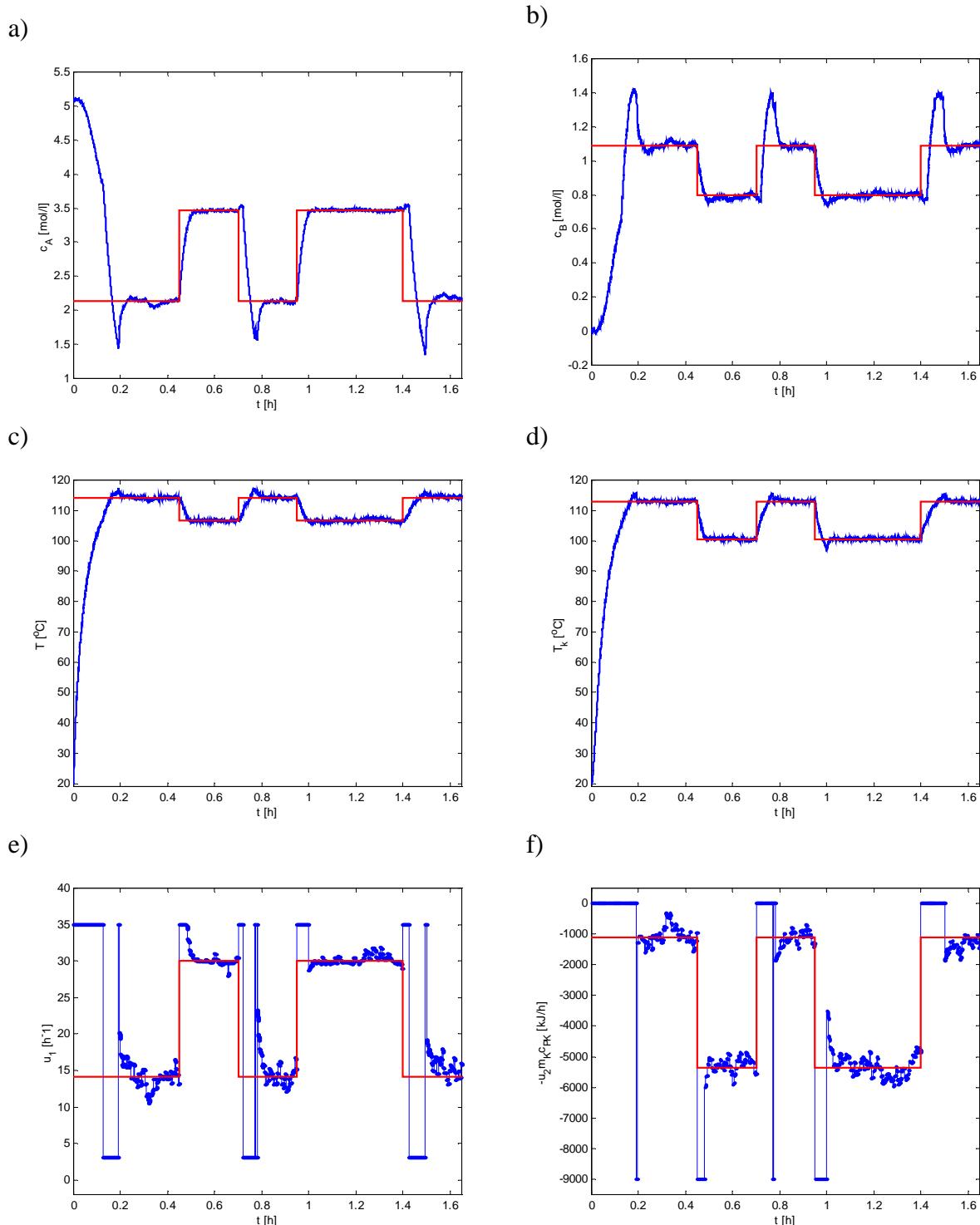
zakłóceń powoduje odchylenia od trajektorii przewidywanej oraz pojawianie się dodatkowych przełączeń.



Rys. 3.53. Zmiana punktu pracy z  $P_2$  do  $P_{\text{opt}}$  przy zakłóceniami i błędach modelowania. a) Stężenie składnika A, b) stężenie składnika B, c) temperatura mieszaniny w reaktorze, d) temperatura cieczy chłodzącej, e) stosunek przepływu do zapełnienia reaktora, f) prędkość odprowadzania ciepła. Na rys. a, b, c, d, linią przerywaną zaznaczono trajektorię przewidywaną w chwili początkowej.

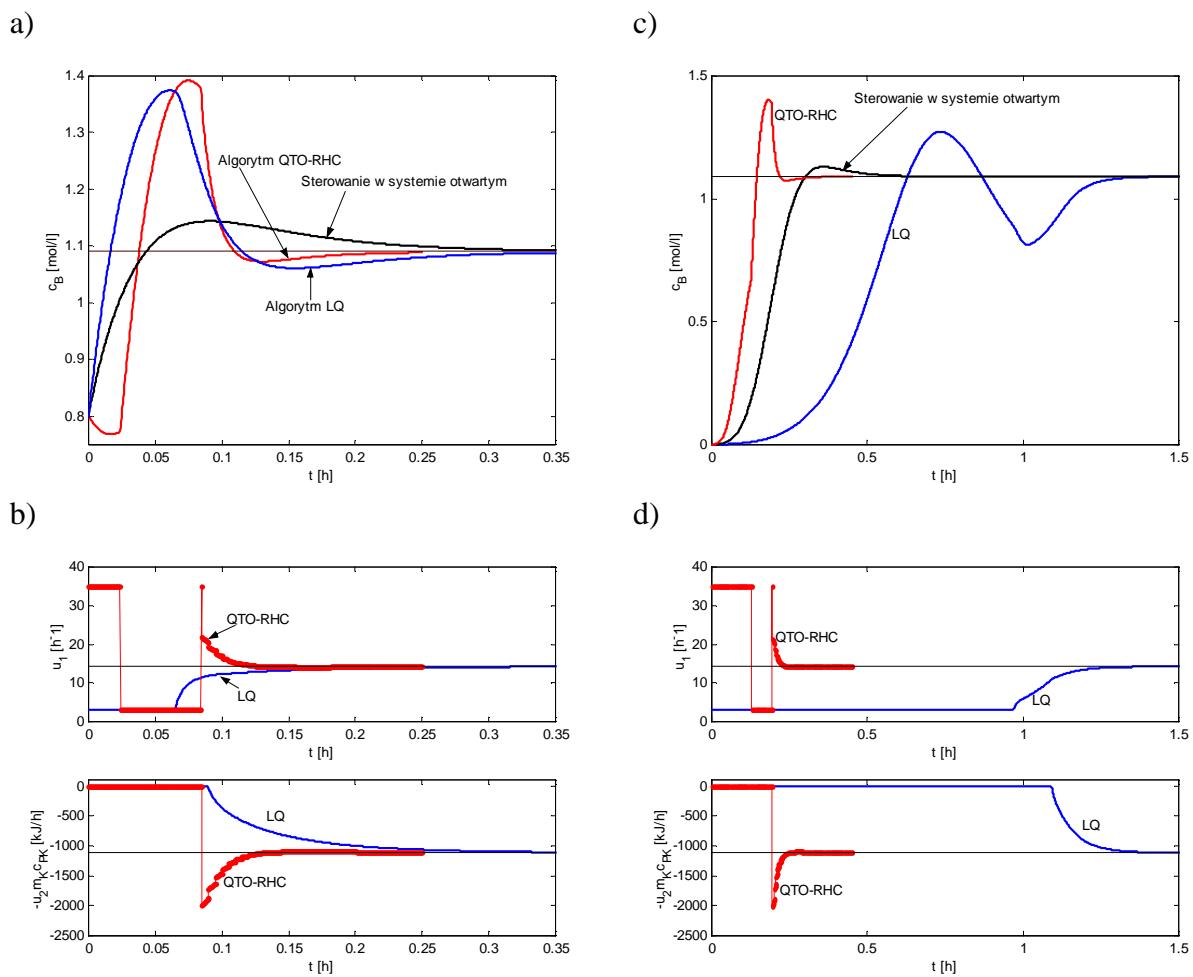
W piątym eksperymencie symulowano rozruch reaktora oraz czterokrotną zmianę punktu pracy reaktora w obecności zakłóceń. Wyniki przedstawiono na rys. 3.54. Widoczne jest

znaczne przeregulowanie stężenia produktu, występujące przy przeprowadzeniu systemu z punktu  $P_2$  do  $P_{\text{opt}}$ . Tyagunov (2004) podaje algorytm MPC, w którym przeregulowanie nie występuje, jednakże rozważa on zadanie nadążania za wartością zadaną.



Rys. 3.54. Rozruch oraz czterokrotna zmiana punktu pracy z  $P_{\text{opt}}$  i na odwrót przy zakłóceniach i błędach modelowania. a) Stężenie składnika A, b) stężenie składnika B, c) temperatura mieszaniny w reaktorze, d) temperatura cieczy chłodzącej, e) stosunek przepływu do zapełnienia reaktora, f) prędkość odprowadzania ciepła. Na rysunku zaznaczono też stany ustalone obiektu odpowiadające punktom  $P_{\text{opt}}$  i  $P_2$ .

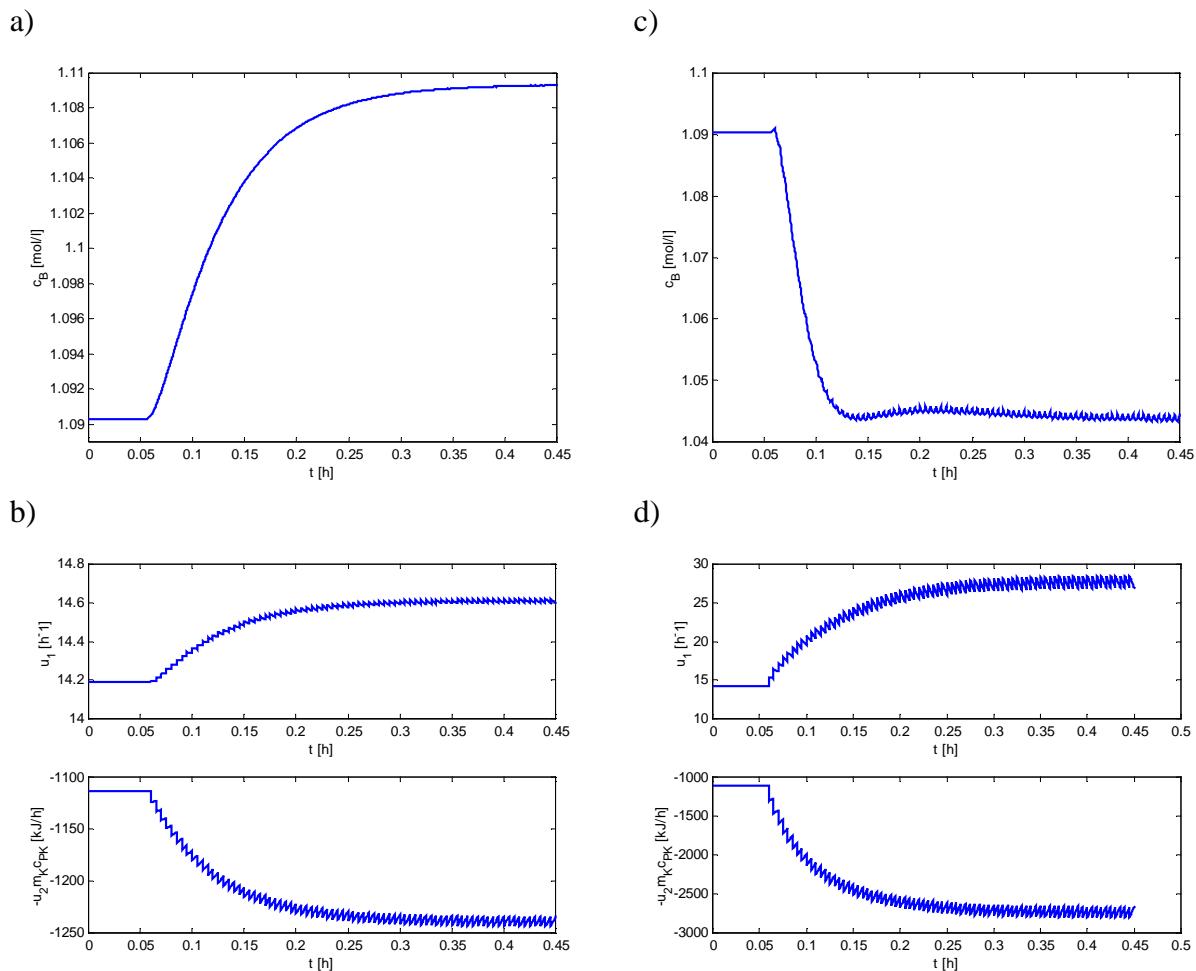
W kolejnym eksperymencie porównano działanie algorytmu QTO-RHC z działaniem regulatora liniowo-kwadratowego oraz ze sterowaniem w układzie otwartym, które polegało na podaniu na wejścia obiektu ustalonych wartości sterowania. Macierze wagowe w regulatorze LQ były takie, jak we wzorze (3.63a). Na rys. 3.55a,b przedstawiono stężeńe produktu oraz sterowania dla zadania przeprowadzenia reaktora z punktu  $P_2$  do  $P_{\text{opt}}$  w przypadku nominalnym. **Czas osiągnięcia stanu ustalonego jest najkrótszy w przypadku algorytmu QTO-RHC.** Sterowanie w systemie otwartym („na stan ustalony”) wykazuje mniejsze przeregulowanie niż algorytm LQ. Aby sprawdzić zachowanie regulatora LQ dla dużych odchyлеń od punktu  $P_{\text{opt}}$  wykonano symulację dla zadania rozruchu reaktora. Wyniki symulacji pokazano na rys. 3.55 c,d. W tym przypadku widoczna jest wyraźna przewaga algorytmu QTO-RHC nad sterowaniem w układzie otwartym oraz algorymem LQ, który doprowadza reaktor do punktu  $P_{\text{opt}}$  w czasie ok. 5 razy dłuższym w porównaniu z QTO-RHC. Ponadto algorytm LQ generuje w początkowej fazie sterowanie, które spowalnia osiąganie stanu ustalonego. Powyższe fakty świadczą o silnie nieliniowej naturze zjawisk zachodzących w reaktorze oraz stanowią uzasadnienie dla stosowania algorytmu QTO-RHC w przypadku znaczących odchyłek od stanu równowagi.



Rys. 3.55. Porównanie działania algorytmów QTO-RHC oraz LQ. a,b) Zmiana punktu pracy z  $P_2$  do  $P_{\text{opt}}$ , a) stężenie składnika  $B$ , b) sterowanie, c,d) rozruch reaktora, c) stężenie składnika  $B$ , d) sterowanie.

W ostatnim eksperymencie zbadano reakcję algorytmu QTO-RHC na zmiany temperatury wlotowej oraz stężenia wlotowego. W początkowym przedziale czasu reaktor pracował przy

nominalnych wartościach parametrów. W pierwszym przypadku symulowano skokowe zmniejszenie stężenia wlotowego z wartości nominalnej 5,1 mol/l do wartości 5,0 mol/l. Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.56 a,b. Wpływ zakłócenia objawia się zwiększeniem stężenia produktu o 1,83 % w porównaniu z wartością nominalną. Algorytm próbuje w każdym kroku kompensować zakłócenie, co powoduje częste oscylacje sterowania wokół nowego stanu ustalonego. W drugim przypadku symulowano skokowe zmniejszenie temperatury wlotowej o 5 °C. Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.56 c,d. Wyniki eksperymentu prowadzą do wniosku, że w przypadku sterowania reaktorem konieczna jest bieżąca estymacja wolnozmiennych zakłóceń i parametrów obiektu oraz optymalizacja stanu ustalonego prowadzona na bieżąco.



Rys. 3.56. Algorytm QTO-RHC. Praca reaktora przy zakłóceniami stężenia i temperatury wlotowej. a, b) Przebieg stężenia produktu oraz sterowania przy skokowej zmianie stężenia  $c_{A0}$  w chwili  $t = 216$  s z wartości nominalnej 5,1 mol/l do wartości 5,0 mol/l. Względna zmiana stężenia spowodowana zakłóceniem wynosi 1,83%. c,d) Przebieg stężenia produktu oraz sterowania przy skokowej zmianie temperatury wlotowej  $T_0$  w chwili  $t = 216$  s z wartości nominalnej 104,9 °C do wartości 99,9 °C. Względna zmiana stężenia spowodowana obecnością zakłócenia wynosi 4,58%.

## Rozdział 4. Quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny dla zadań, w których funkcja L zależy tylko od sterowania

W niniejszym rozdziale podajemy wersję algorytmu QTO-RHC dla zadań, w których funkcja podcałkowa  $L$  we wskaźniku jakości (2.7), zależy tylko od  $p$ -tej potęgi wartości bezwzględnej sterowania. Wskaźnik jakości (2.7) mający powyższą własność będziemy nazywać funkcjonałem typu energetycznego lub krótko E-funkcjonałem. Algorytm QTO-RHC zaproponowany w poprzednim rozdziale opierał się na założeniu, że funkcja  $L$  jest ograniczona od dołu przez funkcję  $\alpha_L(|x|)$ , gdzie  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ . W zadaniach rozpatrywanych w tym rozdziale, założenie to nie może być spełnione (tzn. nie istnieje taka funkcja  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ , że  $\alpha_L(|x|) \leq L(x, u)$ ). Powstaje zatem pytanie, czy algorytm QTO-RHC można zaadaptować do zadań minimalizacji E-funkcjonałów, przy zachowaniu stabilności i odporności. Okazuje się, że przy dużo mocniejszych założeniach odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, jednakże odporność algorytmu może być mała. W punkcie 4.1 formułujemy odpowiedni problem sterowania oraz podajemy algorytm QTO-RHC. W punktach 4.2 i 4.3 analizujemy stabilność oraz odporność algorytmu. Na koniec przedstawimy dwa przykłady sterowania systemami nieliniowymi.

### 4.1. Algorytm QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcjonałów

Zakładamy, że funkcja podcałkowa  $L$  we wskaźniku jakości (2.7) jest dana równością

$$L(x, u) = |u|_R^p, \quad p \geq 2, \quad (4.1)$$

oraz że zbiór końcowy  $\Omega$  jest zbiorem poziomиковym funkcji  $q$ , tzn. dla zadanej liczby  $\alpha > 0$

$$\Omega = \{x \in R^n : q(x) \leq \alpha\}.$$

Wówczas warunek końcowy  $x^k(t_k + T_k) \in \Omega$  w problemie  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  jest równoważny nierówności

$$q(x^k(t_k + T_k)) \leq \alpha. \quad (4.2)$$

Zakładamy dalej, że model obiektu jest opisany układem równań

$$\dot{x} = f(x, u, p_0) = f^0(x, p_0) + f^1(x, p_0)u. \quad (4.3)$$

Wszędzie, gdzie nie spowoduje to nieporozumień, będziemy pisać  $f^0(x)$ ,  $f^1(x)$ , zamiast  $f^0(x, p_0)$ ,  $f^1(x, p_0)$ . Będziemy też zakładać, że funkcje  $f^0$  i  $f^1$  w równaniu (4.3) są  $n$ -krotnie różniczkowalne w sposób ciągły względem  $x$ . Pozostałe założenia odnośnie prawej strony równania (4.3) oraz problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  są takie same jak w punktach 2.1 i 2.2. Niech  $\mathbf{B} \subset R^n$  będzie zbiorem zwartym i jednospójnym oraz niech  $\mathbf{B}$  zawiera pewną kulę otwartą o środku w zerze. Podamy teraz algorytm QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcjonałów.

### **Algorytm 4.1.1 (QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcjonałów)**

**Dane:**  $\delta$ ,  $T_{\min}$  ( $T_{\min} \geq \delta > 0$ ), model obiektu (4.3), wskaźnik jakości (2.7) z funkcją  $L$  określoną równością (4.1), estymata warunku początkowego  $\hat{x}(0)$ , zbiór  $\mathbf{B}$ , liczby  $\mu \in (0, 1]$ ,  $\xi \in (0, 1)$  (np.  $\xi = 0,1$ ),  $\varepsilon_{\min} \in (0, 1]$  (np.  $\varepsilon_{\min} = 0,01$ ).

**Inicjalizacja:** Podstaw  $k := 0$ ,  $t_k := 0$ ,  $\tilde{x}(t_k) := \hat{x}(0)$ ,  $\varepsilon_k := 0$ . Jeżeli  $\hat{x}(0) \in \mathbf{B}$ , to podstaw  $\varepsilon_k := \varepsilon_{\min}$ . Wyznacz rozwiązanie optymalne  $(\bar{u}^0, \bar{T}_0)$  problemu  $P(t_0, \varepsilon_0, \hat{x}(0))$ .

1. W przedziale czasu  $[t_k, t_k + \delta]$  stosuj do obiektu sterowanie  $\bar{u}^k$  oraz równolegle wykonuj czynności 2–5.
2. Wyznacz estymatę stanu  $\hat{x}(t_k)$ .
3. Wyznacz na podstawie równania (2.13) predykcję krótkoterminową  $\tilde{x}(t_{k+1})$ .
4. Podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon_k$  oraz oblicz  $r_k = J(\bar{u}^k, \bar{T}_k, \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) - T_{\min}$ .
  - a. Jeżeli  $\varepsilon_k = 0 \wedge \bar{T}_k \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$ , to podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon_{\min}$  i idź do 5.
  - b. Jeżeli  $\hat{x}(t_k) \in \mathbf{B}$ , to podstaw  $\varepsilon_{k+1} := \min(\varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k, 1)$ , gdzie

$$\Delta\varepsilon_k = (1 - \xi) \frac{\delta + \varepsilon_k \int_{t_k + \bar{T}_k}^{t_k + \delta} |\bar{u}^k|_R^p dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k} |\bar{u}^k|_R^p dt} \quad \text{dla } \bar{T}_k \geq T_{\min} + \delta, \quad (4.4)$$

$$\Delta\varepsilon_k = (1 - \xi) \frac{\bar{T}_k - T_{\min} + \varepsilon_k \int_{t_k + \bar{T}_k}^{t_k + \delta} |\bar{u}^k|_R^p dt}{\int_{t_k + \delta}^{t_k} |\bar{u}^k|_R^p dt + q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k))} \quad \text{dla } \bar{T}_k \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]. \quad (4.5)$$

5. a. Wyznacz rozwiązanie optymalne  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1}, \bar{x}^{k+1})$  problemu  $P(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$ .
- b. Jeżeli nie da się znaleźć rozwiązania optymalnego  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1})$ , to za  $(\bar{u}^{k+1}, \bar{T}_{k+1})$  podstaw możliwie najlepsze przybliżenie rozwiązania optymalnego.
6. Podstaw  $k := k + 1$ ,  $t_k := k\delta$  i idź do 1.

#### **Komentarz**

Podstawowa różnica pomiędzy algorytmem 3.1.1 a 4.1.1 polega na zastosowaniu w tym ostatnim sterowań optymalnych, zamiast suboptymalnych. Powód tej zmiany stanie się jasny przy analizie stabilności algorytmu. Ogólna idea działania algorytmu jest taka sama jak w algorytmie 3.1.1. W początkowej fazie algorytm generuje sterowania zbliżone do czasooptymalnych, a następnie przechodzi do fazy stabilizacji, włączając do wskaźnika jakości człon całkowy. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby od samego początku ustawić  $\varepsilon_k = 1$ . Wystarczy w tym celu przyjąć w algorytmie  $\varepsilon_{\min} = 1$  oraz odpowiednio poszerzyć zbiór  $\mathbf{B}$ .

### **4.2. Stabilność algorytmu QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcjonałów**

Jak zwykle przy analizie stabilności będziemy zakładać, że nie występują zakłócenia i błędy modelowania, a estymacja stanu jest dokładna. Spełnione są wówczas równości

$x^*(t_k) = \hat{x}(t_k) = \bar{x}^k(t_k) = \tilde{x}(t_k)$  oraz  $x^*(t) = \bar{x}^k(t)$  dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Ponieważ stosujemy sterowania optymalne, to ciąg  $r_k$  jest dany wzorem

$$r_k = V(\tilde{x}(t_k)). \quad (4.6)$$

W początkowej fazie sterowania, gdy  $\varepsilon_k = 0$ , zachowanie algorytmu 4.1.1 jest analogiczne do zachowania algorytmu 3.1.1.

**Lemat 4.2.1.** Jeżeli w algorytmie 4.1.1  $\varepsilon_k = 0$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ , to przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu spełniona jest nierówność

$$V(x^*(t_{k+1})) \leq r_k - \min(\delta, \bar{T}_k - T_{\min}). \quad \square \quad (4.7)$$

**Lemat 4.2.2.** W algorytmie 4.1.1, przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu istnieje wskaźnik  $j \geq 0$ , taki że zachodzi co najmniej jeden z warunków:

- (i)  $\bar{T}_j \in [T_{\min}, T_{\min} + \delta]$ ,
- (ii)  $\hat{x}(t_j) \in \mathbf{B}$ .

Dowody lematów pomijamy.

**Lemat 4.2.3.** Algorytm 4.1.1 ma własność **WS3** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$  (zob. p. 2.3).

*Dowód:* Z lematów 4.2.1 i 4.2.2 oraz z punktu 4 algorytmu wynika, że istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$ , taki że  $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_k \leq 1$  dla wszystkich  $k \geq k_0$ . Z twierdzenia 2.1.1 (zob. p. 2.1) mamy oszacowanie

$$|\bar{x}^k(t)| \leq \left( |\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)| + L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \left( \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} |\bar{u}^k(t)|^p dt \right)^{1/p} \right) \exp(\hat{L}\bar{T}_k), \quad t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k]. \quad (4.8)$$

W  $R^m$  wszystkie normy są równoważne, zatem istnieje stała  $\lambda_R > 0$ , taka że  $|\bar{u}^k| \leq \lambda_R |\bar{u}^k|_R$ . Podstawiając do (4.8) mamy

$$|\bar{x}^k(t)| \leq \left( |\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)| + \lambda_R L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \left( \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} |\bar{u}^k(t)|_R^p dt \right)^{1/p} \right) \exp(\hat{L}\bar{T}_k). \quad (4.9)$$

Z założenia (2.11), z definicji funkcji  $V$  (def. 2.2.1) oraz ze wzoru (4.6) wnosimy, że

$$|\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)| \leq w^{-1}(q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)) + \bar{T}_k - T_{\min}) \leq w^{-1}(r_k). \quad (4.10)$$

Z konstrukcji algorytmu wynika, że  $\varepsilon_k / \varepsilon_{\min} \geq 1$  dla wszystkich  $k \geq k_0$ , a zatem

$$\left( \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} |\bar{u}^k(t)|_R^p dt \right)^{1/p} \leq \varepsilon_{\min}^{-1/p} \left( \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} |\bar{u}^k(t)|_R^p dt + \bar{T}_k - T_{\min} \right)^{1/p} \leq \varepsilon_{\min}^{-1/p} r_k^{1/p}. \quad (4.11)$$

Podstawiając (4.10) i (4.11) do (4.9) otrzymujemy

$$|\bar{x}^k(t)| \leq \left( w^{-1}(r_k) + \lambda_R L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \varepsilon_{\min}^{-1/p} r_k^{1/p} \right) \exp(\hat{L}\bar{T}_k). \quad (4.12)$$

Horyzont  $\bar{T}_k$  spełnia z definicji nierówność  $\bar{T}_k \leq T_{\min} + r_k$ . Podstawiając do (4.12) mamy

$$|\bar{x}^k(t)| \leq \varphi(r_k),$$

gdzie  $\varphi(r_k) = \left( w^{-1}(r_k) + \lambda_R L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \epsilon_{\min}^{-1/p} r_k^{1/p} \right) \exp(\hat{L}(\bar{T}_{\min} + r_k))$ . Ponieważ pierwszy i drugi składnik w nawiasie są funkcjami klasy  $\mathcal{K}$ , to funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.2.1.** Przyjmijmy następujące założenia.

1. Rozwiązań problemów  $P(t_k, \epsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  istnieją dla wszystkich

$$(t_k, \epsilon_k, \tilde{x}(t_k)) \in R_0^+ \times [0, 1] \times R^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Zbiór  $\Omega$  oraz funkcja  $q$  są tak wybrane, że dla każdego  $x_s(0) \in \Omega$  istnieje przedziałami ciągłe sterowanie  $u_s : [0, \delta] \rightarrow U$ , takie że trajektoria  $x_s$  systemu (4.3) wygenerowana przez to sterowanie pozostaje w zbiorze  $\Omega$  oraz spełnia warunek

$$\frac{d}{d\tau} q(x_s(\tau)) + |u_s(\tau)|_R^p \leq 0, \quad \tau \in [0, \delta].$$

Wówczas, przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$ , taki że dla wszystkich  $k \geq k_0$  ciąg  $r_k$  generowany przez algorytm 4.1.1, spełnia nierówność

$$r_{k+1} \leq r_k - \xi \epsilon_{\min} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\bar{u}^k(t)|_R^p dt. \quad (4.13)$$

Dowód twierdzenia 4.2.1 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.2.1.

Idea dowodu stabilności i odporności algorytmu 4.1.1 polega na wykorzystaniu nierówności (4.13) w połączeniu z własnością **WS3**. Powstaje tu jednak problem wynikający z faktu, że sterowanie optymalne  $\bar{u}^k$  może znikać tożsamościowo w przedziale czasu  $[t_k, t_{k+1}]$ . Wówczas nierówność (4.13) w połączeniu z własnością **WS3** będzie pociągała za sobą jedynie ograniczonosć trajektorii obiektu. Nie oznacza to, że algorytm jest niestabilny, a jedynie, że nie wiadomo, jak ową stabilność udowodnić. Poniżej podamy warunki, przy których sterowanie optymalne  $\bar{u}^k$  nie znika na żadnym przedziale czasu.

**Definicja 4.2.1 (pola wektorowego).** Odwzorowanie  $F : R^n \rightarrow R^n$  nazywamy polem wektorowym na  $R^n$ . Jeżeli odwzorowanie  $F$  jest  $r$ -krotnie różniczkowalne w sposób ciągły, to mówimy, że pole wektorowe jest klasy  $C^r$ . Jeżeli  $F$  jest polem klasy  $C^\infty$  na  $R^n$ , to mówimy, że jest ono gładkim polem wektorowym.  $\square$

Jeżeli odwzorowanie  $F : R^n \rightarrow R^m$  jest klasy  $C^1$ , to pochodną (transponowaną macierz Jacobiego) odwzorowania  $F$  oznaczamy przez  $\nabla F$ .

**Definicja 4.2.2 (nawias Liego).** Jeżeli  $f$  i  $g$  są polami wektorowymi klasy  $C^1$ , to wyrażenie

$$[f, g] = (\nabla g)^\top f - (\nabla f)^\top g \quad (4.14)$$

nazywamy nawiasem Liego.  $\square$

Jeżeli  $f$  i  $g$  są polami odpowiednio klasy  $C^n$  i  $C^r$ , to  $[f, g]$  jest polem klasy  $C^{\min(n,r)-1}$ . Jeżeli  $f, g, h$  są polami wektorowymi odpowiedniej klasy ciągłości, to mamy następujące własności:

$$[f, g] = -[g, f] \quad (\text{antysymetria}),$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (\text{tożsamość Jacobiego}).$$

Agrachev (2004), Jakubczyk (2001) i Respondek (2001) podają szczegółowe informacje na temat własności nawiasów i algebr Liego oraz zastosowań metod geometrycznych w teorii sterowania. Za pomocą nawiasów Liego definiujemy następujące odwzorowania

$$h_r^j(x) = [h_{r-1}^j, f^0](x), \quad h_0^j(x) = f_j^1(x), \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.15)$$

gdzie  $f_j^1$  oznacza  $j$ -tą kolumnę macierzy  $f^1$ . Określamy także macierze

$$Q_r(x) = [h_r^1(x), h_r^2(x), \dots, h_r^m(x)], \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.16)$$

$$Q(x) = [Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)]. \quad (4.17)$$

Macierz  $Q(x)$  stanowi uogólnienie macierzy sterowalności, znanej z teorii systemów liniowych. Istotnie, biorąc  $f^0(x) = Ax$ ,  $f_j^1(x) = b_j$ ,  $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$  mamy  $h_0^j(x) = b_j$ ,  $h_1^j = [b_j, Ax] = Ab_j$ ,  $h_2^j = [Ab_j, Ax] = A^2b_j, \dots, h_{n-1}^j = [A^{n-2}b_j, Ax] = A^{n-1}b_j$ , oraz

$$Q(x) = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

**Twierdzenie 4.2.2.** Przyjmujemy następujące założenia.

1. Funkcja  $L$  ma postać daną wzorem (4.1) oraz  $\varepsilon_k > 0$ .
2. Ograniczenia stanu końcowego są dane nierównością (4.2).
3. Rozwiązania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  istnieją dla wszystkich

$$(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k)) \in R_0^+ \times [0, 1] \times R^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Dla każdego  $x \in R^n$ , rząd  $Q(x) = n$ .

Wówczas dla każdego warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k) \in R^n \setminus \{0\}$  rozwiązanie  $\bar{u}^k$  problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  nie znika tożsamościowo na żadnym przedziale  $[a, b] \subset [t_k, t_k + \bar{T}_k]$ ,  $a < b$ .

*Dowód:* Wykażemy, że zerowanie się sterowania w przedziale  $[a, b] \subset [t_k, t_k + \bar{T}_k]$ ,  $a < b$  prowadzi do sprzeczności. Rozpoczniemy od podania warunków optymalności sterowania w problemie  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ . Będziemy korzystali z wersji zasady maksimum Pontriagina, podanej w dodatku B, w twierdzeniu 2. Hamiltonian jest równy

$$H(\psi(t), \bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) = \psi(t)^\top f^0(\bar{x}^k(t)) + \psi(t)^\top f^1(\bar{x}^k(t)) \bar{u}^k(t) - \bar{\lambda}_0 \varepsilon_k |\bar{u}^k(t)|_R^p,$$

gdzie  $\bar{\lambda}_0 \in \{0, 1\}$  (zob. dodatek B tw. 2 i lematy 1, 2 i 3). Niech  $\bar{u}_j^k$  będzie  $j$ -tą składową sterowania optymalnego. Jeżeli w przedziale czasu  $[a, b] \subset [t_k, t_k + \bar{T}_k]$ ,  $a < b$ , ktrakolwiek składowa sterowania optymalnego leży na ograniczeniu, to sterowanie nie znika w  $[a, b]$ . Jeżeli wszystkie składowe leżą wewnątrz ograniczeń, tzn.  $u_{j,\min} < \bar{u}_j^k(t) < u_{j,\max}$ ,  $t \in [a, b]$ , to sterowanie optymalne spełnia równanie

$$\bar{\lambda}_0 p \varepsilon_k (\bar{u}^k(t)^\top R \bar{u}^k(t))^{0.5p-1} R \bar{u}^k(t) = f^1(\bar{x}^k(t))^\top \psi(t) \quad \text{dla } t \in [a, b], \quad (4.18)$$

przy czym optymalna funkcja sprzężona  $\psi$  jest rozwiązaniem równania sprzężonego

$$\dot{\psi}(t) = -A^\top(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) \psi(t), \quad t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k], \quad (4.19)$$

gdzie

$$A^T(\xi, v) = \nabla_\xi f^0(\xi) + \sum_{j=1}^m \nabla_\xi f_j^1(\xi) v_j. \quad (4.20)$$

Ponadto funkcja sprzężona spełnia warunek końcowy

$$\psi(t_k + \bar{T}_k) = -(\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1) \nabla_x q(x(t_k + \bar{T}_k)), \text{ gdzie } \bar{\lambda}_0 \in \{0, 1\}, \bar{\lambda}_1 \geq 0. \quad (4.21)$$

**A.** Założmy, że  $\bar{\lambda}_0 = 1$  i przypuśćmy, że  $\bar{u}^k \equiv 0$  w przedziale  $[a, b]$ . Z (4.18) wynika, że

$$\phi_j(t) = \psi(t)^T f_j^1(\bar{x}^k(t)) = 0 \text{ dla każdego } t \in [a, b], j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.22)$$

Ponieważ funkcja  $\phi_j$  znika tożsamościowo, to również jej pochodne aż do rzędu  $n-1$  muszą znikać. Różniczkując równość (4.22)  $n-1$  razy względem  $t$ , korzystając z równania sprzężonego (4.19), (4.20) oraz z równania stanu (4.3) i pamiętając, że  $\bar{u}^k \equiv 0$ , otrzymujemy następujący układ równań

$$\phi_j^r(t) = \psi(t)^T h_r^j(\bar{x}^k(t)) = 0, \forall t \in [a, b], r = 0, 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.23)$$

gdzie  $h_r^j$  są dane wzorami (4.15) oraz  $\phi_j^r$  oznacza  $r$ -tą pochodną po czasie funkcji  $\phi_j$ . Wyrażenia (4.23) stanowią układ  $m \cdot n$  równań o  $n$  niewiadomych. Wykorzystując definicję macierzy  $Q$  (4.15-17), układ równań (4.23) można zapisać w postaci

$$Q(\bar{x}^k(t))^T \psi(t) = 0, \forall t \in [a, b]. \quad (4.24)$$

Z założenia 4 twierdzenia wynika, że układ (4.24) ma tylko zerowe rozwiązanie. Zatem  $\psi(t) = 0$  dla każdego  $t \in [a, b]$ . Ponieważ funkcja  $\psi$  spełnia liniowe równanie (4.19), to musi ona znikać w każdym punkcie, a zatem

$$\psi \equiv 0 \text{ w przedziale } [t_k, t_k + \bar{T}_k]. \quad (4.25)$$

Ponieważ macierz  $R$  w (4.18) jest dodatnio określona, to  $\bar{u}^k \equiv 0$  w przedziale  $[t_k, t_k + \bar{T}_k]$ . Trajektoria optymalna spełnia równanie (4.3), które ma teraz postać

$$\dot{\bar{x}}^k(t) = f^0(\bar{x}^k(t)), \bar{x}^k(t_k) = \tilde{x}(t_k) \neq 0, t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k]. \quad (4.26)$$

Z założenia funkcja  $f^0$  spełnia globalny warunek Lipschitza. Z jednoznaczności rozwiązania równania (4.26) wnioskujemy, że rozwiązanie to nie osiąga zera w chwili końcowej, a więc  $\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k) \neq 0$  oraz  $\psi(t_k + \bar{T}_k) = -(1 + \bar{\lambda}_1) \nabla_x q(x(t_k + \bar{T}_k)) \neq 0$  (bo założyliśmy, że  $\nabla_x q(x) \neq 0$  dla  $x \neq 0$ , zob. wzór (2.9)). Ale wynik ten jest sprzeczny z (4.25).

**B.** Założmy, że  $\bar{\lambda}_0 = 0$ . Z lematu 1 z dodatku B wynika, że  $q(\bar{x}^k(t_k + T_k)) = \alpha$  (zob. (4.2)). Przypuśćmy ponownie, że  $\bar{u}^k \equiv 0$  w przedziale  $[a, b]$ . Wówczas warunek maksimum hamiltonianu (zob. dodatek B, tw. 2) pociąga za sobą (4.22). Rozumując tak samo jak poprzednio widzimy, że zachodzi (4.25). Z drugiej strony, ponieważ  $\nabla_x q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)) \neq 0$ , to na mocy lematu 2 z dodatku B wnioskujemy, że  $\|\psi\|_\infty > 0$ . Ale to przeczy równości (4.25). Zatem sterowanie optymalne nie może znikać na żadnym przedziale o niezerowej długości.  $\square$

Przy spełnieniu założeń powyższego twierdzenia, całka  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\bar{u}^k(t)|_R^p dt$  nigdy nie znika.

Traktując tę całkę jako funkcję warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k)$ , możemy formalnie zdefiniować funkcję  $h: R^n \rightarrow R_0^+$ ,

$$h(\tilde{x}(t_k)) = \xi \varepsilon_{\min} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\bar{u}^k(t, \tilde{x}(t_k))|_R^p dt. \quad (4.27)$$

Funkcja  $h$  będzie zależeć w sposób ciągły od warunku początkowego, o ile sterowanie  $\bar{u}^k$  będzie ciągłą funkcją tego warunku (ciągłość tej funkcji rozumiemy w sensie normy w  $L^p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \infty$ ). W teorii optymalizacji ciągła zależność sterowania optymalnego od warunku początkowego nazywana jest stabilnością rozwiązań problemu sterowania optymalnego (zob. Malanowski 1994). Ponieważ badanie stabilności rozwiązań problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  stanowi skomplikowane zagadnienie teoretyczne i znacznie wykracza poza rama tej pracy, to od tego miejsca będziemy zakładać, że sterowanie  $\bar{u}^k$  jest ciągłą funkcją warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k)$ . Analizę stabilności rozwiązań można znaleźć w pracach Malanowskiego (1994, 1996) i Maurera (2002). W tym miejscu stwierdzimy tylko, że jeżeli wszystkie funkcje zadania są odpowiedniej klasy ciągłości (np. klasy  $C^2$ ) oraz brak ograniczeń dodatkowych na stan i sterowanie, to istnieje szeroka klasa problemów spełniających powyższe założenie. W szczególności, w systemie liniowym z kwadratowym wskaźnikiem jakości i kwadratową funkcją  $q$  bez ograniczeń na stan i sterowanie, można stosunkowo prosto wykazać stabilność rozwiązań zadania optymalizacji. Podsumowując powyższe rozważania mamy następujące

**Twierdzenie 4.2.3** (*o stabilności algorytmu QTO-RHC*). Jeżeli spełnione są założenia twierdzeń 4.2.1 i 4.2.2 oraz rozwiązania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  zależą w sposób ciągły od warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k)$ , to algorytm 4.1.1 jest GAS.

*Dowód:* Z lematu 4.2.1 oraz z konstrukcji algorytmu wynika, że dopóki  $\varepsilon_k = 0$  i  $\bar{T}_k > T_{\min} + \delta$ , to ciąg  $r_k$  spełnia nierówność  $r_{k+1} \leq r_k - \delta$ . Z lematu 4.2.2 oraz z punktu 4 algorytmu wynika, że istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$ , taki że  $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_k \leq 1$  dla wszystkich  $k \geq k_0$ . Z lematu 4.2.3 wiemy, że algorytm ma własność **WS3**. Funkcja  $h$  zależy w sposób ciągły od  $\tilde{x}(t_k)$ ,  $h(0) = 0$  oraz  $h(\tilde{x}(t_k)) > 0$  dla  $\tilde{x}(t_k) \neq 0$ . Korzystając z twierdzenia 4.2.1 i wzoru (4.27) możemy przepisać nierówność (4.13) w postaci

$$r_{k+1} \leq r_k - h(\tilde{x}(t_k)).$$

Ale to oznacza, że algorytm 4.1.1 ma słabą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$ . Dodatkowo z konstrukcji algorytmu wynika, że jeżeli  $\hat{x}(0) \in \mathbf{B}$ , to  $k_0 = 0$ . Na mocy twierdzenia 2.3.1 wnioskujemy, że algorytm jest GAS.  $\square$

### 4.3. Odporność algorytmu QTO-RHC dla zadań minimalizacji E-funkcjonałów

Twierdzenie o odporności przedstawione w rozdziale 2 (twierdzenie 2.4.1) wymaga, aby algorytm predykcyjny miał zwykłą własność **WS2**. W przypadku algorytmu 4.1.1 oznacza to, że musi istnieć funkcja  $\beta_L \in \mathcal{K}$  taka, że

$$\beta_L(|\tilde{x}(t_k)|) \leq h(\tilde{x}(t_k)), \quad (4.28)$$

gdzie funkcja  $h$  jest określona wzorem (4.27). Jeżeli równania stanu są liniowe, system jest sterowalny oraz funkcje  $L$  i  $q$  są kwadratowe, to istnieje macierz  $S = S^\top > 0$  taka, że funkcja  $h$  przyjmuje lokalnie postać formy kwadratowej

$$h(\tilde{x}(t_k)) = \xi \varepsilon_{\min} \tilde{x}(t_k)^\top S \tilde{x}(t_k) \geq \xi \varepsilon_{\min} \lambda_{\min}(S) |\tilde{x}(t_k)|^2.$$

W ogólnym przypadku wiemy tylko, że przy spełnieniu założeń twierdzenia 4.2.2 funkcja  $h$  jest ciągła i dodatnio określona. Może ona jednak przyjmować dowolnie małe wartości. Można przypuszczać, że istnieje obszerna klasa systemów (np. systemy liniowe), dla których spełniona jest nierówność (4.28). Przypuszczenie to można uzasadnić stosując następującą argumentację. Jeżeli stan początkowy systemu znajduje się daleko od celu, to na doprowadzenie (w skończonym czasie) tego systemu do celu potrzeba zwykle więcej „energii”, niż w przypadku niewielkiej odległości od celu. Przyjmujemy następującą hipotezę.

**Hipoteza 4.3.1.** Istnieje funkcja  $\beta_L \in \mathcal{K}$ , taka że sterowanie  $\bar{u}^k$  wynikające z rozwiązania problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  spełnia dla każdego  $\tilde{x}(t_k) \in R^n$  nierówność

$$\xi \varepsilon_{\min} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\bar{u}^k(t, \tilde{x}(t_k))|_R^p dt \geq \beta_L(|\tilde{x}(t_k)|). \square$$

**Twierdzenie 4.3.1** (*o odporności algorytmu QTO-RHC*). Przyjmujemy następujące założenia.

1. Spełnione są założenia twierdzeń 4.2.1 i 4.2.2 oraz  $\mu \in (0, 1)$ .
2. Rozwiązania problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  zależą w sposób ciągły od warunku początkowego  $\tilde{x}(t_k)$ .
3. Prawdziwa jest hipoteza 4.3.1.

Wówczas algorytm 4.1.1 jest odporny.

*Szkic dowodu:* Działanie algorytmu w fazie początkowej, gdy  $\varepsilon_k = 0$ , nie różni się niczym od działania algorytmu 3.1.1 z poprzedniego rozdziału. Na podstawie rozumowania przedstawionego w p. 3.3 wiemy już, że dla dostatecznie małych liczb  $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e > 0$  istnieje wskaźnik  $k_0 \geq 0$ , taki że  $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_k \leq 1$  dla wszystkich  $k \geq k_0$ . Od tego momentu algorytm włącza do wskaźnika jakości człon całkowy. Korzystając z twierdzenia 4.2.1 pokazujemy nierówność (4.13). Następnie z twierdzenia 4.2.2 oraz z założeń 2 i 3 wnioskujemy, że algorytm ma zwykłą własność **WS2** ze wskaźnikiem  $k_0 \geq 0$ , co oznacza, że przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu algorytm generuje sterowania gwarantujące spełnienie nierówności

$$r_{k+1} \leq r_k - h(\tilde{x}(t_k)) \leq r_k - \mu h(\tilde{x}(t_k)) \text{ dla pewnej liczby } \mu \in (0, 1).$$

Lemat 4.2.3 gwarantuje, że algorytm ma także własność **WS3**. Zatem spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 2.4.1, co pociąga za sobą odporność algorytmu 4.1.1.  $\square$

### Komentarz

Założenia twierdzeń o stabilności i odporności algorytmu 4.1.1 są znacznie mocniejsze niż założenia odpowiednich twierdzeń z rozdziału trzeciego. Najbardziej restrykcyjne jest założenie o pełnej sterowalności systemu. Źródłem dużych trudności może być weryfikacja hipotezy 4.3.1. Klasa systemów uległa zawężeniu do systemów afierniczych względem sterowania. Pozostałe założenia nie różnią się istotnie od założeń dla algorytmu z poprzedniego rozdziału. Można podejrzewać, że odporność algorytmu 4.1.1 będzie w fazie stabilizacji znacznie mniejsza niż odporność algorytmu 3.1.1. Wynika to z faktu, że wskaźnik jakości w algorytmie 4.1.1 nie zawiera informacji o początkowej części trajektorii, a jedynie o jej punkcie końcowym. Przykłady, które przedstawimy poniżej, pokazują, że pomimo tych ułomności algorytm nadaje się do sterowania systemami nieliniowymi.

#### 4.4. Przykłady sterowania systemami nieliniowymi

Poniżej omówimy dwa przykłady sterowania systemami nieliniowymi z prawą stroną aficzną względem sterowania, w których wskaźnik jakości jest funkcją typu energetycznego. Pierwszy przykład dotyczy sterowania manipulatorem SCARA, opisany w przykładzie 3.4.4. Przykład drugi pokazuje możliwości zastosowania algorytmu QTO-RHC do sterowania statkiem kosmicznym. Sprawdzono, że w obu zadaniach spełniony jest warunek sterowalności występujący w twierdzeniu 4.2.2.

##### 4.4.1. Manipulator 2D

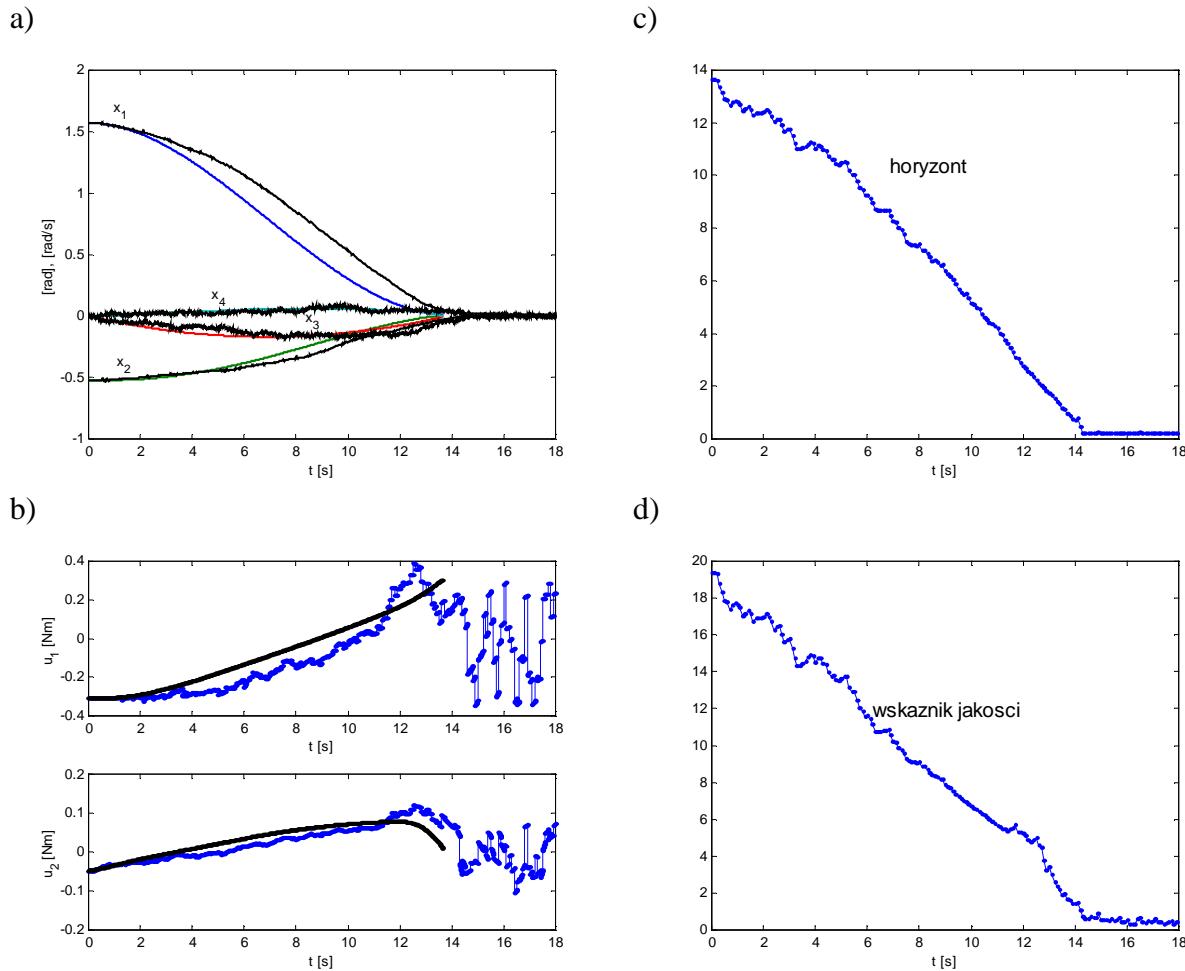
Von Stryk (1994) rozważa zadanie przeprowadzenia końcówki manipulatora przemysłowego z punktu do punktu. Miarą jakości sterowania jest całka z kwadratu normy momentu napędowego, a horyzont jest zmienną decyzyjną. Określone powyżej zadanie, von Stryk nazywa problemem minimalizacji energii. Wydaje się, że taka interpretacja jest niejasna, ponieważ całka z kwadratu momentu napędowego ma wymiar  $J^2 \cdot s$ .

W czasie normalnej pracy roboty wykonują zwykle zadania cykliczne i wydaje się, że rozsądne jest rozważenie wskaźnika jakości, wyrażającego kompromis pomiędzy energią cieplną  $E$ , wydzieloną na uzuwojeniach silników w czasie trwania jednego cyklu sterowania, a czasem  $T$  trwania cyklu. Przyjmując, że moment wytwarzany przez napędy manipulatora opisanego w przykładzie 3.4.4 jest w przybliżeniu proporcjonalny do prądu płynącego przez uzuwojenia danego silnika, tzn.  $M_j(t) = k_j i_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , możemy przyjąć następujący wskaźnik jakości

$$Q(M, T) = T + \lambda E = T + \lambda R_t \int_0^T (i_1(t)^2 + i_2(t)^2) dt = T + \lambda R_t \int_0^T \left( \frac{M_1(t)^2}{k_1^2} + \frac{M_2(t)^2}{k_2^2} \right) dt, \quad (4.29)$$

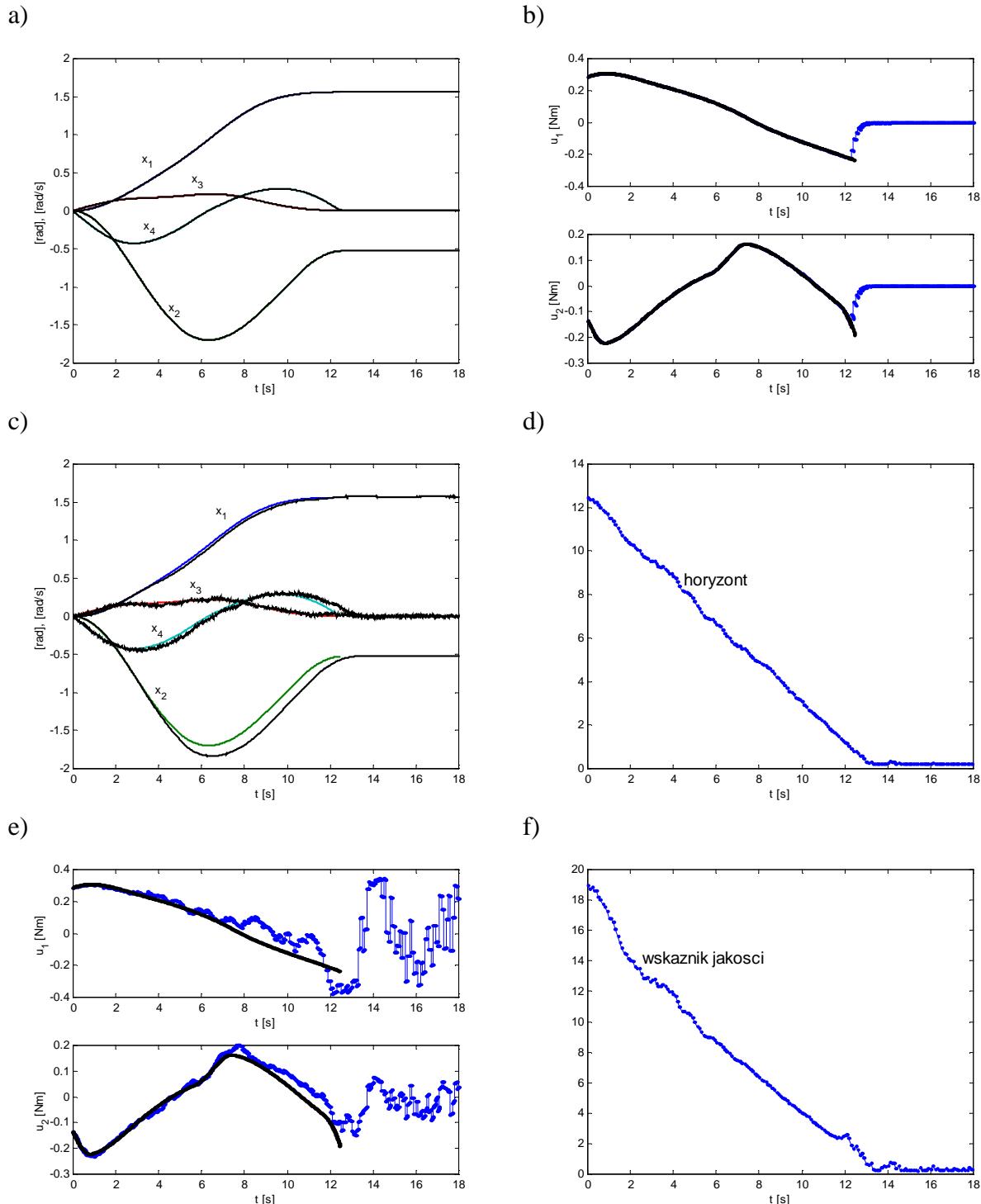
gdzie:  $R_t$  – rezystancja silnika w omach,  $\lambda$  – współczynnik wagowy. Dodając do (4.29) człon kary  $q(x(T))$  oraz podstawiając  $u_j = \frac{M_j}{k_j}$ ,  $\varepsilon_k = \lambda R_t$  otrzymujemy wskaźnik jakości o postaci (2.7), przy czym współczynnik wagowy  $\varepsilon_k$  należy dobrać w zależności od zadania.

W przeprowadzonych eksperymentach numerycznych rozpatrzone ponownie zadanie sterowania manipulatorem typu SCARA z przykładu 3.4.4. Minimalizowany wskaźnik jakości miał postać daną wzorem (2.7), ze współczynnikiem  $\varepsilon_k = 10$  oraz z funkcją podcałkową  $L(x, u) = u^\top u$ . Wszystkie pozostałe parametry algorytmu 4.1.1 oraz poziomy zakłóceń były takie same jak w przykładzie 3.4.4. Pierwsze zadanie sterowania polegało na przeprowadzeniu systemu ze stanu początkowego  $x_0 = [1,5708 \ -0,5236 \ 0 \ 0]^\top$ , do stanu końcowego  $x_f = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ . Wyniki eksperymentu przedstawiono na rys. 4.1. Przewidywany w chwili początkowej czas przejścia wynosił 12,07s. Widoczne są **znacznie większe** niż w przypadku algorytmu 3.1.1 odchylenia trajektorii i sterowania od trajektorii i sterowania przewidywanych w chwili początkowej. Zachowanie takie jest zgodne z wnioskami o odporności przedstawionymi w punkcie 4.3. Horyzont malał aż do osiągnięcia minimalnej wartości, natomiast wskaźnik jakości malał w początkowej fazie procesu, po czym wykazywał nieznaczne losowe odchylenia od wartości minimalnej. Stan systemu zmierzał do pewnego otoczenia zera i pozostawał w nim w chwilach późniejszych.

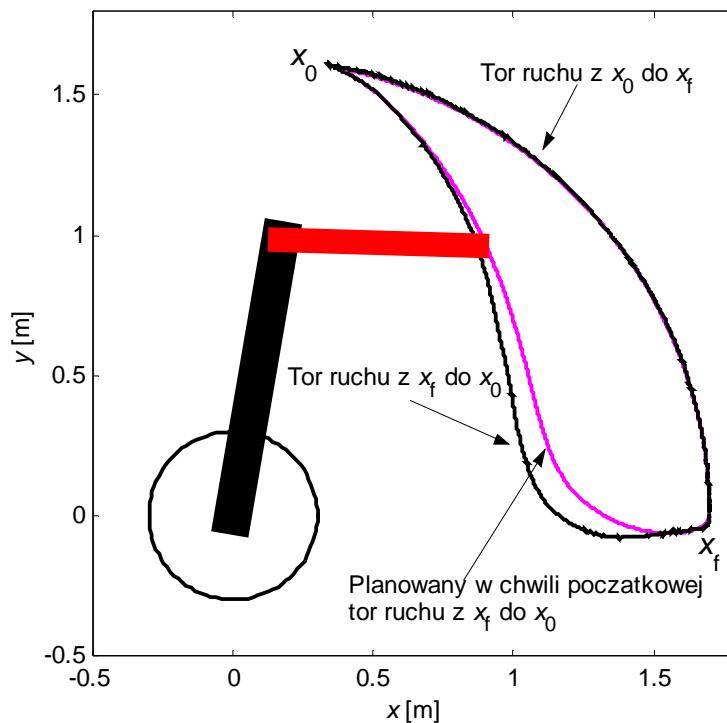


Rys. 4.1. Algorytm QTO-RHC, pierwsze zadanie sterowania. a) Trajektoria robota (kolor czarny) oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej, b) sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny), c,d) horyzont i wskaźnik jakości.

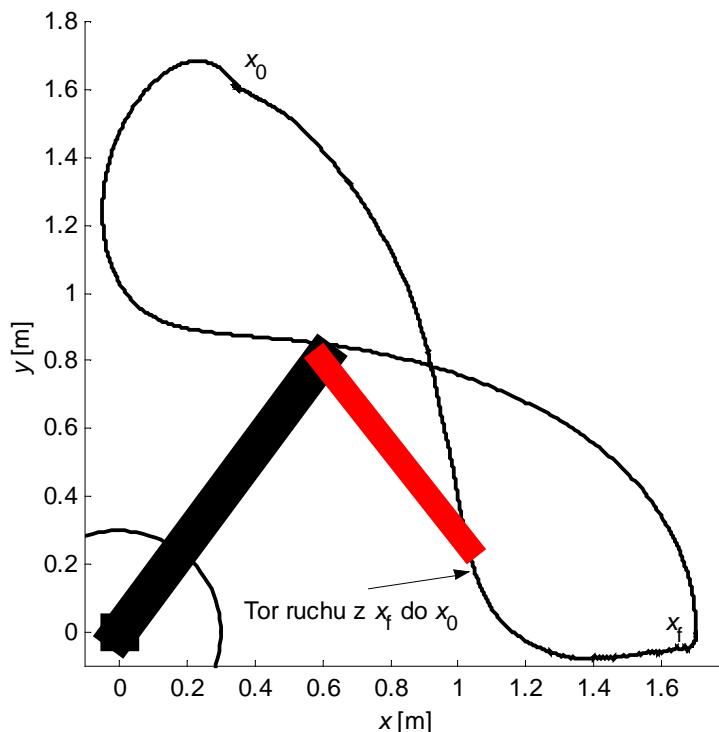
W drugim eksperymencie zamieniono punkty początkowy i końcowy przy niezmienionych pozostałych parametrach. Wyniki eksperymentu przedstawiono na rys. 4.2. W obu eksperymetach czas, po którym odchylenie zmiennych kątowych  $x_1$  i  $x_2$  jest mniejsze niż 5 stopni, wzrósł blisko trzykrotnie w stosunku do czasu uzyskanego w przykładzie 3.4.4. Całka z kwadratu sterowania wynosiła 0,61574, co stanowi ok. 7% wartości analogicznej całki dla zadania z przykładu 3.4.4. i ok. 14% wartości całki dla algorytmu PD. Na rys. 4.3 pokazano tor ruchu końcówki manipulatora przy przejściu z punktu  $x_0$  do  $x_f$  i z powrotem oraz tor przewidywany przy braku zakłóceń. Na rys. 4.4 przedstawiono cykl pracy manipulatora, polegający na przejściu z punktu  $x_0$  do  $x_f$  po trajektorii zbliżonej do czasooptymalnej (algorytm 3.1.1) oraz przejściu z powrotem do  $x_0$ , przy zastosowaniu algorytmu 4.1.1. W ostatnim eksperymencie (rys. 4.5) początkowa wartość współczynnika  $\varepsilon_k$  była równa 0,1, a następnie po osiągnięciu zbioru  $\mathbf{B}$  następowała adaptacja wskaźnika jakości i wzrost współczynnika  $\varepsilon_k$  do wartości maksymalnej równej 10,0. Niska początkowo wartość  $\varepsilon_k$  powodowała, że w początkowej fazie procesu sterowania istotniejszy był czas sterowania, po czym w końcowej fazie głównym składnikiem funkcji celu była energia tracona na ciepło. Wyniki przedstawionych eksperymentów numerycznych dowodzą, że algorytm 4.1.1 może być z powodzeniem zastosowany do sterowania omawianym manipulatorem.



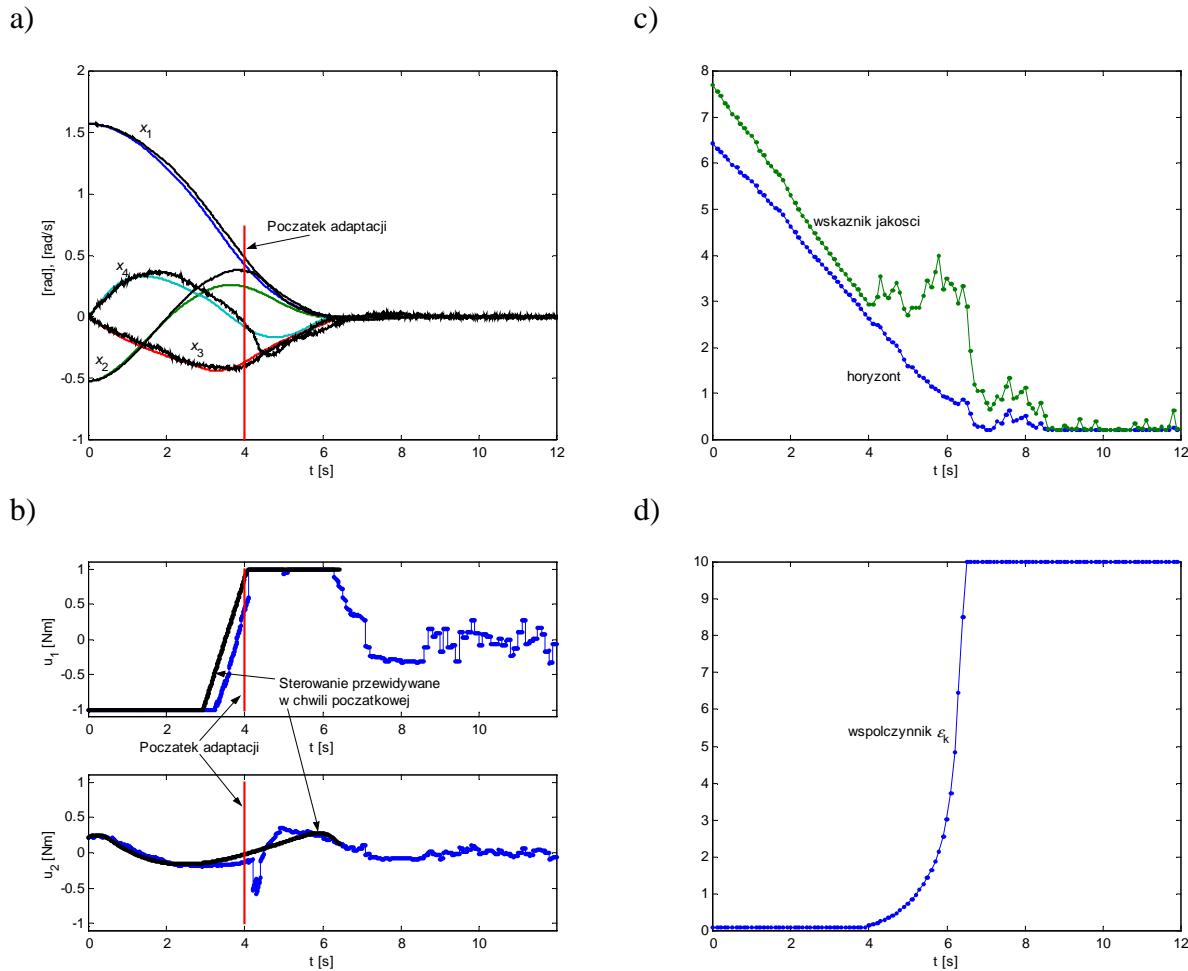
Rys. 4.2. Algorytm QTO-RHC, drugie zadanie sterowania. a,b) Przypadek nominalny, a) trajektoria robota i trajektoria przewidywana w chwili początkowej (różnica niewidoczna na rysunku), b) sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej, c,d,e,f) – przypadek zakłócony, c) trajektoria robota (kolor czarny) oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej, e) sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny), d,f) horyzont i wskaźnik jakości.



Rys. 4.3. Tor ruchu końcówki manipulatora  $x_0$  do  $x_f$  i z powrotem (kolor czarny) oraz tor przewidywany przy braku zakłóceń. Algorytm 4.1.1.



Rys. 4.4. Tor ruchu końcówki manipulatora, przy zastosowaniu algorytmu 3.1.1 przy przejściu z  $x_0$  do  $x_f$  oraz algorytmu 4.1.1 przy przejściu z  $x_f$  do  $x_0$ . Przypadek zakłócony. Czas przejścia z  $x_0$  do  $x_f$  wynosi ok. 5s, a czas przejścia z  $x_f$  do  $x_0$  jest równy ok. 12s.



Rys. 4.5. Algorytm QTO-RHC, trzecie zadanie sterowania. a) Trajektoria robota (kolor czarny) oraz trajektoria przewidywana w chwili początkowej, b) sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny), c) horyzont i wskaźnik jakości, d) współczynnik  $\varepsilon_k$ .

#### 4.4.2. Sterowanie statkiem kosmicznym – zadanie spotkania

Gwałtowny wzrost mocy obliczeniowej komputerów, nowe narzędzia teoretyczne dostarczane przez teorię systemów dynamicznych i teorię sterowania oraz szybkie i efektywne algorytmy optymalizacji dynamicznej, umożliwiły na przestrzeni ostatnich dziesięciu lat planowanie i realizację skomplikowanych misji kosmicznych, niemożliwych jeszcze w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia (Koon, Lo, Marsden, Ross 2002). Przykładem takiego projektu jest rozpoczęta w roku 2001 misja *Genesis* (Serban *et al.* 2002), polegająca na wysłaniu próbnika na orbitę wokół punktu Lagrange'a  $L_1$  układu Ziemia-Słońce. Misja *Genesis* została w całości zaprojektowana przy użyciu metod dostarczanych przez teorię systemów dynamicznych, z wykorzystaniem wyspecjalizowanych algorytmów optymalizacji dynamicznej. Korekta trajektorii sondy była wyliczana na bieżąco, z uwzględnieniem opóźnień w komunikacji, za pomocą pakietu optymalizacyjnego COOPT. Celem optymalizacji była minimalizacja zużycia paliwa przy ograniczeniach na stan i sterowanie. Szczegółowy opis misji i metod optymalizacji podaje Serban i współpracownicy (2000, 2002).

Przedstawione na początku rozdziału wyniki teoretyczne dotyczące stabilności algorytmu QTO-RHC dla zadań minimalizacji normy sterowania (algorytm 4.1.1), pozwalają przypuszczać, że algorytm 4.1.1 może stanowić użyteczną i możliwą do zastosowania w czasie rzeczywistym metodę wyliczania i korekcji trajektorii statku kosmicznego.

W opisany poniżej przykładzie rozważamy nieco prostsze niż w przypadku misji *Genesis*, zadanie spotkania (tzw. *rendez-vous problem*), polegające na doprowadzeniu statku kosmicznego z pewnego punktu początkowego (na ogół z pewnej orbity) do stacji kosmicznej, krążącej po innej znanej orbicie. Zadanie to uważane jest za trudniejsze niż standardowe zadania transferu orbitalnego, polegające na umieszczeniu satelity na orbicie lub zmianie jego orbity. Podstawowym utrudnieniem jest konieczność trafienia w poruszający się cel, jakim jest stacja kosmiczna. Przykład ten miał także na celu przetestowanie działania algorytmu optymalizacji w trudnym, wielowymiarowym zadaniu sterowania optymalnego (trzy sterowania, sześć zmiennych stanu oraz trudny do numerycznego rozwiązywania, silnie nieliniowy układ równań stanu).

### a. Równania ruchu

Załóżmy, że statek kosmiczny porusza się po orbicie kołowej  $G_1$  wokół Ziemi. Po orbicie geostacjonarnej  $G_2$ , nachylonej po pewnym kątem do orbity  $G_1$  porusza się stacja kosmiczna. Przymajemy obracający się prawoskrętny układ współrzędnych  $Ox_1x_2x_3$  (ang. *rotating frame*), którego początek znajduje się w środku ciężkości  $C$  stacji kosmicznej, a jego osią  $x_1$  pokrywa się z prostą przechodzącą przez środek Ziemi i stacji kosmicznej. W takim układzie współrzędnych stacja kosmiczna (punkt  $C$ ) spoczywa, a równania ruchu statku kosmicznego względem stacji przyjmują postać

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_4, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_5, \quad \dot{\bar{x}}_3 = \bar{x}_6, \quad (4.30a)$$

$$\dot{\bar{x}}_4 = 2\omega_0 \bar{x}_5 + (1 + \bar{x}_1) \left( \omega_0^2 - \frac{\mu}{|\bar{r}|^3} \right) + \frac{F_1}{m}, \quad (4.30b)$$

$$\dot{\bar{x}}_5 = -2\omega_0 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \left( \omega_0^2 - \frac{\mu}{|\bar{r}|^3} \right) + \frac{F_2}{m}, \quad (4.30c)$$

$$\dot{\bar{x}}_6 = -\frac{\mu \bar{x}_3}{|\bar{r}|^3} + \frac{F_3}{m}, \quad (4.30d)$$

$$|\bar{r}| = \sqrt{(\bar{x}_1 + R_0)^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2}, \quad (4.30e)$$

gdzie:  $\bar{x}_{1-3}$  – położenie statku kosmicznego w m, obliczane względem stacji kosmicznej,  $\bar{x}_{4-6}$  – prędkość statku w m/s obliczana względem stacji kosmicznej,  $|\bar{r}|$  – odległość pomiędzy środkiem Ziemi, a statkiem kosmicznym w m,  $R_0 = 42242$  km – promień orbity geostacjonarnej,  $\mu = GM$  – parametr grawitacyjny,  $G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$  – stała grawitacji,  $M = 5,9736 \cdot 10^{24}$  kg – masa Ziemi,  $T = 86400$ s – okres obiegu stacji kosmicznej,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  – prędkość kątowa Ziemi spełniająca związek  $R_0^3 \omega_0^2 = \mu$ ,  $m$  – masa statku w kg,  $F = [F_1, F_2, F_3]^T$  – siła ciągu silnika w niutonach. Sterowanie statkiem odbywa się poprzez

zmianę wartości i kierunku siły ciągu silnika. Wybierając  $\omega_0^{-1}$  jako jednostkę czasu,  $R_0$  jako jednostkę długości oraz wprowadzając wektor bezwymiarowego przyspieszenia

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T, \quad a_j = \frac{F_j}{m\omega_0^2 R_0}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.31)$$

otrzymujemy równania ruchu w zmiennych bezwymiarowych

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad (4.32a)$$

$$\dot{x}_2 = x_5, \quad (4.32b)$$

$$\dot{x}_3 = x_6, \quad (4.32c)$$

$$\dot{x}_4 = 2x_5 + (1 + x_1)(1 - |r|^{-3}) + a_1, \quad (4.32d)$$

$$\dot{x}_5 = -2x_4 + x_2(1 - |r|^{-3}) + a_2, \quad (4.32e)$$

$$\dot{x}_6 = -x_3 |r|^{-3} + a_3, \quad (4.32f)$$

$$|r| = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (4.32g)$$

Ograniczenia wektora sterującego mają postać

$$|\mathbf{a}| \leq a_{\max}, \quad (4.33)$$

gdzie  $a_{\max} > 0$  jest zadanym, maksymalnym przyspieszeniem bezwymiarowym. Zauważmy, że definicja przyspieszenia bezwymiarowego pozwala uwzględnić zmienną masę statku.

### b. Cel sterowania

Jednostki napędowe satelitów wykorzystujące pole elektromagnetyczne do przyspieszania wyrzucanego paliwa mogą pracować ze stałą mocą  $P$  i zmienną prędkością wyrzutu paliwa (ang. *exhaust velocity*)  $v_e$  lub, co jest równoważne, ze zmiennym impulsem charakterystycznym (ang. *specific impulse*)  $I_{sp}$ . Angielska nazwa tego typu napędów to *Low Thrust Power Limited Variable Ejection Velocity* (zob. np. Marec 1979, Koon et al. 2002).

Oznaczamy przez  $m_f$  masę satelity w chwili końcowej oraz przez  $m_0$  masę satelity w chwili startu. Celem sterowania jest przeprowadzenie satelity z punktu początkowego  $r_0$  do punktu końcowego  $r_f$  w czasie  $T$ , tak aby stosunek mas

$$J_1 = \frac{m_f}{m_0} \quad (4.34)$$

był maksymalny. Marec (1979) wykazał, że przy założeniu  $P = P_0 = \text{const}$  zachodzi wzór

$$\frac{m_f}{m_0} = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{2P_0} \int_0^T a_s^2 dt}, \quad (4.35)$$

gdzie  $a_s$  oznacza wartość bezwzględną przyspieszenia, nadawanego statkowi przez silnik w pustej przestrzeni. A zatem minimalizując całkę

$$J_2 = \int_0^T a_s^2 dt, \quad (4.36)$$

zapewniamy maksymalny stosunek masy końcowej do masy początkowej. W niniejszym przykładzie pierwotnym celem sterowania jest znalezienie minimum wskaźnika jakości

$$Q(a, T) = T + \lambda \int_0^T |a(t)|^2 dt + \|x(T)\|_H^2, \quad \lambda > 0, \quad (4.37)$$

na trajektoriach systemu (4.32), przy ograniczeniach wektora sterującego (4.33). Cel sterowania określa kompromis pomiędzy czasem sterowania, a całką z kwadratu normy przyspieszenia. Im większa wartość współczynnika  $\lambda$ , tym mniejsze znaczenie ma czas osiągnięcia celu. Zauważmy, że system (4.32) jest afinicznym względem sterowania oraz jego linearyzacja w otoczeniu początku układu współrzędnych jest sterowalna. Fakt, że zbiór dopuszczalnych wartości sterowania jest kulą o środku w zerze i promieniu  $a_{\max}$ , nie wpływa na wyniki dotyczące stabilności regulatora QTO-RHC oraz istnienie rozwiązań problemu optymalizacji.

Zadanie optymalizacji dogodniej jest rozwiązywać, gdy siła ciągu silnika wyrażona jest w układzie biegunowym; wówczas rzuty siły ciągu na osie układu współrzędnych  $Ox_1x_2x_3$  są dane wzorami

$$a_1 = u_1 \cos u_3 \cos u_2, \quad a_2 = u_1 \cos u_3 \sin u_2, \quad a_3 = u_1 \sin u_3, \quad (4.38)$$

gdzie  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$  jest nowym wektorem sterowań, przy czym tylko pierwsza składowa tego wektora podlega ograniczeniom nierównościowym

$$u_1 \in [0, a_{\max}], \quad u_2, u_3 \in R. \quad (4.39)$$

Po zastosowaniu przekształcenia (4.38) wskaźnik jakości (4.37) przyjmuje równoważną postać

$$\tilde{Q}(u, T) = T + \lambda \int_0^T u_1^2 dt + \|x(T)\|_H^2, \quad \lambda > 0. \quad (4.40)$$

### c. Opis eksperymentów numerycznych

Zgodnie z konwencją podaną na początku rozdziału, algorytm 4.1.1 sekwencyjnie minimalizuje wskaźnik jakości

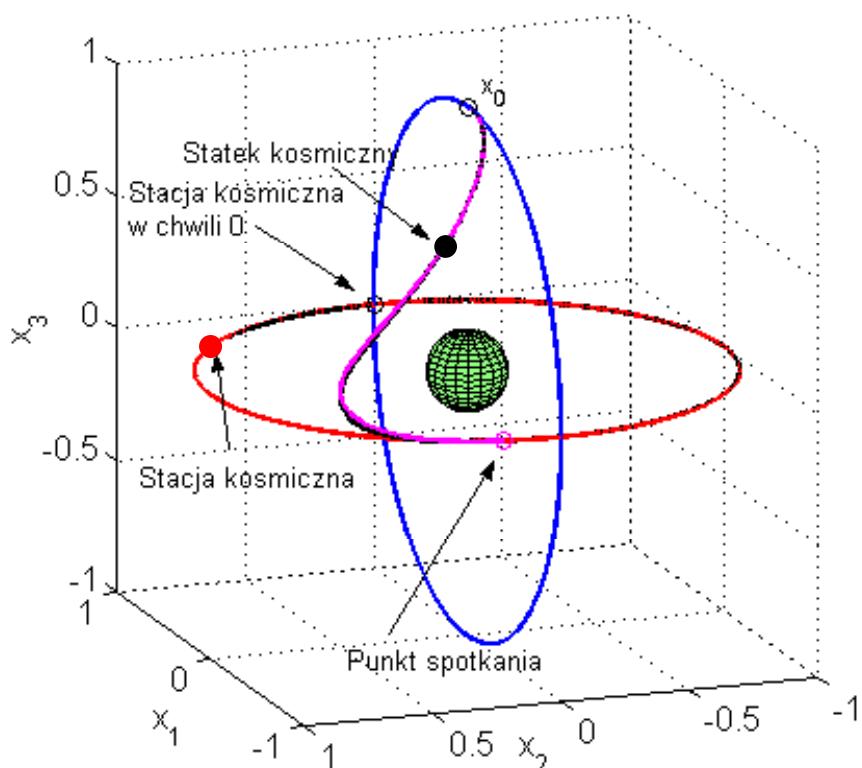
$$J(u^k, T_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) = T_k + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k+T_k} (u_1^k)^2 dt + \|x^k(t_k + T)\|_H^2, \quad (4.41)$$

gdzie macierz  $H$  wyznaczono tak, aby spełnić założenia twierdzeń 4.2.1 i 4.2.2. W eksperymentach przyjęto  $a_{\max} = 1$ . W pierwszym eksperymencie numerycznym założono, że statek i stacja kosmiczna krążą po prostopadłych do siebie orbitach geostacjonarnych. Warunek początkowy dla równań (4.32) był równy  $x_0 = [-1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0]$ . Warunek ten odpowiadał położeniu statku, pokazanemu na rys. 4.6. Celem sterowania było doprowadzenie do spotkania stacji i statku kosmicznego. Początkowa wartość współczynnika  $\varepsilon_k$  wynosiła 0,1 oraz dopuszczono jego wzrost do wartości maksymalnej równej 10. Przyjęto zbiór  $\mathbf{B} = \{x \in R^6 : |x_i| \leq 0,35, i = 1, \dots, 6\}$ . Horyzont minimalny wynosił  $T_{\min} = 0,2$ . Niska początkowa wartość współczynnika  $\varepsilon_k$  pozwoliła osiągnąć przybliżenie rozwiązania czasooptymalnego. Zakłócenia symulowano dodając do sterowania szum o rozkładzie równomiernym w przedziale  $[-0,02, 0,02]$ . Symulowano również błędy estymacji stanu zakładając, że są one szumem o rozkładzie równomiernym w przedziale  $[-0,001, 0,001]$ . Tak

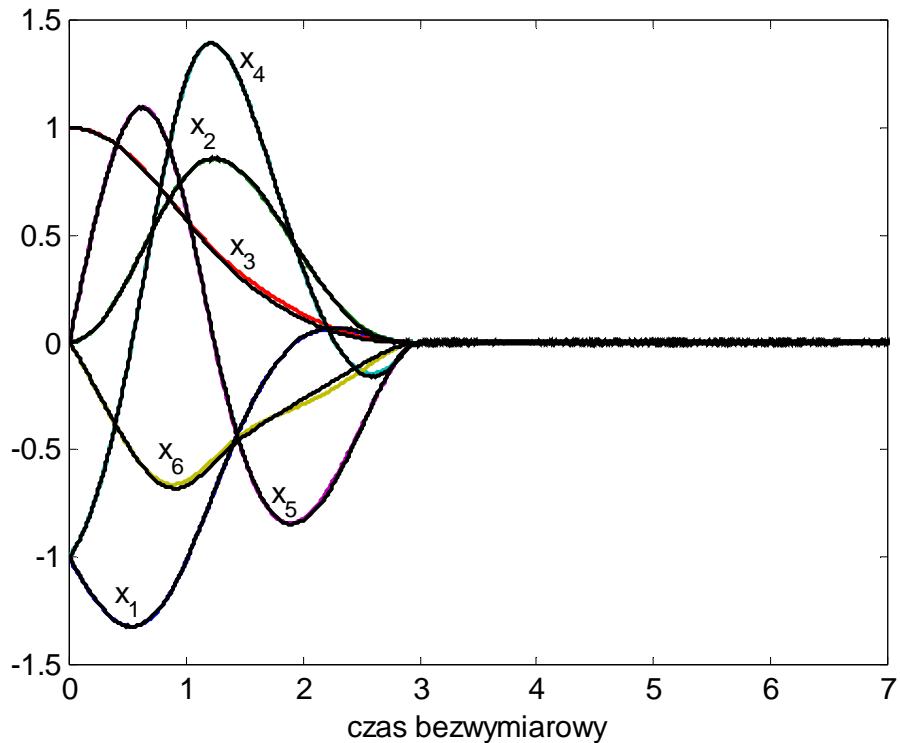
wielkie błędy w estymacji stanu i generacji sterowań nie występują w technice kosmicznej i zostały wygenerowane celowo, aby sprawdzić własności odpornościowe algorytmu. Wartości całki z kwadratu przyspieszenia oraz czasu sterowania dla rozwiązania początkowego i algorytmu QTO-RHC przy zakłóceniach porównano w tabeli 4.1.

**Tabela. 4.1.** Całka z kwadratu przyspieszenia oraz czas sterowania dla rozwiązania początkowego i uzyskanego w algorytmie QTO-RHC. Pierwsze zadanie sterowania.

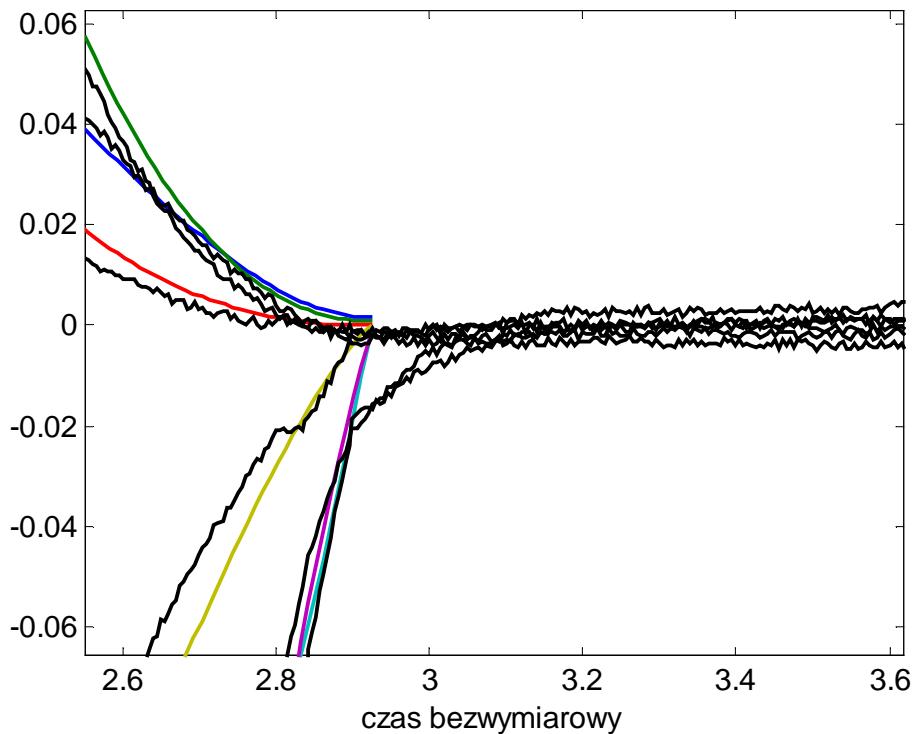
Rozwiązanie początkowe.		QTO-RHC przy zakłóceniach.	
Czas sterowania.	Całka z kwadratu przyspieszenia.	Czas sterowania wyznaczony jako pierwsza chwila, w której norma stanu obiektu wynosi $10^{-2}$ .	Całka z kwadratu przyspieszenia obliczana do pierwszej chwili, w której norma stanu obiektu wynosi $10^{-2}$ .
2,9222	2,9222	3,15	2,8563



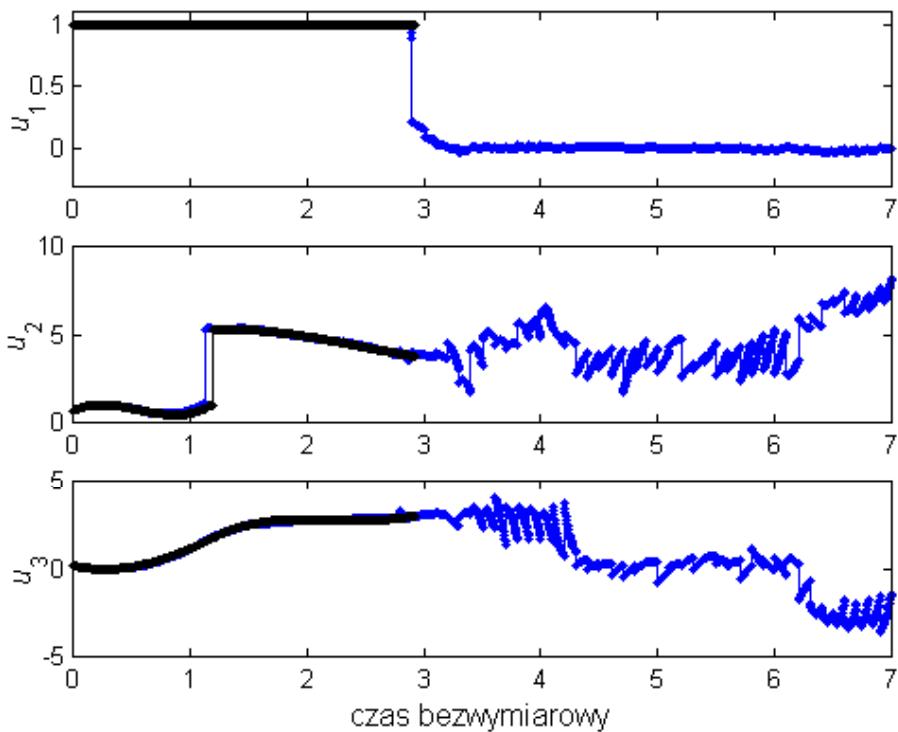
Rys. 4.6. Tor statku i stacji kosmicznej oraz przewidywany w chwili 0 tor statku. Pierwsze zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłóczany. Inercjalny układ odniesienia.



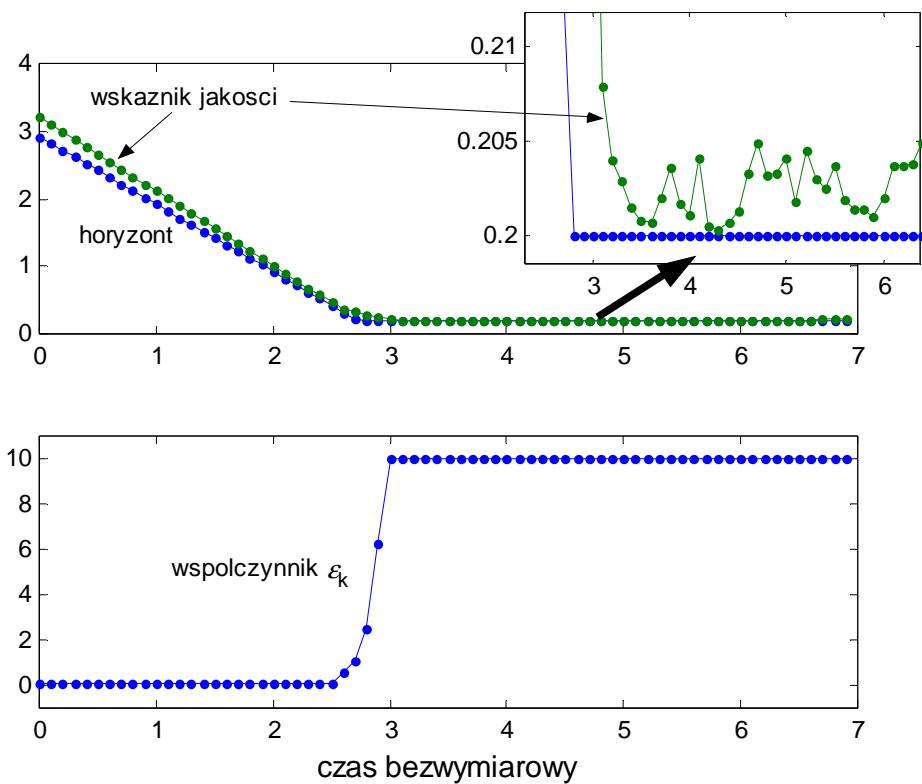
Rys. 4.7. Trajektoria stanu (kolor czarny) i trajektoria przewidywana w chwili początkowej. Pierwsze zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Obracający się układ odniesienia.



Rys. 4.8. Końcowy fragment trajektorii stanu i trajektorii przewidywanej w chwili początkowej. Pierwsze zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Obracający się układ odniesienia.



Rys. 4.9. Sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny). Pierwsze zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Sterowanie przedstawiono w układzie biegunowym.

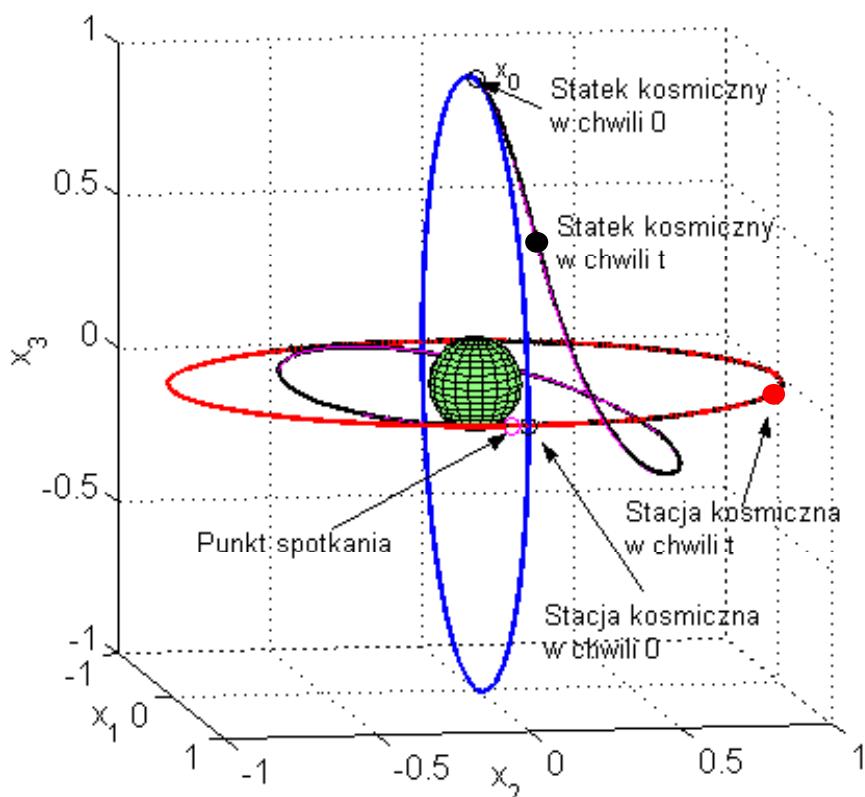


Rys. 4.10. Wskaźnik jakości i horyzont (u góry) oraz współczynnik  $\varepsilon_k$  (u dołu). Pierwsze zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany.

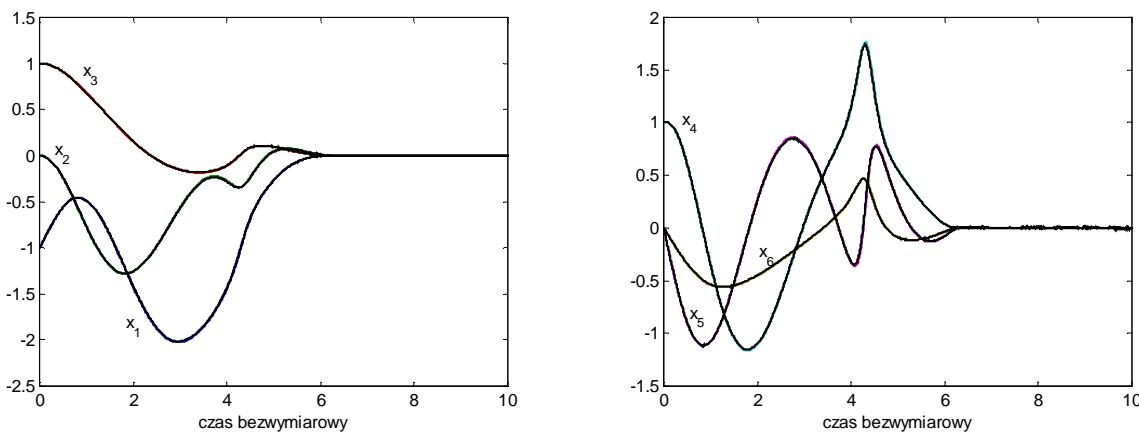
W drugim zadaniu sterowania współczynnik  $\varepsilon_k$  był równy 10,0 i nie podlegał zmianom. Pozostałe parametry były takie same jak w poprzednim eksperymencie numerycznym. Dzięki zwiększeniu wartości współczynnika  $\varepsilon_k$  udało się blisko sześciokrotnie – w porównaniu z poprzednim eksperymentem – zmniejszyć wartość całki (4.36). Czas osiągnięcia otoczenia celu wzrósł prawie dwukrotnie. Tor ruchu statku pokazano na rys. 4.11. Trajektorię oraz sterowanie przedstawiono na rys. 4.12 i 4.13.

**Tabela. 4.2.** Całka z kwadratu przyspieszenia oraz czas sterowania dla rozwiązania początkowego i uzyskanego w algorytmie QTO-RHC. Drugie zadanie sterowania.

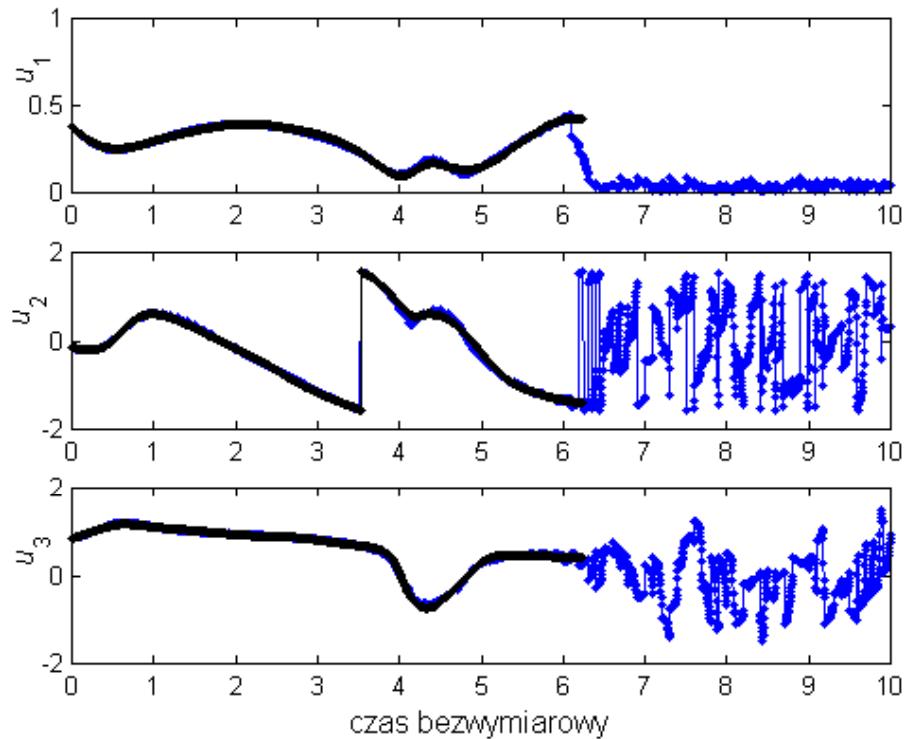
Rozwiązywanie początkowe.		QTO-RHC przy zakłócenach.	
Czas sterowania.	Całka z kwadratu przyspieszenia.	Czas sterowania wyznaczony jako pierwsza chwila, w której norma stanu obiektu wynosi $10^{-2}$ .	Całka z kwadratu przyspieszenia obliczana do pierwszej chwili, w której norma stanu obiektu wynosi $10^{-2}$ .
6,2269	0,55659334	6,27	0,55260352



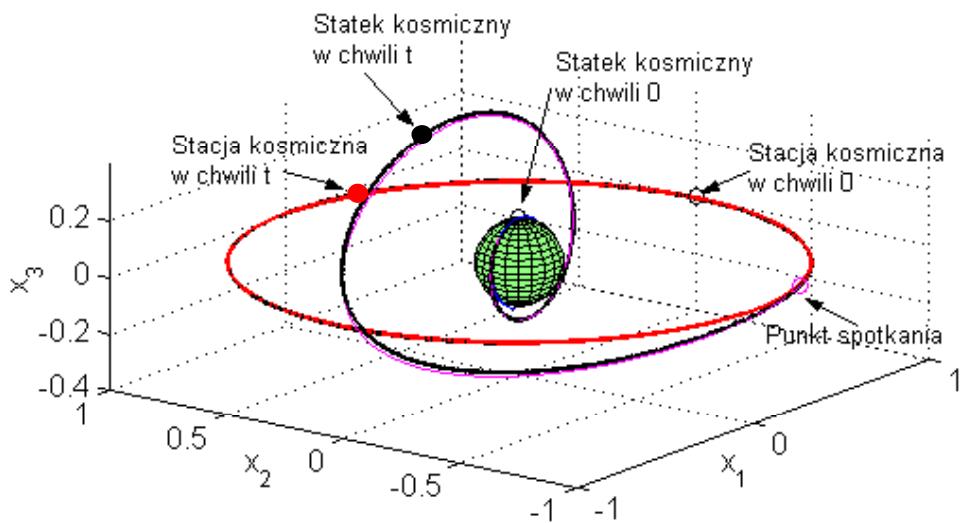
Rys. 4.11. Tor statku i stacji kosmicznej oraz przewidywany w chwili 0 tor statku. Drugie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócony. Inercjalny układ odniesienia.



Rys. 4.12. Trajektoria stanu (kolor czarny) i trajektoria przewidywana w chwili początkowej. Drugie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Obracający się układ odniesienia.

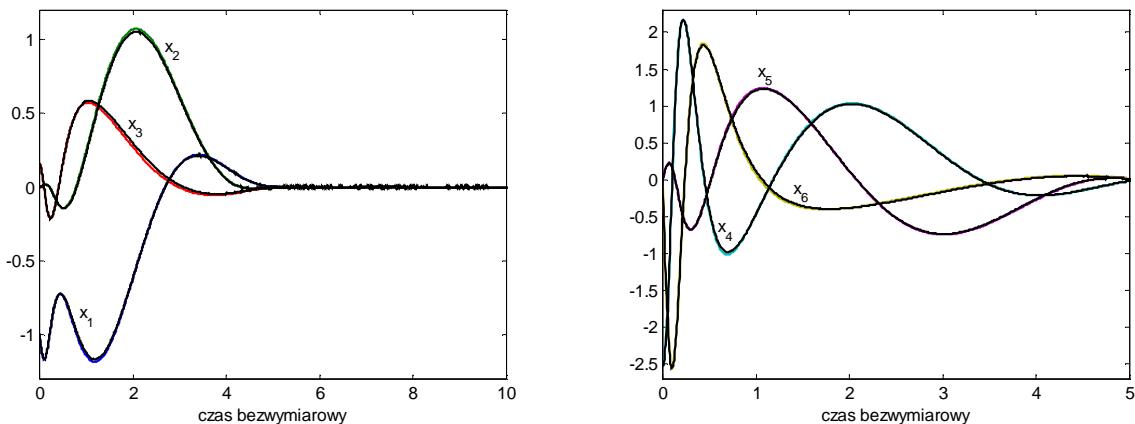


Rys. 4.13. Sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny). Drugie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Sterowanie przedstawiono w układzie biegunkowym.

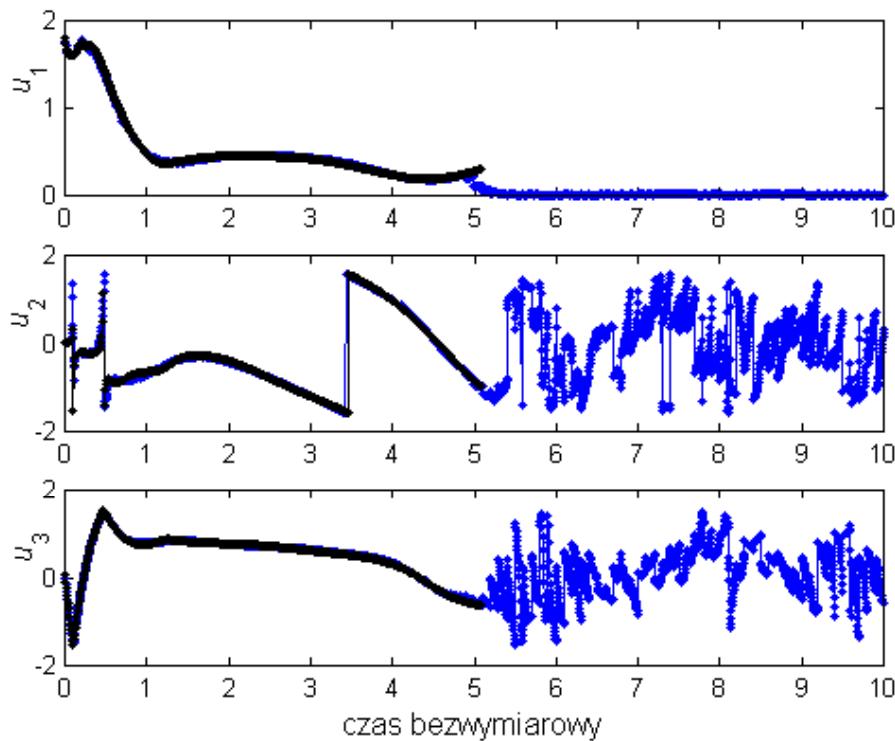


Rys. 4.14. Tor statku i stacji kosmicznej oraz przewidywany w chwili 0 tor statku. Trzecie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócony. Inercjalny układ odniesienia.

W trzecim, nieco bardziej skomplikowanym zadaniu sterowania statek kosmiczny startuje z niskiej (300 km) orbity wokół Ziemi i ma spotkać się ze stacją kosmiczną, krążącą po orbicie geostacjonarnej, tak jak w poprzednim przykładzie. Współczynnik  $\varepsilon_k$  był równy 11,0 i nie podlegał zmianom. Warunek początkowy (w obracającym się układzie współrzędnych) wynosił  $x_0 = [-1 \ 0 \ 0,1373 \ -2,6991 \ 0 \ 0]^T$ . W eksperymencie nie występowały ograniczenia sterowania (założono, że  $a_{\max} = \infty$ ). Pozostałe parametry były takie same jak w poprzednim eksperymencie. Tor ruchu, trajektorię stanu oraz sterowanie przedstawiono na rys. 4.14-16. Działanie zakłóceń objawia się odchyłkami trajektorii przewidywanej w chwili początkowej od trajektorii uzyskanej w algorytmie QTO-RHC.



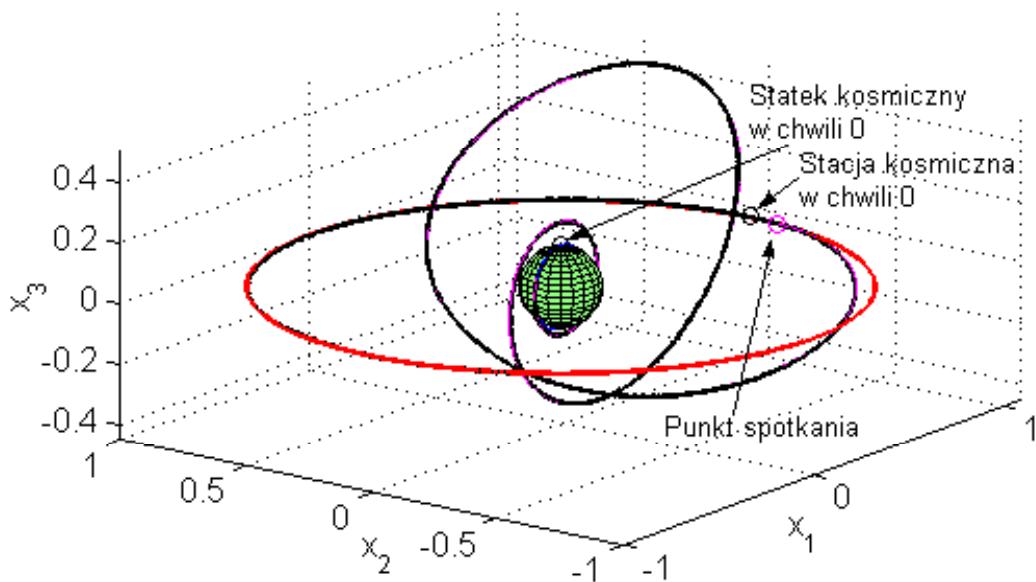
Rys. 4.15. Trajektoria stanu (kolor czarny) i trajektoria przewidywana w chwili początkowej. Trzecie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócony. Obracający się układ odniesienia.



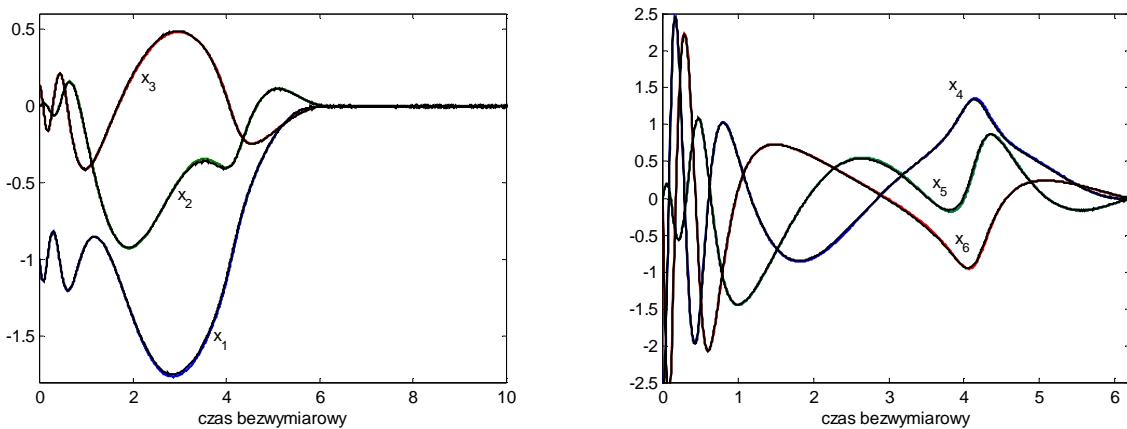
Rys. 4.16. Sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny). Trzecie zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócony. Sterowanie przedstawiono w układzie biegunkowym.

Czwarte zadanie sterowania miało na celu przetestowanie możliwości obliczeniowych algorytmu optymalizacji (zob. rozdz. 6) dla zadań z długim horyzontem i skomplikowaną strukturą sterowania. W tym celu wprowadzono dodatkowe utrudnienie, w postaci ograniczeń na maksymalne przyspieszenia  $|a_i(t)| \leq 1$ ,  $i = 1,2,3$ . Współczynnik  $\varepsilon_k$  był równy 5,0 i nie podlegał zmianom. Cel sterowania i pozostałe parametry algorytmu były takie same jak w poprzednim eksperymencie numerycznym. Wyniki eksperymentu przedstawiono na rys. 4.17-20. Zakłócenia spowodowały niewielkie odchylenia od trajektorii przewidywanej w chwili początkowej. Trajektoria zmierzała do pewnego otoczenia zera i pozostawała w nim w chwilach późniejszych. Horyzont malał aż do osiągnięcia minimalnej wartości. Wskaźnik jakości początkowo malał, a następnie pod koniec procesu przyjmował wartości losowe, niewiele odchylając się wartości minimalnej równej horyzontowi minimalnemu.

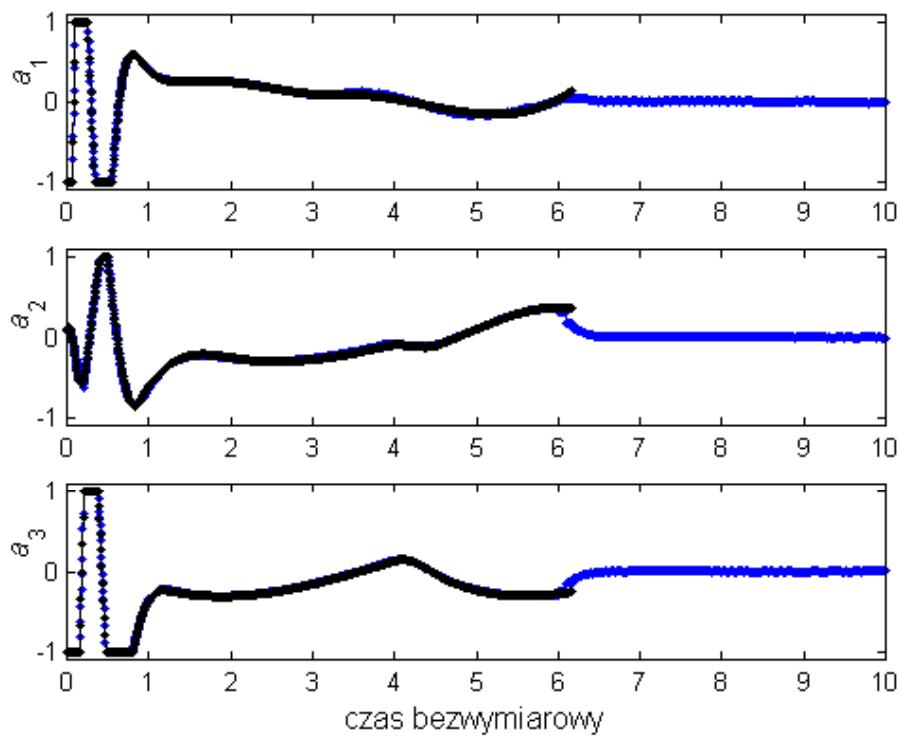
W trakcie wykonywania obliczeń uwydatnił się wpływ błędów całkowania równań stanu i sprzężonych, co powodowało trudności z dokładnym wyznaczeniem rozwiązań problemów optymalizacji w początkowej fazie sterowania, gdy horyzont był stosunkowo długi. Problem ten rozwiązyano poprzez zastosowanie solwera Rungego–Kutty–Fehlberga siódmego rzędu (Fehlberg 1985). Pomiary czasu obliczeń prowadzonych w MATLABIE ver. 5.3, przeprowadzone na maszynie *Notebook Amilo Pro Fujitsu Siemens* z systemem operacyjnym Windows XP, z procesorem Intel 740 wyposażonym w 2 MB pamięci podręcznej (*cash*) i z zegarem 1,73 GHz pokazały, że czas ten nie przekraczał 0,3 s.



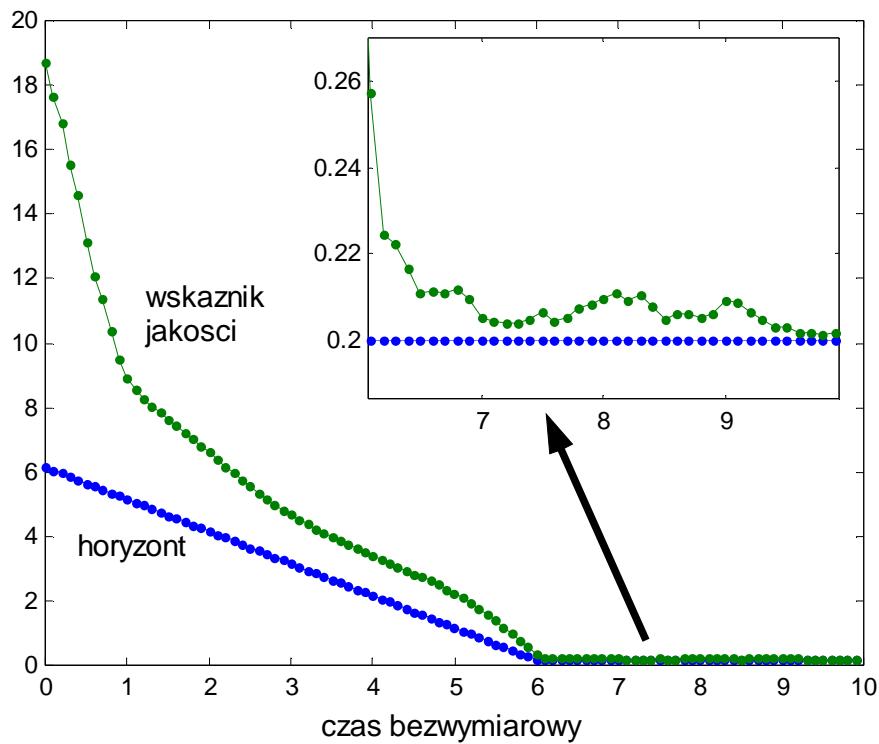
Rys. 4.17. Tor statku i stacji kosmicznej oraz przewidywany w chwili 0 tor statku. Czwarte zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany, inercjalny układ odniesienia.



Rys. 4.18. Trajektoria stanu (kolor czarny) i trajektoria przewidywana w chwili początkowej. Czwarte zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany, obracający się układ odniesienia.



Rys. 4.19. Sterowanie i sterowanie przewidywane w chwili początkowej (kolor czarny). Czwarte zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany. Sterowanie przedstawiono w układzie kartezjańskim.



Rys. 4.20. Horyzont i wskaźnik jakości. Czwarte zadanie sterowania, algorytm QTO-RHC (algorytm 4.1.1), przypadek zakłócany.

## Rozdział 5. Wyznaczanie ograniczeń stanu końcowego oraz własności asymptotyczne algorytmu QTO-RHC

W niniejszym rozdziale zajmiemy się wyznaczaniem zbioru  $\Omega$  oraz funkcji  $q$  w taki sposób, aby spełnić założenia twierdzeń o stabilności algorytmu QTO-RHC. Ponadto przeanalizujemy własności asymptotyczne algorytmu QTO-RHC.

### 5.1. Ograniczenia stanu końcowego w algorytmie 3.1.1

Założenia twierdzenia 3.2.1 wymagają, aby dla wszystkich  $x_0 \in \Omega$  istniało sterowanie dopuszczalne  $u : [0, \delta] \rightarrow U$ , takie że rozwiązanie  $x$  równania (2.1) z warunkiem początkowym  $x_0$  i sterowaniem  $u$  czyni zadość następującym żądaniom:

$$\dot{q}(x(t)) + L(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, \delta], \quad (5.1)$$

$$x(t) \in \Omega, \quad t \in [0, \delta]. \quad (5.2)$$

Warunki (5.1) i (5.2) były analizowane przez wielu badaczy (zob. np. Fontes 2000). Podstawowa idea wyznaczania  $q$  i  $\Omega$  polega na znalezieniu regulatora  $u = K(x)$  stabilizującego system (2.1) w otoczeniu zera. Następnie wyznacza się funkcjonał Lapunowa dla systemu (2.1) ze sterowaniem  $u = K(x)$ . Zbiór  $\Omega$  wybiera się jako zbiór poziomikowy funkcjonału Lapunowa, natomiast za funkcję  $q$  przyjmuje się znaleziony funkcjonał. Metoda ta zdaje egzamin, gdy funkcja  $K$  jest ciągła. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z koniecznością analizy równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną, co prowadzi do istotnych trudności. Szczegółową analizę problemu oraz przykłady wyznaczania  $q$  i  $\Omega$  dla systemów niestabilizowalnych podaje Fontes (2003a).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku systemów stabilizowalnych, gdy funkcja podcałkowa  $L(x, u)$ , we wskaźniku jakości (2.7), przyjmuje postać formy kwadratowej. Wówczas do wyznaczenia  $q$  i  $\Omega$  można wykorzystać liniowe prawo sterowania  $u = Kx$  z odpowiednio dobraną macierzą  $K$ . Poniżej podajemy twierdzenie egzystencjalne, a następnie opisujemy algorytm numerycznego wyznaczania  $q$  i  $\Omega$ , dla praktycznie istotnego przypadku kwadratowego wskaźnika jakości (Bania 2005).

Zakładamy, że funkcje  $L$  i  $q$  we wskaźniku jakości (2.7) mają postać

$$L(x, u) = |x|_W^p + |u|_R^p, \quad p \geq 2, \quad \text{gdzie } W = W^\top > 0, \quad R = R^\top > 0, \quad (5.3)$$

$$q(x) = \kappa |x|_H^p, \quad \kappa > 0. \quad (5.4)$$

Niech  $A = \nabla_x f(0, 0, p_0)^\top$ ,  $B = \nabla_u f(0, 0, p_0)^\top$ , gdzie  $f$  oznacza prawą stronę równania stanu (2.1). Zakładamy, że para  $(A, B)$  jest stabilizowalna. Istnieje wówczas macierz  $K$ , taka że macierz  $A_K = A + BK$  jest wykładniczo stabilna oraz równanie Lapunowa

$$A_K^\top H + HA_K = -G, \quad \text{gdzie } G = W + K^\top RK > 0, \quad (5.5)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie  $H = H^\top > 0$  (Mitkowski 1991, s. 81). Niech sterowanie stabilizujące (zob. twierdzenia 3.2.1 i 4.2.1) wynosi

$$u = Kx. \quad (5.6)$$

Jeżeli w systemie (2.1) zastosujemy sterowanie (5.6), to po zamknięciu sprzężenia zwrotnego równanie (2.1) może być zapisane w postaci

$$\dot{x} = A_K x + d(x), \quad d(x) = f(x, Kx, p_0) - A_K x, \quad (5.7)$$

przy czym  $d \in C^1(\mathbb{R}^n)$  oraz

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \tilde{\delta} > 0 : |x| < \tilde{\delta} \Rightarrow |d(x)| \leq \tilde{\varepsilon} |x|. \quad (5.8)$$

Jeżeli macierz  $A_K$  jest wykładniczo stabilna oraz macierz  $H$  spełnia (5.5), to funkcja

$$V(x) = |x|_H^2 \quad (5.9)$$

jest funkcjonałem Lapunowa systemu (5.7) w pewnym otoczeniu zera (Demidowicz 1972, s. 300-304). Definiujemy rodzinę zbiorów poziomikowych funkcjonału  $V$  zależną od parametru  $\alpha > 0$

$$\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \alpha\} \quad (5.10)$$

oraz przyjmujemy oznaczenie

$$Q(x) = \dot{q}(x) + L(x, Kx). \quad (5.11)$$

Poniższe twierdzenie pozwoli skonstruować algorytm wyznaczania zbioru  $\Omega$  oraz funkcji  $q$ .

**Twierdzenie 5.1.1.** Niech będą spełnione następujące założenia.

1. Funkcje  $L$  i  $q$  są dane wzorami (5.3) i (5.4).
2. Para  $(A, B)$  jest stabilizowalna.
3. Macierz  $A_K = A + BK$  jest wykładniczo stabilna.
4. Macierz  $H$  jest rozwiązaniem równania Lapunowa (5.5).
5. W systemie (2.1) stosujemy sterowanie  $u = Kx$ .
6.  $x(0) \in \Omega_\alpha$ .

Istnieją wówczas liczby rzeczywiste  $\kappa_{\min} > 0$ ,  $\alpha_{\max} > 0$  takie, że dla wszystkich

$$\kappa \in (\kappa_{\min}, \infty), \quad \alpha \in (0, \alpha_{\max}], \quad t \in \mathbb{R}_0^+ :$$

- (i) Trajektoria systemu (2.1) pozostaje w zbiorze  $\Omega_\alpha$  i zmierza asymptotycznie do początku układu współrzędnych.
- (ii) Sterowanie spełnia ograniczenia (2.2), tzn.  $Kx(t) \in U$ .
- (iii) Spełniona jest nierówność  $\dot{q}(x(t)) + L(x(t), u(t)) \leq 0$ .
- (iv) Zachodzi oszacowanie  $\int_t^\infty L(x(s), u(s)) ds \leq q(x(t))$ .

*Dowód:* Wybierzmy liczbę  $\tilde{\delta} > 0$  na tyle małą, aby funkcja  $V$  była dla  $|x| \leq \tilde{\delta}$  funkcjonałem Lapunowa systemu (5.7). Założenia twierdzenia gwarantują, że taka liczba istnieje (szczególny zob. Mitkowski 1991, s. 81, Demidowicz 1972, s. 300-304). Warunek  $|x| \leq \tilde{\delta}$  będzie spełniony, gdy  $|x|_H^2 \leq \lambda_{\min}(H) \tilde{\delta}^2$ . Z twierdzenia La Salle'a (zob. Mitkowski 1991, s. 117, La Salle i Lefschetz 1966, s. 64) wynika, że zbiór  $\Omega_\alpha$ , gdzie  $0 < \alpha \leq \lambda_{\min}(H) \tilde{\delta}^2$ , jest zbiorem niezmienniczym dla równania (5.7) oraz że każda trajektoria startująca ze zbioru  $\Omega_\alpha$  zmierza asymptotycznie do początku układu współrzędnych. W ten sposób wykaźaliśmy (i). Ponieważ  $u = Kx$  oraz  $x \in \Omega_\alpha$ , to biorąc odpowiednio małą liczbę  $\alpha_{\max}$  możemy zagwarantować spełnienie (ii). Pochodna funkcji  $q$  obliczana na trajektoriach systemu (5.7) wynosi

$$\dot{q}(x) = \frac{\kappa p}{2} |x|_H^{p-2} (x^\top (A_K^\top H + HA_K)x + 2x^\top Hd(x)).$$

Podstawiając tę równość do (5.11) oraz korzystając z (5.5) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{\kappa p}{2} |x|_H^{p-2} (-|x|_G^2 + 2x^\top Hd(x)) + |x|_W^p + |Kx|_R^p \leq \\ &\leq \frac{\kappa p}{2} (\lambda_{\max}(H))^{\frac{p-2}{2}} |x|^{p-2} (-\lambda_{\min}(G)|x|^2 + 2|x^\top Hd(x)|) + ((\lambda_{\max}(W))^{\frac{p}{2}} + (\lambda_{\max}(K^\top RK))^{\frac{p}{2}}) |x|^p. \end{aligned}$$

Na mocy (5.8) możemy napisać

$$\begin{aligned} Q(x) &\leq \frac{\kappa p}{2} (\lambda_{\max}(H))^{\frac{p-2}{2}} |x|^{p-2} (2\tilde{\varepsilon}\lambda_{\max}(H)|x|^2 - \lambda_{\min}(G)|x|^2) + \\ &+ ((\lambda_{\max}(W))^{\frac{p}{2}} + (\lambda_{\max}(K^\top RK))^{\frac{p}{2}}) |x|^p \quad \text{dla } x \in \Omega_\alpha. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$C_1 = p(\lambda_{\max}(H))^{\frac{p}{2}}, \quad C_2 = \frac{p}{2}(\lambda_{\max}(H))^{\frac{p-2}{2}}\lambda_{\min}(G), \quad C_3 = ((\lambda_{\max}(W))^{\frac{p}{2}} + (\lambda_{\max}(K^\top RK))^{\frac{p}{2}}),$$

otrzymujemy ostatecznie

$$Q(x) \leq (\kappa(C_1\tilde{\varepsilon} - C_2) + C_3) |x|^p \quad \text{dla } x \in \Omega_\alpha.$$

Jeżeli przyjmiemy  $0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{C_2}{C_1}$  oraz  $\kappa > \frac{C_3}{(C_2 - \tilde{\varepsilon}C_1)} = \kappa_{\min}$ , to  $Q(x) < 0$  dla  $x \in \Omega_\alpha \setminus \{0\}$  oraz

$Q(0) = 0$ . W ten sposób wykazaliśmy (iii). Całkując nierówność w punkcie (iii) twierdzenia otrzymujemy

$$\int_t^{t+\tau} L(x(s), u(s)) ds \leq q(x(t)) - q(x(t+\tau)).$$

Ponieważ  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(t+\tau) = 0$ , to również  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} q(x(t+\tau)) = 0$ , zatem zachodzi (iv).  $\square$

Twierdzenie 5.1.1 podaje warunki istnienia zbioru  $\Omega = \Omega_\alpha$  oraz funkcji  $q$ , spełniających wymagania stabilności algorytmu 3.1.1. Dowód twierdzenia nie jest konstruktywny, ponieważ nie wiadomo jak wybrać liczbę  $\alpha$ . Średnica zbioru  $\Omega$ , otrzymanego na podstawie użytych w twierdzeniu oszacowań, może być bardzo mała. W zastosowaniach istotne jest, aby znaleźć zbiór  $\Omega$  o możliwie największej średnicy. W dalszym ciągu podamy algorytm wyznaczania zbioru  $\Omega$  o możliwie dużej średnicy, dla praktycznie ważnego przypadku  $p = 2$ . W przypadku tym równość (5.11) przyjmuje szczególnie prostą postać

$$Q(x) = (1 - \kappa) |x|_G^2 + 2\kappa x^\top Hd(x), \quad \text{gdzie } \kappa > \kappa_{\min} = 1. \quad (5.12)$$

Zadanie wyznaczenia zbioru końcowego sprowadza się do poszukiwania największej liczby  $\alpha > 0$ , takiej że w każdym punkcie zbioru  $\Omega_\alpha$  spełnione są warunki:

$$(\mathbf{W}_1) \quad Kx \in U, \quad (\mathbf{W}_2) \quad Q(x) \leq 0. \quad (5.13)$$

**Lemat 5.1.1.** Warunek  $\mathbf{W}_1$  będzie spełniony, gdy

$$\alpha \leq \frac{u_{\max,i}^2}{K_i H^{-1} K_i^\top} \text{ i } \alpha \leq \frac{u_{\min,i}^2}{K_i H^{-1} K_i^\top}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.14)$$

gdzie  $K_i$  oznacza  $i$ -ty wiersz macierzy  $K$ .

*Dowód:* Sterowanie wynosi  $u = Kx$ . Obliczymy maksymalną wartość każdej składowej tego sterowania w zbiorze  $\Omega_\alpha$ . Aby to uczynić, musimy rozwiązać następujące problemy optymalizacyjne:

$$\max_{x^\top Hx \leq \alpha} K_i x, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.15)$$

Stosując twierdzenie Karusha-Kuhna-Tuckera otrzymujemy  $\max_{x^\top Hx \leq \alpha} K_i x = \sqrt{\alpha K_i H^{-1} K_i^\top}$ .

Wstawiając prawą stronę tej równości do (2.2) otrzymujemy nierówność  $\sqrt{\alpha K_i H^{-1} K_i^\top} \leq u_{\max,i}$ , równoważną pierwszej z nierówności (5.14). W przypadku minimalnej wartości sterowania mamy wzór  $\min_{x^\top Hx \leq \alpha} K_i x = -\sqrt{\alpha K_i H^{-1} K_i^\top}$ . Postępując podobnie jak poprzednio otrzymujemy drugą z nierówności (5.14).  $\square$

Największą liczbę  $\alpha$  spełniającą (5.14) oznaczamy przez  $\alpha_1$ .

### Warunek $\mathbf{W}_2$

Chen i Allgöwer (1998) zaproponowali, aby sprawdzać warunek  $\mathbf{W}_2$  poprzez wyznaczenie maksimum funkcji  $Q$  w zbiorze  $\Omega_\alpha$ . Jeżeli znalezione maksimum jest dodatnie, to zawęża się obszar poszukiwań, zmniejszając parametr  $\alpha$  i rozwiązuje się zadanie ponownie. Metody numeryczne rozwiązywania tego zadania są na ogół zbieżne do najbliższego maksimum lokalnego i dlatego zachodzi konieczność zastosowania algorytmów optymalizacji globalnej bądź innych wyspecjalizowanych metod (por. np. Bania 2005). Maksymalną wartość funkcji  $Q$  w zbiorze  $\Omega_\alpha$  oznaczamy przez  $Q^*(\alpha)$ . Zauważmy, że  $Q^*(0) = 0$  i  $Q^*(\alpha) \geq 0$ . Przez  $\alpha^*$  oznaczamy największą liczbę  $\alpha \in (0, \alpha_1]$  dla której spełniony jest warunek **W2**. Będziemy zakładać, że dysponujemy metodą numeryczną pozwalającą znaleźć  $Q^*(\alpha)$ . Podamy teraz algorytm wyznaczania  $\alpha^*$ . Niech  $\varepsilon > 0$  (np.  $\varepsilon = 10^{-8}$ ) oznacza względną dokładność wyznaczenia  $\alpha^*$  oraz niech  $\alpha_{\max}^*$  będzie największą dopuszczalną wartością  $\alpha^*$  zadaną przez użytkownika.

**Algorytm 5.1.1** (wyznaczanie zbioru  $\Omega$ ).

1. Podstaw  $\alpha_d := 0$ ,  $\alpha_g := \min(\alpha_1, \alpha_{\max}^*)$ .
2. Oblicz  $Q^*(\alpha_g)$ , jeżeli  $Q^*(\alpha_g) = 0$ , to  $\alpha^* := \alpha_g$ , zakończ działanie algorytmu.
3. Podstaw  $\alpha := 0,5(\alpha_d + \alpha_g)$  i oblicz  $Q^*(\alpha)$ .
 

Jeżeli  $Q^*(\alpha) = 0$ , to  $\alpha_d := \alpha$ , w przeciwnym przypadku podstaw  $\alpha_g := \alpha$ .
4. Jeżeli  $\alpha_g - \alpha_d \leq \varepsilon \alpha_{\max}^*$ , to podstaw  $\alpha^* := 0,5(\alpha_d + \alpha_g)$  i zakończ algorytm.

W przeciwnym przypadku idź do 3.

Algorytm ten jest zbieżny do wartości  $\alpha^*$  takiej, że zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$  jest zbiorem invariantnym dla równania (2.1) lub (5.7) i spełnia warunki  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ . Przyjmujemy  $\Omega = \Omega_{\alpha^*}$ .

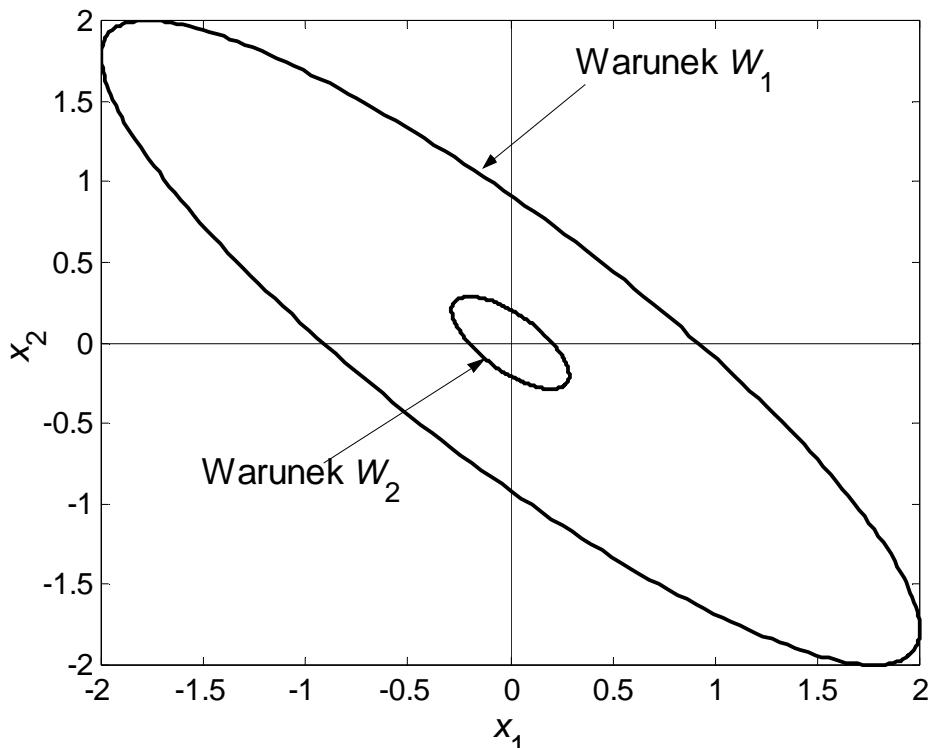
### Przykłady wyznaczania zbioru $\Omega$

Pokażemy dwa przykłady wyznaczania zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  oraz funkcji  $q$ . Parametr  $\kappa$  we wzorze (5.12) był równy 5. Względna dokładność wyznaczenia  $\alpha^*$  wynosiła  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

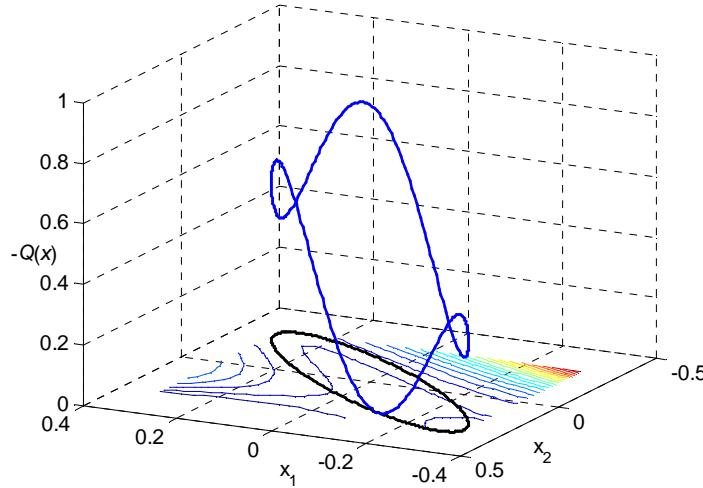
**Przykład 5.1.1** (Chen i Allgöwer 1998). Równania stanu mają postać

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + (\mu + (1 - \mu)x_1)u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (\mu - 4(1 - \mu)x_2)u, \quad \mu = 0,5.\end{aligned}$$

Regulator stabilizujący wyznaczono rozwiązując problem LQ dla układu zlinearyzowanego w punkcie  $(0,0)$ . Macierze wagowe we wskaźniku jakości wynosiły  $W = \text{diag}(0,5 \ 0,5)$ ,  $R = 1$ . Układ zlinearyzowany w punkcie  $(0,0)$  jest stabilizowalny, ale nie jest sterowalny. Zerowy punkt równowagi jest niestabilny. Wzmocnienia regulatora wynosiły  $K = -[2,118, 2,118]$ . Maksymalna i minimalna wartość sterowania były równe  $u_{\max} = 2$ ,  $u_{\min} = -2$ . Rys. 5.1 pokazuje największy zbiór poziomowy funkcjonału  $V$ , dopuszczalny ze względu na nasycenia sterowania oraz zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$ . Na rys. 5.2 widać wartości funkcji  $-Q$  obliczone na brzegu zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$ .

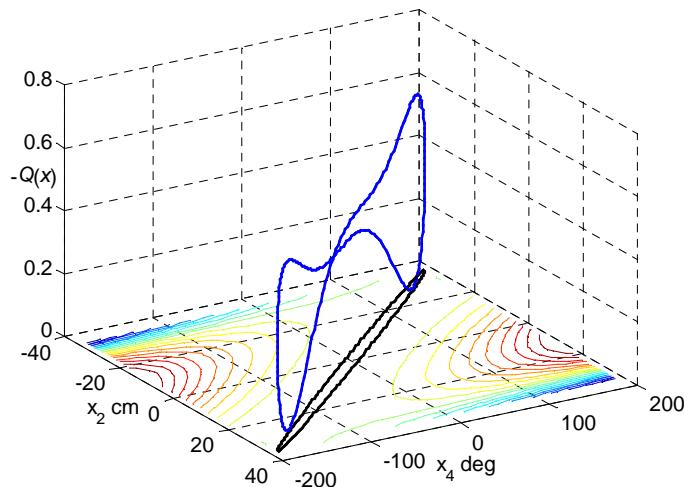


Rys. 5.1. Zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$  (wewnętrzna elipsa), oraz największy zbiór  $\Omega_{\alpha}$  dopuszczalny ze względu na ograniczenia sterowania.



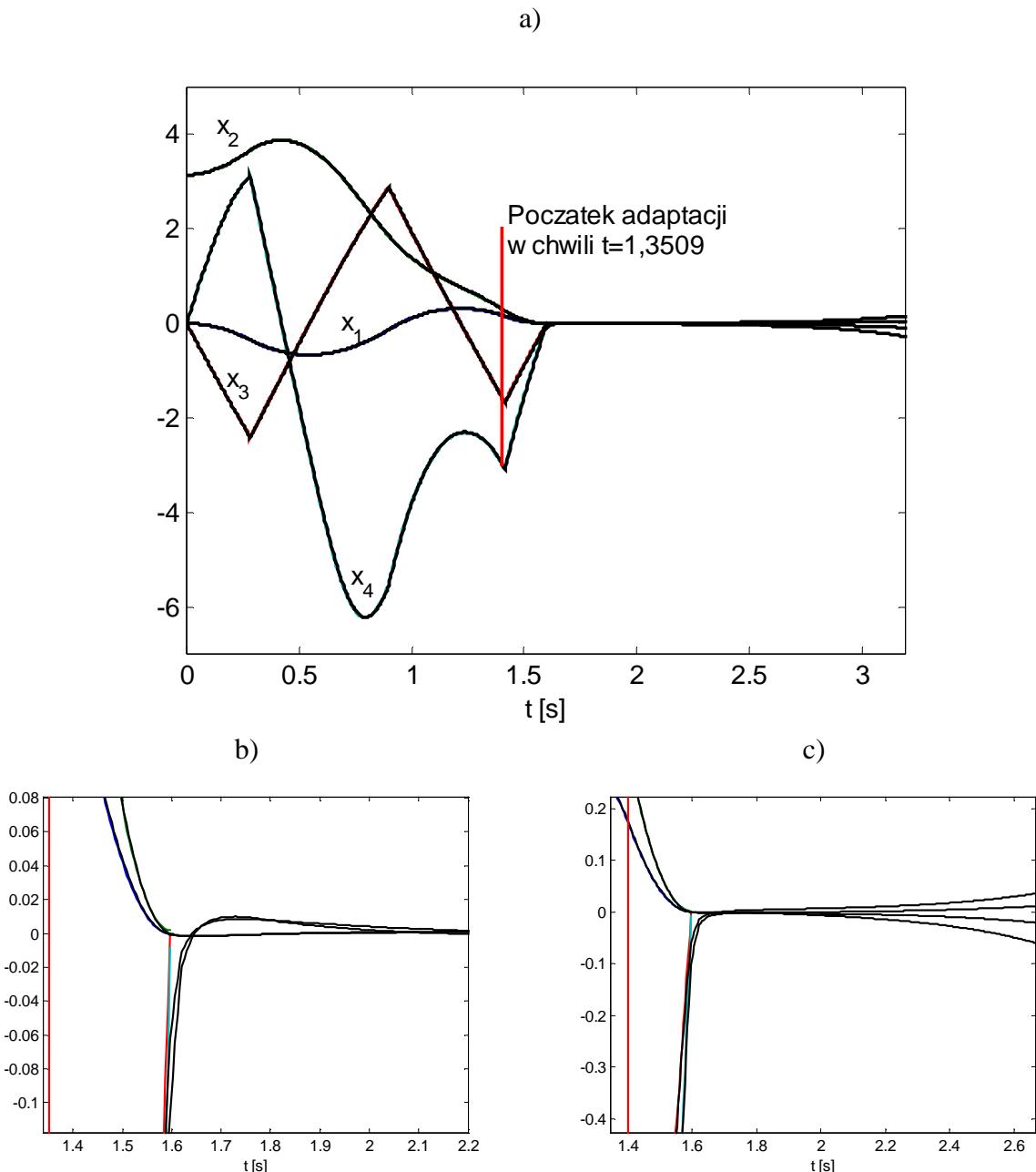
Rys. 5.2. Zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$  (elipsa), wartości funkcji  $-Q$  obliczone na brzegu zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  oraz poziomice funkcji  $-Q$ .

**Przykład 5.1.2 (Wahadło na wózku).** Dla układu wahadła na wózku z przykładu 3.4.3 wyznaczono zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$ , posługując się opisany powyżej algorytmem. Na rys. 5.3 przedstawiono przekrój zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  dla  $x_1 = 0, x_3 = 0$ . Wyznaczony zbiór  $\Omega_{\alpha^*}$  jest bardzo wąski, co jest zjawiskiem typowym. Z rys. 5.3 wynika, że niewielkie powiększenie parametru  $\alpha$  spowoduje naruszenie warunku  $Q(x) \leq 0$ .



Rys. 5.3. Przekrój zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  (elipsa) dla  $x_1 = 0, x_3 = 0$ , wartości funkcji  $-Q$  obliczone na brzegu zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  oraz poziomice funkcji  $-Q$ .

Aby przekonać się, na ile istotny jest warunek stabilności (5.1), macierz  $H$  wyznaczoną z równania Lapunowa (5.5) zastąpiono macierzą jednostkową i przeprowadzono eksperyment numeryczny, taki sam jak w pierwszym zadaniu z przykładu 3.4.3. Wyniki przedstawiono na rys. 5.4. W początkowej fazie sterowania algorytm doprowadził system do zbioru  $\mathbf{B}$ , po czym nastąpiła faza adaptacji wskaźnika jakości, a następnie zaobserwowano utratę stabilności spowodowaną niespełnieniem warunku (5.1).



Rys. 5.4. Przykład utraty stabilności systemu wahadła na wózku z regulatorem QTO-RHC, spowodowanej błędny doborem funkcji  $q$ . Algorytm QTO-RHC, przypadek nominalny. a) Trajektoria uzyskana w eksperymencie z jednostkową macierzą  $H$ , b) końcowy fragment trajektorii w eksperymencie z macierzą  $H$  wyznaczoną z równania Lapunowa (5.5), c) końcowy fragment trajektorii w eksperymencie z jednostkową macierzą  $H$ .

## 5.2. Ograniczenia stanu końcowego w algorytmie 4.1.1

W algorytmie 4.1.1 funkcja podcałkowa we wskaźniku jakości zależy tylko od sterowania

$$L(x, u) = |u|_R^p. \quad (5.27)$$

Zachodzi oczywista nierówność

$$\dot{q}(x) + L(x, u) = \dot{q}(x) + |u|_R^p \leq \dot{q}(x) + |x|_W^p + |u|_R^p. \quad (5.28)$$

Wybieramy teraz macierz  $W = W^T > 0$  oraz wyznaczamy macierz  $K$  tak, aby macierz  $A_K$  była wykładniczo stabilna. Następnie z równania Lapunowa (5.5) wyznaczamy macierz  $H$ . Wybierając funkcję  $q$  zgodnie ze wzorem (5.4), możemy przenieść wszystkie wyniki uzyskane dla algorytmu 3.1.1 na algorytm 4.1.1, bez żadnych dodatkowych zmian.

### Komentarz

W podrozdziałach 5.1 i 5.2 zaproponowano metodę wyznaczania ograniczeń stanu końcowego dla regulatora QTO-RHC. Pokazano, że zadanie daje się rozwiązywać poprzez wielokrotną maksymalizację funkcji  $Q$  w zbiorze  $\Omega_\alpha$ . Procedurę wyznaczania zbioru  $\Omega$  wykonuje się tylko raz, w fazie projektowania algorytmu. Jej stosunkowo duża złożoność obliczeniowa wynikająca z konieczności zastosowania algorytmów optymalizacji globalnej nie stanowi poważnego problemu. Przepisanie algorytmów z języka MATLABa na język C, C++, połączone z profilowaniem kodu, powinno znacząco przyspieszyć algorytm i umożliwić jego zastosowanie do systemów o większej liczbie wymiarów. Przykłady 5.1.1-2 pokazują, że wyznaczony zbiór jest bliski maksymalnemu. Analizując np. rys. 5.3 widzimy, że niewielkie poszerzenie zbioru  $\Omega_{\alpha^*}$  spowoduje naruszenie warunku  $Q(x) \leq 0$ . Przykład 5.1.2 pokazuje, że warunek stabilności (5.1) jest istotny i nie może być pominięty w fazie projektowania regulatora QTO-RHC. Naruszenie tego warunku powoduje na ogół utratę stabilności systemu zamkniętego.

### 5.3. Własności asymptotyczne algorytmu QTO-RHC

W tym podrozdziale przeanalizujemy własności asymptotyczne algorytmu QTO-RHC. Będziemy zakładać, że zakłócenia nie występują, a estymacja stanu jest dokładna. Zachodzą wówczas równości  $x^*(t_k) = \hat{x}(t_k) = x^k(t_k) = \tilde{x}(t_k)$  oraz  $x^*(t) = x^k(t)$  dla  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

**Wniosek 5.3.1.** Jeżeli spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 3.2.1, to przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu, asymptotyczne zachowanie trajektorii i sterowań generowanych przez algorytm 3.1.1 jest określone przez następujące własności.

$$(A1) \lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k, T_k; \tilde{x}(t_k), \varepsilon_k) = T_{\min}.$$

$$(A2) \text{ a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_k, t_k + T_k]} |x^k(t)| = 0, \text{ b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_k, t_k + \delta]} |x^*(t)| = 0.$$

$$(A3) \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T_{\min}.$$

$$(A4) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{t_k + T_k} L(x^k(t), u^k(t)) dt = 0.$$

$$(A5) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{t_k + T_k} \alpha_L(|x^k(t)|) dt = 0.$$

$$(A6) \text{ Ciąg } \varepsilon_k \text{ ma granicę } \varepsilon_\infty \in (0, 1].$$

*Dowód:* (A1), (A3), (A4) i (A5) wynikają bezpośrednio z dowodu twierdzenia 3.2.1 i wcześniejszych rozważań. Dowiedziemy (A2) i (A6). **Własność (A2).** Wszystkie trajektorie  $x^k$  są ciągłe, ograniczone przez tę samą stałą oraz mają wspólnie ograniczoną pochodną. Na mocy (A5) i lematu 2.1.1 wnioskujemy, że zachodzi (A2a). Ponieważ trajektoria  $x^*$  jest konkatenacją trajektorii  $x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , to zachodzi (A2b). **Własność (A6).** Ciąg  $\varepsilon_k$  jest określony poprzez rekurencję  $\varepsilon_{k+1} = \min(\varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k, 1)$ , gdzie przyrosty  $\Delta\varepsilon_k$  są określone

w punkcie 4 algorytmu 3.1.1. Ponieważ ciąg  $\hat{x}(t_k)$  zmierza do zera, to istnieje wskaźnik  $j \geq 0$ , taki że  $\hat{x}(t_k) \in \mathbf{B}$  dla wszystkich  $k \geq j$ . Wówczas co najmniej jeden przyrost ciągu  $\varepsilon_k$  jest dodatni. Ponadto ciąg  $\varepsilon_k$  jest niemalejący i ograniczony od góry, a zatem jest zbieżny do granicy  $\varepsilon_\infty \in (0, 1]$ .  $\square$

Dalsze własności asymptotyczne algorytmu 3.1.1 będziemy analizować przy założeniu, że stosowane są sterowania optymalne. Założenie to jest uzasadnione, ponieważ w niewielkim otoczeniu celu znajdowanie sterowań optymalnych nie stanowi istotnej trudności.

**Wniosek 5.3.2.** Jeżeli w algorytmie 3.1.1 stosowane są sterowania optymalne, to ciąg horyzontów optymalnych  $\bar{T}_k$ , zmierza do horyzontu minimalnego w skończonym czasie, tzn. istnieje liczba  $j < \infty$  taka, że  $\bar{T}_k = T_{\min}$  dla wszystkich  $k \geq j$ .

*Dowód:* Przypuśćmy, że dla wszystkich  $k \geq 0$  optymalne horyzonty w rozwiązaniach problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, x^*(t_k))$  spełniają nierówność  $\bar{T}_k > T_{\min}$ . Zatem pary  $(\bar{u}^k, \bar{T}_k)$  są również rozwiązaniami ciągu problemów bez ograniczenia horyzontu. Rozważmy teraz optymalną wartość kosztu dla problemów bez ograniczenia horyzontu

$$V^{BO}(x^*(t_k)) = \bar{T}_k - T_{\min} + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt + q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)). \quad (5.29)$$

Funkcje  $V^{BO}$  są ciągłe oraz  $V^{BO}(0) = -T_{\min}$ . Ponieważ  $x^*(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , to  $V^{BO}(x^*(t_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -T_{\min}$ .

Zatem zawsze można znaleźć liczbę  $j \geq 0$  taką, że

$$V^{BO}(x^*(t_k)) \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \geq j. \quad (5.30)$$

Ponieważ ostatnie dwa składniki w (5.29) są nieujemne i zmierzają do zera, to jedyną możliwością spełnienia nierówności (5.30) jest przyjęcie, że  $\bar{T}_k \leq T_{\min}$ . Przeczy to jednak założeniu, że wszystkie rozwiązania problemów z ograniczeniami spełniają warunek  $\bar{T}_k > T_{\min}$ .  $\square$

Zbadamy teraz relację pomiędzy rozwiązaniem problemów optymalizacji z nieskończonym czasem sterowania, a rozwiązaniami generowanymi przez algorytm 3.1.1 przy założeniu, że stosowane są sterowania optymalne. Rozważamy następujący problem z nieskończonym czasem sterowania.

**Problem  $P^{INF}(t_k, x^*(t_k))$ .** Należy znaleźć sterowanie  $u : [t_k, \infty) \rightarrow U$ , gdzie  $u$  jest funkcją mierząłą istotnie ograniczoną, minimalizujące wskaźnik jakości

$$J^{INF}(u ; x^*(t_k)) = \int_{t_k}^{\infty} L(x(t), u(t)) dt$$

na trajektoriach systemu (2.1), przy warunku początkowym  $x^*(t_k)$ .  $\square$

Rozwiązanie powyższego problemu (o ile istnieje) oraz odpowiadającą mu trajektorię oznaczamy  $u_{INF}^k$ ,  $x_{INF}^k$ . Relację pomiędzy rozwiązaniami problemów  $P^{INF}(t_k, x^*(t_k))$  oraz  $P(t_k, \varepsilon_k, x^*(t_k))$  określa następujący

**Wniosek 5.3.3.** Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.2.1, oraz istnieją rozwiązania problemów  $P^{INF}(t_k, x^*(t_k))$ , to zachodzą następujące oszacowania:

$$(I1) \quad J^{INF}(u_{INF}^k; x^*(t_k)) \leq \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt + q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)),$$

$$(I2) \quad \varepsilon_k J^{INF}(u_{INF}^k; x^*(t_k)) \leq V(x^*(t_k), \varepsilon_k), \text{ dla } \varepsilon_k > 0,$$

przy czym funkcja  $V$  jest określona w definicji 2.2.1.

*Dowód:* Niech  $x_s : [t_k + \bar{T}_k, \infty) \rightarrow R^n$ , będzie rozwiązaniem równania (2.1) ze sterowaniem  $u_s \in PC([t_k + \bar{T}_k, \infty), U)$  i warunkiem początkowym  $x_s(t_k + \bar{T}_k) = \bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)$ . Niech sterowanie  $u_s$  będzie wybrane w taki sposób, aby spełniona była nierówność

$$\int_{t_k + \bar{T}_k}^{\infty} L(x_s(t), u_s(t)) dt \leq q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)).$$

Z założenia 3 twierdzenia 3.2.1 wynika, że takie sterowanie istnieje. Rozpatrzmy teraz sterowanie  $\tilde{u} : [t_k + \bar{T}_k, \infty) \rightarrow U$  określone wzorem

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \bar{u}^k(t), & t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k], \\ u_s(t), & t \in [t_k + \bar{T}_k, \infty). \end{cases}$$

Ponieważ  $\tilde{u}$  nie jest rozwiązaniem problemu  $P^{INF}(t_k, x^*(t_k))$ , to zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} J^{INF}(u_{INF}^k; x^*(t_k)) &= \int_{t_k}^{\infty} L(x_{INF}^k(t), u_{INF}^k(t)) dt \leq \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt + \int_{t_k + \bar{T}_k}^{\infty} L(x_s(t), u_s(t)) dt \leq \\ &\leq \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt + q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)), \end{aligned}$$

skąd wynika I1. Mnożąc nierówność I1 przez  $\varepsilon_k \in (0, 1]$ , otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \varepsilon_k J^{INF}(u_{INF}^k; x^*(t_k)) &\leq \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k, \bar{u}^k) dt + \varepsilon_k q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)) \leq \\ &\leq \bar{T}_k - \bar{T}_{\min} + \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt + q(\bar{x}^k(t_k + \bar{T}_k)) = V(x^*(t_k), \varepsilon_k), \end{aligned}$$

co dowodzi I2.  $\square$

Powyższy wniosek (dla  $\varepsilon_k = 1$ ) podany został po raz pierwszy przez Chena i Algöwera (1998) i stanowił podstawę metody nazywanej *Quasi Infinity Horizon Nonlinear Model Predictive Control*. Nazwa ta odzwierciedla fakt, że optymalna wartość kosztu dla zadania ze skończonym horyzontem sterowania, szacuje od góry optymalną wartość kosztu dla zadania z nieskończonym horyzontem sterowania. Oszacowanie to jest tym lepsze, im lepiej funkcja  $q$  szacuje optymalną wartość kosztu w przedziale  $[t_k + \bar{T}_k, \infty)$ . W przypadku systemów liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości, można wyznaczyć funkcję  $q$  w taki sposób, aby nierówność (I1) przechodziła w równość (zob. np. Chen i Algöwer 1998).

W zastosowaniach istotne jest, aby niewielkie odchylenia stanu od zera generowały sterowania o niewielkich amplitudach. Pokażemy, że w typowym przypadku kwadratowego wskaźnika jakości, gdy prawa strona równań stanu jest afinczna względem sterowania, algorytm 3.1.1 generuje sterowania mające tę własność. Zakładamy, że model obiektu jest opisany układem równań

$$\dot{x} = f(x, u, p_0) = f^0(x) + \sum_{i=1}^m f_i^1(x)u_i = f^0(x) + f^1(x)u, \quad (5.31)$$

gdzie funkcje  $f^0$  i  $f_i^1$  są klasy  $C^1$  oraz – dla prostoty zapisu – pomijamy parametr  $p_0$ . Przyjmujemy, że prawa strona w (5.31) spełnia założenia przyjęte w punkcie 2.1.

**Twierdzenie 5.3.1.** Przyjmujemy następujące założenia.

1. Funkcje  $L$  i  $q$  we wskaźniku jakości (2.7) są dane równościami (5.3) i (5.4), przy czym wykładnik  $p = 2$ , oraz  $\kappa > 1$ .
2. Spełnione są założenia 1-4, twierdzenia 5.1.1.
3. Zbiór  $\Omega$  jest wybrany zgodnie z procedurą opisaną w p. 5.1.
4. W algorytmie 3.1.1 stosowane są sterowania optymalne.
5. Dla każdego  $\xi \in \partial\Omega$  istnieje wektor  $v \in U$ , taki że  $\xi^T H(f^0(\xi) + f^1(\xi)v) < 0$ , przy czym macierz  $H = H^T > 0$ , jest rozwiązaniem równania Lapunowa (5.5).

Istnieje wówczas funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że przy braku zakłóceń i dokładnej estymacji stanu, sterowania  $\bar{u}^k$  generowane przez algorytm 3.1.1 spełniają relacje

$$(i) \sup_{t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k]} |\bar{u}^k(t)| \leq \varphi(V(x^*(t_k), \varepsilon_k)), \quad (ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_k, t_k + \bar{T}_k]} |\bar{u}^k(t)| = 0,$$

przy czym funkcja  $V$  jest określona w definicji 2.2.1.

*Dowód:* Na mocy założeń 1-4 oraz twierdzenia 5.1.1, możemy stwierdzić, że spełnione są założenia twierdzenia 3.2.1 o stabilności algorytmu QTO-RHC. Z twierdzenia 3.2.1 wynika, że  $V(x^*(t_k), \varepsilon_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  oraz że istnieje liczba  $k_0 \geq 0$ , taka że  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{\min} > 0$  dla wszystkich  $k \geq k_0$ . Stąd i z założenia 1 mamy następujące oszacowanie

$$\varepsilon_{\min} \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} |\bar{u}^k(t)|_R^2 dt \leq \varepsilon_k \int_{t_k}^{t_k + \bar{T}_k} L(\bar{x}^k(t), \bar{u}^k(t)) dt \leq V(x^*(t_k), \varepsilon_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (5.32)$$

Założenie 5 gwarantuje, że problemy  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  są normalne (zob. dodatek B). Wówczas z zasady maksimum (zob. dodatek B) wynika, że dla  $\varepsilon_k > 0$ , sterowanie  $\bar{u}^k$  jest ciągłe, ograniczone, a jego pochodna względem czasu istnieje prawie wszędzie i jest ograniczona. Z lematu 2.1.1 oraz z (5.32) wynika, że istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że zachodzi (i). Własność (ii) natychmiast wynika z (i) oraz z (5.32).  $\square$

Załóżmy teraz, że spełnione są założenia twierdzenia 5.3.1 oraz że równania stanu są liniowe, tzn.  $f^0 = Ax$ ,  $f^1 = B$ , gdzie  $A$ ,  $B$  są macierzami odpowiednich wymiarów. Z twierdzenia 5.3.1 oraz wniosku 5.3.2 wynika, że istnieje wskaźnik  $j \geq 0$ , taki że dla wszystkich  $k \geq j$  żadna składowa sterowania  $\bar{u}^k$  nie leży na ograniczeniu oraz  $\bar{T}_k = T_{\min}$ . Wynika stąd, że dla  $k \geq j$ , algorytm 3.1.1 generuje sterowania będące rozwiązaniem pewnego problemu liniowo-kwadratowego ze skończonym czasem sterowania równym  $T_{\min}$ .

A zatem w przypadku kwadratowego wskaźnika jakości i liniowych równań stanu, algorytm QTO-RHC staje się lokalnie algorytmem liniowo-kwadratowym.

Własności asymptotyczne algorytmu 4.1.1 są analogiczne do własności algorytmu 3.1.1, i nie będziemy ich szczegółowo analizować. Jedyna istotna różnica wynika z faktu, iż funkcja  $L$  we wskaźniku jakości zależy tylko od sterowania i jest określona wzorem (4.1).

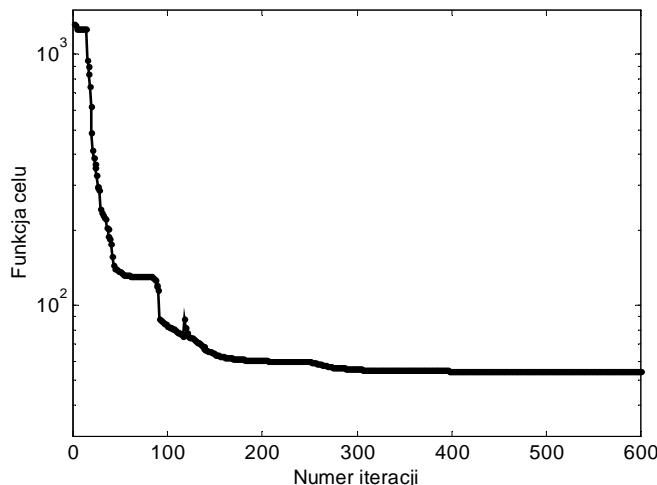
### Komentarz

Spośród wszystkich wymienionych własności asymptotycznych, następujące wydają się być istotne. W typowym przypadku systemu liniowego i kwadratowej funkcji celu, algorytm QTO-RHC staje się lokalnie algorytmem liniowo-kwadratowym. Przy spełnieniu założeń twierdzenia 5.3.1, amplituda sterowania generowanego przez algorytm QTO-RHC, maleje wraz ze zmniejszaniem się odległości stanu obiektu od celu. Nie musi tak być w przypadku innych wskaźników jakości lub też, gdy prawa strona równania stanu nie zależy liniowo od sterowania. Własność ta jest istotna w zastosowaniach, ponieważ w zadaniu stabilizacji oczekujemy zwykle, aby algorytm korygował niewielkie odchyłki stanu poprzez niewielkie zmiany sterowania. Wybór funkcji  $q$  w postaci formy kwadratowej  $x^T H x$  z odpowiednio dobraną macierzą  $H$ , pozwala oszacować wartość kosztu dla zadania z nieskończonym czasem sterowania. Zatem już na etapie sterowania zbliżonego do czasooptymalnego algorytm wybiera takie trajektorie, które zagwarantują niską wartość kosztu po przejściu do fazy stabilizacji.

## Rozdział 6. Algorytm optymalizacji

### 6.1. Wprowadzenie

Rozwiązywanie zadania sterowania optymalnego stanowi najważniejszą i jednocześnie najbardziej czasochłonną czynność wykonywaną przez algorytm predykcyjny. Rozwiążanie optymalne, bądź suboptymalne, musi być wyznaczone w czasie krótszym niż okres wyliczania sterowania  $\delta$ . Duża złożoność obliczeniowa realnych zadań sterowania optymalnego, w połączeniu z ograniczonym czasem obliczeń, nakłada znaczne wymagania na szybkość zbieżności algorytmu optymalizacji. Aby sprostać tym wymaganiom, schematy sterowania predykcyjnego oraz problemy sterowania optymalnego, przedstawione w poprzednich rozdziałach, były konstruowane z myślą o maksymalnym odciążeniu algorytmu optymalizacji. Skomentujemy krótko metody redukcji złożoności obliczeniowej. Jak pokazano w rozdziale 2, algorytm predykcyjny umożliwia stosowanie rozwiązań suboptymalnych. Kryterium najwcześniejego zakończenia obliczeń znajduje się w punkcie 6 algorytmu 2.2.1. Na rys. 6.1 pokazano przykładową – ale i dość typową – zależność wartości wskaźnika jakości od liczby iteracji w zadaniu sterowania statkiem kosmicznym z przykładu 4.4.2. Algorytm optymalizacji zakończył obliczenia po wykonaniu 1487 iteracji, jednakże poprawa wskaźnika jakości, osiągnięta w ciągu ostatniego tysiąca iteracji, była mniejsza niż milionowa część optymalnej wartości wskaźnika jakości. W przykładzie 4.4.2, w trakcie normalnej pracy algorytmu predykcyjnego, obliczenia były przerywane znacznie wcześniej – zwykle po wykonaniu 100 iteracji – i nie spowodowało to ani znacznego odejścia od planowanej w chwili początkowej trajektorii optymalnej, ani utraty stabilności.



Rys. 6.1. Zależność wartości wskaźnika jakości od liczby iteracji w zadaniu sterowania statkiem kosmicznym z przykładu 4.4.2. Wzrost wskaźnika jakości w iteracji 118 jest spowodowany redukcją łuku o niezerowej długości (wyjaśnienie zob. p. 6.5.6)

Drugim sposobem redukcji nakładu obliczeń jest wykorzystanie rozwiązania z poprzedniego kroku, jako punktu startowego w aktualnie rozwiązywanym problemie. Metoda ta pozwala bardzo znacznie zmniejszyć ilość iteracji, posiada jednak pewną wadę. Okazuje się, że w obecności silnych zakłóceń, przyjęcie za punkt startowy poprzedniego rozwiązania może prowadzić do lokalnych minimów z „długim” horyzontem, nie spełniających warunku końcowego. Efekt ten – jak na razie – udało się zaobserwować w zadaniu sterowania wahadłem na wózku, z przykładu 3.4.3. W innych zadaniach zjawisko to nie występowało. A zatem algorytm powinien być wyposażony w mechanizm kontroli takich patologicznych zachowań. Stan końcowy w zadaniu sterowania optymalnego musi leżeć w zbiorze

końcowym  $\Omega$ . Znalezienie rozwiązania trafiającego w zbiór  $\Omega$  jest zadaniem łatwiejszym niż znalezienie rozwiązania trafiającego w punkt. Wczesne wersje algorytmów predykcyjnych wymagały trafienia w punkt, co pociągało za sobą dużą liczbę iteracji (Findeisen 2003a). Jeżeli średnica zbioru  $\Omega$  nie jest zbyt mała, to można na tej drodze uzyskać kolejną redukcję nakładu obliczeń. Przy rozwiązywaniu zadania, równania stanu są całkowane numerycznie w przedziale czasu, którego długość jest równa horyzontowi  $T$ . Ponieważ horyzont  $T$  jest zmienną decyzyjną i maleje w każdym kroku, aż do osiągnięcia wartości minimalnej, to nakład obliczeń na całkowanie równań stanu jest mniejszy, niż dla algorytmów z ustaloną (i na ogół niepotrzebnie długim) horyzontem. Opisane powyżej sposoby redukcji nakładu obliczeń wynikają z konstrukcji samego algorytmu predykcyjnego. Poniżej omówimy typowe metody obliczeniowe stosowane w sterowaniu predykcyjnym oraz podstawowe idee metody monotonicznej ewolucji struktur (MSE – *Monotone Structural Evolution*, Szymkat i Korytowski 2007).

Numeryczne metody rozwiązywania zadań sterowania optymalnego można podzielić na pośrednie i bezpośrednie. W metodach bezpośrednich oryginalne zadanie sterowania następuje się skończenie wymiarowym problemem programowania nieliniowego. Problem ten może być sformułowany dwojako. W podejściu równoczesnym (*simultaneous approach*), reprezentowanym przez metodę kolokacji bezpośrednią (Hargraves i Paris 1987), wektor decyzyjny składa się z parametrów zdyskretyzowanych sterowań i trajektorii stanu. Dyskretyzacji dokonuje się na różne sposoby, najczęściej zarówno sterowania jak i trajektorie przybliża się wielomianami w przedziałach. Metoda ta pozwala uniknąć konieczności numerycznego całkowania równań stanu, ale otrzymane zadanie programowania nieliniowego jest zwykle bardzo duże. W podejściu sekwencyjnym (*sequential approach*) dyskretyzacji podlegają tylko sterowania, a zmienne stanu wylicza się poprzez numeryczne całkowanie równań stanu. Cechą charakterystyczną metod bezpośrednich jest ich szeroki zakres zbieżności, ale są one wolno zbieżne w pobliżu rozwiązania optymalnego. Metody bezpośrednie są stosunkowo uniwersalne i doczekały się wielu implementacji, takich jak SOCS (Betts 2001), DIRCOL (von Stryk 1999) lub NUDOCCCS (Maurer *et al.* 2005).

W metodach pośrednich rozwiązanie optymalne jest wyliczane poprzez rozwiązanie problemu dwugranicznego, wynikającego z zasady maksimum Pontriagina. Najczęściej używaną metodą pośrednią jest metoda strzałów wielokrotnych, zaimplementowana w pakietach BNDSCO (Oberle i Grimm 1989), MUMUS (Hiltman *et al.* 1990) oraz MUSCOD-II (Diehl *et al.* 2002). Metoda kolokacji używana w metodach pośrednich (zob. np. Kierzenka i Shampine 2001), wymaga rozwiązywania układu równań algebraicznych o dużym wymiarze, do rozwiązywania którego stosuje się wyspecjalizowane algorytmy. Szybkość zbieżności metod pośrednich jest zwykle bardzo duża, ale ich zakres zbieżności jest mały i wymagają one dobrych początkowych przybliżeń sterowania optymalnego. Rozwijane są także metody specjalnie dostosowane do potrzeb NMPC (Diehl *et al.* 2002, Martinsen *et al.* 2004).

Metoda MSE jest sekwencyjną metodą bezpośrednią. Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów sterowania, wylicza się w oparciu o numeryczne rozwiązywanie układu równań stanu i równań sprzężonych wynikających z zasady maksimum Pontriagina. Wskaźnik jakości traktowany jako funkcja parametrów sterowania jest minimalizowany metodami gradientowymi. Cechą charakterystyczną metody, decydującą o jej zbieżności, są procedury generacji, zmieniające przestrzeń decyzyjną w trakcie optymalizacji. Zmiany dokonywane są na podstawie analizy niezgodności pomiędzy aktualnym sterowaniem, a warunkami koniecznymi optymalności, wynikającymi z zasady maksimum. Generacja jest realizowana w taki sposób, aby maksymalnie zwiększyć gradient wskaźnika jakości. Po generacji, poszukiwania kontynuuje się w ustalonej przestrzeni decyzyjnej za pomocą metody gradientowej, aż do następnej generacji, bądź do spełnienia warunków koniecznych

optymalności wynikających z zasady maksimum. Można powiedzieć, że struktura sterowania jest dynamicznie dopasowywana do potrzeb optymalizacji. Mechanizm ten pozwala utrzymać niski wymiar przestrzeni decyzyjnej. Wymiar przestrzeni decyzyjnej w zadaniu sterowania statkiem kosmicznym (przykład 4.4.2), był nie większy niż 70. Eksperymenty numeryczne pokazują, że szybkość zbieżności metody MSE w pobliżu rozwiązania jest stosunkowo duża, a zastosowanie procedur generacji powoduje, że zakres zbieżności metody jest znacznie szerszy niż w metodzie strzałów wielokrotnych. Szybka zbieżność w pobliżu rozwiązania jest istotna z punktu widzenia zastosowań w sterowaniu predykcyjnym. Szeroki zakres zbieżności ma znaczenie w sytuacjach awaryjnych, gdy struktura sterowania optymalnego nie jest znana i konieczne jest szybkie znalezienie przybliżenia rozwiązania optymalnego.

## 6.2. Zadanie sterowania optymalnego

Ponieważ prawa strona równania stanu oraz wskaźnik jakości nie zależą jawnie od czasu, to zamiast problemów  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ , będziemy rozpatrywać jeden problem  $P(0, \varepsilon, x_0)$ , który oznaczamy przez  $P(x_0)$ . Problem  $P(x_0)$  zawiera ograniczenie na stan końcowy

$$x(T) \in \Omega, \quad (6.1)$$

oraz ograniczenie horyzontu

$$T \geq T_{\min}. \quad (6.2)$$

Wymóg spełnienia ograniczenia (6.1) pociąga za sobą na ogół znaczne trudności rachunkowe i numeryczne. Dlatego zajmiemy się pewnym szczególnym przypadkiem, gdy zbiór  $\Omega$  jest wyznaczany zgodnie z metodą przedstawioną w rozdziale 5, p. 5.1. Istnieje wówczas funkcja  $c : R^n \rightarrow R_0^+$ ,  $c(0) = 0$ ,  $c(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ , różniczkowalna w sposób ciągły w  $R^n$  i taka, że zbiór  $\Omega$  może być określony jak następuje:

$$\Omega = \{x \in R^n : c(x) \leq \alpha^*\}. \quad (6.3)$$

Funkcję  $c$  oraz liczbę  $\alpha^*$ , wyznacza się za pomocą twierdzenia 5.1.1 oraz procedury podanej w rozdziale 5. Wybierzmy liczbę  $\alpha_{\max}$  w taki sposób, aby

$$0 < \alpha_{\max} < \alpha^*, \quad (6.4)$$

i zauważmy, że warunki stabilności podane w twierdzeniach 3.2.1, p. 3 i 4.2.1, p. 2, będą spełnione także w zbiorze

$$\Omega_{\alpha_{\max}} = \{x \in R^n : c(x) \leq \alpha_{\max}\} \subset \Omega. \quad (6.5)$$

Aby uniknąć komplikacji związanych z uwzględnieniem ograniczenia (6.1), modyfikujemy nieco problem  $P(x_0)$  i uwzględniamy warunek (6.1), dodając do wskaźnika jakości następującą zewnętrzną funkcję kary

$$K(x(T), \rho) = \rho(c(x(T)) - \alpha_{\max})_+^2, \quad (6.6)$$

gdzie  $\rho > 0$  jest współczynnikiem kary. Sens powyższych zabiegów jest następujący. Ponieważ warunki stabilności podane w twierdzeniach 3.2.1, p. 3 i 4.2.1, p. 2, są spełnione w zbiorze  $\Omega$ , to musimy zagwarantować, że  $x(T) \in \Omega$ . Stan końcowy, uzyskany po rozwiązaniu zadania sterowania optymalnego z zewnętrzną funkcją kary (6.6), będzie na ogół leżał na zewnątrz zbioru  $\Omega_{\alpha_{\max}} \subset \Omega$ , tym bliżej jego brzegu, im większy będzie współczynnik  $\rho$  (odpowiednie twierdzenia, zob. np. Findeisen *et al.* 1980). Dobierając zatem odpowiednio duży współczynnik kary  $\rho > 0$ , będziemy mogli zagwarantować, że  $x(T) \in \Omega$ . Ponadto jeżeli

$\alpha_{\max} - \alpha^* \rightarrow 0^-$  i  $\rho \rightarrow \infty$ , to rozwiązanie tak zmodyfikowanego problemu będzie zmierzało do rozwiązania problemu oryginalnego.

Nieco inaczej postąpimy z ograniczeniem (6.2). Jeżeli pochodna wskaźnika jakości względem horyzontu jest dodatnia (tzn. opłaca się zmniejszyć horyzont) oraz horyzont jest równy minimalnemu, to będziemy rozwiązywać zadanie z ustalonym horyzontem  $T = T_{\min}$ , sprawdzając w każdej iteracji, czy opłacalne jest zwiększenie horyzontu. Jeżeli okaże się, że tak, to rozwiążymy zadanie ze swobodnym horyzontem, uwzględniając – poprzez odpowiedni dobór kroku w metodzie poszukiwania na kierunku – warunek (6.2). Ponieważ pod koniec procesu sterowania horyzont optymalny prawie zawsze osiąga wartość minimalną, to wymiar przestrzeni decyzyjnej maleje w tym przypadku o jeden. Ponadto unikamy dodatkowego członu kary we wskaźniku jakości.

Zakładamy, że model obiektu jest opisany równaniem

$$\dot{x} = f^0(x) + \sum_{j=1}^m f_j^1(x)u_j = f^0(x) + f^1(x)u, \quad x(0) = x_0, \quad (6.7)$$

przy czym funkcje  $f^0, f^1$  są klasy  $C^1$ , a pozostałe założenia o prawej stronie równania (6.7) i sterowaniu  $u$  są takie, jak w p. 2.1. Przyjmujemy następującą postać wskaźnika jakości

$$J(u, T; x_0, \varepsilon) = T + \varepsilon \int_0^T L(x(t), u(t))dt + q(x(T)) + \rho(c(x(T)) - \alpha_{\max})_+^2, \quad (6.8)$$

Będziemy zakładać, że funkcja  $L$  jest **ściśle wypukła** względem drugiego argumentu oraz że funkcje  $L$  i  $q$  oraz sterowanie  $u$  spełniają wszystkie założenia przyjęte w p. 2.1 i 2.2. Liczba  $\rho > 0$  jest dostatecznie dużym współczynnikiem kary, a  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

**Problem  $P_1(x_0)$ .** Przy ustalonych  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\rho > 0$ ,  $\alpha_{\max} > 0$ , należy znaleźć minimum wskaźnika jakości (6.8) na trajektoriach systemu (6.7), przy ograniczeniu (6.2).  $\square$

Rozwiązanie problemu  $P_1(x_0)$  oraz odpowiadającą mu trajektorię będziemy oznaczać odpowiednio przez  $(\bar{u}, \bar{T})$  i  $\bar{x}$ . Dokładne omówienie problemów  $P(x_0)$  i  $P_1(x_0)$  znajduje się w dodatku B.

**Lemat 6.2.1.** Dla dowolnego warunku początkowego  $x_0$ , istnieje współczynnik kary  $\rho > 0$ , taki że rozwiązanie problemu  $P_1(x_0)$  spełnia warunek końcowy (6.1).

*Dowód:* Niech para  $(\bar{u}, \bar{T})$  będzie rozwiązaniem problemu  $P_1(x_0)$ . System (6.7) jest asymptotycznie sterowalny (zob. p. 2.1), a zatem istnieje sterowanie dopuszczalne  $u^D : [0, T_D] \rightarrow U$ ,  $\bar{T} < T_D < +\infty$  takie, że  $c(x^D(T_D)) < \alpha_{\max}$ , gdzie  $x^D$  jest rozwiązaniem równania (6.7) z warunkiem początkowym  $x_0$  i sterowaniem  $u^D$ . Ponieważ para  $(u^D, T_D)$  nie jest rozwiązaniem problemu  $P_1(x_0)$ , to zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} \rho(c(\bar{x}(\bar{T})) - \alpha_{\max})_+^2 &< J(\bar{u}, \bar{T}; x_0, \varepsilon) \leq T_D + \varepsilon \int_0^{T_D} L(x^D, u^D)dt + q(x^D(T_D)) + \rho(c(x^D(T_D)) - \alpha_{\max})_+^2 = \\ &= T_D + \varepsilon \int_0^{T_D} L(x^D, u^D)dt + q(x^D(T_D)) = J(u^D, T_D; x_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez  $\rho > 0$  otrzymujemy  $(c(\bar{x}(\bar{T})) - \alpha_{\max})_+^2 < \rho^{-1} J(u^D, T_D; x_0, \varepsilon) \xrightarrow[\rho \rightarrow \infty]{} 0$ , co oznacza, że  $\bar{x}(\bar{T}) \in \Omega$ , dla odpowiednio dużego  $\rho$ .  $\square$

**Wniosek 6.2.1.** Jeżeli  $\alpha_{\max} - \alpha^* \rightarrow 0^-$  i  $\rho \rightarrow \infty$ , to rozwiązanie problemu  $P_1(x_0)$  zmierza do rozwiązania problemu  $P(x_0)$ .  $\square$

Z powyższych rozważań wynika, że rozwiązując problem  $P_1(x_0)$  z odpowiednio dobranymi liczbami  $\alpha_{\max}$  i  $\rho$ , możemy znaleźć dowolnie dokładne przybliżenie rozwiązania problemu  $P(x_0)$ . Jeżeli w trakcie rozwiązywania problemu  $P_1(x_0)$  okaże się, że uzyskane przybliżenie rozwiązania jest rozwiązaniem suboptimalnym problemu  $P(x_0)$  oraz spełnione są warunki zatrzymania w punkcie 5 algorytmu 3.1.1, to obliczenia można przerwać. W przypadku algorytmu 4.1.1 obliczenia należy kontynuować, odpowiednio modyfikując  $\alpha_{\max}$  oraz  $\rho$ . Ponieważ przy niewielkich zakłócenach wskaźnik jakości maleje w kolejnych krokach algorytmu predykcyjnego, to z lematu 6.2.1 wynika praktyczny wniosek, że współczynnik  $\rho$  – odpowiednio dobrany w pierwszym kroku – będzie również wystarczająco duży w krokach następnych. W praktycznych realizacjach, początkową wartość  $\alpha_{\max}$  oraz  $\rho$  należy dobrać eksperymentalnie, tak aby spełniony był warunek końcowy (6.1).

### 6.3. Warunki optymalności zasady maksimum

Zajmiemy się warunkami optymalności w problemie  $P_1(x_0)$ . Definiujemy hamiltonian  $H : R^n \times R^n \times R^m \rightarrow R$ , który dla sterowania  $u \in U_{ad}$  (zob. def. 2.1.1) i odpowiadającej mu trajektorii stanu  $x$ , jest określony następująco

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t)^\top f^0(x(t)) + \psi(t)^\top f^1(x(t))u(t) - \varepsilon L(x(t), u(t)). \quad (6.9)$$

Funkcja sprzężona  $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$  spełnia prawie wszędzie równanie sprzężone

$$\dot{\psi}(t) = -\nabla_x H(\psi(t), x(t), u(t)), \quad (6.10)$$

z warunkiem końcowym

$$\psi(T) = -\nabla q(x(T)) - 2\rho(c(x(T)) - \alpha_{\max})_+ \nabla c(x(T)). \quad (6.11)$$

Przyjmujemy oznaczenie

$$\phi(t) = \nabla_u H(\psi(t), x(t), u(t)) = f^1(x(t))^\top \psi(t) - \varepsilon \nabla_u L(x(t), u(t)). \quad (6.12)$$

**Twierdzenie 6.3.1** (o pochodnych wskaźnika jakości w problemie  $P_1(x_0)$ ). Niech  $\Delta u : [0, T] \rightarrow R^m$  będzie funkcją, taką że  $u + \Delta u \in U_{ad}$  oraz niech  $\Delta x$  oznacza zmianę rozwiązania równania (6.7) wywołaną zmianą sterowania  $u$  o  $\Delta u$ . Wówczas:

a) przyrost wskaźnika jakości (6.8) jest dany jednym ze wzorów

$$\Delta J = - \int_0^T (H(\psi, x + \Delta x, u + \Delta u) - H(\psi, x + \Delta x, u)) dt + o(\|\Delta u\|_p), \quad p = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.13)$$

$$\Delta J = - \int_0^T \phi(t)^\top \Delta u(t) dt + o(\|\Delta u\|_\infty), \quad (6.13a)$$

b) funkcja  $\phi$  jest antygradientem wskaźnika jakości (6.8) w przestrzeni sterowań,

c) pochodna wskaźnika jakości względem czasu końcowego jest określona równością

$$\nabla_T J(u, T; x_0, \varepsilon) = 1 - H(\psi(T), x(T), u(T^-)), \quad T > T_{\min}, \quad (6.14)$$

gdzie  $u(T^-)$  oznacza lewostronną granicę sterowania w punkcie  $T$ ,

d) jeżeli istnieje funkcja  $v : R_0^+ \times R_0^+ \rightarrow U$  taka, że  $u(t) = v(t, T)$  oraz  $v$  jest różniczkowalna w sposób ciągły względem  $T$  dla prawie wszystkich  $t \in R_0^+$ , to pochodna wskaźnika jakości względem  $T$  jest dana wzorem

$$\nabla_T J(u, T; x_0) = - \int_0^T \phi(t)^\top \nabla_T v(t, T) dt + 1 - H(\bar{\psi}(T), \bar{x}(T), u(T^-)), \quad T > T_{\min}. \quad \square \quad (6.15)$$

**Twierdzenie 6.3.2** (zasada maksimum Pontriagina dla problemu  $P_1(x_0)$ ). Jeżeli para  $(\bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązaniem optymalnym problemu  $P_1(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ ,  $\bar{x}$  jest trajektorią optymalną,  $\bar{\psi}$  jest optymalną trajektorią sprzężoną, spełniającą równanie (6.10) z warunkiem końcowym (6.11) oraz hamiltonian jest określony równością (6.9), to dla wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$ , zachodzi warunek maksimum hamiltonianu

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v), \quad \forall v \in U, \quad (6.16)$$

oraz istnieje liczba  $\bar{\lambda}_2 \geq 0$ , taka że spełnione są następujące warunki

$$\bar{\lambda}_2(\bar{T} - T_{\min}) = 0, \quad (6.17)$$

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 1 - \bar{\lambda}_2, \text{ dla } t \in [0, \bar{T}]. \quad (6.18)$$

Zatem, jeżeli  $\bar{T} > T_{\min}$ , to  $\bar{\lambda}_2 = 0$ .  $\square$

Dowody powyższych twierdzeń znajdują się w dodatku B. Omówimy teraz trzy różne przypadki występujące w problemie  $P_1(x_0)$ : gdy  $\varepsilon = 0 \wedge \bar{T} > T_{\min}$ , gdy  $\varepsilon > 0 \wedge \bar{T} > T_{\min}$  oraz gdy horyzont jest ustalony i  $\varepsilon > 0$ . (Uwaga: przypadek  $\varepsilon = 0 \wedge \bar{T} = T_{\min}$  nie występuje w rozważanych algorytmach predykcyjnych).

### Przypadek 1 ( $\varepsilon = 0 \wedge \bar{T} > T_{\min}$ )

Horyzont jest swobodny, a sterowanie jest przedziałami ciągłą funkcją czasu. Jeżeli nie występuje osobliwość, to z warunku maksimum hamiltonianu (6.16) otrzymujemy następujące wyrażenie na sterowanie optymalne:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} u_{i, \max}, & \phi_i(t) > 0, \\ u_{i, \min}, & \phi_i(t) < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.19)$$

Funkcja  $h$ , określona wzorem (6.12), jest nazywana funkcją przełączającą. Sterowanie ma charakter bang-bang i leży całkowicie na ograniczeniach. Optymalny czas końcowy wyznacza się wykorzystując informację zawartą w równości (6.18), przy  $\bar{\lambda}_2 = 0$ .

### Przypadek 2 ( $\varepsilon > 0 \wedge \bar{T} > T_{\min}$ )

Horyzont jest swobodny, a sterowanie jest funkcją ciągłą czasu. Hamiltonian jest funkcją ściśle wklęsłą<sup>1</sup> względem sterowania oraz zbiór  $U$  jest wypukły (bo jest  $n$ -wymiarowym prostopadłościanem, zob. wzór 2.2). Wynika stąd, że warunek maksimum hamiltonianu (6.16)

<sup>1</sup> Funkcja  $f$  jest ściśle wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $-f$  jest ściśle wypukła. Funkcja ściśle wklęsła na zbiorze niepustym, zwartym i wypukłym ma dokładnie jedno maksimum.

jednoznacznie określa sterowanie optymalne. Jeżeli  $i$ -ta składowa sterowania optymalnego nie leży na ograniczeniach, to spełnione są związki

$$\phi_i(t) = f_i^1(\bar{x}(t))^\top \bar{\psi}(t) - \varepsilon \nabla_{u_i} L(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.20)$$

Jeżeli funkcja  $L$  we wskaźniku jakości (6.8) ma postać

$$L(x, u) = \eta(x) + |u|_R^2, \quad (6.21)$$

gdzie funkcja  $\eta$  jest różniczkowalna i nieujemna oraz  $i$ -ta składowa sterowania optymalnego nie leży na ograniczeniach, to otrzymujemy prosty wzór na sterowanie optymalne

$$\bar{u}_i(t) = 0,5\varepsilon^{-1} R^{-1} f_i^1(\bar{x}(t))^\top \bar{\psi}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.22)$$

Jeżeli  $i$ -ta składowa sterowania optymalnego leży na ograniczeniu, to jest ona określona przez warunek

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} u_{i,\max}, & \text{gdy } \phi_i(t) > 0, \\ u_{i,\min}, & \text{gdy } \phi_i(t) < 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Optymalny czas końcowy wyznacza się wykorzystując dodatkową informację zawartą w równości (6.18), przy  $\bar{\lambda}_2 = 0$ .

**Przypadek 3** (ustalony horyzont  $\bar{T} \geq T_{\min}$  oraz  $\varepsilon > 0$ )

Przypadek ten jest analogiczny do przypadku 2, z tym, że nie potrzeba wyznaczać optymalnego horyzontu.

### Komentarz

Wyróżnione powyżej warianty warunków optymalności charakteryzują się różnymi strukturami sterowania, co będzie miało wpływ na konstrukcję algorytmu optymalizacji. Pominięte zostało zagadnienie sterowania osobliwego, występującego, gdy funkcja przełączająca we wzorze (6.19) znika tożsamościowo na pewnym przedziale czasu. Sterowanie osobliwe wyznacza się wtedy jako funkcję stanu i zmiennej sprzężonej, poprzez konsekwentne różniczkowanie względem czasu funkcji przełączającej (zob. np. Szymkat i Korytowski 2003). Jeżeli dopuścimy do rozważań tylko sterowania typu bang-bang, to w rozwiązyaniu przybliżonym, w przedziale osobliwości wystąpi duża liczba przełączeń sterowania. Eksperymenty pokazują, że uwzględnienie osobliwości i zastąpienie częstych przełączeń sterowaniem osobliwym nie poprawia znacząco wskaźnika jakości, natomiast nakład pracy analitycznej i komplikacja kodu algorytmu są bardzo duże. W pracy autora (Bania 2005a), dotyczącej sterowania samochodowym systemem ABS, podany został przykład zastosowania metody MSE w przypadku osobliwym.

## 6.4. Parametryzacja sterowań oraz pochodne wskaźnika jakości względem parametrów sterowania

Obcięcie  $i$ -tej składowej sterowania  $u : [0, T] \rightarrow U$  do przedziału czasu  $[t_j^i, t_{j+1}^i] \subset [0, T]$  będziemy nazywać łukiem. Strukturę  $i$ -tej składowej sterowania  $u$  będziemy opisywać podając kolejno typy łuków oraz punkty podziału  $0 \leq t_1^i \leq t_2^i \leq \dots \leq t_{s_i}^i \leq T$ . Będziemy rozpatrywać dwa typy łuków: graniczne i wewnętrzne. Na łuku granicznym sterowanie przyjmuje stałą wartość równą  $u_{i,\max}$  lub  $u_{i,\min}$ . Występujące obok siebie łuki graniczne muszą różnić się wartością sterowania. Skokową zmianę sterowania od wartości minimalnej do maksymalnej (lub odwrotnie), występującą w punkcie podziału, będziemy nazywać

przełączeniem sterowania, a punkt podziału nazwiemy węzłem strukturalnym lub czasem przełączenia. Na łuku wewnętrznym sterowanie leży wewnątrz ograniczeń i spełnia dla prawie wszystkich  $t \in [t_j^i, t_{j+1}^i]$  nierówność  $u_{i,\min} < u(t) < u_{i,\max}$ . Aby zastąpić nieskończenie wymiarowy problem  $P_1(x_0)$  jego skończenie wymiarową aproksymacją, musimy opisać sterowanie pewnym wektorem parametrów  $\pi$ . Wskaźnik jakości (6.8), traktowany jako funkcja wektora parametrów  $\pi$ , będziemy oznaczać przez  $Q(\pi)$ . Dokonamy podziału wektora  $\pi$  na dwa wektory:  $\pi_t$  oraz  $\pi_p$ . Wektor  $\pi_t$  będzie zawierał punkty podziału oraz czas końcowy, natomiast wektor  $\pi_p$  będzie zawierał parametry sterowań na łukach wewnętrznych. W pewnych przypadkach sterowanie jako funkcję czasu i parametrów będziemy oznaczać przez  $u(t, \pi_t, \pi_p)$ . Ze względu na skomplikowaną postać wzorów będziemy pomijać argumenty funkcji, pisząc np.  $Q$  zamiast  $Q(\pi)$ . Omówimy najpierw przypadek sterowań typu bang-bang, a następnie podamy parametryzację sterowań ciągłych, występujących, gdy  $\varepsilon > 0$ .

#### 6.4.1. Przypadek $\varepsilon = 0$ , sterowania typu bang-bang, łuki typu 1

Sterowanie jest scharakteryzowane przez czasy przełączeń, horyzont  $T$  oraz ciąg wartości sterowań na każdym łuku. Wszystkie łuki są łukami granicznymi. Łuki graniczne będziemy nazywać łukami typu 1. Wektor parametrów opisujący  $i$ -tą składową sterowania ma postać  $[t_1^i, t_2^i, \dots, t_{s_i}^i, T]^\top$ . Wektor wszystkich zmiennych decyzyjnych ma następującą strukturę

$$\pi = \pi_t = [t_1^1, t_2^1, \dots, t_{s_1}^1, t_1^2, t_2^2, \dots, t_{s_2}^2, \dots, t_1^m, \dots, t_{s_m}^m, T]^\top. \quad (6.24)$$

Wykorzystując wyrażenie (6.13), określające przyrost wskaźnika jakości, można łatwo pokazać (dowód znajduje się w dodatku B), że pochodna wskaźnika jakości względem czasu przełączenia  $t_j^i$  wynosi

$$\nabla_{t_j^i} Q = \phi_i(t_j^i)(u_i^+(t_j^i) - u_i^-(t_j^i)), \quad j = 1, \dots, s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.25)$$

przy czym  $u_i^+(t_j^i)$  i  $u_i^-(t_j^i)$  oznaczają prawą i lewą granicę sterowania w chwili przełączenia. Pochodna wskaźnika jakości względem czasu końcowego  $T$  jest dana wzorem

$$\nabla_T Q = 1 - H(\psi(T), x(T), u(T^-)). \quad (6.26)$$

Pochodne wskaźnika jakości względem czasów przełączeń  $i$ -tego sterowania, z pominięciem pochodnej względem horyzontu, oznaczamy przez  $g_i^i$ . Wektor pochodnych wskaźnika jakości względem składowych wektora  $\pi_t$  oznaczamy przez  $g_t$  i zapisujemy w postaci

$$g_t = \text{col}(g_t^1, g_t^2, \dots, g_t^m, \nabla_T Q). \quad (6.27)$$

#### 6.4.2. Przypadek $\varepsilon > 0$ , sterowania ciągłe, łuki typu 2

Aby wykonywać obliczenia w przypadku sterowań ciągłych, musimy dokonać parametryzacji sterowania, tzn. przyjąć pewną formułę określającą łuk wewnętrzny w przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$ . Odnośnie węzłów (punktów podziału) stosujemy taką samą konwencję, jak poprzednio. Dla uproszczenia, będziemy rozważać przypadek sterowania skalarnego. Uogólnienie na przypadek wielu sterowań jest natychmiastowe. Będziemy przyjmować, że sterowanie  $u^i$ , opisujące łuk wewnętrzny typu 2 w przedziale czasu  $[t_i, t_{i+1}]$ , jest określone przedziałowym wielomianem interpolacyjnym Hermite'a

$$u^i(t, t_i, t_{i+1}) = p_i^0 V_0(t, t_i, t_{i+1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i+1}) + p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, t_i) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, t_i), \\ t \in [t_i, t_{i+1}],$$

gdzie

$$V_0(t, a, b) = \frac{2(t-b)^3}{(b-a)^3} + \frac{3(t-b)^2}{(b-a)^2}, \quad V_1(t, a, b) = \frac{(t-b)^3}{(b-a)^2} + \frac{(t-b)^2}{(b-a)}.$$

Wartości sterowania oraz jego pochodnych względem czasu na brzegach przedziału  $[t_i, t_{i+1}]$ , wyrażają się bezpośrednio przez współczynniki  $p_i^0, p_i^1, p_{i+1}^0, p_{i+1}^1$  i dane są równościami

$$u^i(t_i, t_i, t_{i+1}) = p_i^0, \quad \dot{u}^i(t_i, t_i, t_{i+1}) = p_i^1, \quad u^i(t_{i+1}, t_i, t_{i+1}) = p_{i+1}^0, \quad \dot{u}^i(t_{i+1}, t_i, t_{i+1}) = p_{i+1}^1.$$

Druga pochodna sterowania na brzegach przedziału  $[t_i, t_{i+1}]$  wyraża się wzorami

$$\ddot{u}^i(t_i, t_i, t_{i+1}) = \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{2(p_{i+1}^1 + 2p_i^1)}{(t_{i+1} - t_i)}, \quad \ddot{u}^i(t_{i+1}, t_i, t_{i+1}) = \frac{-6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)^2} + \frac{2(2p_{i+1}^1 + p_i^1)}{(t_{i+1} - t_i)}.$$

W przypadku większej ilości punktów podziału, z warunków ciągłości sterowania wynikają równości odpowiednich współczynników. Jeżeli dany łuk wewnętrzny sąsiaduje z łukiem granicznym, to wartość sterowania na brzegu jest równa  $u_{\min}$  lub  $u_{\max}$  i nie podlega optymalizacji. W punkcie połączenia łuku wewnętrznego i granicznego sterowanie jest klasy  $C^0$ . Jeżeli dany łuk wewnętrzny sąsiaduje z łukiem wewnętrznym, to zakładamy, że zarówno wartość, jak i pochodna sterowania, są sobie równe w punkcie połączenia tych łuków. Zatem w punkcie połączenia łukówewnętrznych typu 2 sterowanie jest klasy  $C^1$ .

### **Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów sterowania dla łuków wewnętrznych typu 2**

Zajmiemy się wyliczeniem pochodnych wskaźnika jakości względem parametrów sterowania dla łuków wewnętrznych typu 2. W rozważanym przypadku, optymalizacji podlegają punkty podziału  $[t_1, t_2, \dots, t_s, T]^T$  oraz parametry  $p_i^0, p_i^1$ , gdzie wskaźnik  $i$  przebiega po wszystkich węzłach. Przyjmujemy oznaczenia

$$h_k(a, b) = \int_a^b \phi(t)(t-b)^k dt, \quad (6.28)$$

$$\hat{h}_k(a, b) = \int_a^b \phi(t)(t-a)^k dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (6.29)$$

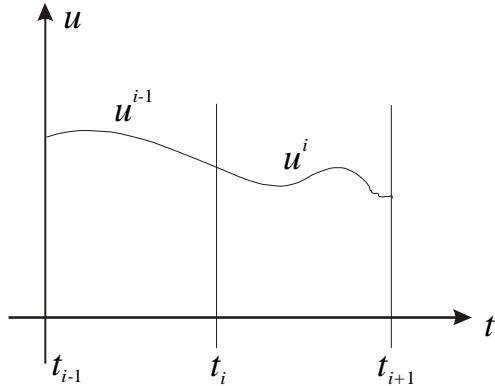
oraz wyliczamy pochodne funkcji  $V_0(t, a, b), V_1(t, a, b)$  względem  $a$  i  $b$ ,

$$\nabla_a V_0(t, a, b) = \frac{6(t-b)^3}{(b-a)^4} + \frac{6(t-b)^2}{(b-a)^3}, \quad \nabla_b V_0(t, a, b) = -\frac{6(t-a)^3}{(b-a)^4} + \frac{6(t-a)^2}{(b-a)^3}, \quad (6.30)$$

$$\nabla_a V_1(t, a, b) = \frac{2(t-b)^3}{(b-a)^3} + \frac{(t-b)^2}{(b-a)^2}, \quad \nabla_b V_1(t, a, b) = -\frac{2(t-a)^3}{(b-a)^3} + \frac{2(t-a)^2}{(b-a)^2}. \quad (6.31)$$

W trzech opisanych poniżej przypadkach, wyliczymy pochodne wskaźnika jakości względem zmiennych decyzyjnych w węźle  $i$ -tym, przy założeniu, że nie jest to węzeł początkowy ani końcowy. Pozostałe dwa przypadki będą dotyczyć pierwszego i ostatniego węzła.

**a. Dwa łuki wewnętrzne sąsiadują ze sobą**



Rys. 6.2. Dwa łuki wewnętrzne sąsiadują ze sobą.

Sterowanie ma postać:

$$\begin{aligned} u^{i-1}(t, t_i, t_{i+1}) &= p_{i-1}^0 V_0(t, t_{i-1}, t_i) + p_{i-1}^1 V_1(t, t_{i-1}, t_i) + p_i^0 V_0(t, t_i, t_{i-1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i-1}), \\ u^i(t, t_i, t_{i+1}) &= p_i^0 V_0(t, t_i, t_{i+1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i+1}) + p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, t_i) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, t_i), \end{aligned} \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Z ogólnego wyrażenia (6.13a), na przyrost wskaźnika jakości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i^0} Q &= - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{p_i^0} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t) \nabla_{p_i^0} u^i(t, t_i, t_{i+1}) dt, \\ \nabla_{p_i^1} Q &= - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{p_i^1} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t) \nabla_{p_i^1} u^i(t, t_i, t_{i+1}) dt, \\ \nabla_{t_i} Q &= - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{t_i} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t) \nabla_{t_i} u^i(t, t_i, t_{i+1}) dt. \end{aligned}$$

Wykorzystując (6.28-31), po żmudnych przekształceniach, otrzymuje się wyrażenia na pochodne względem parametrów w węźle  $i$ -tym

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i^0} Q &= \frac{2\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} - \frac{2h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} - \frac{3h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} Q &= -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - \frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)}, \\ \nabla_{t_i} Q &= \frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} \left( \frac{6(p_{i-1}^0 - p_i^0)}{(t_i - t_{i-1})} + 2(p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})} - (2p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \\ &+ \frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - 2(p_i^1 + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - (p_i^1 + 2p_{i+1}^1) \right). \end{aligned}$$

Ostatni wzór można zapisać w równoważnej, prostszej postaci

$$\nabla_{t_i} Q = -(\nabla_{p_i^0} Q)p_i^1 - (\nabla_{p_{i-1}^1} Q)\ddot{u}(t_i^-) - (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)\ddot{u}(t_i^+),$$

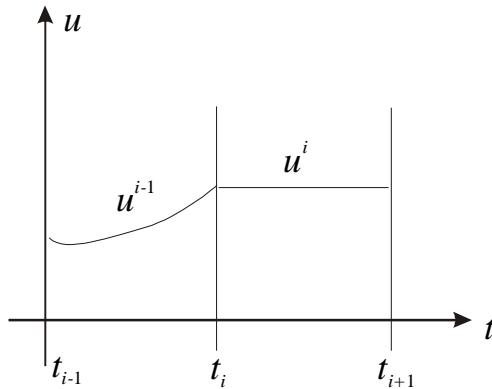
gdzie

$$\nabla_{p_i^1} Q = -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})}, \quad \nabla_{p_{i+1}^1} Q = -\frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)},$$

$$\ddot{u}(t_i^-) = \frac{-6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{2(2p_i^1 + p_{i-1}^1)}{(t_i - t_{i-1})}, \quad \ddot{u}(t_i^+) = \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{2(p_{i+1}^1 + 2p_i^1)}{(t_{i+1} - t_i)}.$$

Wzoru tego dowodzimy przez przeliczenie.

### b. Łuk wewnętrzny poprzedza łuk graniczny



Rys. 6.3. Łuk wewnętrzny poprzedza łuk graniczny.

Sterowanie ma postać:

$$u^i(t) = u_{\max} \text{ lub } u^i(t) = u_{\min}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$u^{i-1}(t, t_i, t_{i+1}) = p_{i-1}^0 V_0(t, t_{i-1}, t_i) + p_{i-1}^1 V_1(t, t_{i-1}, t_i) + u^i(t_i) V_0(t, t_i, t_{i-1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i-1}),$$

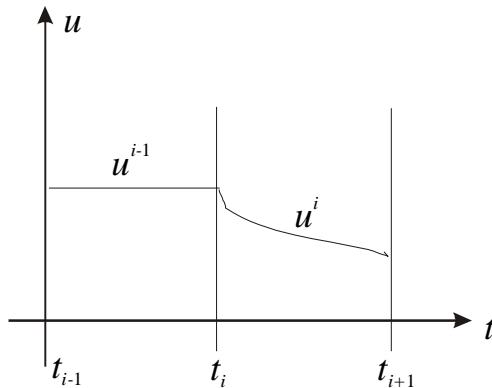
$$t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym wynoszą

$$\nabla_{p_i^1} Q = -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})}$$

$$\nabla_{t_i} Q = \frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} \left( \frac{6(p_{i-1}^0 - p_i^0)}{(t_i - t_{i-1})} + 2(p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})} - (2p_{i-1}^1 + p_i^1) \right).$$

### c. Łuk graniczny poprzedza łuk wewnętrzny



Rys. 6.4. Łuk graniczny poprzedza łuk wewnętrzny.

Sterowanie ma postać:

$$u^{i-1}(t) = u_{\max} \text{ lub } u^{i-1}(t) = u_{\min}, t \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$u^i(t, t_i, t_{i+1}) = u^{i-1}(t_i)V_0(t, t_i, t_{i+1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i+1}) + p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, t_i) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, t_i), \\ t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węzle  $i$ -tym wynoszą

$$\nabla_{p_i^1} Q = -\frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)},$$

$$\nabla_{t_i} Q = \frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - 2(p_i^1 + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - (p_i^1 + 2p_{i+1}^1) \right).$$

#### **d. Pochodna wskaźnika jakości względem parametrów pierwszego węzła dla łuku wewnętrznego**

Sterowanie ma postać:

$$u^1(t, 0, t_1) = p_1^0 V_0(t, 0, t_1) + p_1^1 V_1(t, 0, t_1) + p_2^0 V_0(t, t_1, 0) + p_2^1 V_1(t, t_1, 0), t \in [0, t_1].$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węzle początkowym wynoszą

$$\nabla_{p_1^0} Q = -\frac{2h_3(0, t_1)}{t_1^3} - \frac{3h_2(0, t_1)}{t_1^2}, \quad \nabla_{p_1^1} Q = -\frac{h_3(0, t_1)}{t_1^2} - \frac{h_2(0, t_1)}{t_1}.$$

#### **e. Pochodna wskaźnika jakości względem parametrów ostatniego węzła dla łuku wewnętrznego**

Sterowanie ma postać:

$$u^s(t, t_s, T) = p_s^0 V_0(t, t_s, T) + p_s^1 V_1(t, t_s, T) + p_{s+1}^0 V_0(t, T, t_s) + p_{s+1}^1 V_1(t, T, t_s), t \in [t_s, T].$$

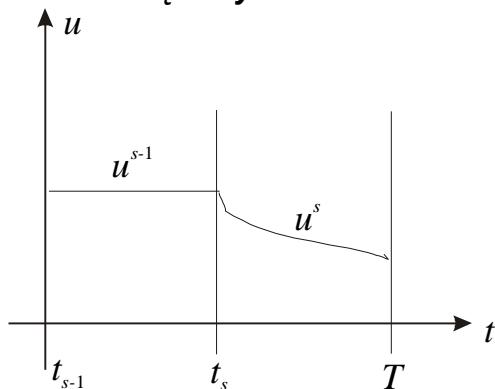
Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węzle końcowym wynoszą

$$\nabla_{p_{s+1}^0} Q = \frac{2\hat{h}_3(t_s, T)}{(T - t_s)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_s, T)}{(T - t_s)^2}, \quad \nabla_{p_{s+1}^1} Q = -\frac{\hat{h}_3(t_s, T)}{(T - t_s)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_s, T)}{(T - t_s)}.$$

#### **Pochodne wskaźnika jakości względem horyzontu**

Zajmiemy się wyliczeniem pochodnych wskaźnika jakości względem czasu końcowego.

#### **a. Łuk końcowy jest łukiem wewnętrznym**



Rys. 6.5. Łuk końcowy jest łukiem wewnętrznym.

Sterowanie ma postać:

$$u^s(t, t_s, T) = p_s^0 V_0(t, t_s, T) + p_s^1 V_1(t, t_s, T) + p_{s+1}^0 V_0(t, T, t_i) + p_{s+1}^1 V_1(t, T, t_s), \quad t \in [t_s, T].$$

Korzystając z wyrażenia (6.15) na przyrost wskaźnika jakości można pokazać, że pochodna względem czasu końcowego wynosi

$$\nabla_T Q = - \int_{t_i}^T \phi(t) \nabla_T u^s(t, t_s, T) dt + 1 - H(\psi(T), x(T), p_{s+1}^0),$$

Wykorzystując (6.28-31), po żmudnych przekształceniach otrzymuje się wyrażenie

$$\begin{aligned} \nabla_T Q = & \frac{\hat{h}_3(t_s, T)}{(T-t_s)^3} \left( \frac{6(p_s^0 - p_{s+1}^0)}{(T-t_s)} + 2(p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_s, T)}{(T-t_s)^2} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - p_s^0)}{(T-t_s)} - (2p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) + \\ & + 1 - H(\psi(T), x(T), p_{s+1}^0). \end{aligned}$$

### b. Łuk końcowy jest łukiem granicznym

Sterowanie ma postać:

$$u^s(t) = u_{\max} \text{ lub } u^s(t) = u_{\min}, \quad t \in [t_s, T].$$

Pochodna wskaźnika jakości względem czasu końcowego wynosi

$$\nabla_T Q = 1 - H(\psi(T), x(T), u^s(T)).$$

### c. Pochodna wskaźnika jakości względem horyzontu dla przypadku wielu sterowań

W przypadku wielu sterowań ( $m > 1$ ), obliczanie pochodnej wskaźnika jakości względem horyzontu nieco się komplikuje. Przez  $p_{s_k}^{0,k}, p_{s_k}^{1,k}, p_{s_k+1}^{0,k}, p_{s_k+1}^{1,k}$  oznaczamy parametry ostatniego łuku wewnętrznego w  $k$ -tym sterowaniu. Dla wszystkich sterowań, których łuk końcowy jest łukiem wewnętrznym wyliczamy wielkości

$$\vartheta_k = \frac{\hat{h}_3(t_{s_k}^k, T)}{(T-t_{s_k}^k)^3} \left( \frac{6(p_{s_k}^{0,k} - p_{s_k+1}^{0,k})}{(T-t_{s_k}^k)} + 2(p_{s_k}^{1,k} + p_{s_k+1}^{1,k}) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{s_k}^k, T)}{(T-t_{s_k}^k)^2} \left( \frac{6(p_{s_k+1}^{0,k} - p_{s_k}^{0,k})}{(T-t_{s_k}^k)} - (2p_{s_k}^{1,k} + p_{s_k+1}^{1,k}) \right),$$

a dla sterowań, których łuk końcowy jest łukiem granicznym, podstawiamy  $\vartheta_k = 0$ . Pochodną względem czasu końcowego wyznaczamy ze wzoru

$$\nabla_T Q = 1 - H(\psi(T), x(T), u(T^-)) + \sum_{k=1}^m \vartheta_k.$$

W ten sposób wyznaczyliśmy wszystkie pochodne wskaźnika jakości względem parametrów sterowania. Zgodnie z przyjętą konwencją wektor zmiennych decyzyjnych zapisujemy w postaci

$$\pi = \text{col}(\pi_t, \pi_p), \quad (6.32)$$

gdzie wektor  $\pi_t$  jest określony wzorem (6.24), a wektor  $\pi_p = \text{col}(\pi_{p_1}, \pi_{p_2}, \dots, \pi_{p_m})$ , zawiera parametry wszystkich łuków внутренних, dla wszystkich składowych sterowania. Kolejność występowania parametrów w każdym z wektorów  $\pi_{p_j}$  jest taka jak kolejność występowania łuków внутренnych w danej składowej sterowania. Pochodne wskaźnika

jakości względem wektora  $\pi_{p_j}$  oznaczamy przez  $g_p^j$ , natomiast pochodne wskaźnika jakości względem wektora  $\pi_p$  zapisujemy w postaci

$$g_p = \text{col}(g_p^1, g_p^2, \dots, g_p^m). \quad (6.33)$$

Gradient wskaźnika jakości względem wektora zmiennych decyzyjnych oznaczamy przez  $g_\pi$  i zapisujemy w postaci

$$g_\pi = \text{col}(g_1, g_2, \dots, g_m). \quad (6.34)$$

## 6.5. Procedury generacji i redukcji

Przez generację będziemy rozumieć zmianę struktury sterowania, polegającą na dodaniu do istniejącego sterowania nowego łuku lub węzła w taki sposób, aby nie pogorszyć wskaźnika jakości. Celem generacji jest uzyskanie lepszej aproksymacji sterowania optymalnego oraz maksymalne zwiększenie normy gradientu wskaźnika jakości po generacji. Efektywność generacji określa następujące wyrażenie

$$E = |\bar{g}_\pi|^2 - |g_\pi|^2, \quad (6.35)$$

gdzie  $\bar{g}_\pi$  jest gradientem funkcji  $Q$ , obliczonym po generacji. Żądamy, aby efektywność generacji spełniała warunek

$$E > E_{\min}, \quad (6.36)$$

gdzie  $E_{\min} > 0$  jest ustalonym progiem. Ponadto generacja musi być dopuszczalna. Kryteria dopuszczalności – różne dla różnych rodzajów generacji – określają, czy dana generacja może być wykonana. Po każdej generacji algorytm optymalizacji rozpoczyna poszukiwania w kierunku  $-g_\pi$ . Obliczanie efektywności generacji wykonywane jest na podstawie aktualnego rozwiązania równania stanu i równania sprzężonego i nie pociąga za sobą konieczności dodatkowego całkowania tych równań. Spośród wszystkich generacji dopuszczalnych wykonuje się tą generację, która ma największą efektywność. Poniżej przedstawimy cztery rodzaje generacji. Rozpoczniemy od generacji szpilkowych dla sterowań typu bang-bang, następnie omówimy generacje jednowęzłowe, generacje płaskie oraz quasi-przełączania i związane z nimi generacje wielomianowe. Omówimy także procedury redukcji, służące do usuwania zbędnych łuków o zerowej długości.

### 6.5.1. Generacje szpilkowe

Przez generację szpilkową wewnętrzną rozumiemy wstawienie pary przełączzeń (szpilki) na łuku granicznym w chwili  $\tau \in (t_j^i, t_{j+1}^i)$ . Taka para przełączek jest łukiem o zerowej długości. Przez generację szpilkową końcową, rozumiemy wstawienie pojedynczego przełączenia w punkcie  $T$ . Efektywność generacji wewnętrznej na  $i$ -tym sterowaniu wynosi

$$E_i(\tau) = 2\phi_i^2(\tau)(u_{i,\max} - u_{i,\min})^2. \quad (6.37)$$

Efektywność ta jest funkcją ciągłą parametru  $\tau$ . Generacja szpilkowa wewnętrzna jest dopuszczalna w punkcie  $\tau \in (t_j^i, t_{j+1}^i)$  takim, że spełnione są następujące warunki

$$E_i(\tau) = \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} E_i(s) > E_{\min} \text{ oraz } \text{sgn}(u_i(\tau) - 0,5(u_{i,\max} + u_{i,\min})) = -\text{sgn}(\phi_i(\tau)). \quad (6.37)$$

Pierwszy warunek mówi, że nowe przełączenie może być wstawione tylko w punkcie, w którym efektywność ma maksimum i przekracza efektywność minimalną. Drugi warunek

mówi, że wystąpiła niezgodność pomiędzy kierunkiem zmian sterowania, wskazywanym przez antygradient wskaźnika jakości w chwili  $\tau$ , a aktualną wartością sterowania w chwili  $\tau$ . Efektywność generacji końcowej jest dana wzorem

$$E_{i,T} = \phi_i^2(T)(u_{i,\max} - u_{i,\min})^2 + (\nabla_T \bar{Q})^2 - (\nabla_T Q)^2, \quad (6.38)$$

gdzie  $\nabla_T \bar{Q}$  oznacza pochodną wskaźnika jakości względem czasu końcowego obliczaną po generacji końcowej, tzn. po wstawieniu przełączenia końcowego na  $i$ -tym sterowaniu. Reguły określające dopuszczalność generacji końcowej są nieco inne. Wymaga się, aby efektywność generacji końcowej przekraczała efektywność generacji wewnętrznej w segmencie końcowym

$$E_{i,T} > \sup_{\tau \in (t_{s_i}, T)} E_i(\tau)$$

oraz aby spełniony był warunek  $E_{i,T} > E_{\min}$ . Jeżeli te warunki są spełnione, to sprawdza się nierówność

$$\nabla_T \bar{Q} < \phi_i(T)(u_i^1(T) - u_i(T)), \text{ gdzie } u_i^1 = \begin{cases} u_{i,\max}, \text{ gdy } u_i(T) = u_{i,\min} \\ u_{i,\min}, \text{ gdy } u_i(T) = u_{i,\max} \end{cases}. \quad (6.39)$$

Powyższy warunek rozstrzyga, czy nowo wstawiony łuk końcowy o zerowej długości, ulegnie poszerzeniu w kolejnych iteracjach metody gradientowej. Po wyznaczeniu efektywności wszystkich możliwych generacji wewnętrznych i końcowych, spośród wszystkich sterowań i wszystkich łuków spełniających kryteria dopuszczalności wybiera się to sterowanie i ten łuk, na którym efektywność generacji jest maksymalna. Jeżeli żaden łuk nie spełnia warunków dopuszczalności, to generacji nie wykonuje się. Ponieważ wstawiane łuki mają zerową długość, to generacja nie zmienia wskaźnika jakości. Generacja szpilkowa wewnętrzna zwiększa wymiar przestrzeni decyzyjnej o dwa, a generacja końcowa o jeden. Dalsza optymalizacja wymaga wyliczenia pochodnych wskaźnika jakości względem nowych zmiennych decyzyjnych. Pochodne te wylicza się analogicznie jak pochodne względem zmiennych starych.

### 6.5.2. Generacje jednowęzłowe dla sterowań ciągłych

Ze względu na skomplikowaną notację oraz fakt, że przypadek wielu sterowań nie wnosi istotnych zmian, będziemy rozważać przypadek sterowania skalarnego. Przez generację jednowęzłową rozumiemy wstawienie nowego węzła na łuku wewnętrzny, w punkcie  $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ . Efektywność generacji definiujemy podobnie jak poprzednio, jako różnicę kwadratów norm gradientu bezpośrednio po i przed generacją. Efektywność generacji może być przedstawiona w postaci

$$E(\tau) = e_i(\tau) + e(\tau) + e_{i+1}(\tau), \quad (6.40)$$

gdzie:

$e_i(\tau)$  – oznacza przyrost kwadratu normy gradientu względem zmiennych decyzyjnych związanych z węzłem  $i$ -tym,

$e(\tau)$  – oznacza sumę kwadratów składowych gradientu względem zmiennych decyzyjnych związanych z nowym węzłem wstawionym w punkcie  $\tau$ ,

$e_{i+1}(\tau)$  – oznacza przyrost kwadratu normy gradientu względem zmiennych decyzyjnych związanych z węzłem  $i + 1$ .

Efektywność jest funkcją ciągłą w każdym przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$ . Jeżeli dwa łuki wewnętrzne sąsiadują ze sobą w punkcie  $t_i$ , to efektywność posiada skończone granice lewą i prawą w tym punkcie oraz granice te są równe. W węzłach strukturalnych, efektywność przyjmuje na ogólnie niezerową wartość. Wyjątkiem jest sytuacja, gdy gradient wskaźnika jakości w przestrzeni parametrów zmierza do zera, tzn. gdy  $|g_\pi| \rightarrow 0$ . Zachodzą wówczas warunki

$$\lim_{|g_\pi| \rightarrow 0} \left( \lim_{\tau \rightarrow t_i^+} E(\tau) \right) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{|g_\pi| \rightarrow 0} \left( \lim_{\tau \rightarrow t_{i+1}^-} E(\tau) \right) = 0. \quad (6.40a)$$

Jeżeli łuk wewnętrzny sąsiaduje z łukiem granicznym, to efektywność w punkcie połączenia tych łuków jest równa zero. Jeżeli pierwszy bądź ostatni łuk są łukami wewnętrznymi, to odpowiednio  $E(0) = 0$  lub  $E(T) = 0$ . Powyższe własności można udowodnić badając granice wyrażenia (6.40). W trakcie eksperymentów numerycznych zauważono, że w początkowej fazie optymalizacji maksimum efektywności występuje często na brzegu danego łuku wewnętrznego. W takiej sytuacji generacja nie jest wykonywana. Wyrażenia (6.40a) sugerują, że maksima efektywności na brzegach nie będą występować, gdy norma gradientu będzie dostatecznie mała. Dlatego w algorytmie wprowadzono dodatkowy warunek generacji

$$|g_\pi| < \eta_{gn}, \quad (6.40b)$$

gdzie  $\eta_{gn}$  jest ustalonym progiem dla generacji jednowęzłowej. Niech  $\tau$  będzie takim punktem, że  $E(\tau) = \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} E_i(s)$  oraz niech  $E_{\min} > 0$  będzie ustalonym progiem. Generacja jednowęzłowa jest dopuszczalna, jeżeli:  $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ ,  $E(\tau) \geq E_{\min}$  oraz spełniony jest warunek (6.40b).

Nowy węzeł jest wstawiany w punkcie  $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ , w którym efektywność osiąga wartość maksymalną. Podamy teraz wzory na efektywność generacji jednowęzłowej w przypadku, gdy oba sąsiednie łuki są łukami wewnętrznymi. Ze względu na bardzo skomplikowaną postać wzorów określających efektywność generacji, pozostałe przypadki omówiono w dodatku C. Parametry w nowym węźle oznaczamy przez  $p_\tau^0$ ,  $p_\tau^1$  oraz przyjmujemy, że  $p_\tau^0 = u(\tau)$ ,  $p_\tau^1 = \dot{u}(\tau)$ , gdzie  $u$  jest sterowaniem przed generacją. Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} - \frac{2h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)}, \\ \nabla_{t_i} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} \left( \frac{6(p_{i-1}^0 - p_i^0)}{(t_i - t_{i-1})} + 2(p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})} - (2p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (p_i^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\nabla_{p_i^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{2h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)} - \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{\tau} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(p_i^0 - u(\tau))}{(\tau - t_i)} + 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (2p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{i+1}^1) \right).\end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i+1$  wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{2h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} - \frac{3h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2}, \\ \nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)} - \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} - \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})}, \\ \nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_{i+1}^0)}{(t_{i+1} - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &+ \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &+ \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - 2(p_{i+1}^1 + p_{i+2}^1) \right) + \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - (p_{i+1}^1 + 2p_{i+2}^1) \right).\end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu po generacji są określone wzorami

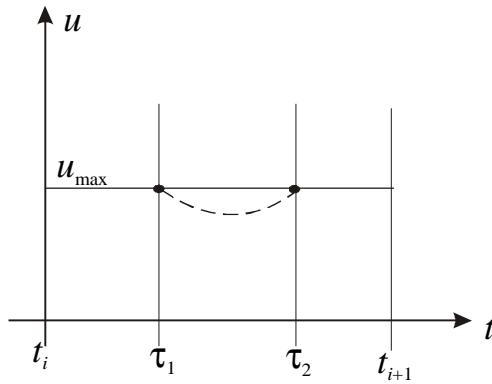
$$e_i(\tau) = (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2,$$

$$e(\tau) = (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{\tau} \bar{Q})^2,$$

$$e_{i+1}(\tau) = (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2.$$

### 6.5.3. Generacje płaskie

Na początku optymalizacji lub na skutek działania procedur redukcji, sterowanie może składać się tylko z jednego łuku granicznego w przedziale  $[0, T]$  i wówczas, aby zapewnić zbieżność algorytmu, konieczne jest wykonanie generacji płaskiej. Generację tę omówimy dla przypadku sterowania skalarnego. Generacja płaska polega na wstawieniu wewnętrz łuku granicznego, nowego łuku wewnętrznego tak, jak to pokazano na rys. 6.6. Na rys. 6.6, przed generacją sterowanie było stałe i równe  $u_{\max}$ . Po generacji sterowanie nadal jest stałe i równe  $u_{\max}$ , ale składa się teraz z dwóch łuków granicznych i jednego łuku wewnętrznego. Warunek dopuszczalności generacji powinien gwarantować, że w wyniku poszukiwania minimum na kierunku antygradientu nowy łuk „wygnie się do środka”. Oznaczmy przez  $\bar{p}_1^0$ ,  $\bar{p}_2^0$ ,  $\bar{p}_1^1$ ,  $\bar{p}_2^1$  parametry nowego łuku. Z konstrukcji generacji płaskiej wynika, że musi być  $\bar{p}_1^0 = \bar{p}_2^0 = u_{\max}$  lub  $\bar{p}_1^0 = \bar{p}_2^0 = u_{\min}$  oraz  $\bar{p}_1^1 = \bar{p}_2^1 = 0$ .



6.6. Przykład generacji płaskiej.

Efektywność generacji płaskiej wyznaczamy ze wzoru

$$E_f(\tau_1, \tau_2) = (\nabla_{\bar{p}_1^1} \bar{Q}(\tau_1, \tau_2))^2 + (\nabla_{\bar{p}_2^1} \bar{Q}(\tau_1, \tau_2))^2, \quad (6.41)$$

przy czym pochodne wskaźnika jakości względem parametrów  $\bar{p}_1^1$  i  $\bar{p}_2^1$  wynoszą

$$\nabla_{\bar{p}_1^1} \bar{Q}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{h_3(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_1)^2} - \frac{h_2(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_1)}, \quad \nabla_{\bar{p}_2^1} \bar{Q}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{\hat{h}_3(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_1)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_1)}. \quad (6.42)$$

Punkty  $\tau_1$  i  $\tau_2$  wyznaczamy maksymalizując wyrażenie (6.41), przy ograniczeniach

$$t_i \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_{i+1}. \quad (6.43)$$

Maksimum wyrażenia (6.41) oznaczamy przez  $E_{f, \max}$ . Generacja płaska jest dopuszczalna, gdy  $E_{f, \max} > E_{\min}$ , gdzie  $E_{\min} > 0$  jest progiem oraz gdy spełniony jest jeden z warunków

$$\nabla_{\bar{p}_1^1} \bar{Q} > 0 \wedge \nabla_{\bar{p}_2^1} \bar{Q} < 0, \text{ dla } \bar{p}_1^0 = \bar{p}_2^0 = u_{\max} \quad (6.44)$$

i

$$\nabla_{\bar{p}_1^1} \bar{Q} < 0 \wedge \nabla_{\bar{p}_2^1} \bar{Q} > 0, \text{ dla } p_1^0 = p_2^0 = u_{\min}. \quad (6.44a)$$

Ponieważ kierunek antygradientu jest pierwszym kierunkiem poszukiwania po generacji, to powyższe warunki gwarantują, że nowo wstawiony łuk „wygnie się do wewnętrz”.

#### 6.5.4. Quasi-przełączania, łuki typu 3, redukcja stopnia wielomianu aproksymującego sterowanie oraz generacje wielomianowe

Zajmiemy się analizą pochodnych wskaźnika jakości względem parametrów łuku wewnętrznego w przypadku, gdy współczynnik  $\varepsilon$  we wskaźniku jakości (6.8) przyjmuje wartości bliskie zeru. Sterowanie optymalne zmierza wówczas do sterowania typu bang-bang, omówionego w punkcie 6.3.1. Efekt ten pociąga za sobą trudności numeryczne. Krótki łuk wewnętrzny, przyjmujący na końcach przeciwnie, graniczne wartości sterowania ( $u_{\min}$  i  $u_{\max}$ ), będziemy nazywać quasi-przełączaniem. Zbadamy zachowanie pochodnych wskaźnika jakości względem parametrów quasi-przełączenia przy założeniu, że jego długość zmierza do zera. Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów quasi-przełączenia wynoszą

$$\nabla_{p_i^1} Q = -\frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)}, \quad \nabla_{p_{i+1}^1} Q = -\frac{\hat{h}_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)},$$

$$\nabla_{t_i} Q = \frac{h_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - 2(p_i^1 + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - (p_i^1 + 2p_{i+1}^1) \right),$$

$$\nabla_{t_{i+1}} Q = \frac{\hat{h}_3(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+1} - t_i)} + 2(p_i^1 + p_{i+1}^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_i, t_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - p_i^0)}{(t_{i+1} - t_i)} - (2p_i^1 + p_{i+1}^1) \right).$$

Obliczając graniczne wartości powyższych wyrażeń przy  $t_i \rightarrow t_{i+1}^-$  oraz  $t_{i+1} \rightarrow t_i^+$  otrzymujemy

$$|\nabla_{p_i^1} Q| \leq \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\phi(t)| (t_{i+1} - t_i)^2 \xrightarrow{|t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} 0, \quad |\nabla_{p_{i+1}^1} Q| \leq \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\phi(t)| (t_{i+1} - t_i)^2 \xrightarrow{|t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} 0,$$

$$\lim_{|t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} \nabla_{t_i} Q = \lim_{|t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} \nabla_{t_{i+1}} Q = \frac{1}{2} \phi(t_i) (p_{i+1}^0 - p_i^0),$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$  zmierzają do zera nie wolniej niż kwadrat długości łuku. Pochodne wskaźnika jakości względem położen węzłów zmierzają do ustalonych wartości. (por. wzór (6.25)). Przy odpowiednio małej długości łuku wpływ zmian parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$  na zmiany wskaźnika jakości staje się pomijalny. Aby uzasadnić to stwierdzenie założymy dla uproszczenia, że algorytm optymalizacji poszukuje minimum na kierunku antygradientu. Wówczas przyrost wskaźnika jakości odpowiadający zmianie parametrów quasi-przełączenia wynosi

$$\Delta Q = -((\nabla_{t_i} Q)^2 + (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2 + (\nabla_{p_i^1} Q)^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)^2) \tau + o(\tau),$$

przy czym  $\tau > 0$  jest parametrem. Przyrost  $\Delta Q$  spełnia następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} |\Delta Q| &\leq ((\nabla_{t_i} Q)^2 + (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2 + 2(\sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\phi(t)|)^2 (t_{i+1} - t_i)^4) \tau + o(\tau) \equiv \\ &\equiv (0,5\phi^2(t_i)(p_{i+1}^0 - p_i^0)^2 + 2\phi^2(t_i)(t_{i+1} - t_i)^4) \tau + o(\tau). \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $t_{i+1} - t_i \equiv \eta T$ , gdzie  $\eta \in (0, 1)$ , to możemy napisać

$$|\Delta Q| \leq \phi^2(t_i)(0,5(p_{i+1}^0 - p_i^0)^2 + 2T^4\eta^4)\tau + o(\tau). \quad (6.45)$$

Założmy, że po przeskalowaniu zadania jest  $T \equiv 1$  oraz  $(p_{i+1}^0 - p_i^0) = u_{\max} - u_{\min} = 2$ . Pierwszy składnik w nawiasie we wzorze (6.45), określa wpływ zmian położen węzłów na spadek wskaźnika jakości, zaś drugi składnik określa wpływ zmian parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$ . Stosunek tych wielkości jest w przybliżeniu równy  $4 \cdot \eta^4$ . Ponieważ typowa szerokość quasi-przełączenia jest rzędu  $10^{-2}T$ , to wpływ zmian parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$  na zmiany wskaźnika jakości będzie  $4 \cdot 10^{-8}$  razy mniejszy, niż wpływ zmian położenia węzłów. Zatem dla krótkich quasi-przełączeń, wpływ zmian parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$  na wskaźnik jakości jest pomijalny. W eksperymentach numerycznych zaobserwowano bardzo powolną zbieżność algorytmu w przypadku wystąpienia quasi-przełączeń. Aby temu zaradzić, w miejsce łuku typu 2 wprowadzamy prostą (łuk typu 3)

$$u^i(t, t_i, t_{i+1}) = p_{i+1}^0 + \frac{p_{i+1}^0 - p_i^0}{t_{i+1} - t_i} (t - t_{i+1}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Jeżeli quasi-przełączenie nie jest pierwszym lub ostatnim łukiem, to parametry  $p_i^0$  i  $p_{i+1}^0$  są ustalone i równe  $u_{\min}$  lub  $u_{\max}$ , a quasi-przełączenie zależy tylko od położen węzłów. Jeżeli quasi-przełączenie występuje jako pierwszy łuk, to zależy ono od dwóch parametrów  $t_1$ ,  $p_1^0$ , natomiast  $p_2^0$  jest ustalony i równy  $u_{\min}$  lub  $u_{\max}$ . Jeżeli zaś quasi przełączenie występuje jako ostatni łuk, to zależy ono od trzech parametrów  $p_{s+1}^0$ ,  $t_s$  i  $T$ , natomiast  $p_s^0$  jest ustalony i równy  $u_{\min}$  lub  $u_{\max}$ . Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów  $p_i^0$  i  $p_{i+1}^0$  wynoszą

$$\nabla_{p_i^0} Q = \frac{h_1(t_i, t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}, \quad \nabla_{p_{i+1}^0} Q = -\frac{\hat{h}_1(t_i, t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}, \quad (6.45a)$$

a pochodne wskaźnika jakości względem położen węzłów wynoszą

$$\nabla_{t_i} Q = -\frac{h_1(t_i, t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} (p_{i+1}^0 - p_i^0), \quad \nabla_{t_{i+1}} Q = -\frac{\hat{h}_1(t_i, t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} (p_{i+1}^0 - p_i^0). \quad (6.45b)$$

### Zamiana łuku typu 2 na łuk typu 3 – redukcja stopnia wielomianu

W implementacji łuk typu 2 jest zastępowany linią prostą (łukiem typu 3), jeżeli spełnione są warunki

$$t_{i+1} - t_i < \eta_T T, \quad \eta_T \approx 10^{-2},$$

$$\frac{(\nabla_{p_i^1} Q)^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)^2}{(\nabla_{t_i} Q)^2 + (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2 + (\nabla_{p_i^0} Q)^2 + (\nabla_{p_{i+1}^0} Q)^2 + (\nabla_{p_i^1} Q)^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)^2} < \eta_3, \quad \eta_3 \approx 10^{-6},$$

przy czym  $t_i, t_{i+1}, p_i^0, p_i^1, p_{i+1}^0, p_{i+1}^1$  są parametrami łuku typu 2. Jeżeli dany parametr jest ustalony, to odpowiadającą mu pochodną pomijamy. Drugi z warunków określa wpływ zmian parametrów  $p_i^1$  i  $p_{i+1}^1$  na zmiany wskaźnika jakości. Redukcja stopnia wielomianu obniża wymiar przestrzeni decyzyjnej o dwa, a wpływ błędów wyznaczania gradientu na optymalizację ulega redukcji. W analizowanych przykładach powyższe postępowanie przyspieszyło szybkość zbieżności w porównaniu z szybkością zbieżności uzyskaną dla quasi-przełączeń z łukiem typu 2.

### Zamiana łuku liniowego (typu 3) na łuk typu 2 – generacja wielomianowa

Generacja wielomianowa polega na zwiększeniu o dwa stopnia wielomianu opisującego dane quasi-przełączenie w przypadku, gdy długość tego quasi-przełączenia przekroczy ustalony próg oraz gdy efektywność takiej generacji przekracza zadaną efektywność minimalną. Efektywność generacji wielomianowej wynosi

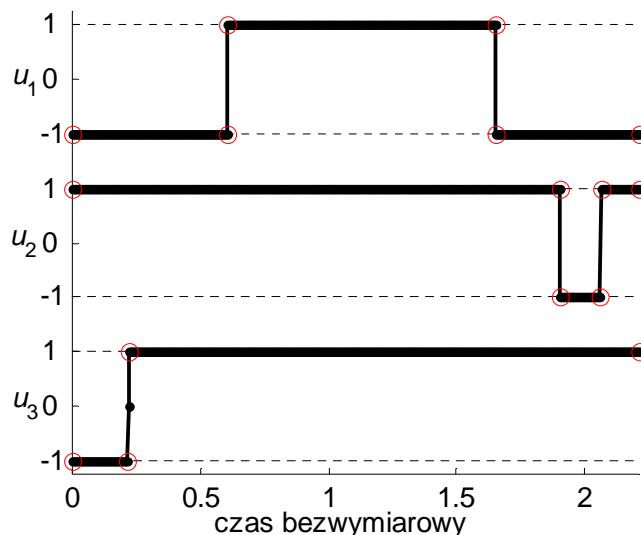
$$E_p = (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - \\ - (\nabla_{t_i} Q)^2 - (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2 - (\nabla_{p_i^0} Q)^2 - (\nabla_{p_{i+1}^0} Q)^2,$$

przy czym kreska nad oznaczeniem wskaźnika jakości oznacza, że jest on obliczany po zamianie łuku typu 3 na łuk typu 2. Jeżeli dany parametr jest ustalony, to odpowiadającą mu pochodną pomijamy. Zamiany łuku typu 3 na łuk typu 2 dokonujemy, gdy spełnione są warunki

$$t_{i+1} - t_i > \varepsilon_T T, \quad \varepsilon_T \in (0,02, 0,1) \text{ oraz } E_p > E_{\min}.$$

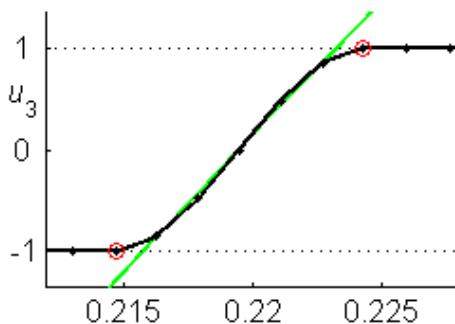
### Przykład 6.5.1

W czwartym zadaniu sterowania w problemie spotkania dwóch statków kosmicznych z przykładu 4.4.2, wyliczono sterowanie optymalne ze współczynnikiem  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Na rys. 6.7 pokazano to sterowanie oraz pięć quasi-przełączeń z łukami typu 2. Na rys. 6.8 przedstawiono powiększony fragment rys. 6.7, obrazujący quasi-przełączenie z lukiem typu 2 na trzeciej składowej sterowania.

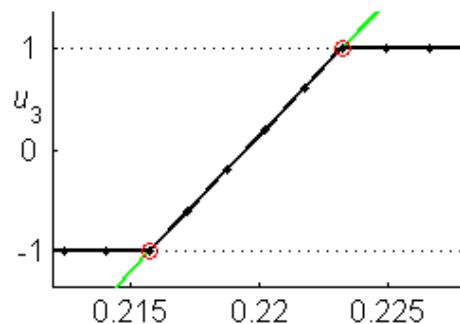


Rys. 6.7. Sterowanie w zadaniu spotkania dwóch statków kosmicznych z przykładu 4.4.2, przy  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Opis w tekście.

Przy zastosowaniu łuków typu 2 uzyskano normę gradientu w przestrzeni parametrów równą  $|g_\pi| = 6,36159707 \cdot 10^{-5}$  oraz wartość wskaźnika jakości  $Q = 2,2018759$ , po czym algorytm zgłosił brak poprawy na kierunku poszukiwania. Zamiana łuków typu 2 na łuki typu 3 pozwoliła uzyskać po dodatkowych 20 iteracjach  $|g_\pi| = 2,64893485 \cdot 10^{-10}$  oraz  $Q = 2,2018758$ . Quasi-przełączenie z lukiem typu 3 pokazano na rys. 6.9. Widać wyraźnie, że sterowanie optymalne, wyznaczone przez algorytm, jest znacznie bliższe sterowaniu wyznaczonemu z warunku maksimum hamiltonianu (kolor zielony). Oznacza to, że po zastosowaniu łuków typu 3, warunki optymalności są spełnione z większą dokładnością.



Rys. 6.8. Powiększony fragment rysunku 6.8. Quasi-przełączenie na sterowaniu  $u_3$ , z lukiem typu 2.



Rys. 6.9. Quasi-przełączenie na sterowaniu  $u_3$ , z lukiem typu 3.

### 6.5.5. O efektywnym numerycznie wyliczaniu całek

Zajmujemy się efektywnym numerycznym wyliczaniem całek potrzebnych do obliczenia gradientu i efektywności generacji. Wyliczymy następujące całki:

$$h_2(\tau, t_{i+1}), h_3(\tau, t_{i+1}), h_2(t_i, \tau), h_3(t_i, \tau), \quad (6.46)$$

$$\hat{h}_2(\tau, t_{i+1}), \hat{h}_3(\tau, t_{i+1}), \hat{h}_2(t_i, \tau), \hat{h}_3(t_i, \tau). \quad (6.47)$$

oraz

$$h_2(\tau_1, \tau_2), h_3(\tau_1, \tau_2), \quad (6.48)$$

$$\hat{h}_2(\tau_1, \tau_2), \hat{h}_3(\tau_1, \tau_2). \quad (6.49)$$

Aby tego dokonać, równolegle z równaniami sprzężonymi, rozwiązujemy w każdym przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$ , następujące cztery równania różniczkowe:

$$\frac{\partial h_k(t, t_{i+1})}{\partial t} = -\phi(t)(t - t_{i+1})^k, \quad h_k(t_{i+1}, t_{i+1}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (6.50)$$

Rozwiązanie równań (6.50) pozwala wyznaczyć całki:

$$h_0(\tau, t_{i+1}) = \int_{\tau}^{t_{i+1}} \phi(t) dt, \quad (6.51)$$

$$h_1(\tau, t_{i+1}) = \int_{\tau}^{t_{i+1}} \phi(t)(t - t_{i+1}) dt, \quad (6.52)$$

$$h_2(\tau, t_{i+1}) = \int_{\tau}^{t_{i+1}} \phi(t)(t - t_{i+1})^2 dt, \quad (6.53)$$

$$h_3(\tau, t_{i+1}) = \int_{\tau}^{t_{i+1}} \phi(t)(t - t_{i+1})^3 dt. \quad (6.54)$$

Powyższy zestaw całek zapewnia minimalną liczbę mnożeń i dodawań przy całkowaniu równań (6.50). Pozostałe potrzebne całki wyrazimy za pomocą całek (6.51-54). W tym celu wyliczamy następujące wielkości:

$$a_1(\tau) = h_1(t_i, t_{i+1}) - h_1(\tau, t_{i+1}),$$

$$a_2(\tau) = h_2(t_i, t_{i+1}) - h_2(\tau, t_{i+1}),$$

$$a_3(\tau) = h_3(t_i, t_{i+1}) - h_3(\tau, t_{i+1}),$$

$$b(\tau) = t_i - \tau, \quad c(\tau) = t_{i+1} - \tau, \quad d = t_{i+1} - t_i,$$

$$\hat{h}_0(t_i, \tau) = h_0(t_i, t_{i+1}) - h_0(\tau, t_{i+1}), \quad \hat{h}_1(t_i, \tau) = a_1(\tau) + d\hat{h}_0(t_i, \tau). \quad (6.55)$$

Pozostałe całki we wzorach (6.46) i (6.47) obliczamy kolejno z zależności:

$$\hat{h}_2(t_i, \tau) = a_2(\tau) + 2da_1(\tau) + d^2\hat{h}_0(t_i, \tau),$$

$$\hat{h}_3(t_i, \tau) = a_3(\tau) + 3da_2(\tau) + 3d^2a_1(\tau) + d^3\hat{h}_0(t_i, \tau),$$

$$\begin{aligned}
 h_2(t_i, \tau) &= \hat{h}_2(t_i, \tau) + 2b(\tau)\hat{h}_1(t_i, \tau) + b^2(\tau)\hat{h}_0(t_i, \tau), \\
 h_3(t_i, \tau) &= \hat{h}_3(t_i, \tau) + 3b(\tau)\hat{h}_2(t_i, \tau) + 3b^2(\tau)\hat{h}_1(t_i, \tau) + b^3(\tau)\hat{h}_0(t_i, \tau), \\
 \hat{h}_2(\tau, t_{i+1}) &= h_2(\tau, t_{i+1}) + 2c(\tau)h_1(\tau, t_{i+1}) + c^2(\tau)h_0(\tau, t_{i+1}), \\
 \hat{h}_3(\tau, t_{i+1}) &= h_3(\tau, t_{i+1}) + 3c(\tau)h_2(\tau, t_{i+1}) + 3c^2(\tau)h_1(\tau, t_{i+1}) + c^3(\tau)h_0(\tau, t_{i+1}). \tag{6.56}
 \end{aligned}$$

Potrzeba jeszcze wyliczyć całki (6.48,49) występujące we wzorach (6.41,42), określających efektywność generacji płaskiej. Wyliczamy w tym celu następujące wielkości:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_0(\tau_1, \tau_2) &= h_0(\tau_1, t_{i+1}) - h_0(\tau_2, t_{i+1}), \\
 \bar{a}_1(\tau_1, \tau_2) &= h_1(\tau_1, t_{i+1}) - h_1(\tau_2, t_{i+1}), \\
 \bar{a}_2(\tau_1, \tau_2) &= h_2(\tau_1, t_{i+1}) - h_2(\tau_2, t_{i+1}), \\
 \bar{a}_3(\tau_1, \tau_2) &= h_3(\tau_1, t_{i+1}) - h_3(\tau_2, t_{i+1}), \\
 d_1(\tau_1) &= t_{i+1} - \tau_1, \quad d_2(\tau_2) = t_{i+1} - \tau_2. \tag{6.57}
 \end{aligned}$$

Całki we wzorach (6.42) wyliczamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
 h_2(\tau_1, \tau_2) &= \bar{a}_2(\tau_1, \tau_2) + 2d_2(\tau_2)\bar{a}_1(\tau_1, \tau_2) + d_2^2(\tau_2)\bar{a}_0(\tau_1, \tau_2), \\
 h_3(\tau_1, \tau_2) &= \bar{a}_3(\tau_1, \tau_2) + 3d_2(\tau_2)\bar{a}_2(\tau_1, \tau_2) + 3d_2^2(\tau_2)\bar{a}_1(\tau_1, \tau_2) + d_2^3(\tau_2)\bar{a}_0(\tau_1, \tau_2), \\
 \hat{h}_2(\tau_1, \tau_2) &= \bar{a}_2(\tau_1, \tau_2) + 2d_1(\tau_1)\bar{a}_1(\tau_1, \tau_2) + d_1^2(\tau_1)\bar{a}_0(\tau_1, \tau_2), \\
 \hat{h}_3(\tau_1, \tau_2) &= \bar{a}_3(\tau_1, \tau_2) + 3d_1(\tau_1)\bar{a}_2(\tau_1, \tau_2) + 3d_1^2(\tau_1)\bar{a}_1(\tau_1, \tau_2) + d_1^3(\tau_1)\bar{a}_0(\tau_1, \tau_2). \tag{6.58}
 \end{aligned}$$

Całki we wzorach (6.45a,b) wyliczamy z (6.52) i (6.55). W ten sposób, wyliczając numerycznie cztery całki, wyznaczyliśmy wszystkie całki potrzebne do obliczenia gradientu wskaźnika jakości oraz efektywności generacji.

### 6.5.6. Procedury redukcji łuków

Procedury redukcji usuwają łuki o zerowej długości. Redukcja łuku powoduje zmianę struktury sterowania oraz wymiaru przestrzeni decyzyjnej, a po jej wykonaniu ponownie uruchamia się metodę gradientową. W praktycznej implementacji algorytmu usuwa się łuki, których długość jest mniejsza od ustalonego, niewielkiego progu. Prowadzi to czasami do wzrostu wskaźnika jakości (zob. rys. 6.1), jednak można w ten sposób uniknąć wielu zbędnych iteracji wykonywanych przez algorytm, gdy długość danego łuku jest bardzo mała.

## 6.6. Metody całkowania równań stanu i równań sprzężonych

Do rozwiązywania równań stanu i równań sprzężonych używane były stałykrobowe metody typu Rungego-Kutty. W algorytmie zaimplementowano dwa różne schematy, których można używać wymiennie, w zależności od stopnia komplikacji równań. Schemat pierwszy, to standardowa procedura RK4 czwartego rzędu, oparta na tzw. wzorze klasycznym (Stoer 1987). Drugim schematem używanym w bardziej skomplikowanych przypadkach była metoda RKF7 Rungego-Kutty-Fehlberga siódmego rzędu (Fehlberg 1985), wykorzystywana w pakiecie fortranowskich programów do rozwiązywania zadań sterowania optymalnego MUMUS (Hiltman, Chudej, Breitner 1990)<sup>2</sup>. Aby przekonać się, czy i kiedy stosowanie

<sup>2</sup> Dzięki uprzejmości dr. Janusza Millera.

metody RKF7 jest zasadne, dokonano porównania obu metod. Jako problem testowy wybrano równania ruchu płaskiego cząstki w polu centralnym

$$\dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_3 = -\frac{x_1}{r^3}, \dot{x}_4 = -\frac{x_2}{r^3}, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0. \quad (6.59)$$

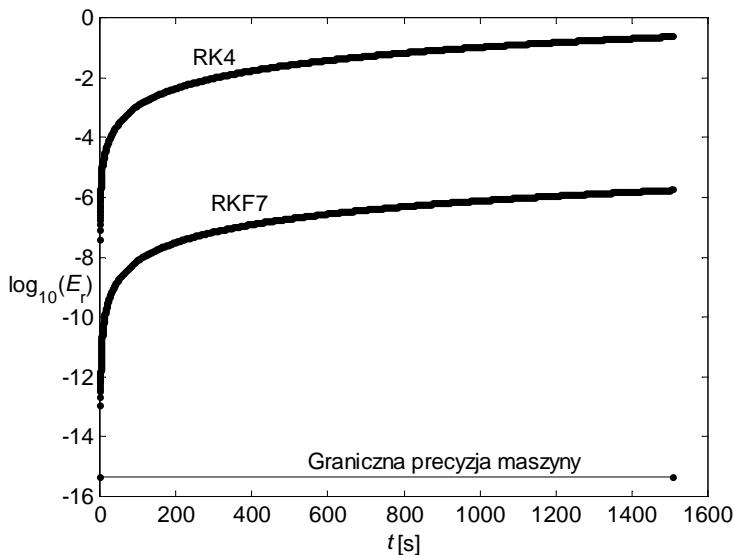
Warunek początkowy był równy  $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Dokładne rozwiązanie równań (6.59) odpowiada kołowej orbicie Keplerowskiej i jest dane wzorami

$$x_{1d}(t) = \cos t, \quad x_{2d}(t) = \sin t, \quad x_{3d}(t) = -\sin t, \quad x_{4d}(t) = \cos t. \quad (6.60)$$

Krok całkowania był stały i wynosił  $h = \frac{2\pi}{72}$ , natomiast czas końcowy  $T$  odpowiadał dwustu czterdziestu obiegom cząstki wokół początku układu współrzędnych i był równy  $480\pi$ . Względny błąd rozwiązania określono jako

$$E_r(t) = \frac{|x(t) - x_d(t)|}{|x_d(t)|} = \frac{|x(t) - x_d(t)|}{\sqrt{2}}, \quad (6.61)$$

przy czym  $x(t)$  oznacza rozwiązanie uzyskane jedną z metod RK4 lub RKF7. Na rys. 6.10 pokazano wzajemny błąd obu metod w funkcji czasu. Błąd obu metod narastał z czasem, jednak błąd metody RK4 był praktycznie w każdej chwili czasu o pięć rzędów większy, niż błąd metody RKF7. Zatem stosowanie metody RKF7 jest uzasadnione dla zadań z długim horyzontem. W zadaniu sterowania statkiem kosmicznym z przykładu 4.4.2 zaobserwowano



Rys. 6.10. Wzajemny błąd w funkcji czasu dla metod RK4 i RKF7.

brak zbieżności algorytmu optymalizacji, spowodowany błędami całkowania równań stanu i sprzężonych. Po zastosowaniu metody RKF7 zbieżność algorytmu optymalizacji poprawiła się. Należy zaznaczyć, że podany powyżej przykład jest celowo dobrany pod kątem kumulacji błędów, a pogorszenie zbieżności algorytmu, spowodowane zastosowaniem metody RK4, wystąpiło tylko w jednym z analizowanych przykładów. Liczba obliczeń wartości prawej strony równania przypadająca na jeden krok, wynosi 11 w metodzie RKF7 oraz 4 w metodzie RK4. Wynika stąd, że należy przetestować obie metody, a użycie metody RKF7 powinno być uzasadnione numerycznie. Przy całkowaniu równań stanu i równań sprzężonych, dyskretyzacja czasu była wykonywana w taki sposób, aby w przybliżeniu osiągnąć zadawaną przez użytkownika gęstość siatki oraz aby węzły struktury (czasy przełączeń) wypadały

dokładnie w punktach dyskretyzacji czasu. Procedura generacji siatki była wywoływaną każdorazowo przed uruchomieniem procedury całkowania równań stanu i równań sprzężonych. W przypadku równań sprzężonych schematy RK4 i RKF7 zostały odwrócone tak, aby umożliwić całkowanie równań sprzężonych wstecz. Obliczenia były prowadzone w następujący sposób.

1. Całkowanie równań stanu (6.7) „w przód”.
2. Całkowanie „wstecz” równań sprzężonych (6.10), z warunkiem końcowym (6.11) i trajektorią stanu wyznaczoną na podstawie równania (6.10) oraz jednocześnie całkowanie „wstecz” równań (6.50).

Dla skrócenia czasu całkowania, procedury te zostały napisane w języku C i skompilowane do postaci, tzw. „mex-plików”, możliwych do wywołania z poziomu programu MATLAB. Szczegóły konstrukcji kodu „mex-plików” zob. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).

## 6.7. Ogólny algorytm metody MSE

Przedstawimy teraz ogólny algorytm metody MSE.

1. Wybierz sterowanie początkowe oraz liczby  $\rho > 0$ ,  $\alpha_{\max} \in (0, \alpha^*)$ ,  $\alpha_{\max} \approx \alpha^*$ .
2. Jeżeli spełnione są przybliżone warunki optymalności w przestrzeni sterowań lub przekroczony został maksymalny czas obliczeń, to idź do 6.
3. Wykonaj generację, jeżeli jest dostatecznie efektywna lub konieczna.
4. Oblicz gradient i wyznacz nowy kierunek poszukiwania oraz wykonaj minimalizację na tym kierunku. Jeżeli w trakcie minimalizacji kierunkowej wystąpiło nasycenie sterowania, to odpowiednio zmień strukturę sterowania i idź do 4.
5. Zredukuj niepotrzebne łuki i idź do 2.
6. Jeżeli  $x(T) \notin \Omega$  i nie przekroczono maksymalnego czasu obliczeń, to zwiększ  $\rho$  podając np.  $\rho := 10\rho$  i idź do 2, w przeciwnym przypadku zakończ obliczenia.

Poniżej omówimy bardziej szczegółowo poszczególne kroki algorytmu.

### 6.7.1. Ograniczenia wektora parametrów

Przyjęta parametryzacja sterowania narzuca ograniczenia na wektor zmiennych decyzyjnych  $\pi$ . Węzły strukturalne muszą spełniać następujące nierówności

$$0 < T_{\min} \leq t_1^i \leq t_2^i \leq \dots \leq t_{s_i}^i \leq T < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.62)$$

Ponadto w przypadku sterowań ciągłych, gdy  $\varepsilon > 0$ , wektor parametrów  $\pi_p$  również podlega ograniczeniom, wynikającym z ograniczeń sterowania (por. wzór (2.2))

$$u(t, \pi_t, \pi_p) \in U, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.63)$$

Ograniczenia (6.62) wyznaczają zbiór dopuszczalnych punktów podziału struktury sterowania, który będziemy oznaczać przez  $D_t$ . Zbiór ten jest wypukłym zbiorem wielościennym w przestrzeni  $R^q$ , gdzie  $q$  jest wymiarem wektora  $\pi_t$ . Ograniczenia (6.63) również określają pewien zbiór dopuszczalny  $D_p \subset R^p$ , gdzie  $p$  jest wymiarem wektora  $\pi_p$ . Ograniczenia (6.62) i (6.63) możemy zapisać w postaci

$$\pi \in D, \text{ gdzie } D = D_t \times D_p. \quad (6.64)$$

Ograniczenia (6.62) uwzględniamy w algorytmie, ograniczając maksymalny krok w metodzie minimalizacji kierunkowej. Niech  $d$  oznacza pewien kierunek poszukiwania. Dokonujemy podziału wektora  $d$  na składowe  $d_t$  oraz  $d_p$  odpowiadające punktom podziału i parametrom, tzn.  $d = \text{col}(d_t, d_p)$ . Metoda poszukiwania na kierunku wyznacza przybliżone minimum funkcji jednej zmiennej

$$\varphi(s) = Q(\pi + sd), \quad s \geq 0. \quad (6.65)$$

Aby ograniczenia (6.62) były spełnione, maksymalny dopuszczalny krok  $s$  musi być dobrany tak, aby zachodził warunek

$$\pi_t + sd_t \in D_t. \quad (6.66)$$

Warunek (6.66) jest równoważny układowi nierówności

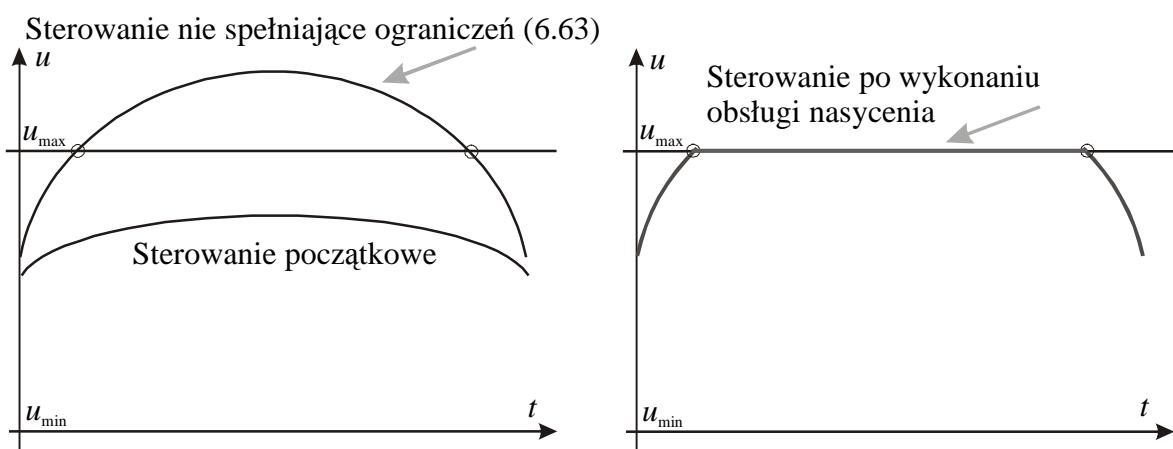
$$\begin{aligned} s(d_1^i - 0) &\leq t_1^i - T_{\min} \\ s(d_1^i - d_2^i) &\leq t_2^i - t_1^i \\ &\vdots \\ s(d_{s_i}^i - d_{s_{i+1}}^i) &\leq T - t_{s_i}^i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Jako maksymalny krok  $s_{\max}$ , przyjmujemy największą liczbę  $s$  spełniającą układ (6.67). Jeżeli na skutek minimalizacji na kierunku pojawi się łuk o zerowej długości (trafienie w brzeg zbioru  $D_t$ ), to uruchamiana jest procedura redukcji łuku, bądź też zadziała procedura rzutowania gradientu, opisana poniżej w punkcie 7.2.

O ile wyznaczenie zbioru  $D_t$  nie stanowi problemu, to wyznaczenie zbioru  $D_p$  jest, nawet w bardzo prostych przypadkach, źródłem poważnych trudności. Dlatego ograniczenia (6.63) będziemy uwzględniać w algorytmie w nieco innym sposobie, stosując procedurę obsługi nasycenia sterowania. Działanie procedury jest następujące. W każdym kroku minimalizacji kierunkowej, dla każdej składowej sterowania i każdego łuku wewnętrznego, sprawdzamy czy zostało naruszone ograniczenie (6.63). Sprawdzenia dokonujemy rozwiązując układ nierówności trzeciego stopnia

$$u_i(t, \pi_t, \pi_p) < u_{i, \min}, \quad (6.68)$$

$$u_i(t, \pi_t, \pi_p) > u_{i, \max}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.69)$$



Rys. 6.11. Przykład działania procedury obsługi nasycień sterowania.

Jeżeli nierówność (6.68), bądź (6.69) jest spełniona w przedziale  $(a, b)$ ,  $a < b$ , to łuk wewnętrzny zastępujemy w przedziale  $[a, b]$  łukiem granicznym, przy czym sterowanie przyjmuje na tym łuku odpowiednio wartość  $u_{i,\min}$  lub  $u_{i,\max}$  (rys. 6.11). Nierówności (6.68,69) rozwiązuje się numerycznie, wyznaczając metodą Newtona rozwiązania równań  $u_i(t, \pi_t, \pi_p) = u_{i,\min}$  i  $u_i(t, \pi_t, \pi_p) = u_{i,\max}$ . Procedura obsługi nasyceń powoduje zmianę struktury sterowania. Po wykonaniu procedury ponownie uruchamia się metodę gradientową w nowej przestrzeni decyzyjnej. Pod koniec procesu optymalizacji, gdy znaleziona została poprawna struktura rozwiązania, nasycenia występują bardzo rzadko, tym rzadziej, im lepsze jest aktualne przybliżenie rozwiązania.

### 6.7.2. Wybór kierunku poszukiwania

Ponieważ w rozpatrywanych zadaniach wymiar wektora decyzyjnego nie przekracza 70, do wyznaczenia kierunku poszukiwania będziemy używać metody Broydена – Fletchera – Goldfarba – Shanno (BFGS) z aproksymacją hesjanu. W  $i$ -tej iteracji, dysponując aktualnym przybliżeniem rozwiązania optymalnego  $\pi^i$ , wyznaczamy na podstawie podanych w p. 6.4 wzorów gradient  $g_\pi^i$ . Kierunek poszukiwania w  $i$ -tej iteracji wyznacza się przez rozwiązanie równania liniowego

$$H^i d^i = -g_\pi^i. \quad (6.70)$$

W pierwszej iteracji przyjmuje się  $H^1 = I$ . W dalszych iteracjach macierz  $H^i$  wyznacza się rekurencyjnie, na podstawie formuły

$$H^{i+1} = H^i + \frac{r_i r_i^\top}{z_i^\top r_i} - \frac{H^i z_i z_i^\top H^i}{z_i^\top H^i z_i}, \quad (6.71)$$

gdzie

$$r_i = g_\pi^{i+1} - g_\pi^i, \quad z_i = \pi^{i+1} - \pi^i. \quad (6.72)$$

Odświeżenie algorytmu z podstawieniem  $H^i = I$ , następuje za każdym razem po wykonaniu procedury generacji, redukcji, bądź obsługi nasycenia. Optymalizacja w ustalonej przestrzeni decyzyjnej zatrzymuje się, gdy zajdzie jeden z warunków

- (i)  $|g_\pi^i| < \eta_g$ , gdzie  $\eta_g$  jest ustalonym progiem,
- (ii) wyczerpano limit czasu,
- (iii) przekroczona została dopuszczalna liczba iteracji.

### 6.7.3. Rzutowanie gradientu

Algorytmy redukcji nie obejmują przypadku redukcji quasi-przełączenia o zerowej długości oraz przypadku redukcji łuku wewnętrznego o zerowej długości, sąsiadującego z obu stron z łukami wewnętrznymi. Wystąpienie jednej z powyższych sytuacji oznacza, że kierunek generowany przez metodę BFGS nie jest kierunkiem poprawy, dopuszczalnym ze względu na spełnienie ograniczeń (6.62). Aby temu zaradzić, kierunek poszukiwania wyznaczany jest jako rzut antygradientu na kierunek styczny do ograniczeń (6.62), aktywnych w punkcie  $\pi$  (zob. Findeisen *et al.* 1980, s. 259). Po wykonaniu minimalizacji na kierunku, sprawdza się, czy antygradient wskaźnika jakości w nowym punkcie jest dopuszczalnym kierunkiem poprawy. Jeżeli tak, to powraca się do metody BFGS. W przeciwnym przypadku wyznacza się ponownie rzut antygradientu na kierunek styczny do ograniczeń aktywnych i kontynuuje poszukiwania na tym kierunku. Metodę rzutowania gradientu opiszymy dla przypadku sterowania skalarnego. Ograniczenia (6.62) zapisujemy w następującej postaci

$$\begin{aligned}\gamma_1(\boldsymbol{\pi}_t) &= T_{\min} - t_1 \leq 0, \\ \gamma_2(\boldsymbol{\pi}_t) &= t_1 - t_2 \leq 0, \\ &\vdots \\ \gamma_{s+1}(\boldsymbol{\pi}_t) &= t_s - T \leq 0.\end{aligned}\tag{6.73}$$

Niech  $d_t = -g_t$  oznacza kierunek poszukiwania w przestrzeni węzłów strukturalnych oraz niech  $A$  oznacza zbiór tych indeksów  $i \in \{1, 2, \dots, s+1\}$ , dla których:

- (i)  $i$ -te ograniczenie (6.73), jest aktywne w punkcie  $\boldsymbol{\pi}$ ,
- (ii)  $i$ -te ograniczenie (6.73), spełnia warunek  $d_t^\top \nabla_{\boldsymbol{\pi}_t} \gamma_i(\boldsymbol{\pi}_t) > 0$ .

Spełnienie powyższych warunków oznacza, że kierunek  $d_t$ , jest niedopuszczalny ze względu na ograniczenia, których indeksy znajdują się w zbiorze  $A$ . Określamy wektory normalne do ograniczeń o indeksach ze zbioru  $A$ :

$$\nu_i = \frac{\nabla_{\boldsymbol{\pi}_t} \gamma_i(\boldsymbol{\pi}_t)}{|\nabla_{\boldsymbol{\pi}_t} \gamma_i(\boldsymbol{\pi}_t)|}, \quad i \in A,\tag{6.74}$$

oraz tworzymy macierze

$$N = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r],\tag{6.75}$$

$$P = I - N(N^\top N)^{-1} N^\top.\tag{6.76}$$

Ponieważ wektory  $\nu_i$  są liniowo niezależne, to macierz  $N$  jest nieosobliwa. Rzut wektora  $d_t$  na kierunek styczny do ograniczeń wyznaczamy z równości

$$d_t^P = P d_t.\tag{6.76}$$

Ponieważ ograniczenia (6.73) są liniowe, to poszukiwanie minimum w kierunku  $d_t^P$  nie narusza tych ograniczeń. W przeprowadzonych eksperymentach numerycznych konieczność rzutowania gradientu zachodziła stosunkowo rzadko, głównie na początku procesu optymalizacji oraz przy wystąpieniu quasi-przełączeń.

#### 6.7.4. Warunki zatrzymania algorytmu MSE

Podane w punkcie 2 algorytmu MSE warunki zatrzymania wymagają objaśnienia. Pierwszym kryterium zatrzymania algorytmu jest przekroczenie limitu czasu. Maksymalny czas obliczeń musi być krótszy niż  $\delta$ . Eksperymenty pokazały, że czas potrzebny na wykonanie predykcji krótkoterminowej, estymacji stanu i innych obliczeń pomocniczych zajmuje zwykle nie więcej niż 10% czasu  $\delta$ . Zatem maksymalny czas obliczeń jest rzędu  $0,9\delta$ . Omówimy teraz przybliżone warunki optymalności w przypadku sterowania skalarnego. Uogólnienie na przypadek wielu sterowań nie nastręcza trudności. Z warunku maksimum hamiltonianu wynika, że jeżeli  $i$ -ty łuk jest łukiem granicznym, to dla  $t \in (t_i, t_{i+1})$  musi być spełniona relacja

$$b_i(t) = \operatorname{sgn}(\bar{u}(t) - 0,5(u_{\max} + u_{\min})) - \operatorname{sgn}(\phi(t)) = 0.\tag{6.77}$$

Jeżeli zaś  $i$ -ty łuk jest łukiem wewnętrznym, to musi być spełnione równanie

$$a_i(t) = f^1(\bar{x}(t))^\top \bar{\psi}(t) - \varepsilon \nabla_u L(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0, \quad t \in (t_i, t_{i+1}).\tag{6.78}$$

Dodatkowo, jeżeli horyzont jest swobodny, musi być spełniony warunek

$$\nabla_T J(u, T; x_0, \varepsilon) = 0. \quad (6.79)$$

Jako miarę spełnienia warunków optymalności można przyjąć następujące wyrażenie:

$$\chi = \sum_{i \in B} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |b_i(t)|^2 dt + \sum_{i \in I} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |a_i(t)|^2 dt + |\nabla_T J(u, T; x_0, \varepsilon)|^2, \quad (6.80)$$

gdzie  $B$  oznacza zbiór tych indeksów, dla których  $i$ -ty łuk jest łukiem granicznym, natomiast  $I$  oznacza zbiór tych indeksów, dla których  $i$ -ty łuk jest łukiem wewnętrzny. Przybliżone warunki optymalności będą spełnione, jeżeli

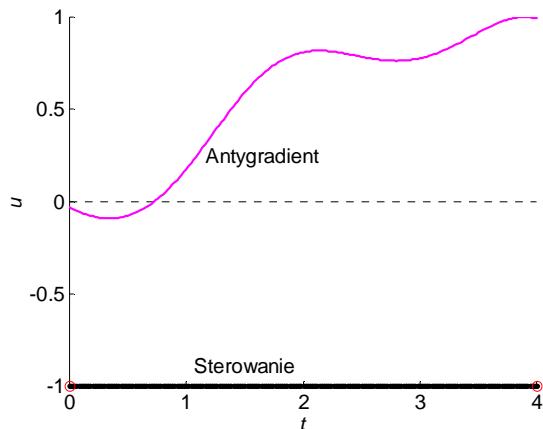
$$\chi \leq \chi_0, \quad (6.81)$$

gdzie  $\chi_0$  jest ustalonym progiem. Ponieważ zarówno trajektoria stanu jak i trajektoria sprzężona oraz sterowanie są przechowywane w pamięci komputera, to całki w (6.80) można łatwo obliczyć numerycznie. Należy podkreślić, że zatrzymanie algorytmu w oparciu o kryterium  $|g_\pi^i| < \eta_g$  jest niewłaściwe, gdyż kryterium to oznacza jedynie, że algorytm znalazł przybliżenie sterowania optymalnego w ramach danej struktury sterowania.

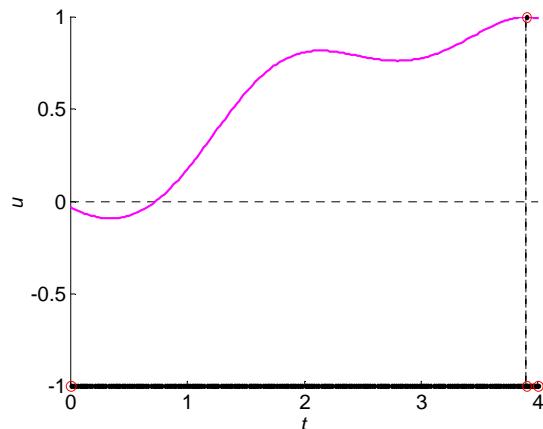
## 6.8. Przykłady optymalizacji sterowania

Aby zilustrować działanie algorytmu MSE, pokażemy dwa przykłady optymalizacji trajektorii. Przykład pierwszy obrazuje poszukiwanie sterowania bang-bang w zadaniu postawieniu wahadła na wózku z przykładu 3.4.3. Przebieg procesu poszukiwania sterowania optymalnego pokazano na rys. 6.12, 6.13. Sterowanie zostało przeskalowane do przedziału  $[-1, 1]$ . Linią ciągłą oznaczono skalowany antygradient wskaźnika jakości. Sterowanie początkowe było stałe i równe  $u_{\min}$ . W pierwszej iteracji wystąpiła generacja wewnętrzna, po czym ostatnie przełączenie zostało zredukowane. W iteracji dziesiątej wystąpiła kolejna generacja. Optymalizacja ustalonej struktury z czterema zmiennymi decyzyjnymi trwała do iteracji 60, w której algorytm zakończył działanie.

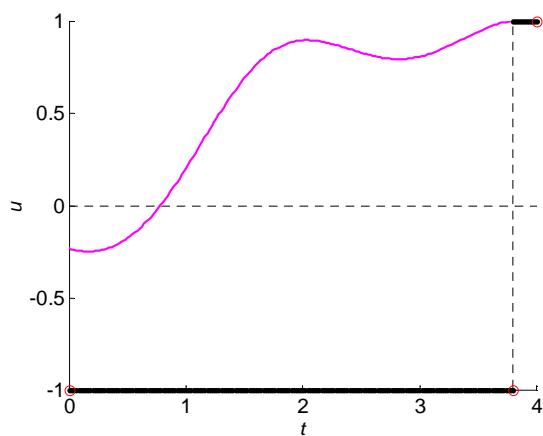
Przykład drugi (rys. 6.14, 6.15 i 6.16) dotyczy sterowań ciągłych i obrazuje proces poszukiwania rozwiązania w drugim zadaniu sterowania robotem z przykładu 4.4.1. W pierwszej iteracji oba sterowania były równe zero i składały się z pojedynczego łuku wewnętrzne typu 2. W kolejnych iteracjach (rys. 6.14) algorytm wykonywał generacje jednowęzłowe, a pomiędzy generacjami miała miejsce optymalizacja ustalonej struktury sterowania. Na rys. 6.14 kolorem zielonym zaznaczono sterowanie wyliczone z warunku maksimum hamiltonianu (6.16). Widać tam wyraźnie, że w kolejnych iteracjach sterowanie wyznaczone z warunku maksimum hamiltonianu staje się coraz bliższe aktualnej aproksymacji sterowania optymalnego. Na rys. 6.15 pokazano sterowanie  $u_2$  w iteracji 77 oraz przeskalowaną efektywność generacji jednowęzłowej, wykonanej w iteracji 77. Widać, że nowy węzeł jest wstawiany w punkcie, w którym efektywność ma maksimum. Na rys. 6.16 pokazano sterowanie  $u_1$  w iteracji 216 oraz przeskalowaną efektywność generacji jednowęzłowej, wykonanej w iteracji 216. Trajektorię optymalną pokazano w przykładzie 4.4.1. Algorytm zakończył działanie po 632 iteracjach. Maksymalna liczba zmiennych decyzyjnych wynosiła 30.



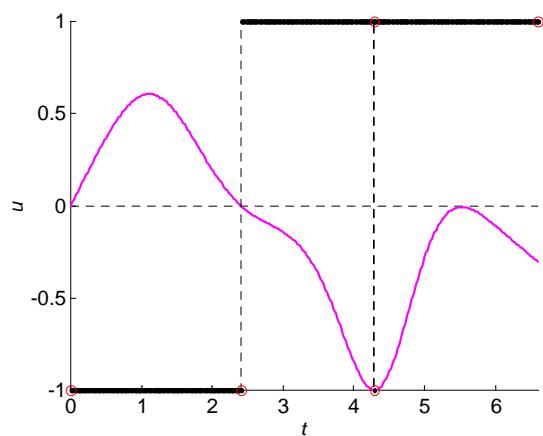
Iteracja 0. Sterowanie początkowe.



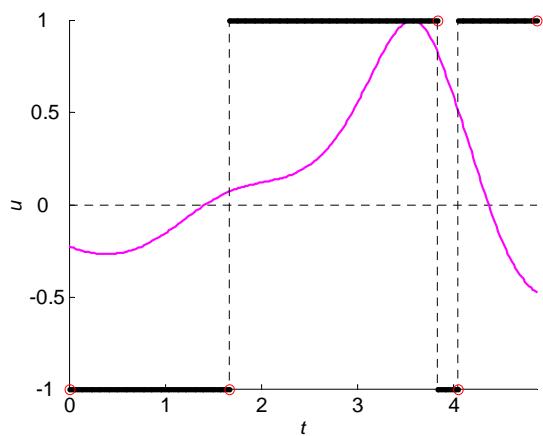
Iteracja 1. Generacja wewnętrzna.



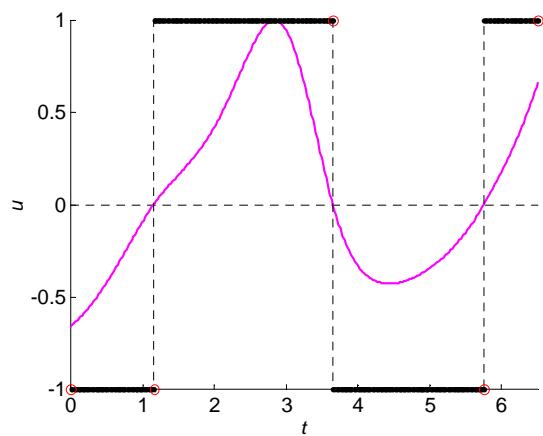
Iteracja 2. Po redukcji łuku na końcu.



Iteracja 10. Generacja wewnętrzna.

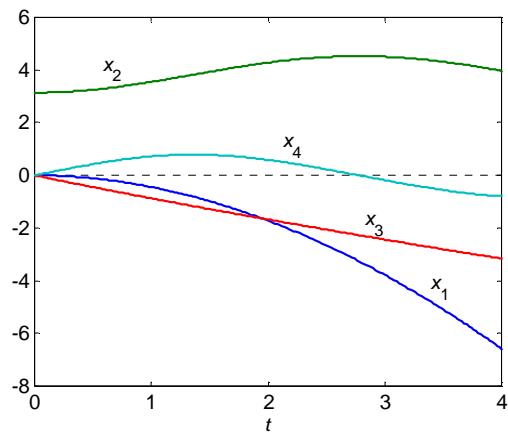


Iteracja 15.

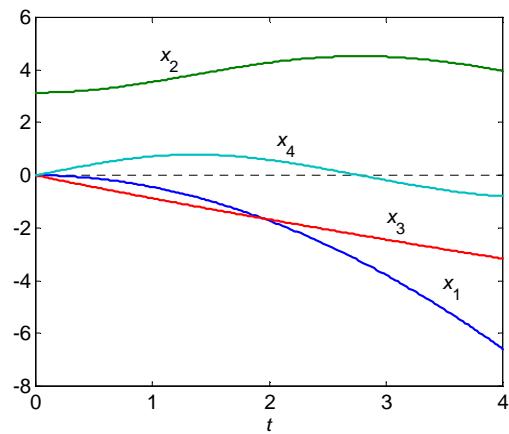


Iteracja 60. Sterowanie optymalne.

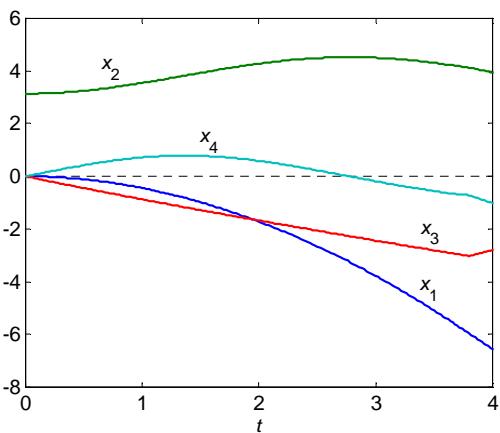
Rys. 6.12. Przebieg procesu optymalizacji w zadaniu postawienia wahadła na wózku z przykładu 3.4.3. Sterowania i antygradient wskaźnika jakości (linia ciągła), przeskalowane do przedziału  $[-1, 1]$ . Zmienne bezwymiarowe.



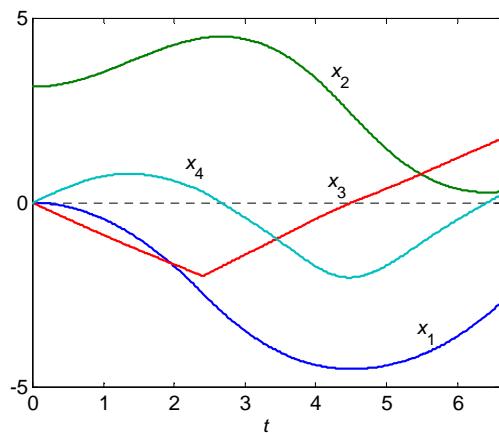
Iteracja 0. Sterowanie początkowe.



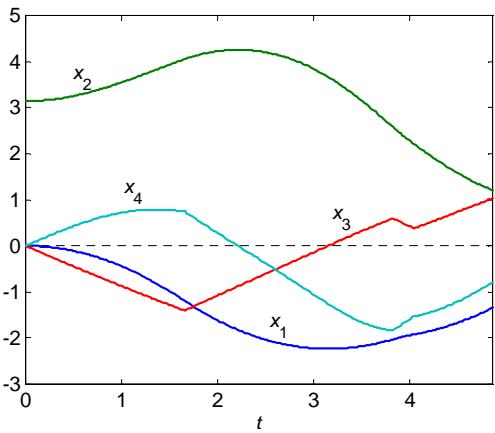
Iteracja 1. Generacja wewnętrzna.



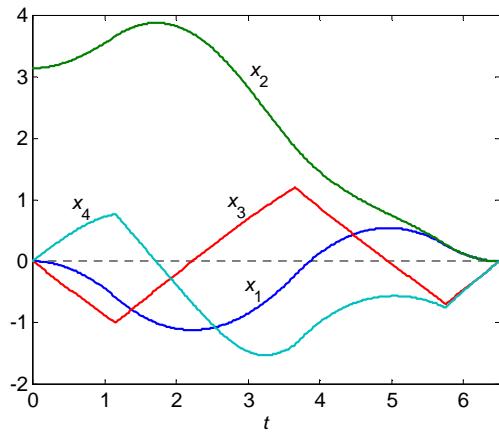
Iteracja 2. Redukcja łuku na końcu.



Iteracja 10. Generacja wewnętrzna.

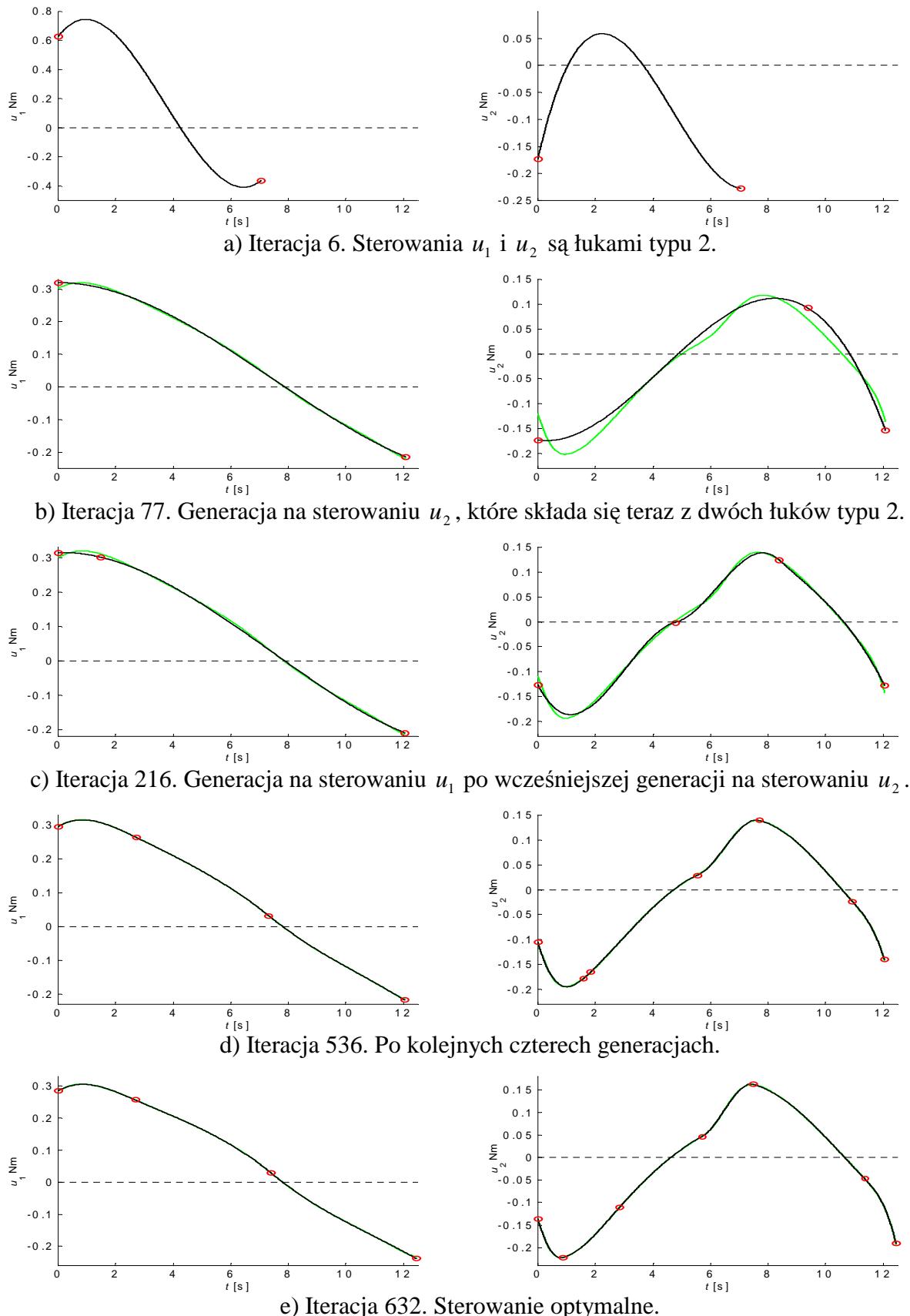


Iteracja 15.

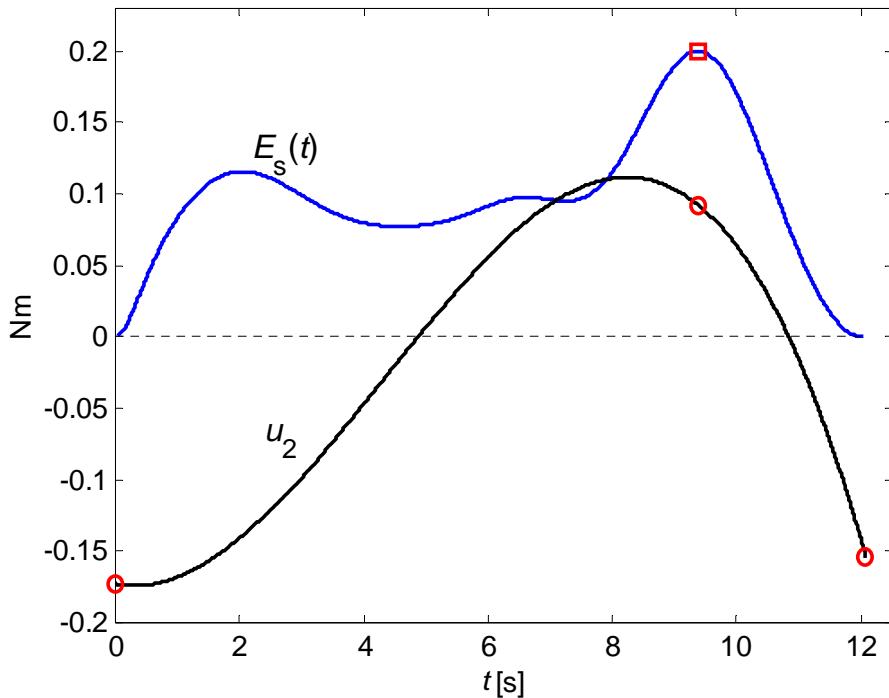


Iteracja 60. Trajektoria optymalna.

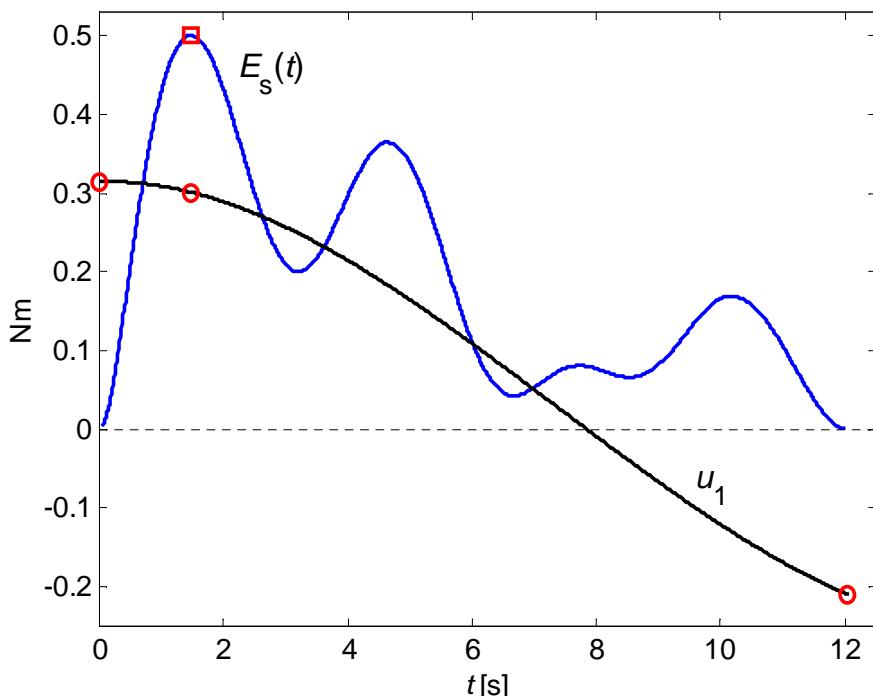
Rys. 6.13. Trajektorie stanu odpowiadające iteracjom z rys. 6.12. Zmienne bezwymiarowe.



Rys. 6.14. Przebieg procesu optymalizacji w zadaniu sterowania robotem z przykładu 4.4.1. Na rys. b-e) kolorem zielonym zaznaczono sterowanie wyliczone z warunku maksimum hamiltonianu. Kółkami oznaczono węzły strukturalne.



Rys. 6.15. Sterowanie  $u_2$  w iteracji 77 oraz przeskalowana efektywność ( $E_s$ ) generacji jednowęzłowej, wykonanej w iteracji 77 (por. rys. 6.14). Kółkami oznaczono węzły strukturalne. Widać, że nowy węzeł jest wstawiany w punkcie, w którym efektywność ma maksimum.



Rys. 6.16. Sterowanie  $u_1$  w iteracji 216 oraz przeskalowana efektywność ( $E_s$ ) generacji jednowęzłowej, wykonanej w iteracji 216 (por. rys. 6.14). Kółkami oznaczono węzły strukturalne. Widać, że nowy węzeł jest wstawiany w punkcie, w którym efektywność ma maksimum.

### **6.9. Uwagi o implementacji algorytmu MSE**

Algorytm MSE został zaimplementowany w środowisku MATLAB, przy czym najbardziej czasochłonne procedury całkowania równań stanu i równań sprzężonych oraz procedury wyliczania efektywności generacji napisano w języku C. Stopień komplikacji algorytmu jest bardzo duży, a liczba linii kodu wynosi blisko 15000. Największe trudności sprawiło napisanie procedur generacji. Stworzenie całości kodu oraz wykonanie testów zajęło autorowi blisko trzy lata. Większość kodu nie korzysta z zaawansowanych funkcji środowiska MATLAB i była pisana pod kątem przeniesienia algorytmu na język C/C++ i implementacji w środowisku czasu rzeczywistego. Jedyną istotną funkcją wyższego poziomu jest procedura *mldivide*, rozwiązujecka układ równań liniowych w metodzie BFGS. Należy jednak zdawać sobie sprawę, że implementacja algorytmu w języku C/C++, bez użycia wygodnych, nakierowanych na operacje wektorowo-macierzowe procedur MATLABA, jest zadaniem znacznie bardziej skomplikowanym niż implementacja w środowisku MATLAB.

Stosunkowo duży – w porównaniu z innymi metodami bezpośrednimi – jest nakład pracy analitycznej, przy wyprowadzaniu równań sprzężonych oraz formuł określających antygradient wskaźnika jakości. Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że podstawowym kryterium określającym granice stosowalności metody MSE jest nie tyle liczba zmiennych stanu, ile liczba sterowań, która, wedle szacunków autora, nie powinna przekraczać czterech. Własność ta wynika z faktu, że wyznaczenie gradientu i efektywności generacji dla pojedynczego sterowania wymaga – w najlepszym przypadku – numerycznego obliczania czterech całek. Powyższe trudności implementacyjne są jednak kompensowane przez szybką zbieżność metody. Podsumowując powyższe uwagi należy stwierdzić, że używanie tak zaawansowanej metody numerycznej powinno być uzasadnione względami ekonomicznymi oraz wymaganiami stawianymi przez sam obiekt sterowany.

## Rozdział 7. Porównanie algorytmów predykcyjnych z czasem dyskretnym z algorytmem QTO-RHC

W niniejszym rozdziale porównamy krótko algorytm QTO-RHC, z algorytmami predykcyjnymi bazującymi na modelach dyskretnych w czasie. Ze względu na dużą objętość pracy oraz dla uniknięcia analizy stochastycznych równań różniczkowych i różnicowych, pominiemy wpływ zakłóceń, błędów modelowania i estymacji stanu. Metody uwzględniania zakłóceń w algorytmach predykcyjnych z czasem dyskretnym podają Kwon i Han (2005), Tatjewski (2002) i Maciejowski (2002). Będziemy zatem zakładać idealną zgodność pomiędzy obiektem sterowanym, a jego modelem oraz przyjmiemy, że estymacja stanu jest dokładna i nie występują żadne zakłócenia.

### 7.1. Systemy ciągłe i dyskretnie w czasie

Modelowanie systemów dynamicznych jest dziedziną bardzo obszerną, w której, w zależności od potrzeb, stosuje się rozmaite podejścia. Można tu wyróżnić dwie podstawowe grupy modeli:

a) modele dyskretne w czasie, zapisywane w postaci równań różnicowych

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k), \quad (7.1)$$

gdzie  $F : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_0 = a$ ,  $u_k \in U \subset R^m$ ,  $0 \in U$ ,

b) modele z czasem ciągłym, zapisywane w postaci równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (7.2)$$

gdzie  $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $t \geq 0$ ,  $u(t) \in U \subset R^m$ ,  $0 \in U$ . Przyjmujemy, że prawa strona równania (7.1) zależy w sposób ciągły od obu argumentów oraz że  $F(0,0) = 0$ . Ponadto zakładamy, że funkcja  $f$  jest ciągła względem obu argumentów,  $f(0,0) = 0$  oraz że dla wszystkich  $\xi_1, \xi_2 \in R^n$ ,  $v \in U$ , spełniony jest warunek Lipschitza

$$|f(\xi_1, v) - f(\xi_2, v)| \leq \hat{L} |\xi_1 - \xi_2|, \quad (7.2a)$$

ze stałą  $\hat{L} > 0$ , niezależną od  $\xi_1, \xi_2, v$ . Oprócz modeli wymienionych powyżej, można spotkać rozmaite modele w postaci równań całkowych, modele Hammersteina i Wienera oraz wiele innych. W dalszym ciągu zajmiemy się modelami o postaci (7.1) i (7.2). Nazwy **system dyskretny w czasie**, będziemy używać mając na myśli równanie różnicowe (7.1), a nazwy **system ciągły w czasie**, będziemy używać odnośnie równania różniczkowego (7.2). Będziemy też mówić krótko: system dyskretny lub system ciągły, mając na myśli odpowiednio równanie (7.1) lub (7.2).

Wiele modeli procesów technologicznych i obiektów sterowanych budowanych jest w oparciu o zasady zachowania (pędu, energii, masy itd.) i zapisywanych w postaci równań różniczkowych zwyczajnych bądź cząstkowych. Opis w języku równań różniczkowych jest opisem naturalnym, zgodnym z intuicją oraz dobrze potwierdzonym doświadczalnie. Z drugiej strony, rozwój informatyki i metod obliczeniowych oraz dyskretny w czasie sposób działania komputerów, spowodowały intensywny rozwój teorii dyskretnych układów dynamicznych o postaci (7.1). Zachodzą tu cztery przypadki.

1. Obiekt jest ciągły w czasie i jego model jest ciągły w czasie.
2. Obiekt jest ciągły w czasie, a jego model jest dyskretny.
3. Obiekt jest dyskretny w czasie, a jego model jest ciągły.

4. Obiekt jest z natury dyskretny w czasie i jego model jest dyskretny w czasie.

Przypadki 1 i 2 występują powszechnie w sytuacjach, w których model obiektu jest sformułowany w oparciu o prawa fizyki i równania różniczkowe z nich wynikające. Przypadek 3 ma miejsce przy budowaniu modeli układów dyskretnych o bardzo dużej liczbie części składowych. Wówczas opis w postaci równania różniczkowego jest opisem uśrednionym. Przybliżenia takie stosuje się często w ekonomii i fizyce statystycznej.

## 7.2. Sterowanie predykcyjne systemami dyskretnymi w czasie

Pierwsze algorytmy predykcyjne zostały wyprowadzone w oparciu o modele liniowe dyskretne w czasie, a następnie idea repetycyjnego wyznaczania sterowania została przeniesiona na nieliniowe systemy dyskretne (zob. wstęp do niniejszej pracy). Istnieje bardzo wiele prac dotyczących sterowania predykcyjnego systemami dyskretnymi. Warto tu wymienić następujące pozycje: Clarke *et al.* 1987, Kwon i Han 2005, Maciejowski 2002, Tatjewski 2002, Mayne *et al.* 2000, Scokaert *et al.* 1999, Tyagunov 2004. Ze względu na bogatą literaturę ograniczymy się do kilku niezbędnych uwag. Zadanie sterowania optymalnego jest formułowane jak następuje. Przyjmuje się, że wskaźnik jakości w  $k$ -tym kroku czasowym ma postać

$$J(u, N_p; x_k) = N_p + \varepsilon_k \sum_{i=k}^{k+N_p-1} L(x_i, u_i) + q(x_{k+N_p}), \quad (7.3)$$

przy czym  $\varepsilon_k \in [0, 1]$ ,  $q : R^n \rightarrow R_0^+$ , jest funkcją ciągłą spełniającą warunek  $q(0) = 0$ . Funkcja  $L : R^n \times R^m \rightarrow R_0^+$  jest ciągła oraz spełnia warunki  $L(0,0) = 0$ ,  $L(\xi, v) \geq \alpha_L(|\xi|)$ , gdzie  $\alpha_L \in \mathcal{K}$ . Przez  $N_{\min} \geq 1$  oznaczamy minimalny horyzont predykcji. Liczba  $N_p \geq N_{\min}$  jest horyzontem predykcji. Zwykle rozróżnia się horyzont predykcji i horyzont sterowania (zob. np. Maciejowski 2002). Ograniczenia wartości sterowania mają często postać

$$u_k \in U, \quad U = \{u \in R^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad u_{\min} < 0, \quad u_{\max} > 0\}. \quad (7.4)$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych dla systemu dyskretnego (7.1), definiujemy jako zbiór ciągów, których wyrazy spełniają ograniczenie (7.4). Zbiór ten będziemy oznaczać przez  $\mathcal{U}$ . Zbiór dopuszczalnych stanów końcowych  $\Omega$ , określamy jak w def. 2.1.4. Ograniczenie stanu końcowego ma zwykle postać

$$x_{k+N_p} \in \Omega. \quad (7.5)$$

**Problem**  $D(x_k)$ . Należy znaleźć horyzont  $N_p \geq N_{\min}$  oraz ciąg wartości sterowania  $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+N_p-1}$ , minimalizujące wskaźnik jakości (7.3), na trajektoriach systemu (7.1), przy warunku początkowym  $x_k$  oraz przy spełnieniu ograniczeń (7.4) i (7.5).

Warunki stabilności algorytmu predykcyjnego dla systemów dyskretnych są analogiczne do warunków podanych w twierdzeniu 3.2.1. W szczególności, warunek (3.6) może być wyrażony następująco: dla każdego  $x_k \in \Omega$  istnieje sterowanie  $u_k \in U$ , takie że

- i)  $q(x_{k+1}) - q(x_k) + L(x_k, u_k) \leq 0$ ,
- ii)  $x_{k+1} = F(x_k, u_k) \in \Omega$ .

Pozostałe założenia mają charakter techniczny i nie wznoszą niczego nowego. Szczegółową analizę stabilności algorytmów predykcyjnych dla systemów dyskretnych w czasie można

znać w pracy (Mayne *et al.* 2000). Suboptimalne wersje algorytmów predykcyjnych podaje Scokaert i współautorzy (1999). Warunki, przy których suboptimalny algorytm predykcyjny jest stabilny i odporny, są dyskretnym odpowiednikiem warunków podanych w twierdzeniach 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1, 2.4.2.

### 7.3. Uwagi o dyskretyzacji równań różniczkowych

Od tej chwili będziemy przyjmować, że dany jest model systemu w postaci układu równań różniczkowych (7.2). O sterowaniu zakładamy, że jest funkcją przedziałami stałą i prawostronnie ciągłą. Okres dyskretyzacji sterowania oznaczamy przez  $T_0$  i zakładamy, że  $T_0 > 0$ . Wartość sterowania w przedziale  $[kT_0, (k+1)T_0)$  oznaczamy przez  $u_k$ . Symbolem  $\mathcal{F}$  będziemy oznaczać zbiór wszystkich ciągłych funkcji  $F : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ . Przez dyskretną aproksymację równania (7.2) w przedziale  $[0, N_p T_0]$ , będziemy rozumieć równanie (7.1), którego rozwiązanie dostatecznie dokładnie przybliża rozwiązanie równania (7.2) w chwilach  $t_k = kT_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N_p$ . Jako miarę dokładności tego przybliżenia można przyjąć funkcjonał  $S_{N_p} : R^n \times \mathcal{U} \times \mathcal{F} \rightarrow R_0^+$ ,

$$S_{N_p}(x_0, u, F) = \sum_{k=0}^{N_p} \|x(t_k) - x_k\|^2, \quad N_p \in \{1, 2, \dots\}. \quad (7.6)$$

**Definicja 7.3.1.** Jeżeli dla wszystkich  $x_0 \in R^n$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $N_p \in \{1, 2, \dots\}$ , zachodzi warunek  $S_{N_p}(x_0, u, F) = 0$ , to dyskretna aproksymacja równania (7.2) jest dokładna.  $\square$

Funkcja  $F$  powinna być wybrana tak, aby funkcjonał (7.6) przyjmował możliwie małą wartość. Aby zwrócić uwagę na trudności jakie mogą występować przy dyskretyzacji nieliniowych równań różniczkowych, rozważmy następujący prosty przykład.

**Przykład 7.3.1** (dyskretyzacja systemu nieliniowego pierwszego rzędu). Należy znaleźć dyskretną aproksymację równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3, \quad x(t) \in R, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0. \quad (7.7)$$

Można łatwo pokazać, że jedyne rozwiązanie równania (7.7) jest dane wzorem

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_0)(2t + x_0^{-2})^{-0.5} & \text{dla } x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x_0 = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Rozwiązanie to jest ciągłe względem  $t$  dla wszystkich  $t \in R_0^+$  i zależy w sposób ciągły od  $x_0$ . W celu uzyskania dyskretnego przybliżenia równania (7.7), zastosujemy metodę Eulera. Mamy następujące wzory określające rozwiązanie przybliżone w chwilach  $t_k = kT_0$ :

$$x_1 = x_0 - T_0 x_0^3 = x_0(1 - T_0 x_0^2), \quad x_k = x_{k-1}(1 - T_0 x_{k-1}^2), \quad k = 2, 3, \dots. \quad (7.9)$$

Niech warunek początkowy wynosi

$$x_0 = T_0^{-0.5}. \quad (7.10)$$

Wówczas, ze wzorów (7.9) i (7.10) otrzymujemy

$$x_1 = x_0(1 - T_0 x_0^2) = T_0^{-0.5}(1 - T_0 T_0^{-1}) = 0, \quad x_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots.$$

Korzystając z rozwiązania dokładnego (7.8) oraz z (7.10) mamy  $x(t_k) = (2kT_0 + T_0)^{-0.5}$  oraz  $x_k = 0$  dla  $k = 1, 2, \dots$ . A zatem względny błąd rozwiązania przyblizonego  $e_k = 100\%$  dla  $k = 1, 2, \dots$ . Widać stąd, że w rozważanym przypadku dyskretyzacja równania (7.7) metodą Eulera może prowadzić do całkowicie błędnych wyników. Oczywiście, dobierając odpowiednio mały krok, błąd rozwiązania można dowolnie zmniejszać.

Rozpatrzmy ponownie problem dyskretyzacji równania (7.7). Do obliczenia rozwiązania przybliżonego w chwili  $T_0$ , użyjemy stałokrokowej metody Rungego-Kutty rzędu drugiego (RK2), z odpowiednio małym krokiem  $h < T_0$ . Metoda ta jest określona wzorami (zob. np. Stoer 1987):

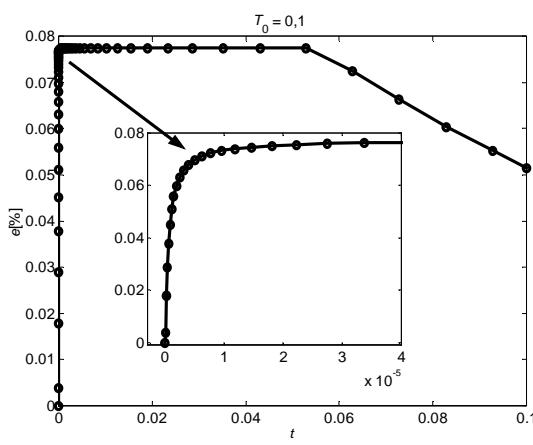
$$x_{i+1} = x_i + 0.5h(K_1 + K_2), \quad K_1 = f(x_i), \quad K_2 = f(x_i + hK_1),$$

$$i = 0, 1, \dots, (m-1), \quad u_i = u(ih) = 0, \quad h = m^{-1}T_0, \quad m \in \{2, 3, \dots\},$$

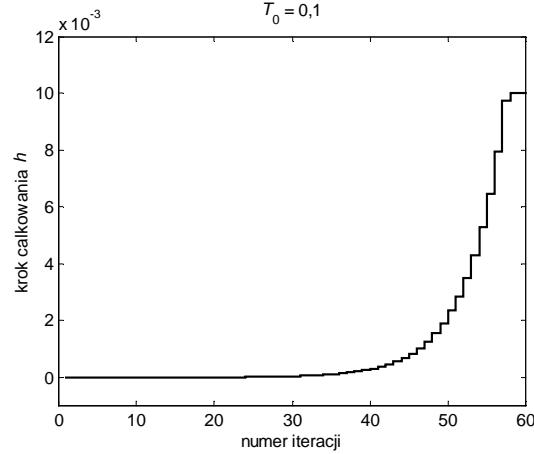
gdzie  $f$  oznacza prawą stronę równania (7.7). Przyjęto  $T_0 = 0,1$ ,  $x_0 = 1000$ . Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że względny błąd rozwiązania maleje poniżej  $0,1\%$ , gdy krok całkowania jest mniejszy niż  $10^{-6}$ . A zatem algorytm wykonuje ponad  $2 \cdot 10^5$  obliczeń prawej strony równania (7.7).

W kolejnym eksperymencie, do całkowania równania (7.7) w przedziale  $[0, T_0]$ , zastosowano zmiennokrokową procedurę ode23, z pakietu MATLAB. Względny błąd metody w funkcji czasu oraz krok całkowania w kolejnych iteracjach pokazano na rys. 7.1. Widać wyraźnie, że metoda ode23 wyznacza krótki krok początkowy, po czym krok ten jest stopniowo zwiększany. Względny błąd rozwiązania nie przekracza  $0,1\%$ . Widać również, że utrzymanie względnego błędu poniżej progu  $0,1\%$  wymaga kilkudziesięciu iteracji w ciągu jednego okresu dyskretyzacji sterowania. Wyniki powyższego eksperymentu dowodzą, że skuteczna obliczeniowo dyskretyzacja równania (7.7) wymaga zastosowania zmiennokrokowej procedury całkowania. Rozważając zatem dyskretne przybliżenie równania (7.2) za pomocą równania różnicowego (7.1), można podejrzewać, że nawet w prostych przypadkach, odwzorowanie  $F$  jest niezwykle skomplikowane. Odwzorowanie  $F$  otrzymuje się bowiem poprzez wielokrotne złożenie prawej strony równania różniczkowego (7.2). Ponadto  $F$  zależy od kroku  $h$ , który jest dobierany adaptacyjnie, podczas całkowania równania różniczkowego w przedziale stałości sterowania.

a)



b)



Rys. 7.1. a) Względny błąd rozwiązania równania (7.7) zmiennokrokową metodą ode23 oraz b) krok całkowania w poszczególnych iteracjach,  $T_0 = 0,1$ ,  $x_0 = 1000$ .

Przeanalizowany przykład pokazuje, że naiwne konstruowanie dyskretnych aproksymacji równań różniczkowych zwyczajnych, może prowadzić do błędnych wyników. Efekty analogiczne do opisanych powyżej, występują także dla stałokrokowych metod Rungego-Kutty rzędu 4. Całkowanie równań w przedziałach stałości sterowania powinno być wykonywane przy użyciu metod zmiennokrokowych. Dobre rezultaty uzyskuje się stosując metody oparte o wzory uwikłane (np. *implicit Runge-Kutta*). Metody stałokrokowe można stosować po wcześniejszym doborze kroku całkowania. Jeżeli sterowanie lub warunek początkowy ulegną zmianie, należy ponownie wyznaczyć odpowiedni krok całkowania. Należy też bezwzględnie sprawdzać, czy prawa strona równania różniczkowego spełnia warunek Lipschitza względem  $x$ . Jeżeli tak nie jest, to trzeba zachować szczególną ostrożność (w przykładzie 7.3.1 warunek ten nie jest spełniony).

#### 7.4. Problemy związane z konstrukcją dyskretnej wersji algorytmu QTO-RHC

Załóżmy, że dysponujemy odpowiednio dokładną dyskretną aproksymacją równania (7.2). Wydaje się, że istnieją trzy podstawowe źródła problemów przy konstruowaniu dyskretnej wersji algorytmu QTO-RHC. Po pierwsze, sterowalność systemu z czasem ciągłym na ogół nie implikuje sterowalności jego dyskretnej aproksymacji. Po drugie, odwzorowanie  $F$  jest często bardzo skomplikowane, a wyznaczenie jego pochodnych, niezbędnych dla większości algorytmów optymalizacji, jest zadaniem złożonym, wymagającym użycia procedur automatycznego różniczkowania. Po trzecie, trajektoria systemu ciągłego, wygenerowana przez sterowanie będące rozwiązaniem problemu  $D(x_k)$ , nie jest na ogół dostatecznie dokładnym przybliżeniem trajektorii optymalnej w problemie  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  (zob. p. 2.2). Zadowalające dyskretne aproksymacje rozwiązań problemu  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$ , uzyskuje się przy stosunkowo niewielkim okresie dyskretyzacji sterowań  $T_0$ . Jeżeli horyzont w problemie  $P(t_k, \varepsilon_k, \tilde{x}(t_k))$  wynosi  $T$ , to  $N_p = T_0^{-1}T$ . A zatem zmniejszanie  $T_0$  zwiększa liczbę zmiennych decyzyjnych, musimy bowiem wyznaczyć  $N_p m$  wartości sterowania. Ponieważ szybkość zbieżności algorytmów optymalizacji maleje zwykle ze wzrostem ilości zmiennych decyzyjnych, to czas rozwiązywania problemu  $D(x_k)$  może przekroczyć  $T_0$ .

#### 7.5. Stabilność systemu ciągłego, sterowanego za pomocą algorytmu predykcyjnego z czasem dyskretnym

Załóżmy, że znamy dokładną, dyskretną aproksymację równania (7.2) oraz że dysponujemy algorymem predykcyjnym z czasem dyskretnym, który stabilizuje system dyskretny (7.1). Należy odpowiedzieć na pytanie, czy algorytm ten stabilizuje również system z czasem ciągłym (7.2). Sterowanie  $u_k$  jest wyliczane na drodze rozwiązywania problemu  $D(x_k)$ . Traktując  $u_k$  jako funkcję  $x_k$ , możemy napisać

$$u_k = \phi(x_k) \in U \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Wówczas równanie (7.1) może być zapisane w postaci

$$x_{k+1} = F(x_k, \phi(x_k)), \quad x_0 = a. \quad (7.12)$$

**Definicja 7.5.1** (*stabilność w sensie Lapunowa*). System (7.12) będziemy nazywać stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli dla dowolnej liczby  $\lambda > 0$  istnieje liczba  $\eta > 0$ , taka że  $|x_0| < \eta \Rightarrow |x_k| < \lambda$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ .  $\square$

**Definicja 7.5.2** (*globalna asymptotyczna stabilność w sensie Lapunowa, GAS*). System (7.12) będziemy nazywać globalnie asymptotycznie stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli jest on stabilny w sensie Lapunowa oraz dla dowolnego  $x_0 \in R^n$  zachodzi warunek  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ .  $\square$

**Definicja 7.5.3.** Powiemy, że system ciągły (7.2) jest sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jeżeli sterowanie  $u$  jest określone następująco:

$$u(t) = u_k = \phi(x(t_k)) \text{ dla } t \in [t_k, t_{k+1}), t_k = kT_0, k = 0, 1, 2, \dots. \quad (7.13)$$

**Definicja 7.5.4** (*stabilność systemu ciągłego, sterowanego dyskretnym regulatorem predykcyjnym*). Jeżeli dla pewnego  $T_0 > 0$  i dowolnej liczby  $\gamma > 0$  istnieje warunek początkowy  $x_0$ , taki że rozwiązanie równania (7.2) ze sterowaniem (7.13), spełnia dla wszystkich  $t \geq 0$  nierówność  $|x(t)| < \gamma$ , to będziemy mówić, że system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest stabilny.  $\square$

**Definicja 7.5.5** (*globalna asymptotyczna stabilność systemu ciągłego, sterowanego dyskretnym regulatorem predykcyjnym*). Jeżeli system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest stabilny oraz dla każdego  $x_0 \in R^n$  rozwiązanie równania (7.2), ze sterowaniem (7.13), zmierza asymptotycznie do zera, to będziemy mówić, że system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest globalnie asymptotycznie stabilny.  $\square$

Podamy teraz warunki stabilności systemu ciągłego (7.2), sterowanego dyskretnym regulatorem predykcyjnym. Przypomnijmy, że zakładamy idealną zgodność pomiędzy obiektem i modelem oraz brak zakłóceń i dokładną estymację stanu.

**Twierdzenie 7.5.1** (*o stabilności systemu ciągłego z dyskretnym regulatorem predykcyjnym*).

Niech będą spełnione następujące założenia.

1. System (7.2) jest sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym (7.13).
2. Dyskretna aproksymacja równania (7.2) jest dokładna.
3. System dyskretny (7.12) jest GAS.
4. Dla wszystkich  $\xi_1, \xi_2 \in R^n$ ,  $v \in U$ , spełniony jest warunek Lipschitza

$$|f(\xi_1, v) - f(\xi_2, v)| \leq \hat{L} |\xi_1 - \xi_2|,$$

ze stałą  $\hat{L} > 0$ , niezależną od  $\xi_1, \xi_2, v$ .

5. Istnieje funkcja  $\beta \in \mathcal{K}$ , taka że

$$|\phi(\xi)| \leq \beta(|\xi|) \text{ dla wszystkich } \xi \in R^n. \quad (7.14)$$

Wówczas dla wszystkich  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , zachodzi oszacowanie

$$|x(t) - x_k| \leq |f(x_k, \phi(x_k))| T_0 \exp(\hat{L} T_0), \quad (7.15)$$

oraz system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest globalnie asymptotycznie stabilny.  $\square$

Dowód twierdzenia znajduje się w dodatku A.

## Komentarz

Twierdzenie 7.5.1 określa warunki stabilności systemu ciągłego z dyskretnym regulatorem predykcyjnym. Jeżeli warunki te są spełnione, to każda trajektoria systemu ciągłego, sterowanego dyskretnym regulatorem predykcyjnym, zmierza asymptotycznie do zera oraz dla warunku początkowego dostatecznie bliskiego zeru, trajektoria ta pozostaje w małym otoczeniu zera. Warunek (7.14) mówi, że małym odchyłkom stanu od zera powinny odpowiadać małe wartości sterowania. Warunek ten nie zawsze jest spełniony, a jego sprawdzenie może być trudne. Nierówność (7.15) określa zachowanie się trajektorii systemu ciągłego pomiędzy chwilami próbkowania. Jeżeli funkcja  $f$  przyjmuje duże wartości, to trajektoria  $x$  może daleko odbiegać od punktu  $x_k$  (pomimo, że  $x(t_k) = x_k$ ). Oszacowanie (7.15) można poprawić skracając okres dyskretyzacji  $T_0$ . Brak górnego ograniczenia na okres  $T_0$  jest nieco zaskakujący. Zauważmy jednak, że założyliśmy idealną zgodność pomiędzy obiektem a jego modelem oraz przyjęliśmy, że estymacja stanu jest dokładna i nie występują żadne zakłócenia. W przypadku zakłócanym, przy błędach modelowania i estymacji stanu, okres  $T_0$  powinien być możliwie krótki.

## 7.6. Zalety i wady algorytmów z predykcyjnych czasem ciągłym i z czasem dyskretnym

Algorytmy sterowania predykcyjnego z czasem dyskretnym są stosowane w przemyśle (zob. np. Qin i Badgwell 1997, 1998, Morari i Lee 1999). Podstawowymi zaletami podejścia dyskretnego są jego prostota pojęciowa (analizujemy równania różnicowe), dobre dopasowanie do dyskretnego sposobu działania komputerów i systemów pomiarowych oraz łatwość realizacji sterowań przedziałami stałych. Należy też stwierdzić, że algorytmy predykcyjne z czasem dyskretnym dobrze nadają się do sterowania liniowymi systemami dyskretnymi, przy kwadratowym wskaźniku jakości i ustalonym horyzoncie predykcji. Wydaje się jednak, że metodyka czasu dyskretnego jest słabo dostosowana do rozwiązywania zadań, w których czas osiągnięcia celu jest zmienną decyzyjną w zadaniu optymalizacji. Ponadto, jak to pokazano powyżej, dyskretyzacja nieliniowych równań różniczkowych sprawia wiele trudności, a liczba zmiennych decyzyjnych w zadaniu optymalizacji może być bardzo duża. Metodyka czasu dyskretnego wyrosła z przyjętego w latach 70-tych ubiegłego wieku poglądu, mówiącego, iż metody sterowania powinny być dostosowane do dyskretnego w czasie sposobu działania komputerów. Występuje tu pewna nadmiarowość. Mamy bowiem obiekt podlegający prawom fizyki, jego model w postaci równania różniczkowego (jeden opis), następnie tworzymy model z czasem dyskretnym (drugi opis), po czym na podstawie modelu dyskretnego dobieramy regulator i stosujemy go do obiektu. Prowadząc rozważania w języku równań różniczkowych, unikamy trudności związanych z tworzeniem i analizą modelu z czasem dyskretnym. Ponadto opis za pomocą równań różniczkowych obejmuje znacznie szerszą klasę zjawisk i zadań sterowania.

W przypadku algorytmów z czasem ciągłym, po rozwiązaniu zadania sterowania optymalnego otrzymuje się sterowanie, którego wartości w przedziale  $[t_k, t_k + \delta]$  są w pełni określone przez parametry (zob. p. 6.4). Liczba parametrów określających sterowanie jest niewielka, zwykle mniejsza niż 50. Początkowy fragment sterowania dyskretyzuje się z okresem  $T_0$ , wielokrotnie mniejszym od  $\delta$  (np.  $T_0 = 10^{-3} \delta$ ). Otrzymany ciąg wartości sterowania stosuje się do obiektu w przedziale czasu  $[t_k, t_k + \delta]$ . Ponieważ czasy przetwarzania współczesnych przetworników D/A są rzędu pojedynczych mikrosekund, to w wielu praktycznych problemach otrzymuje się bardzo dokładną, dyskretną aproksymację sterowania optymalnego. W przeciwnieństwie do algorytmów z czasem dyskretnym, okres  $T_0$

nie jest tu uzależniony od czasu obliczeń. Okres wyliczania sterowania  $\delta$  powinien być możliwie krótki, tak aby regulator skutecznie eliminował wpływ zakłóceń. Przejście do granicy  $\delta \rightarrow 0$  jest nieuzasadnione z dwóch powodów. Po pierwsze, rozwiązanie zadania sterowania optymalnego nie jest na ogół znane natychmiast i wymaga pewnego czasu. Po drugie, przyjęcie  $\delta = 0$  prowadzi do dużych trudności teoretycznych związanych z istnieniem rozwiązań równań różniczkowych (Fontes 2003a). Algorytm predykcyjny z  $\delta = 0$  omawia Gyurkovics (1998). Wadami algorytmów z czasem ciągły są dużo większe trudności teoretyczne przy analizie równań różniczkowych i problemów sterowania optymalnego oraz duża komplikacja kodu algorytmów optymalizacji dynamicznej. Na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat można zaobserwować wzrost zainteresowania algorytmami predykcyjnymi z czasem ciągły (Chen i Allgöwer 1998 a,b, Chen *et al.* 1995, Findeisen *et al.* 2003 a,b, Fontes 2000, 2000a, 2003, 2003a, Gyurkovics 1998, Jadbabaie 2001, Mayne i Michalska 1990, Michalska i Mayne 1993, Michalska 1997, Primbs *et al.* 1998). Wydaje się również, że systemy z czasem ciągły umożliwiają skuteczniejszą, niż w przypadku dyskretnym, identyfikację parametrów i estymację stanu. Pewnych argumentów dostarczają tu Rao i Unbehauen (2006) oraz Michalska i Mayne (1995). Podsumowując, należy stwierdzić, że nie istnieje wyraźna przewaga algorytmów z czasem dyskretnym nad algorytmami z czasem ciągły i na odwrót. Oba podejścia znajdują zastosowania, zależnie od charakteru problemu. Algorytmy z czasem dyskretnym są znacznie powszechniej stosowane i badane, natomiast algorytmy z czasem ciągły obejmują szerszy zakres zadań sterowania i mają większe znaczenie poznawcze.

## **Podsumowanie**

### **1. Przegląd uzyskanych wyników**

W rozprawie sformułowano ogólny algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją i adaptacją wskaźnika jakości dla systemów opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Podano szereg przykładów zastosowań algorytmu w układach magnetycznej lewitacji, technologii chemicznej, robotyce i lotach kosmicznych. Rozdział drugi rozprawy zawiera dowody twierdzeń o stabilności i odporności algorytmu przy założeniu, że rozwiązania problemów optymalizacji są rozwiązaniami suboptymalnymi. Ta własność – zauważona dla systemów dyskretnych w pracy (Scokaert *et al.* 1999) – przenosi się na systemy z czasem ciągłym i umożliwia redukcję nakładu obliczeń. Bazując na wynikach rozdziału drugiego, w rozdziałach trzecim i czwartym zaproponowano nowy, quasi-czasooptymalny algorytm predykcyjny, łączący w sobie cechy sterowania czasooptymalnego i stabilizacji. Rozdział 5 zawiera szczegółowe wyniki dotyczące wyznaczania ograniczeń stanu końcowego oraz własności asymptotycznych zaproponowanych algorytmów predykcyjnych. Metoda MSE, zaadaptowana do potrzeb sterowania predykcyjnego, okazała się skuteczna. Metoda ta charakteryzuje się dużą szybkością zbieżności w pobliżu rozwiązania, co czyni ją użyteczną w zastosowaniu do algorytmów predykcyjnych, omawianych w niniejszej pracy. Można przypuszczać, że proponowane algorytmy predykcyjne będzie można zastosować do pracy w czasie rzeczywistym. Następujące elementy pracy uważam za oryginalne.

1. Sformułowanie ogólnego algorytmu predykcyjnego z adaptacją wskaźnika jakości i przybliżoną optymalizacją.
2. Dowody stabilności i odporności ogólnego algorytmu predykcyjnego z adaptacją wskaźnika jakości i przybliżoną optymalizacją.
3. Propozycja quasi-czasooptymalnego algorytmu predykcyjnego z adaptacją wskaźnika jakości i przybliżoną optymalizacją oraz podanie warunków jego stabilności i odporności.
4. Określenie warunków stabilności i odporności quasi-czasooptymalnego algorytmu predykcyjnego dla zadań, w których funkcja podcałkowa we wskaźniku jakości zależy tylko od sterowania.
5. Dostosowanie metody MSE do potrzeb sterowania predykcyjnego. Na uwagę zasługuje tu oryginalny i uniwersalny kod metody, umożliwiający zastosowanie jej do rozmaitych zadań sterowania optymalnego.

### **2. Kierunki dalszych badań**

Należy wyraźnie podkreślić, że praca nie omawia kilku istotnych i standardowo uwzględnianych zagadnień. W pracy przyjęto, że istnieje obserwator stanu, gwarantujący ograniczony błąd estymacji stanu. Może to być obserwator typu *high gain*. Obserwator taki silnie wzmacnia zakłóczenia o wysokich częstotliwościach, co stanowi jego wadę. Wydaje się, że należy rozpatrzyć inne konstrukcje obserwatorów, lepiej dostosowane do potrzeb sterowania predykcyjnego, takie jak obserwatory z przesuwany oknem (MHE – *Moving Horizon Estimation*, Michalska i Mayne 1995, Rao 1998). W pracy założono, że parametry modelu są znane. Zwykle jednak identyfikacja parametrów modelu prowadzona jest na bieżąco, za pomocą tzw. rozszerzonego filtra Kalmana (EKF – *Extended Kalman Filter*), bądź też stosowana jest technika estymacji z przesuwany oknem (MHE). Kolejnym zagadnieniem wymagającym rozwiązania jest uogólnienie otrzymanych wyników na systemy niestacjonarne (tzn. takie, w których prawa strona równania stanu zależy jawnie od czasu). Wydaje się, że

przedstawione wyniki dają się bez większych trudności przenieść na przypadek systemów niestacjonarnych. Pominięty został, ważny z punktu widzenia zastosowań, problem nadążania za trajektorią odniesienia. W pewnych przypadkach problem ten daje się sprowadzić do zadania stabilizacji, jednak na ogół tak nie jest.

Zdaniem autora, najważniejszym i jednocześnie trudnym problemem jest uwzględnienie ograniczeń stanu lub ograniczeń mieszanych na stan i sterowanie. W prostszych przypadkach problem ograniczeń stanu można łatwo rozwiązać, dodając do wskaźnika jakości odpowiednio zdefiniowaną funkcję kary. Taki dodatkowy człon we wskaźniku jakości nie wpływa na prawdziwość przedstawionych w pracy twierdzeń. Wydaje się jednak, że metoda funkcji kary nie zawsze jest użyteczna, gdyż uzyskane na tej drodze rozwiązania optymalne często przekraczają ograniczenia, a zbieżność wielu algorytmów optymalizacji dynamicznej staje się wówczas bardzo powolna. Obecność ograniczeń stanu wymusza inną konstrukcję algorytmu optymalizacji, który musi uwzględniać te ograniczenia już na etapie całkowania równań modelu i przy wyborze struktury sterowania optymalnego. Jeżeli system nie jest stabilizowalny w otoczeniu celu oraz występują ograniczenia stanu, to przestrzeń stanów może zawierać obszary, których nie można opuścić, stosując sterowania dopuszczalne. Jako przykład można tu rozważyć zadanie parkowania samochodu, przy ograniczeniach położenia (zob. Fontes 2003a). Obecność zakłóceń jeszcze bardziej komplikuje zagadnienie, ponieważ musimy wyznaczyć trajektorię na tyle odległą od obszarów niedopuszczalnych, aby zakłócenia nie „wepchnęły” stanu systemu w obszar zabroniony. Przedstawione powyżej zagadnienia powinny stanowić kierunek dalszych badań.

### **Dodatek A – Twierdzenia pomocnicze**

**Nierówność Höldera dla całek** (zob. Kudrewicz 1970).

Jeżeli  $x \in L^p([0, T], R)$ ,  $y \in L^q([0, T], R)$ , gdzie  $p, q > 1$  oraz  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to funkcja  $\varphi : [0, T] \rightarrow R$ , zdefiniowana wzorem  $\varphi(t) = x(t)y(t)$ , jest elementem przestrzeni  $L^1([0, T], R)$  oraz zachodzi nierówność

$$\int_0^T |x(t)y(t)| dt \leq \left( \int_0^T |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^T |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

Dla funkcji  $u, v$ , o wartościach w  $R^n$ , mamy oszacowanie

$$\int_0^T |u(t)| |v(t)| dt \leq \left( \int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^T |v(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

Podstawiając  $v$ , takie że  $|v(t)| = 1$ , otrzymujemy

$$\int_0^T |u(t)| dt \leq T^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

**Lemat 1** (Gronwalla–Bellmana, zob. Demidowicz 1972, s.125). Jeżeli  $\omega(t) \geq 0$ ,  $b(t) \geq 0$  dla  $t \geq t_0$  oraz  $\omega, b$  są funkcjami ciągłymi, przy czym dla  $t \geq t_0$  spełniona jest nierówność

$$\omega(t) \leq a + \int_{t_0}^t b(s)\omega(s)ds, \quad a > 0,$$

to dla  $t \geq t_0$  zachodzi oszacowanie

$$\omega(t) \leq a \exp \int_{t_0}^t b(\tau)d\tau. \quad \square$$

**Twierdzenie 2.1.1.** Niech  $x : [t, t+T] \rightarrow R^n$  będzie rozwiązaniem równania (2.1) ze sterowaniem  $u \in PC([t, t+T], U)$ . Wówczas dla wszystkich  $s \in [t, t+T]$

(i) spełniona jest nierówność

$$|x(s)| \leq \left( |x(t+T)| + L_u(0)(q\hat{L})^{-1/q} \left( \int_t^{t+T} |u(s)|^p ds \right)^{1/p} \right) \exp(\hat{L}T),$$

gdzie  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

(ii) ponadto jeżeli  $x(t+T) \in \Omega$ , to zachodzi oszacowanie

$$|x(s)| \leq M_1 \exp(\hat{L}T),$$

gdzie

$$M_1 = \sup_{\xi \in \Omega} |\xi| + L_u(0) \hat{L}^{-1} \sup_{v \in U} |v|.$$

*Dowód:* Udowodnimy najpierw punkt (ii) twierdzenia. Ponieważ prawa strona równania (2.1) nie zależy jawnie od czasu, to wystarczy rozpatrzyć przypadek sterowania określonego na odcinku  $[0, T]$ . Niech zatem  $u : [0, T] \rightarrow U \subset R^n$ , będzie sterowaniem dopuszczalnym, a  $x(t)$  odpowiadającą mu trajektorią z warunkiem początkowym  $x(0) = x_0$  oraz końcowym  $x(T)$ . Rozważmy równanie (2.1) z odwróconym kierunkiem czasu

$$\dot{z}(\tau) = -f(z(\tau), w(\tau), p_0), \quad \tau \in [0, T], \quad z(0) = z_0 = x(T). \quad (4)$$

Jeżeli  $w(\tau) = u(T - \tau)$ , to  $z(\tau) = x(T - \tau)$  jest rozwiązaniem równania (4). Zachodzi oszacowanie:

$$\begin{aligned} |z(\tau)| &\leq |z_0| - \int_0^\tau f(z(s), w(s), p_0) ds \leq |z_0| + \int_0^\tau |f(z(s), w(s), p_0)| ds \leq \\ &\leq |z_0| + \int_0^\tau |f(z(s), w(s), p_0) - f(0, w(s), p_0) + f(0, w(s), p_0)| ds \leq \\ &\leq |z_0| + \int_0^\tau |f(z(s), w(s), p_0) - f(0, w(s), p_0)| + |f(0, w(s), p_0)| ds. \end{aligned}$$

Z warunku Lipschitza (2.1a) otrzymujemy

$$|z(\tau)| \leq |z_0| + \int_0^\tau (\hat{L} |z(s)| + |f(0, w(s), p_0)|) ds. \quad (5)$$

Korzystając z warunku Lipschitza (2.1b) dostajemy

$$|f(0, w(s), p_0)| \leq |f(0, w(s), p_0) - f(0, 0, p_0) + f(0, 0, p_0)| \leq L_u(0) |w(s)|.$$

Podstawiając tę nierówność do (5) otrzymujemy

$$|z(\tau)| \leq |z_0| + \int_0^\tau (\hat{L} |z(s)| + L_u(0) |w(s)|) ds.$$

Zauważmy, że wyrażenie  $|z(\tau)|$  jest szacowane od góry przez rozwiązanie równania całkowego

$$\zeta(\tau) = \zeta(0) + \int_0^\tau (\hat{L}\zeta(s) + L_u(0) |w(s)|) ds, \quad \zeta(0) = |z_0|.$$

Wynika stąd, że funkcja  $\zeta$  musi spełniać równanie różniczkowe

$$\dot{\zeta}(\tau) = \hat{L}\zeta(\tau) + L_u(0) |w(\tau)|, \quad \zeta(0) = |z_0|.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\zeta(\tau) = \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + L_u(0) \int_0^\tau \exp(\hat{L}(\tau-s)) |w(s)| ds. \quad (6)$$

Funkcja  $\zeta$  spełnia następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
 \zeta(\tau) &\leq \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + L_u(0)(\sup_{v \in U} |v|) \exp(\hat{L}\tau) \int_0^\tau \exp(-\hat{L}s) ds \leq \\
 &\leq \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + (\sup_{v \in U} |v|) L_u(0) \hat{L}^{-1} (\exp(\hat{L}\tau) - 1) \leq \\
 &\leq (\zeta(0) + (\sup_{v \in U} |v|) L_u(0) \hat{L}^{-1}) \exp(\hat{L}\tau).
 \end{aligned}$$

Pamiętając, że  $\zeta(0) = |z_0|$ ,  $|z(\tau)| \leq \zeta(\tau)$  otrzymujemy nierówność

$$|z(\tau)| \leq (|z_0| + L_u(0) \hat{L}^{-1} \sup_{v \in U} |v|) \exp(\hat{L}\tau),$$

prawdziwą dla  $\tau \in [0, T]$ . Ponieważ prawa strona jest ścisłe rosnąca względem  $\tau$ , to

$$|z(\tau)| \leq (|z_0| + L_u(0) \hat{L}^{-1} \sup_{v \in U} |v|) \exp(\hat{L}T).$$

Ponieważ  $z_0 = x(T) \in \Omega$  oraz  $z(\tau) = x(T - \tau)$ , to ostatecznie otrzymujemy

$$|x(\tau)| \leq (\sup_{\xi \in \Omega} |\xi| + L_u(0) \hat{L}^{-1} \sup_{v \in U} |v|) \exp(\hat{L}T) = M_1 \exp(\hat{L}T), \quad \tau \in [0, T].$$

Aby udowodnić pierwszą część twierdzenia, będziemy przekształcać równość (6). Z nierówności Höldera mamy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
 \zeta(\tau) &= \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + L_u(0) \exp(\hat{L}\tau) \int_0^\tau \exp(-\hat{L}s) |w(s)| ds \leq \\
 &\leq \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + L_u(0) \exp(\hat{L}\tau) \left( \int_0^\tau \exp(-q\hat{L}s) ds \right)^{1/q} \left( \int_0^\tau |w(s)|^p ds \right)^{1/p} = \\
 &= \exp(\hat{L}\tau)\zeta(0) + L_u(0) \exp(\hat{L}\tau) \left( \frac{1 - \exp(-q\hat{L}\tau)}{qL} \right)^{1/q} \left( \int_0^\tau |w(s)|^p ds \right)^{1/p} \leq \\
 &\leq \exp(\hat{L}\tau) \left( \zeta(0) + L_u(0) (qL)^{-1/q} \left( \int_0^\tau |w(s)|^p ds \right)^{1/p} \right).
 \end{aligned}$$

Ponieważ prawa strona ostatniej nierówności jest ścisłe rosnąca względem  $\tau$  oraz  $\zeta(0) = |z_0|$  i  $|z(\tau)| \leq \zeta(\tau)$ , to

$$|z(\tau)| \leq \exp(\hat{L}T) \left( |z_0| + L_u(0) (qL)^{-1/q} \left( \int_0^T |w(s)|^p ds \right)^{1/p} \right).$$

Ponieważ  $z_0 = x(T)$  oraz  $z(\tau) = x(T - \tau)$ ,  $w(\tau) = u(T - \tau)$ , to ostatecznie mamy

$$|x(\tau)| \leq \left( |x(T)| + L_u(0) (qL)^{-1/q} \left( \int_0^T |u(s)|^p ds \right)^{1/p} \right) \exp(\hat{L}T)$$

dla wszystkich  $\tau \in [0, T]$ .  $\square$

**Lemat 2.** Niech  $\mathbf{L}_M$  będzie zbiorem wszystkich funkcji  $y : [0, T] \rightarrow R_0^+$  spełniających warunki:

**W1)**  $y(t) \leq M_0 \quad \forall t \in [0, T]$ , gdzie  $M_0 > 0$  jest ustaloną liczbą,

**W2)**  $|y(t_1) - y(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|$ ,  $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ , gdzie  $M > 0$  jest ustaloną liczbą.

Niech będzie dana funkcja  $h \in \mathcal{K}$  oraz funkcjonał  $Q : \mathbf{L}_M \rightarrow R_0^+$ ,

$$Q(y) = \int_0^T h(y(t)) dt.$$

Niech

$$\mathbf{L}_{M,q} = \{y \in \mathbf{L}_M : Q(y) \leq q\},$$

będzie zbiorem poziomowym funkcjonału  $Q$ , przy czym  $q \in R_0^+$ .

Wówczas:

**(T1)** istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że dla dowolnego  $q \in R_0^+$  oraz dla wszystkich  $y \in \mathbf{L}_{M,q}$ , spełniony jest warunek

$$\sup_{t \in [0, T]} y(t) \leq \varphi(q),$$

**(T2)** jeżeli dodatkowo  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = \infty$ , to warunek **W1** może być pominięty i zachodzi **T1**.

*Dowód:* Rozważmy funkcjonał  $S : \mathbf{L}_M \rightarrow R_0^+$ ,

$$S(y) = \sup_{t \in [0, T]} y(t)$$

oraz funkcję  $\Sigma : R_0^+ \rightarrow R_0^+$ ,

$$\Sigma(q) = \sup_{y \in \mathbf{L}_{M,q}} S(y).$$

Załóżmy na początek, że  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = \infty$  i pominiemy warunek **W1**. Wówczas dla dowolnej

liczby  $q \in R_0^+$  istnieje funkcja  $y \in \mathbf{L}_{M,q}$ , taka że  $Q(y) = q$ . Aby tego dowieść, wystarczy wziąć  $y(t) = h^{-1}(T^{-1}q)$  i wówczas

$$Q(y) = \int_0^T h(h^{-1}(T^{-1}q)) dt = q.$$

Funkcjonał  $S$  osiąga maksimum w  $\mathbf{L}_{M,q}$  w dokładnie dwóch punktach  $\bar{y}$  i  $\bar{\bar{y}}$ ,  $\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in \mathbf{L}_{M,q}$ ,

gdzie

$$\bar{y}(t) = \max(\Sigma(q) - Mt, 0), \quad t \in [0, T], \quad \bar{\bar{y}}(t) = \bar{y}(T - t),$$

oraz

$$S(\bar{y}) = S(\bar{\bar{y}}) = \Sigma(q).$$

Funkcja  $\Sigma$  jest ciągła i ściśle rosnąca,  $\Sigma(0) = 0$  oraz dla każdej funkcji  $y \in \mathbf{L}_{M,q}$  spełniony jest warunek  $S(y) \leq \Sigma(q)$ . Zatem przyjmując  $\varphi = \Sigma$ , widzimy, że spełniony jest warunek w punkcie **T1** lematu. Założymy teraz, że zachodzi **W1** oraz  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) < \infty$ . Zauważmy, że  $\Sigma(q) \leq M_0$  dla wszystkich  $q \in R_0^+$  oraz że istnieje liczba  $q_{\max} > 0$ , taka że dla  $q \in [0, q_{\max})$  funkcja  $\Sigma$  jest ściśle rosnąca, a dla  $q \geq q_{\max}$ ,  $\Sigma(q) = M_0$ . Ponadto  $\Sigma(0) = 0$ . Możemy więc wybrać taką funkcję  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taką że  $\Sigma(q) \leq \varphi(q)$  dla wszystkich  $q \in R_0^+$ . A zatem dla każdej funkcji  $y \in \mathbf{L}_{M,q}$  spełniony jest warunek  $S(y) \leq \Sigma(q) \leq \varphi(q)$ , skąd wynika **T1**.  $\square$

Lemat 2 można łatwo rozszerzyć na funkcje o wartościach w  $R^n$ .

**Lemat 2.1.1.** Niech  $\mathbf{L}_M$  będzie zbiorem wszystkich funkcji  $x : [0, T] \rightarrow R^n$  spełniających warunki:

**W1)**  $|x(t)| \leq M_0 \quad \forall t \in [0, T]$ , gdzie  $M_0 > 0$  jest ustaloną liczbą,

**W2)**  $|x(t_1) - x(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|$ ,  $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ , gdzie  $M > 0$  jest ustaloną liczbą.

Niech będzie dana funkcja  $h \in \mathcal{K}$  oraz funkcjonał  $Q : \mathbf{L}_M \rightarrow R_0^+$ ,

$$Q(x) = \int_0^T h(|x(t)|) dt.$$

Niech

$$\mathbf{L}_{M,q} = \{x \in \mathbf{L}_M : Q(x) \leq q\},$$

będzie zbiorem poziomиковym funkcjonału  $Q$ , przy czym  $q \in R_0^+$ .

Wówczas:

**T1)** istnieje funkcja  $\varphi \in \mathcal{K}$ , taka że dla dowolnego  $q \in R_0^+$  oraz dla wszystkich  $x \in \mathbf{L}_{M,q}$ , spełniony jest warunek

$$\sup_{t \in [0, T]} |x(t)| \leq \varphi(q),$$

**T2)** jeżeli dodatkowo  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = \infty$ , to warunek **W1** może być pominięty i zachodzi **T1**.

*Dowód:* Wystarczy pokazać, że funkcja  $y(t) = |x(t)|$  spełnia założenia lematu 2. Warunek **W1** lematu 2 jest spełniony w naturalny sposób. Warunek **W2** lematu 2 wynika z następujących nierówności:

$$\begin{aligned} y(t_1) - y(t_2) &= |x(t_1)| - |x(t_2)| = |x(t_1) - x(t_2) + x(t_2)| - |x(t_2)| \leq \\ &\leq |x(t_1) - x(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

Pozostała cześć dowodu jest analogiczna do dowodu lematu 2.  $\square$

**Twierdzenie 7.5.1** (*o stabilności systemu ciągłego z dyskretnym regulatorem predykcyjnym*).

1. System (7.2) jest sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym (7.13).
2. Dyskretna aproksymacja równania (7.2) jest dokładna.
3. System dyskretny (7.12) jest GAS.
4. Dla wszystkich  $\xi_1, \xi_2 \in R^n$ ,  $v \in U$ , spełniony jest warunek Lipschitza

$$|f(\xi_1, v) - f(\xi_2, v)| \leq \hat{L} |\xi_1 - \xi_2|, \quad (7)$$

ze stałą  $\hat{L} > 0$ , niezależną od  $\xi_1, \xi_2, v$ .

5. Istnieje funkcja  $\beta \in \mathcal{K}$ , taka że

$$|\phi(\xi)| \leq \beta(|\xi|) \text{ dla wszystkich } \xi \in R^n. \quad (8)$$

Wówczas dla wszystkich  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , zachodzi oszacowanie

$$|x(t) - x_k| \leq |f(x_k, \phi(x_k))| T_0 \exp(\hat{L}T_0), \quad (9)$$

oraz system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest globalnie asymptotycznie stabilny.

*Dowód:* Rozwiążanie równania (7.2) ze sterowaniem (7.13) istnieje dla każdego  $x_0 \in R^n$ ,  $t \geq 0$ . Z założenia 2 mamy  $x(t_k) = x_k$  dla  $k \in N$ . Z równania (7.2) oraz wzoru (7.13) mamy

$$x(t) = x_k + \int_{t_k}^t f(x(s), \phi(x_k)) ds, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad \text{Z warunku Lipschitza (7) mamy oszacowania}$$

$$|x(t) - x_k| \leq T_0 |f(x_k, \phi(x_k))| + \int_{t_k}^t \hat{L} |x(s) - x_k| ds, \quad (10)$$

$$|x(t)| \leq |x_k| + T_0 |f(0, \phi(x_k))| + \int_{t_k}^t \hat{L} |x(s)| ds \quad \text{dla } t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (11)$$

Stosując do nierówności (10) lemat Gronwalla otrzymujemy nierówność (9). Z nierówności (11) oraz z lematu Gronwalla mamy oszacowanie

$$|x(t)| \leq (|x_k| + T_0 |f(0, \phi(x_k))|) \exp(\hat{L}T_0) \quad \text{dla } t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (12)$$

Funkcja  $\sigma : R_0^+ \rightarrow R_0^+$ ,  $\sigma(|x_k|) = \sup_{|v| \leq \beta(|x_k|)} |f(0, v)|$ , jest ciągła, nieujemna oraz  $\sigma(0) = 0$ .

Zauważmy, że  $|f(0, \phi(x_k))| \leq \sigma(|x_k|)$ . Wstawiając tę nierówność do (12) otrzymujemy

$$|x(t)| \leq (|x_k| + T_0 \sigma(|x_k|)) \exp(\hat{L}T_0) \quad \text{dla } t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (13)$$

Funkcja  $b : R^n \times R_0^+ \rightarrow R_0^+$ ,  $b(x_k, T_0) = (|x_k| + T_0 \sigma(|x_k|)) \exp(\hat{L}T_0)$  jest ciągła względem obu argumentów oraz  $b(0, T_0) = 0$ . Stąd i z założenia 3 wynika, że dla dowolnej liczby  $\gamma > 0$  istnieje warunek początkowy  $x_0$ , taki że  $|x(t)| < \gamma$  dla  $t \geq 0$ . Ponieważ system (7.12) jest GAS, to  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ . Wówczas z (13) wynika, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$  dla pewnego  $T_0 > 0$

i wszystkich  $x_0 \in R^n$ . A zatem system ciągły (7.2), sterowany dyskretnym regulatorem predykcyjnym, jest globalnie asymptotycznie stabilny.  $\square$

## Dodatek B – Zasada maksimum Pontriagina

Poniżej podamy ogólną wersję zasady maksimum Pontriagina (Alekseev, Tikhomirov, Fomin, 1987, s. 214-236, Ioffe i Tikhomirov 1974, Hartl, Sethi i Vickson 1995). Następnie wyprowadzimy wersję zasady maksimum, dla klasy problemów rozważanych w tej pracy oraz podamy warunki normalności. Dodatkowo wyprowadzimy wzory na pochodne wskaźnika jakości względem czasu końcowego i sterowania.

### B1. Zasada maksimum Pontriagina

Niech  $\Delta \subset R$  będzie ograniczonym i domkniętym przedziałem oraz niech  $\xi : \Delta \rightarrow R^r$ . Przez  $L^\infty(\Delta, R^r)$  oznaczamy przestrzeń funkcji mierzalnych istotnie ograniczonych z normą

$$\|\xi\|_\infty = \operatorname{esssup}_{t \in \Delta} |\xi(t)|.$$

Symbol  $W^{1,\infty}(\Delta, R^r)$  oznacza przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych, z normą

$$\|\xi\|_{1,\infty} = \max (\|\xi\|_\infty, \|\dot{\xi}\|_\infty).$$

Przestrzenie  $L^\infty(\Delta, R^r)$  i  $W^{1,\infty}(\Delta, R^r)$  są przestrzeniami Banacha. Niech  $[T_0, T] \subset \Delta$ . Funkcję  $u : [T_0, T] \rightarrow R^m$  będziemy nazywać sterowaniem. Zbiór dopuszczalnych wartości sterowania jest określony jak następuje

$$U = \{v \in R^m : u_{\min} \leq v \leq u_{\max}, u_{\min} < u_{\max}\}, \quad u_{\min}, u_{\max} \in R^m. \quad (1)$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych jest określony relacją

$$U_{ad}^0 = \{u \in L^\infty([T_0, T], R^m) : u(t) \in U\}. \quad (2)$$

**Problem P.** Poszukujemy czwórki  $(x, u, T_0, T) \in W^{1,\infty}([T_0, T], R^n) \times L^\infty([T_0, T], R^m) \times R \times R$ , zapewniającej minimum wskaźnika jakości

$$J_0(x, u, T_0, T) = \int_{T_0}^T G_0(x(t), u(t), t) dt + \gamma_0(T_0, x(T_0), T, x(T)), \quad (3)$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t), u(t), t), \quad t \in [T_0, T], \quad (4)$$

$$u \in U_{ad}^0, \quad (5)$$

$$I_i(x, u, T_0, T) = \int_{T_0}^T G_i(x(t), u(t), t) dt + \gamma_i(T_0, x(T_0), T, x(T)) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

$$E_j(x, u, T_0, T) = \int_{T_0}^T B_j(x(t), u(t), t) dt + \beta_j(T_0, x(T_0), T, x(T)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (7)$$

gdzie

$$\varphi : R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n,$$

$$G_i : R^n \times R^m \times R \rightarrow R, \quad \gamma_i : R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p,$$

$$B_j : R^n \times R^m \times R \rightarrow R, \quad \beta_j : R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Przyjmujemy następujące założenia.

**Założenia CA1.** Funkcje  $\varphi, G_i, B_j, \gamma_i, \beta_j$  są ciągłe względem wszystkich argumentów oraz pochodne cząstkowe  $\nabla_\xi \varphi(\xi, v, \tau)$ ,  $\nabla_\xi G_i(\xi, v, \tau)$ ,  $\nabla_\xi B_j(\xi, v, \tau)$  istnieją i są ciągłe dla wszystkich  $(\xi, v, \tau) \in R^n \times R^m \times R$ . Ponadto pochodne cząstkowe  $\nabla_{\tau_k} \gamma_i(\tau_0, \xi_0, \tau_1, \xi_1)$ ,  $\nabla_{\xi_k} \gamma_i(\tau_0, \xi_0, \tau_1, \xi_1)$ ,  $\nabla_{\tau_k} \beta_j(\tau_0, \xi_0, \tau_1, \xi_1)$ ,  $\nabla_{\xi_k} \beta_j(\tau_0, \xi_0, \tau_1, \xi_1)$ ,  $k = 0, 1$  istnieją i są ciągłe dla wszystkich  $(\tau_0, \xi_0, \tau_1, \xi_1) \in R \times R^n \times R \times R^n$ .  $\square$

Przez rozwiązanie równania (4) będziemy rozumieć absolutnie ciągłą funkcję  $x \in W^{1,\infty}([T_0, T], R^n)$ , spełniającą to równanie dla prawie wszystkich  $t \in [T_0, T]$ .

**Definicja 1** (rozwiązańa dopuszczalnego). Jeżeli  $x$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (4), spełnione są ograniczenia (5-7) oraz  $[T_0, T] \subset \text{int } \Delta$ , to czwórkę  $(x, u, T_0, T)$  nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym problemu  $P$ .  $\square$

**Definicja 2** (minimum lokalnego). Rozwiązanie dopuszczalne  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T}_0, \bar{T})$  nazywamy lokalnie optymalnym rozwiązaniem problemu  $P$ , jeżeli istnieje liczba  $\varepsilon > 0$ , taka że dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego,  $(x, u, T_0, T)$  spełniającego warunki

$$|T_0 - \bar{T}_0| < \varepsilon, |T - \bar{T}| < \varepsilon, |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon, \forall t \in [T_0, T] \cap [\bar{T}_0, \bar{T}],$$

spełniona jest nierówność  $J_0(x, u, T_0, T) \geq J_0(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T}_0, \bar{T})$ .  $\square$

Liczby  $\lambda_0 \in R$  oraz wektory  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]^\top \in R^p$ ,  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q]^\top \in R^q$  będziemy nazywać mnożnikami Lagrange'a. Mnożniki odpowiadające rozwiązaniu optymalnemu oznaczamy przez  $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ . Definiujemy funkcję  $l : R \times R^n \times R \times R^n \times R \times R^p \times R^q \rightarrow R$ ,

$$l(\tau_0, \xi_0, \tau, \xi_1, \lambda_0, \lambda, \mu) = \sum_{i=0}^p \lambda_i \gamma_i(\tau_0, \xi_0, \tau, \xi_1) + \sum_{i=1}^q \mu_i \beta_i(\tau_0, \xi_0, \tau, \xi_1). \quad (8)$$

Wartość funkcji  $l$  na rozwiązaniu optymalnym będziemy oznaczać przez

$$\bar{l} = l(\bar{T}_0, \bar{x}(\bar{T}_0), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}), \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}).$$

Definiujemy hamiltonian  $H_0 : R^n \times R^n \times R^m \times R \times R \times R^p \times R^q \rightarrow R$ ,

$$H_0(\psi, x, u, t, \lambda_0, \lambda, \mu) = \psi^\top \varphi(x, u, t) - \sum_{i=0}^p \lambda_i G_i(x, u, t) - \sum_{i=1}^q \mu_i B_i(x, u, t), \quad (9)$$

przy czym funkcja  $\psi \in W^{1,\infty}([T_0, T], R^n)$ . Funkcję  $\psi$  odpowiadającą rozwiązaniu optymalnemu oznaczamy przez  $\bar{\psi}$ . Wartość hamiltonianu w chwili  $t$ , obliczoną na rozwiązaniu optymalnym, oznaczamy przez  $\bar{H}_0(t) = H_0(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ .

**Sterowania przedziałami ciągłe.** Ponieważ przestrzeń  $L^\infty$  jest bardzo „bogata”, to w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że sterowanie  $u$  jest funkcją przedziałami ciągłą oraz że  $u(t) \in U$ . Przyjmujemy umowę, że funkcje przedziałami ciągłe mają skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym przedziale skończonym, są ograniczone, prawostronnie ciągłe w  $[T_0, T]$  oraz lewostronnie ciągłe w punkcie  $T$ . Zbiór sterowań spełniających powyższe warunki będziemy oznaczać przez  $PC([T_0, T], U)$ . Zbiór ten, jest podzbiorem przestrzeni  $L^\infty([T_0, T], R^m)$ . Będziemy zakładać, że minimum w problemie  $P$  jest osiągane na sterowaniu  $\bar{u} \in PC([\bar{T}_0, \bar{T}], U)$ . Wówczas rozwiązanie równania (4) jest funkcją

różniczkowalną we wszystkich punktach, w których sterowanie jest ciągłe. Funkcja  $\dot{x}$  ma granice lewą i prawą w punktach nieciągłości sterowania.

**Twierdzenie 1** (zasada maksimum Pontriagina, zob. Alekseev et al. 1987, s. 214-236).

Jeżeli spełnione są założenia CA1 oraz czwórka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T}_0, \bar{T})$  jest rozwiązaniem (lokalnie) optymalnym problemu  $P$ , takim że  $\bar{u} \in PC([\bar{T}_0, \bar{T}], U)$ , to istnieją mnożniki Lagrange'a  $\bar{\lambda}_0 \geq 0$ ,  $\bar{\lambda} \geq 0$ ,  $\bar{\mu}$  oraz absolutnie ciągła funkcja sprzężona  $\bar{\psi} : [\bar{T}_0, \bar{T}] \rightarrow R^n$ , takie że:

a) spełniony jest warunek nietrywialności

$$\bar{\lambda}_0 + |\bar{\lambda}| + |\bar{\mu}| + \|\bar{\psi}\|_\infty > 0, \quad (10)$$

b) dla wszystkich  $t \in [\bar{T}_0, \bar{T}]$  zachodzi warunek maksimum hamiltonianu

$$H_0(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq H_0(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v, t, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad \forall v \in U, \quad (11)$$

c) funkcja sprzężona  $\bar{\psi}$  spełnia dla prawie wszystkich  $t \in [\bar{T}_0, \bar{T}]$ , równanie sprzężone

$$\dot{\bar{\psi}} = -\nabla_x H_0(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, t, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \quad (12)$$

d) spełnione są warunki transwersalności

$$\bar{\psi}(\bar{T}) = -\nabla_{\xi_1} \bar{l}, \quad \bar{\psi}(\bar{T}_0) = \nabla_{\xi_0} \bar{l}, \quad (13)$$

$$\bar{H}_0(\bar{T}) = \nabla_{\tau} \bar{l}, \quad \bar{H}_0(\bar{T}_0) = -\nabla_{\tau_0} \bar{l}, \quad (14)$$

e) spełnione są warunki komplementarności

$$\bar{\lambda}_i I_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T}_0, \bar{T}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (15)$$

f) funkcja  $\bar{H}_0(t)$  jest ciągła dla  $t \in [\bar{T}_0, \bar{T}]$ .  $\square$

Korzystając z twierdzenia 1 sformułujemy zasadę maksimum dla klasy problemów rozważanych w rozdziałach 2, 3, 4 i 6. Niech  $[0, T] \subset \Delta$ . Zbiór sterowań dopuszczalnych jest określony relacją

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty([0, T], R^m) : u(t) \in U\}, \quad (16)$$

przy czym zbiór  $U$  jest dany przez (1).

**Problem  $P(x_0)$ .** Należy znaleźć trójkę  $(x, u, T) \in W^{1, \infty}([0, T], R^n) \times L^\infty([0, T], R^m) \times R$ , zapewniającą minimum wskaźnika jakości

$$J(x, u, T) = T + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt + g(x(T)), \quad (17)$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (18)$$

$$u \in U_{ad}, \quad (19)$$

$$c(x(T)) \leq 0, \quad (20)$$

$$T_{\min} - T \leq 0, \quad T_{\max} \geq 0, \quad (21)$$

gdzie

$$L : R^n \times R^m \rightarrow R, \quad g : R^n \rightarrow R, \quad f : R^n \times R^m \rightarrow R^n, \quad c : R^n \rightarrow R.$$

Będziemy zakładać, że funkcje  $L, g, f, c$  spełniają jeden z dwóch podanych poniżej zestawów założeń.

**Założenia CA2.** Funkcje  $L, g, f, c$  są ciągłe względem wszystkich argumentów, pochodne cząstkowe  $\nabla_{\xi}f(\xi, v)$ ,  $\nabla_{\xi}L(\xi, v)$ , istnieją i są ciągłe dla wszystkich  $(\xi, v) \in R^n \times R^m$  oraz pochodne,  $\nabla_{\xi}g(\xi)$ ,  $\nabla_{\xi}c(\xi)$  istnieją i są ciągłe dla wszystkich  $\xi \in R^n$ .  $\square$

**Założenia CA3.** Spełnione są założenia CA2 oraz pochodne cząstkowe  $\nabla_v f(\xi, v)$ ,  $\nabla_v L(\xi, v)$  istnieją i są ciągłe dla wszystkich  $(\xi, v) \in R^n \times R^m$ .  $\square$

Przez rozwiązanie równania (18) będziemy rozumieć funkcję  $x \in W^{1,\infty}([0, T], R^n)$ , spełniającą równanie (18) dla prawie wszystkich  $t \in [0, T]$ , i taką że  $x(0) = x_0$ . W problemie  $P(x_0)$ , początkowa chwila czasu oraz warunek początkowy są ustalone, a prawa strona równania (18) nie zależy jawnie od czasu.

**Definicja 3** (rozwiązań dopuszczalnego w problemie  $P(x_0)$ ). Jeżeli  $x$  jest rozwiązaniem równania (18), spełnione są ograniczenia (19-21) oraz  $[0, T] \subset \text{int } \Delta$ , to trójkę  $(x, u, T)$  nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym problemu  $P(x_0)$ .  $\square$

**Definicja 4** (minimum lokalnego w problemie  $P(x_0)$ ). Rozwiązanie dopuszczalne  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  nazywamy lokalnie optymalnym rozwiązaniem problemu  $P(x_0)$ , jeżeli istnieje liczba  $\varepsilon > 0$ , taka że dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego  $(x, u, T)$ , spełniającego warunki

$$|T - \bar{T}| < \varepsilon, \quad |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T] \cap [0, \bar{T}],$$

spełniona jest nierówność  $J(x, u, T) \geq J(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$ .  $\square$

Podobnie jak poprzednio, definiujemy hamiltonian

$$H(\psi, x, u, \lambda_0) = \psi^T f(x, u) - \lambda_0 L(x, u), \quad (22)$$

gdzie funkcja  $\psi \in W^{1,\infty}([0, T], R^n)$ . Funkcję  $\psi$ , odpowiadającą rozwiązaniu optymalnemu, oznaczamy przez  $\bar{\psi}$ . Wartość hamiltonianu (22) w chwili  $t$ , obliczoną na rozwiązaniu optymalnym, oznaczamy przez  $\bar{H}(t) = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}_0)$ .

**Twierdzenie 2** (zasada maksimum Pontriagina dla problemu  $P(x_0)$ ). Jeżeli spełnione są założenia CA2, trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązaniem (lokalnie) optymalnym problemu  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ , to istnieją mnożniki Lagrange'a  $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \geq 0$  oraz absolutnie ciągła funkcja sprzężona  $\bar{\psi} : [0, \bar{T}] \rightarrow R^n$ , takie że:

a) spełniony jest warunek nietrywialności

$$\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \|\bar{\psi}\|_{\infty} > 0, \quad (23)$$

b) dla wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$  zachodzi warunek maksimum hamiltonianu

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}_0) \geq H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v, \bar{\lambda}_0), \quad \forall v \in U, \quad (24)$$

c) funkcja sprzężona  $\bar{\psi}$  spełnia dla prawie wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$ , równanie sprzężone

$$\dot{\bar{\psi}} = -\nabla_x f(\bar{x}, \bar{u}) \bar{\psi} + \bar{\lambda}_0 \nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}), \quad (25)$$

d) spełnione są warunki transwersalności

$$\bar{\psi}(\bar{T}) = -\bar{\lambda}_0 \nabla g(\bar{x}(\bar{T})) - \bar{\lambda}_1 \nabla c(\bar{x}(\bar{T})), \quad (26)$$

$$\bar{H}(\bar{T}) = \bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_2, \quad (27)$$

e) spełnione są warunki komplementarności

$$\bar{\lambda}_1 c(\bar{x}(\bar{T})) = 0, \quad (28)$$

$$\bar{\lambda}_2(T_{\min} - \bar{T}) = 0, \quad (29)$$

f) funkcja  $\bar{H}(t)$  jest ciągła dla  $t \in [0, \bar{T}]$ .

*Dowód:* Problem  $P(x_0)$  sprowadzimy do problemu  $P$ . Warunki  $x(0) = x_0$  i  $T_0 = 0$ , traktujemy jako  $n+1$  ograniczeń równościowych, a związane z nimi mnożniki Lagrange'a oznaczamy przez  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$  i  $\mu_{n+1}$ . Mnożniki Lagrange'a związane z ograniczeniami nierównościowymi (20) i (21) oznaczamy odpowiednio przez  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . We wzorach (3), (4), (6), (7) kładziemy

$$\begin{aligned} \varphi(x, u, t) &= f(x, u), \\ G_0(x, u, t) &= L(x, u), \quad \gamma_0(T_0, x(T_0), T, x(T)) = T + g(x(T)), \\ G_i &\equiv 0, \quad i = 1, 2, \quad B_j \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \beta_j(T_0, x(T_0), T, x(T)) &= x_j(0) - x_{0,j}, \quad j < n+1, \\ \beta_{n+1}(T_0, x(T_0), T, x(T)) &= T_0, \\ \gamma_1(T_0, x(T_0), T, x(T)) &= c(x(T)), \\ \gamma_2(T_0, x(T_0), T, x(T)) &= T_{\min} - T. \end{aligned} \quad (30)$$

Ze wzorów (8) i (9) oraz z (17) i (22) mamy

$$H_0(\psi, x, u, t, \lambda_0, \lambda, \mu) = H(\psi, x, u, \lambda_0) = \psi^T f(x, u) - \lambda_0 L(x, u), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} l(T_0, x(0), T, x(T), \lambda_0, \lambda, \mu) &= \\ &= \lambda_0 (T + g(x(T))) + \lambda_1 c(x(T)) + \lambda_2 (T_{\min} - T) + \mu^T (x(0) - x_0) + \mu_{n+1} T_0. \end{aligned} \quad (31a)$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych  $U_{ad}$  zastępujemy zbiorem  $U_{ad}^0$ . Ponieważ trójką  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązaniem (lokalnie) optymalnym problemu  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ , to czwórka  $(\bar{x}, \bar{u}, 0, \bar{T})$  jest rozwiązaniem (lokalnie) optymalnym problemu  $P$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ . Ponadto funkcje  $\varphi, G_i, \gamma_i, B_j, \beta_j, l$  zdefiniowane wzorami (30) i (31a) spełniają założenia CA1. Na mocy twierdzenia 1 otrzymujemy punkty b-f) twierdzenia 2. Ponadto mamy

$$\bar{\psi}(0) = \bar{\mu}, \quad (32)$$

$$\bar{H}(0) = -\bar{\mu}_{n+1}, \quad (33)$$

Jeżeli  $\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$  i  $\|\bar{\psi}\|_\infty = 0$ , to  $\bar{u} = 0$  i  $\bar{\mu}_{n+1} = 0$ , co jest sprzeczne z punktem a) twierdzenia 1. A zatem musi zachodzić warunek (23). Ponieważ warunek początkowy oraz początkowa chwila czasu są ustalone, to równości (32) i (33) nie wnoszą żadnej dodatkowej informacji na temat rozwiązania optymalnego.  $\square$

**Uwaga 1.** Jeżeli czas końcowy  $T \geq T_{\min}$  jest ustalony, to w twierdzeniu 2, należy przyjąć  $\bar{\lambda}_2 = 0$  i pominąć warunki (27) i (29).

## B2. Warunki normalności problemu $P(x_0)$

Zajmiemy się warunkami normalności problemu  $P(x_0)$  (Malanowski 2003, Fontes 2000a). Jeżeli trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązaniem (lokalnie) optymalnym problemu  $P(x_0)$  i twierdzenie 2 jest prawdziwe dla  $\bar{\lambda}_0 > 0$ , to powiemy, że problem  $P(x_0)$  jest normalny. Jeżeli  $\bar{\lambda}_0 = 0$ , to będziemy mówić, że problem  $P(x_0)$  jest nienormalny. Jeżeli  $\bar{\lambda}_0 > 0$ , to dzieląc mnożniki  $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  oraz funkcję  $\bar{\psi}$  przez  $\bar{\lambda}_0 > 0$  widzimy, że twierdzenie 2 będzie prawdziwe dla  $\bar{\lambda}_0 = 1$ . Możemy zatem przyjąć, że  $\bar{\lambda}_0 \in \{0, 1\}$ . Jeżeli problem  $P(x_0)$  jest nienormalny, to zasada maksimum (tw. 2) może nie dawać żadnej informacji o rozwiązaniu optymalnym. Przekonuje o tym następujący prosty przykład.

**Przykład 1** (nienormalne zadanie sterowania optymalnego). Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x, u) = \int_0^1 u(t)^2 dt, \quad u(t) \in U = [-2, 2], \quad (34)$$

na trajektoriach systemu

$$\dot{x}_1(t) = 0, \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1, \quad (35)$$

przy ograniczeniu stanu końcowego

$$c(x_1(1), x_2(1)) = x_1(1)^2 + x_2(1)^2 - 1 \leq 0. \quad (36)$$

Para  $(\bar{u}(t) = 1, \bar{x}(t) = [1, t-1]^\top)$ , jest rozwiązaniem optymalnym zadania. Aby to wykazać, zauważmy, że zbiór sterowań zapewniających spełnienie warunku końcowego (36) składa się ze wszystkich funkcji  $u \in L^\infty([0, 1], U)$ , spełniających warunek

$$\int_0^1 u(t) dt = 1.$$

Przypuśćmy, że  $\bar{u}$  nie jest rozwiązaniem optymalnym. Istnieje zatem funkcja  $\delta u : [0, 1] \rightarrow U$ , spełniająca warunek  $\int_0^1 \delta u(t) dt = 0$  (wynikający z żądania, aby  $\int_0^1 (\bar{u}(t) + \delta u(t)) dt = 1$ ) i taka, że  $J(x, \bar{u} + \delta u) < J(\bar{x}, \bar{u}) = 1$ . Mamy następujące oszacowanie

$$J(x, \bar{u} + \delta u) = \int_0^1 (1 + \delta u(t))^2 dt = 1 + 2 \int_0^1 \delta u(t) dt + \int_0^1 \delta u(t)^2 dt = 1 + \int_0^1 \delta u(t)^2 dt \geq 1,$$

które przeczy przypuszczeniu, że  $\bar{u}$  nie jest rozwiązaniem optymalnym. Zastosujemy teraz twierdzenie 2. Hamiltonian jest równy  $H = \psi_2 u - \lambda_0 u^2$ , a równania sprzężone mają postać

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0.$$

Warunki końcowe na zmienne sprzężone są dane równościami  $\bar{\psi}_1(1) = -2\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\psi}_2(1) = 0$ . Rozwiążanie równań sprzężonych wynosi  $\bar{\psi}_1(t) = -2\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\psi}_2(t) = 0$ . Jeżeli  $\bar{\lambda}_0 = 1$ , to maksimum hamiltonianu jest osiągane dla sterowania  $u(t) = 0$ , które nie jest optymalne (bo nie jest nawet dopuszczalne). Jeżeli  $\bar{\lambda}_0 = 0$ , to rozwiązanie  $(\bar{x}, \bar{u})$  spełnia warunki konieczne podane w twierdzeniu 2, ale warunek maksymalizacji hamiltonianu jest trywialny. Widać, że w tym przypadku zasada maksimum nie daje żadnej informacji o sterowaniu optymalnym. Aby zadanie było normalne, należy przyjąć dodatkowe założenia.

**Lemat 1.** Niech  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  będzie rozwiązaniem optymalnym  $P(x_0)$ . Jeżeli  $c(\bar{x}(\bar{T})) < 0$ , to  $P(x_0)$  jest normalny.

*Dowód:* Przypuśćmy, że  $\bar{\lambda}_0 = 0$ . Z warunku komplementarności (28) wynika, że  $\bar{\lambda}_1 = 0$ . Z (25) i (26) wynika, że  $\bar{\psi} \equiv 0$ , a z (22) i (27) wynika, że  $\bar{\lambda}_2 = 0$ . A zatem  $\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \|\bar{\psi}\|_\infty = 0$ , co jest sprzeczne z (23).  $\square$

**Lemat 2.** Niech  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  będzie rozwiązaniem optymalnym  $P(x_0)$ , takim że  $c(\bar{x}(\bar{T})) = 0$ . Jeżeli  $\nabla c(\bar{x}(\bar{T})) \neq 0$ , to  $\bar{\lambda}_0$  i  $\bar{\psi}$  nie mogą jednocześnie zniknąć, tzn.  $\bar{\lambda}_0 + \|\bar{\psi}\|_\infty > 0$ .

*Dowód:* Przypuśćmy, że  $\bar{\lambda}_0 = 0$  i  $\bar{\psi} \equiv 0$ . Wówczas z (26) mamy  $\bar{\lambda}_1 \nabla c(\bar{x}(\bar{T})) = 0$ , a zatem  $\bar{\lambda}_1 = 0$ . Z (22) i (27) wynika, że  $\bar{\lambda}_2 = -\bar{H}(\bar{T}) = 0$ . A zatem  $\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$  oraz  $\bar{\psi} \equiv 0$ , co jest sprzeczne z (23).  $\square$

**Lemat 3.** Niech  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  będzie rozwiązaniem optymalnym  $P(x_0)$ , takim że  $c(\bar{x}(\bar{T})) = 0$  oraz  $\nabla c(\bar{x}(\bar{T})) \neq 0$ . Wówczas jeżeli  $\bar{\lambda}_0 = 0$ , to:

$$(i) \bar{\lambda}_1 > 0, (ii) \bar{\psi}(t) \neq 0, \forall t \in [0, \bar{T}], (iii) \nabla c(\bar{x}(\bar{T}))^\top f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T})) \geq 0.$$

*Dowód:* Z lematu 2 i z równania sprzężonego (25) wynika, że  $\bar{\psi}(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, \bar{T}]$ . Z twierdzenia 2 mamy  $\bar{\lambda}_1 \geq 0$ . Z warunku końcowego (26) mamy  $-\bar{\lambda}_1 \nabla c(\bar{x}(\bar{T})) = \bar{\psi}(\bar{T}) \neq 0$ , skąd wynika, że  $\bar{\lambda}_1 > 0$ . Z (26) i (27) mamy  $\bar{H}(\bar{T}) = -\bar{\lambda}_1 \nabla c(\bar{x}(\bar{T}))^\top f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T})) = -\bar{\lambda}_2 \leq 0$ , skąd po podzieleniu przez  $\bar{\lambda}_1 > 0$  otrzymujemy (iii).  $\square$

**Definicja 1 (wariacji stanu).** Funkcję  $\delta x \in W^{1,\infty}([0, T], R^n)$ , spełniającą warunek  $\delta x(0) = 0$ , nazywamy wariacją stanu.  $\square$

**Definicja 2 (wariacji sterowania u).** Niech  $u \in U_{ad}$ . Funkcję  $\delta u \in L^\infty([0, T], R^m)$ , taką że

$$u + \delta u \in U_{ad},$$

nazywamy dopuszczalną wariacją sterowania  $u$ . Zbiór

$$\tilde{U}_{ad}(u) = \{\delta u \in L^\infty([0, T], R^m) : u + \delta u \in U_{ad}\},$$

będziemy nazywać zbiorem dopuszczalnych wariacji sterowania  $u$ .  $\square$

**Definicja 3 (wariacji horyzontu).** Liczbę  $\delta T$ , taką że  $T + \delta T \geq T_{\min}$  nazywamy dopuszczalną wariacją horyzontu.  $\square$

Funkcję  $\mathcal{L} : W^{1,\infty}([0, T], R^n) \times (L^\infty([0, T], R^m) \times R \times W^{1,\infty}([0, T], R^n) \times R \times R \times R \rightarrow R$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, u, T, \psi, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= \lambda_0 \int_0^T L(x, u) dt + \lambda_0(T + g(x(T))) + \int_0^T \psi^\top (\dot{x} - f(x, u)) dt + \lambda_1 c(x(T)) + \lambda_2(T_{\min} - T),\end{aligned}\quad (37)$$

nazywamy funkcjonałem Lagrange'a problemu  $P(x_0)$ . Do dalszych rozważań wygodnie jest przyjąć następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\nabla_x f &= \nabla_\xi f(\xi, v) |_{\xi=x(t), v=u(t)}, \quad \nabla_u f = \nabla_v f(\xi, v) |_{\xi=x(t), v=u(t)}, \\ \nabla_x L &= \nabla_\xi L(\xi, v) |_{\xi=x(t), v=u(t)}, \quad \nabla_u L = \nabla_v L(\xi, v) |_{\xi=x(t), v=u(t)}, \\ L_T &= L(x(T), u(T)), \quad f_T = f(x(T), u(T)), \\ g_T &= g(x(T)), \quad c_T = c(x(T)), \quad \nabla g_T = \nabla_\xi g(\xi) |_{\xi=x(T)}, \quad \nabla c_T = \nabla_\xi c(\xi) |_{\xi=x(T)}.\end{aligned}$$

Ponadto przyjmiemy umowę, że kreska nad danym wyrażeniem będzie oznaczała, że jest ono obliczane na sterowaniu optymalnym, np.  $\nabla \bar{c}_T = \nabla_\xi c(\xi) |_{\xi=\bar{x}(\bar{T})}$ . Pierwsza wariacja funkcjonału Lagrange'a jest określona wzorem

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}(x, u, T, \psi, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)(\delta x, \delta u, \delta T) &= \\ &= \lambda_0 \int_0^T ((\nabla_x L)^\top \delta x + (\nabla_u L)^\top \delta u) dt + \lambda_0 L_T \delta T + \lambda_0 (\delta T + (\nabla g_T)^\top (\delta x(T) + f_T \delta T)) + \\ &\quad + \int_0^T \psi^\top (\delta \dot{x} - (\nabla_x f)^\top \delta x - (\nabla_u f)^\top \delta u) dt + \lambda_1 (\nabla c_T)^\top (\delta x(T) + f_T \delta T) - \lambda_2 \delta T.\end{aligned}\quad (38)$$

Pierwszą wariację funkcjonału Lagrange'a, obliczaną na rozwiązyaniu optymalnym problemu  $P(x_0)$ , będziemy oznaczać przez  $\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) = \delta \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T}, \bar{\psi}, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)(\delta x, \delta u, \delta T)$ .

**Lemat 4.** Jeżeli trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązyaniem optymalnym problemu  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ ,  $\bar{\psi}$  jest optymalną funkcją sprzężoną,  $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  są optymalnymi mnożnikami Lagrange'a oraz spełnione są założenia CA3, to dla wszystkich  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$  oraz dowolnych wariacji stanu  $\delta x$  i horyzontu  $\delta T$  zachodzi nierówność

$$\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) \geq 0. \quad \square \quad (39)$$

*Dowód:* Pierwsza wariacja funkcjonału Lagrange'a, obliczana na rozwiązyaniu optymalnym, jest dana wzorem

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) &= \\ &= \bar{\lambda}_0 \int_0^{\bar{T}} ((\nabla_x \bar{L})^\top \delta x + (\nabla_u \bar{L})^\top \delta u) dt + \bar{\lambda}_0 \bar{L}_T \delta T + \bar{\lambda}_0 (\delta T + (\nabla \bar{g}_T)^\top (\delta x(\bar{T}) + \bar{f}_T \delta T)) + \\ &\quad + \int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^\top (\delta \dot{x} - (\nabla_x \bar{f})^\top \delta x - (\nabla_u \bar{f})^\top \delta u) dt + \bar{\lambda}_1 (\nabla \bar{c}_T)^\top (\delta x(\bar{T}) + \bar{f}_T \delta T) - \bar{\lambda}_2 \delta T.\end{aligned}\quad (40)$$

Całkując przez części wyrażenie  $\int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^\top \delta \dot{x} dt$  i pamiętając, że  $\delta x(0) = 0$  otrzymujemy

$$\int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^\top \delta \dot{x} dt = \bar{\psi}^\top(\bar{T}) \delta x(\bar{T}) - \int_0^{\bar{T}} \dot{\bar{\psi}}^\top \delta x dt. \quad (41)$$

Wstawiając do (40) i grupując wyrazy występujące przy  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta x(\bar{T})$ ,  $\delta T$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) = & - \int_0^{\bar{T}} ((\dot{\bar{\psi}} + \nabla_x \bar{f} \bar{\psi} - \bar{\lambda}_0 \nabla_x \bar{L})^\top \delta x + (\nabla_u \bar{f} \bar{\psi} - \bar{\lambda}_0 \nabla_u \bar{L})^\top \delta u) dt + \\ & + (\bar{\psi}(\bar{T}) + \bar{\lambda}_0 \nabla_{\bar{g}} \bar{T} + \bar{\lambda}_1 \nabla_{\bar{c}} \bar{T})^\top \delta x(\bar{T}) + (\bar{\lambda}_0 \bar{L}_T + (\bar{\lambda}_0 \nabla_{\bar{g}} \bar{T} + \bar{\lambda}_1 \nabla_{\bar{c}} \bar{T})^\top \bar{f}_T + \bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_2) \delta T. \end{aligned} \quad (42)$$

Ponieważ trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest rozwiązaniem optymalnym problemu  $P(x_0)$ , to spełnione są warunki konieczne optymalności podane w twierdzeniu 2. Wykorzystując (22), (25), (26) i (27) widzimy, że wyrażenia przy  $\delta x$ ,  $\delta x(\bar{T})$ ,  $\delta T$  we wzorze (42) znikają. Z założeń CA3 wynika, że pochodna

$$\nabla_u H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}_0) = \nabla_u \bar{f} \bar{\psi} - \bar{\lambda}_0 \nabla_u \bar{L},$$

jest dobrze określona. Podstawiając to wyrażenie do (42), otrzymujemy ostatecznie

$$\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) = - \int_0^{\bar{T}} (\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}_0))^\top \delta u(t) dt, \text{ gdzie } \delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u}). \quad (43)$$

Z warunku maksimum hamiltonianu (24) i z wypukłości zbioru  $U$  wynika, że nierówność

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \tau \delta u(t)) \leq H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (44)$$

jest spełniona dla wszystkich  $\tau \in [0, 1]$ ,  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ ,  $t \in [0, \bar{T}]$ . Korzystając z nierówności (44) i z definicji pochodnej hamiltonianu względem  $u$ , otrzymujemy

$$(\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)))^\top \tau \delta u(t) + o(\tau \delta u(t)) \leq 0.$$

Przechodząc do granicy  $\tau \rightarrow 0^+$  mamy  $(\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)))^\top \delta u(t) \leq 0$  dla wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$  i  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ . A zatem  $\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) \geq 0$  dla wszystkich  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$  oraz dowolnych wariacji stanu  $\delta x$  i horyzontu  $\delta T$ .  $\square$

Podamy teraz warunki, przy których problem  $P(x_0)$  jest normalny. Niech

$$\Omega = \{\xi \in R^n : c(\xi) \leq 0\}, \quad (45)$$

będzie zbiorem dopuszczalnych stanów końcowych oraz niech trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  będzie rozwiązaniem optymalnym  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{c}_T = 0$ , tzn. ograniczenie (20) jest aktywne.

**Warunek normalności NC1.** Jeżeli dla każdego  $\xi \in \partial\Omega$  istnieje wektor  $v \in U$ , taki że

$$(\nabla c(\xi))^\top f(\xi, v) < 0, \quad (46)$$

to będziemy mówić, że spełniony jest warunek normalności NC1.  $\square$

**Warunek normalności NC2.** Jeżeli istnieje wektor  $v \in U$ , taki że

$$(\nabla \bar{c}_T)^\top f(\bar{x}(\bar{T}), v) < 0, \quad (47)$$

to będziemy mówić, że spełniony jest warunek normalności NC2.  $\square$

**Warunek normalności NC3.** Jeżeli istnieje wariacja sterowania  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ , taka że równanie wariacyjne

$$\delta \dot{x} = (\nabla_x \bar{f})^\top \delta x + (\nabla_u \bar{f})^\top \delta u, \quad \delta x(0) = 0, \quad (48)$$

ma rozwiązanie spełniające warunek końcowy

$$(\nabla_{\bar{c}_T})^\top \delta x(\bar{T}) < 0, \quad (49)$$

to będziemy mówić, że spełniony jest warunek normalności NC3.  $\square$

Niech  $\pi = \{\xi \in R^n : (\nabla \bar{c}_T)^\top (\xi - \bar{x}(\bar{T})) = 0\}$ , oznacza płaszczyznę styczną do zbioru  $\Omega$  w punkcie  $\bar{x}(\bar{T})$  oraz niech  $\pi^- = \{\xi \in R^n : (\nabla \bar{c}_T)^\top (\xi - \bar{x}(\bar{T})) < 0\}$ . Jeżeli  $\xi \in \pi^-$ , to powiemy, że  $\xi$  leży po ujemnej stronie płaszczyzny  $\pi$ . Warunki NC1-3 mówią, że za pomocą dowolnie małej (w sensie jednej z norm  $\|\cdot\|_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \infty$ ) zmiany sterowania optymalnego, można przesunąć trajektorię optymalną tak, aby stan końcowy należał do wnętrza zbioru  $\Omega$  i leżał po ujemnej stronie płaszczyzny  $\pi$ . Podsumowując dotychczasowe rozważania możemy wypowiedzieć następujące

**Twierdzenie 3.** Jeżeli spełnione są założenia CA3, trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest (lokalnie) optymalnym rozwiązaniem optymalnym  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$  oraz dla  $\bar{x}$  spełniającego warunek  $c(\bar{x}(\bar{T})) = 0$ , zachodzi jeden z warunków normalności NC1, NC2, NC3, to problem  $P(x_0)$  jest normalny, a twierdzenie 2 zachodzi dla  $\bar{\lambda}_0 = 1$ .  $\square$

Definiujmy hamiltonian dla problemu normalnego

$$H^N(\psi, x, u) = \psi^\top f(x, u) - L(x, u). \quad (50)$$

Znając warunki, przy których problem  $P(x_0)$  jest normalny, możemy sformułować twierdzenie 2 z warunkami normalności.

**Twierdzenie 4 (zasada maksimum dla problemu  $P(x_0)$ ).** Jeżeli spełnione są założenia CA3, trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest lokalnie optymalnym rozwiązaniem optymalnym problemu  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$  oraz dla  $\bar{x}$  spełniającego warunek  $c(\bar{x}(\bar{T})) = 0$ , zachodzi jeden z warunków normalności NC1, NC2, NC3, to istnieją mnożniki Lagrange'a  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \geq 0$  oraz absolutnie ciągła funkcja sprzężona  $\bar{\psi} : [0, \bar{T}] \rightarrow R^n$ , takie że:

a) dla wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$  zachodzi warunek maksimum hamiltonianu (50)

$$H^N(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq H^N(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v), \quad \forall v \in U, \quad (51)$$

c) funkcja sprzężona  $\bar{\psi}$  spełnia dla prawie wszystkich  $t \in [0, \bar{T}]$ , równanie sprzężone

$$\dot{\bar{\psi}} = -\nabla_x f(\bar{x}, \bar{u}) \bar{\psi} + \nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}), \quad (52)$$

d) spełnione są warunki transwersalności

$$\bar{\psi}(\bar{T}) = -\nabla g(\bar{x}(\bar{T})) - \bar{\lambda}_1 \nabla c(\bar{x}(\bar{T})), \quad (53)$$

$$\bar{H}^N(\bar{T}) = 1 - \bar{\lambda}_2, \quad (54)$$

e) spełnione są warunki komplementarności

$$\bar{\lambda}_1 c(\bar{x}(\bar{T})) = 0, \quad (55)$$

$$\bar{\lambda}_2(T_{\min} - \bar{T}) = 0. \quad (56)$$

f) funkcja  $\bar{H}^N(t)$  jest ciągła dla  $t \in [0, \bar{T}]$ .  $\square$

**Dowód twierdzenia 3.** Dowód podzielimy na dwie części. Najpierw zbadamy konsekwencje warunku NC3, a następnie udowodnimy, że nie można jednocześnie spełnić warunków  $\bar{\lambda}_0 = 0$ ,  $\bar{c}_T = 0$  i warunku NC1 lub NC2.

Trójka  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{T})$  jest lokalnie optymalnym rozwiązaniem problemu  $P(x_0)$ , takim że  $\bar{u} \in PC([0, \bar{T}], U)$ , a zatem zachodzi twierdzenie 2 i lematy 1-4. Jeżeli  $\bar{c}_T < 0$ , to z lematu 1 wynika, że  $P(x_0)$  jest normalny. Przypuśćmy zatem, że  $P(x_0)$  jest nienormalny, tzn.  $\bar{\lambda}_0 = 0$ ,  $\bar{c}_T = 0$  i rozważmy konsekwencje tego przypuszczenia.

**A.** Niech będzie spełniony warunek NC3. Wówczas  $\nabla \bar{c}_T \neq 0$  oraz z założenia  $\bar{\lambda}_0 = 0$  i  $\bar{c}_T = 0$ . Z lematu 3 mamy  $\bar{\lambda}_1 > 0$ . Z równości (40) wynika, że

$$\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) =$$

$$= \int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^\top (\delta \dot{x} - (\nabla_x \bar{f})^\top \delta x - (\nabla_u \bar{f})^\top \delta u) dt + \bar{\lambda}_1 (\nabla \bar{c}_T)^\top (\delta x(\bar{T}) + \bar{f}_T \delta T) - \bar{\lambda}_2 \delta T. \quad (57)$$

Podstawiając w (57)  $\delta T = 0$  oraz korzystając z (48) i (49) mamy

$$\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) = \bar{\lambda}_1 (\nabla \bar{c}_T)^\top \delta x(\bar{T}) < 0,$$

co jest sprzeczne z lematem 4 mówiącym, że  $\delta \bar{\mathcal{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) \geq 0$ . A zatem  $P(x_0)$  jest normalny.

**B.** Ponieważ NC1 pociąga za sobą NC2, to założymy, że zachodzi NC2. Wówczas  $\nabla \bar{c}_T \neq 0$  oraz z założenia  $\bar{\lambda}_0 = 0$  i  $\bar{c}_T = 0$ . Z lematu 3 mamy  $\bar{\lambda}_1 > 0$ . Na mocy warunku NC2 mamy

$$-\bar{\lambda}_1 (\nabla \bar{c}_T)^\top f(\bar{x}(\bar{T}), v) > 0 \text{ dla pewnego } v \in U. \quad (58)$$

Z warunków transwersalności (26) i (27), podanych w twierdzeniu 2 wynika, że

$$\bar{\psi}(\bar{T}) = -\bar{\lambda}_1 \nabla \bar{c}_T \neq 0, \quad (59)$$

$$\bar{H}(\bar{T}) = -\bar{\lambda}_2 \leq 0. \quad (60)$$

Rozważmy teraz funkcje  $h : [0, \bar{T}] \rightarrow R$ ,  $b : [0, \bar{T}] \rightarrow R$ ,

$$h(t) = \bar{H}(t) = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), 0) = \bar{\psi}(t)^\top f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad (61)$$

$$b(t) = H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v, 0) = \bar{\psi}(t)^\top f(\bar{x}(t), v), \quad (62)$$

Ponieważ funkcje  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{x}$ ,  $f$  są ciągłe, to funkcja  $b$  jest ciągła. Ciągłość funkcji  $h$  wynika z twierdzenia 2. Na mocy (60) mamy

$$h(\bar{T}) \leq 0, \quad (63)$$

a z (58), (59) i (62) wynika, że

$$b(\bar{T}) > 0. \quad (64)$$

Funkcja  $\sigma : [0, \bar{T}] \rightarrow R$ ,  $\sigma(t) = b(t) - h(t)$ , jest ciągła, a z (63) i (64) wynika, że spełnia ona warunek  $\sigma(\bar{T}) = b(\bar{T}) - h(\bar{T}) > 0$ . Ponieważ  $\sigma$  jest ciągła, to istnieje liczba  $\tau > 0$ , taka że  $\sigma(t) > 0$ , dla wszystkich  $t \in [\bar{T} - \tau, \bar{T}]$ . Z drugiej strony, z warunku maksimum hamiltonianu (24) wynika, że

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), v, 0) \leq H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), 0) \Leftrightarrow b(t) \leq h(t) \Leftrightarrow \sigma(t) \leq 0, \forall t \in [0, \bar{T}].$$

A zatem  $\sigma(t) \leq 0$  i jednocześnie  $\sigma(t) > 0$ , dla wszystkich  $t \in [\bar{T} - \tau, \bar{T}]$ . Widać stąd, że nie można jednocześnie spełnić warunków  $\bar{c}_T = 0$ ,  $\bar{\lambda}_0 = 0$  i warunku NC2. A zatem  $P(x_0)$  jest normalny.  $\square$

**Przykład 2** (normalne zadanie sterowania optymalnego, w którym warunek NC2 nie jest spełniony i zachodzi warunek NC3). Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x, u) = \int_0^1 u(t)^2 dt, \quad u(t) \in U = [-2, 2], \quad (65)$$

na trajektoriach systemu

$$\dot{x}_1(t) = \varphi(x_2)u, \quad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = e, \quad (66)$$

gdzie funkcja  $\varphi : R \rightarrow [0, 1]$ ,

$$\varphi(x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x_2 \in (-\infty, 2) \\ w(x_2), & \text{dla } x_2 \in [2, 2,5) \\ 1, & \text{dla } x_2 \in [2,5, \infty) \end{cases},$$

przy czym  $w$  jest wielomianem trzeciego stopnia, spełniającym warunki  $w(2) = 0$ ,  $w(2,5) = 1$ ,  $w'(2) = w'(2,5) = 0$ . Ograniczenie stanu końcowego ma postać

$$c(x_1(1), x_2(1)) = (x_1(1) + 1)^2 + (x_2(1) - 1)^2 - 1 \leq 0. \quad (67)$$

Pokażemy, że sterowanie  $\bar{u} \equiv 0$  jest optymalne. Rozwiązywanie równań (66) ze sterowaniem  $\bar{u} \equiv 0$  ma postać

$$\bar{x}_1(t) = 0, \quad \bar{x}_2(t) = e \exp(-t).$$

Rozwiązywanie to jest dopuszczalne, bo  $u \in U_{ad}$  oraz  $c(\bar{x}_1(1), \bar{x}_2(1)) = (0+1)^2 + (1-1)^2 - 1 \leq 0$ .

Gradient ograniczenia (67) w punkcie końcowym wynosi  $\nabla c_T = [2 \ 0]^\top$ . Ponieważ  $J(x, u) \geq 0$  i  $J(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ , to widać, że para  $(\bar{x}, \bar{u})$  jest rozwiązaniem optymalnym. Układamy hamiltonian i równania sprzężone

$$H = \psi_1 \varphi(x_2)u - \psi_2 x_2 + \psi_2 u - \lambda_0 u^2, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \varphi'(x_2)u + \psi_2.$$

Zmienne sprzężone spełniają warunek końcowy  $\bar{\psi}(1) = -\bar{\lambda}_1 \nabla c_T$ , a zatem  $\bar{\psi}_1(1) = -2\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\psi}_2(1) = 0$ . Rozwiązywanie równań sprzężonych wynosi  $\bar{\psi}_1(t) = -2\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\psi}_2(t) = 0$ . Jeżeli przyjmiemy  $\bar{\lambda}_0 = 1$ , to  $H(\bar{\psi}, \bar{x}, v) = -v^2 \leq H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = 0$ . A zatem twierdzenie 2 zachodzi dla  $\bar{\lambda}_0 = 1$ ,  $\bar{\lambda}_1 \geq 0$ . Sprawdzamy warunek NC2:

$$(\nabla c_T)^\top f(\bar{x}(1), v) = 2\varphi(1)v = 0v = 0, \quad \text{dla dowolnego } v \in U,$$

skąd widać, że NC2 nie jest spełniony. Sprawdzimy teraz warunek NC3. Układamy równania

wariacyjne

$$\delta \dot{x}_1 = \varphi'(x_2)u\delta x_2 + \varphi(x_2)\delta u, \quad \delta x_1(0) = 0, \quad \delta \dot{x}_2 = -\delta x_2 + \delta u, \quad \delta x_2(0) = 0.$$

Na rozwiązaniu optymalnym równania te przyjmują postać

$$\delta \dot{x}_1 = \varphi(e \exp(-t))\delta u, \quad \delta \dot{x}_2 = -\delta x_2 + \delta u. \quad (68)$$

Niech  $\delta u(t) = -1$ ,  $t \in [0, 1]$ . Wówczas  $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ ,

$$\delta x_1(1) = - \int_0^1 \varphi(e \exp(-\tau)) d\tau < 0 \quad \text{oraz} \quad (\nabla \bar{c}_T)^\top \delta x(1) = 2\delta x_1(1) < 0.$$

A zatem warunek NC3 jest spełniony.  $\square$

### Komentarz

Warunki normalności podane w twierdzeniu 3 stanowią w istocie pewien rodzaj warunków sterowalności. Warunki NC2 i NC3 są warunkami wystarczającymi, tzn. jeżeli zachodzi NC2 lub NC3, to problem  $P(x_0)$  jest normalny, ale nie na odwrót. Przykład 2 pokazuje, że warunki te nie są równoważne. W przykładzie 1, oba warunki nie są spełnione. Trudno podać przykład normalnego problemu  $P(x_0)$ , z prawą stroną równania stanu klasy  $C^1$ , w którym oba warunki NC2 i NC3 nie byłyby spełnione. Można zatem przypuszczać, że jeżeli problem  $P(x_0)$  jest normalny, to powinien być spełniony co najmniej jeden z warunków NC2 lub NC3. Pytanie o prawdziwość tej hipotezy pozostaje otwarte.

Weryfikacja warunku NC3 jest w praktyce trudna i wymaga znajomości rozwiązania optymalnego. Weryfikacja warunku NC1 jest stosunkowo prosta, nie wymaga znajomości rozwiązania optymalnego i sprawdza się do sprawdzenia następującej nierówności

$$\max_{\xi \in \partial\Omega} \left\{ \min_{v \in U} (\nabla c(\xi))^\top f(\xi, v) \right\} < 0. \quad (69)$$

Dla systemów z prawą stroną aficzną względem sterowania (zob. np.(6.7)), nierówność (69) można sprawdzać, rozwiązujeć dla każdego  $\xi \in \partial\Omega$ , zadanie programowania liniowego

$$\min_{v \in U} (\nabla c(\xi))^\top (f^0(\xi) + f^1(\xi)v).$$

**Dowód twierdzenia 4.** Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 3, to  $P(x_0)$  jest normalny. A zatem w twierdzeniu 2 możemy podstawić  $\bar{\lambda}_0 = 1$ .  $\square$

**Dowód twierdzenia 6.3.2 (zasada maksimum Pontriagina dla problemu  $P_1(x_0)$ ).**

W problemie  $P_1(x_0)$  (zob. p.6.2) występuje tylko ograniczenie horyzontu. Z lematu 1 wynika, że  $P_1(x_0)$  jest normalny. Stosując do tego problemu twierdzenie 2 z  $\bar{\lambda}_0 = 1$  lub twierdzenie 4, otrzymujemy natychmiast twierdzenie 6.3.2.  $\square$

**Dowód twierdzenia 6.3.1. (o pochodnych wskaźnika jakości w problemie  $P_1(x_0)$ ).**

Wyliczymy pochodne wskaźnika jakości (6.8), przy założeniu, że horyzont jest swobodny, tzn. gdy ograniczenie (6.2) jest nieaktywne. Jeżeli  $T = T_{\min}$ , to pochodną względem  $T$  należy rozumieć jako prawostronną. Założenia twierdzenia 6.3.1, przyjęte w p. 6.2 gwarantują, że spełnione są założenia CA3 oraz że rozwiązanie równania (6.7) istnieje dla wszystkich

$x_0 \in R^n$ ,  $u \in U_{ad}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Ponieważ ograniczenia są nieaktywne, to z twierdzenia 3 wynika, że  $P_1(x_0)$  jest normalny i możemy przyjąć  $\bar{\lambda}_0 = 1$ . Dla uproszczenia zapisu przez  $f(x, u)$  będziemy oznaczać prawą stronę równania (6.7) oraz przyjmiemy oznaczenia

$$g(x(T)) = q(x(T)) + \rho(c(x(T)) - \alpha_{\max})_+^2, \quad (70)$$

$$L_\varepsilon(\xi, v) = \varepsilon L(\xi, v), \quad (70a)$$

gdzie funkcje  $q, c, L$  oraz liczby  $\varepsilon, \rho, \alpha_{\max}$  zdefiniowano w p. 6.2. Będziemy stosować skrócone oznaczenia podane po wzorze (37) i pomijać niektóre argumenty funkcji pisząc np.  $\dot{x} = f(x, u)$ , zamiast  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ . Niech  $x$  będzie rozwiązaniem równania (6.7) ze sterowaniem  $u \in U_{ad}$  i warunkiem początkowym  $x_0$  oraz niech przyrost sterowania  $\Delta u$  spełnia warunek  $\Delta u \in \tilde{U}_{ad}(u)$ . Przyrost sterowania  $u$  o  $\Delta u$ , wywoła przyrost trajektorii o  $\Delta x$ . Przyrost  $\Delta x$ , spełnia równanie

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + \Delta u(t)) - f(x(t), u(t)), \quad \Delta x(0) = 0. \quad (71)$$

Założenia twierdzenia 6.3.1 gwarantują, że rozwiązanie równania (71) istnieje dla wszystkich  $\Delta x(0) \in R^n$ ,  $\Delta u \in \tilde{U}_{ad}(u)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Posługując się oszacowaniami analogcznymi do podanych w dowodzie twierdzenia 2.1.1, można pokazać, że rozwiązanie równania (71) ma następującą

**Własność W.** Jeżeli  $\Delta u \in \tilde{U}_{ad}(u)$ , to istnieje liczba  $M \geq 0$ , taka że dla dowolnego  $p \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ , spełniona jest nierówność

$$\sup_{t \in [0, T]} |\Delta x(t)| \leq M \|\Delta u\|_p. \quad (72)$$

Innymi słowy, mały w sensie normy w  $L^p$ , przyrost sterowania, pociąga za sobą mały, w sensie zbieżności jednostajnej, przyrost rozwiązania. Hamiltonian (6.9) zapiszemy w postaci

$$H(\psi, x, u) = \psi^\top f(x, u) - L_\varepsilon(x, u). \quad (73)$$

Równanie sprzężone jest określone przez (6.10). Wykorzystując (70), warunek końcowy (6.11), można zapisać skrótnie jako

$$\psi(T) = -\nabla g_T. \quad (74)$$

Przyrost wskaźnika jakości (6.8), spowodowany przyrostami  $\Delta x$  i  $\Delta u$  wynosi

$$\Delta J = \int_0^T (L_\varepsilon(x + \Delta x, u + \Delta u) - L_\varepsilon(x, u)) dt + (\nabla g_T)^\top \Delta x(T) + o_1(\Delta x(T)), \quad (75)$$

przy czym przez  $o_1(\Delta x(T))$  oznaczyliśmy małą rzędu wyższego niż pierwszy. Będziemy przekształcać (75). Całkując przez części wyrażenie  $\int_0^T \psi^\top \Delta \dot{x} dt$  i pamiętając, że  $\Delta x(0) = 0$  otrzymujemy

$$\psi^\top(T) \Delta x(T) = \int_0^T \psi^\top \Delta \dot{x} dt + \int_0^T \psi^\top \Delta x dt.$$

Korzystając z (74) mamy

$$(\nabla g_T)^\top \Delta x(T) = - \int_0^T \psi^\top \Delta \dot{x} dt - \int_0^T \dot{\psi}^\top \Delta x dt.$$

Wstawiając to wyrażenie do (75) otrzymujemy

$$\Delta J = \int_0^T (L_\varepsilon(x + \Delta x, u + \Delta u) - L_\varepsilon(x, u)) dt - \int_0^T \psi^\top \Delta \dot{x} dt - \int_0^T \dot{\psi}^\top \Delta x dt + o_1(\Delta x(T)).$$

Wykorzystując równanie sprzężone (6.10) i równanie (71) dostajemy

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_0^T (L_\varepsilon(x + \Delta x, u + \Delta u) - L_\varepsilon(x, u)) dt - \\ & - \int_0^T \psi^\top (f(x + \Delta x, u + \Delta u) - f(x, u)) dt + \int_0^T (\nabla_x H(\psi, x, u))^\top \Delta x dt + o_1(\Delta x(T)). \end{aligned}$$

Z (73) wynika, że powyższe wyrażenie może być zapisane jako

$$\Delta J = - \int_0^T (H(\psi, x + \Delta x, u + \Delta u) - H(\psi, x, u) - (\nabla_x H(\psi, x, u))^\top \Delta x) dt + o_1(\Delta x(T)). \quad (76)$$

Z definicji gradientu hamiltonianu względem drugiej zmiennej mamy

$$-H(p, \xi, v) - (\nabla_\xi H(p, \xi, v))^\top \Delta \xi = -H(p, \xi + \Delta \xi, v) + o_2(\Delta \xi),$$

przy czym  $p = \psi(t)$ ,  $\xi = x(t)$ ,  $v = u(t)$ ,  $\Delta \xi = \Delta x(t)$ . Wstawiając do (76) dostajemy

$$\Delta J = - \int_0^T (H(\psi, x + \Delta x, u + \Delta u) - H(\psi, x + \Delta x, u)) dt + \int_0^T o_2(\Delta x(t)) dt + o_1(\Delta x(T)). \quad (77)$$

Na mocy własności W, ostatnie dwa wyrażenia we wzorze (77) zmierzają do zera szybciej niż dowolna z norm  $\|\Delta u\|_p$ . A zatem

$$\Delta J = - \int_0^T (H(\psi, x + \Delta x, u + \Delta u) - H(\psi, x + \Delta x, u)) dt + o_3(\|\Delta u\|_p), \quad (78)$$

co dowodzi (6.13). Z definicji gradientu hamiltonianu mamy

$$H(p, \xi + \Delta \xi, v + \Delta v) - H(p, \xi + \Delta \xi, v) = (\nabla_v H(p, \xi, v))^\top \Delta v + o_4(\Delta \xi, \Delta v), \quad (79)$$

przy czym  $p = \psi(t)$ ,  $\xi = x(t)$ ,  $v = u(t)$ ,  $\Delta \xi = \Delta x(t)$ ,  $\Delta v = \Delta u(t)$ . Wstawiając wzór (79) do (78) otrzymujemy

$$\Delta J = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \Delta u dt + \int_0^T o_4(\Delta x, \Delta u) dt + o_3(\|\Delta u\|_p). \quad (80)$$

Jeżeli  $\|\Delta u\|_\infty \rightarrow 0$ , to druga całka w (80) zmierza do zera szybciej niż  $\|\Delta u\|_\infty$ , ale niekoniecznie szybciej niż dowolna z norm  $\|\Delta u\|_p$ . Możemy zatem napisać

$$\Delta J = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \Delta u dt + o(\|\Delta u\|_\infty), \quad (81)$$

co dowodzi (6.13a). Pomijając w równości (81) człon  $o(\|\Delta u\|_\infty)$  oraz zastępując przyrost  $\Delta u$  wariacją dopuszczalną  $\delta u$ , otrzymujemy liniowy operator  $L$ , działający z  $\tilde{U}_{ad}(u)$  w  $R$ . Działanie operatora  $L$ , jest określone następująco:

$$\delta J = L\delta u = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \delta u \, dt.$$

Wynika stąd, że funkcja  $\phi = \nabla_u H(\psi, x, u)$ , określa kierunek najszybszego spadku wskaźnika jakości w przestrzeni sterowań. A zatem funkcja  $\phi$  jest antygradientem wskaźnika jakości. Zbadamy teraz wpływ zmian czasu  $T$  na wskaźnik jakości. Założymy, że istnieje funkcja  $v: R_0^+ \times R_0^+ \rightarrow R^m$ , taka że  $u(t) = v(t, T)$  oraz że  $v$  jest różniczkowalna w sposób ciągły względem  $T$ , dla prawie wszystkich  $t \in R_0^+$ . Przyrost czasu końcowego o  $\Delta T$  wywoła przyrost sterowania

$$\Delta u(t) = \nabla_T v(t, T) \Delta T + o_5(t, \Delta T),$$

przy czym  $\frac{\sup_{t \in [0, T]} |o_5(t, \Delta T)|}{|\Delta T|} \xrightarrow[\Delta T \rightarrow 0]{} 0$ . Przyrost wskaźnika jakości (6.8), wywołany zmianą czasu końcowego o  $\Delta T$ , jest równy

$$\begin{aligned} \Delta J &= - \left( \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \nabla_T v(u, T) \, dt \right) \Delta T + \\ &\quad + (L_e(x(T), u(T^-)) + 1 + (\nabla g_T)^\top f(x(T), u(T^-))) \Delta T + o(\Delta T), \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy tu z twierdzenia o wartości średniej dla całek oraz ze wzoru (81), a małe wyższego rzędu niż pierwszy względem  $\Delta T$  oznaczyliśmy wspólnym symbolem  $o(\Delta T)$ . Dzieląc obie strony przez  $\Delta T$  i przechodząc do granicy mamy

$$\nabla_T J = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \nabla_T v(t, T) \, dt + (1 + L_e(x(T), u(T^-)) + (\nabla g_T)^\top f(x(T), u(T^-))).$$

Z definicji hamiltonianu (73) oraz z warunku końcowego (74) otrzymujemy

$$\nabla_T J = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \nabla_T v(t, T) \, dt + (1 - H(\psi(T), x(T), u(T^-))), \quad (82)$$

co dowodzi (6.15). Jeżeli wartości sterowania  $u$  w przedziale czasu  $[0, T]$  nie zależą jawnie od czasu końcowego  $T$ , to całka w (82) znika i otrzymujemy (6.14).  $\square$

**Dowód wzoru (6.25).** Rozpatrzymy przypadek sterowania skalarnego. Niech  $u \in U_{ad}$ ,  $v \in U$  oraz niech  $\theta \in [0, T]$  będzie punktem, w którym sterowanie  $u$  jest ciągłe. Rozważmy wariację szpilkową sterowania określona wzorem

$$\Delta u(t, \theta, \alpha) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \alpha], \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}, \quad \alpha > 0. \quad (83)$$

Norma wariacji szpilkowej wynosi  $\|\Delta u\|_p = |v| \alpha^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$  dla  $p = 1, 2, \dots < \infty$ . Korzystając ze wzoru (78), własności (W) i twierdzenia o wartości średniej dla całek, otrzymujemy wzór na przyrost wskaźnika jakości (6.8) wywołany wariacją sterowania  $\Delta u$

$$\Delta J = \alpha(H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta)) - H(\psi(\theta), x(\theta), v)) + o(\alpha).$$

Podstawiając hamiltonian (6.9) z  $\varepsilon = 0$  oraz  $\alpha = \Delta t_j$ ,  $\theta = t_j$ ,  $u(\theta) = u^+(t_j)$ ,  $v = u^-(t_j)$ , otrzymujemy

$$\Delta J = \Delta t_j \psi(t_j)^\top f^1(x(t_j))(u^+(t_j) - u^-(t_j)) + o(\Delta t_j).$$

Stąd pochodna prawostronna wskaźnika jakości względem czasu przełączenia  $t_j$

$$\nabla_{t_j} J = \phi(t_j)(u^+(t_j) - u^-(t_j)). \quad (84)$$

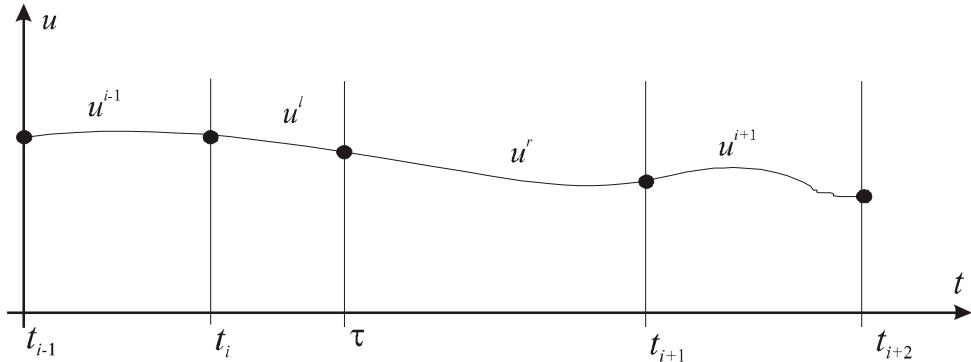
Zwróćmy uwagę, że w punkcie  $t_j$  sterowanie jest prawostronnie ciągłe, rozumowanie jest więc poprawne tylko dla  $\Delta t_j \geq 0$ . Dla  $\Delta t_j < 0$  można łatwo przeprowadzić analogiczny dowód, w wyniku którego uzyskuje się wyrażenie na pochodną lewostronną, identyczne z (84). W przypadku wielu sterowań dowód jest analogiczny.  $\square$

**Uwaga.** Jeżeli  $\Delta u$  jest wariacją szpilkową określona wzorem (83), to wzór (80) może być zapisany w postaci

$$\Delta J = - \int_0^T (\nabla_u H(\psi, x, u))^\top \Delta u \, dt + o(\|\Delta u\|_p), \quad p \in \{2, 3, \dots, \infty\}. \quad (85)$$

### Dodatek C – Efektywność generacji jednowęzłowych

Poniżej podamy wszystkie wzory na efektywność generacji jednowęzłowej dla sterowania skalarnego. Uogólnienie na przypadek wielu sterowań jest natychmiastowe i nie wymaga dodatkowych komentarzy.



Rys. 1. Wstawienie nowego węzła w punkcie  $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ .

#### a. Oba łuki sąsiadujące z łukiem $i$ -tym, na którym wykonujemy generację, są łukami wewnętrznymi

Rozpatrzmy generację przedstawioną na rys. 1. Aby wyliczyć pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym, znajdującym się w punkcie  $t_i$ , wykorzystamy metodę wyznaczania pochodnych, pokazaną w p. 6.4.2. W przedziałach czasu  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $[t_{i+1}, t_{i+2}]$  sterowanie jest określone wzorami

$$u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) = p_{i-1}^0 V_0(t, t_{i-1}, t_i) + p_{i-1}^1 V_1(t, t_{i-1}, t_i) + p_i^0 V_0(t, t_i, t_{i-1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i-1}). \quad (1)$$

$$u^i(t, t_i, t_{i+1}) = p_i^0 V_0(t, t_i, t_{i+1}) + p_i^1 V_1(t, t_i, t_{i+1}) + p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, t_i) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, t_i). \quad (2)$$

$$u^{i+1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) = p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, t_{i+2}) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, t_{i+2}) + p_{i+2}^0 V_0(t, t_{i+2}, t_{i+1}) + p_{i+2}^1 V_1(t, t_{i+2}, t_{i+1}).$$

Parametry nowo wstawianego węzła oznaczamy przez  $p_\tau^0$ ,  $p_\tau^1$  oraz przyjmujemy, że  $p_\tau^0 = u(\tau)$ ,  $p_\tau^1 = \dot{u}(\tau)$ , gdzie  $u$  jest sterowaniem przed generacją. W przedziałach czasu  $[t_i, \tau]$  oraz  $[\tau, t_{i+1}]$ , sterowanie jest określone wzorami:

$$u^i(t, t_i, \tau) = p_i^0 V_0(t, t_i, \tau) + p_i^1 V_1(t, t_i, \tau) + p_\tau^0 V_0(t, \tau, t_i) + p_\tau^1 V_1(t, \tau, t_i), \quad t \in [t_i, \tau], \quad (3)$$

$$u^r(t, \tau, t_{i+1}) = p_\tau^0 V_0(t, \tau, t_{i+1}) + p_\tau^1 V_1(t, \tau, t_{i+1}) + p_{i+1}^0 V_0(t, t_{i+1}, \tau) + p_{i+1}^1 V_1(t, t_{i+1}, \tau), \quad t \in [\tau, t_{i+1}]. \quad (4)$$

Z ogólnego wyrażenia na przyrost wskaźnika jakości (6.13a), otrzymujemy następujące formuły na pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym po generacji

$$\nabla_{p_i^0} \overline{Q} = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{p_i^0} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{\tau} \phi(t) \nabla_{p_i^0} u^i(t, t_i, \tau) dt, \quad (5)$$

$$\nabla_{p_i^1} \overline{Q} = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{p_i^1} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{\tau} \phi(t) \nabla_{p_i^1} u^i(t, t_i, \tau) dt, \quad (6)$$

$$\nabla_{t_i} \overline{Q} = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t) \nabla_{t_i} u^{i-1}(t, t_{i-1}, t_i) dt - \int_{t_i}^{\tau} \phi(t) \nabla_{t_i} u^i(t, t_i, \tau) dt. \quad (7)$$

Wykorzystując wzory (6.28-6.31) – po żmudnych przekształceniach – otrzymuje się wzory na pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym po generacji

$$\begin{aligned}\nabla_{p_i^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} - \frac{2h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)}, \\ \nabla_\tau \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} \left( \frac{6(p_{i-1}^0 - p_i^0)}{(t_i - t_{i-1})} + 2(p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})} - (2p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (p_i^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right).\end{aligned}$$

Obliczymy teraz pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle, znajdującym się w punkcie  $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ . Korzystamy ponownie z ogólnego wyrażenia (6.13a) na przyrost wskaźnika jakości i otrzymujemy następujące formuły

$$\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} = - \int_{t_i}^\tau h(t) \nabla_{p_\tau^0} u^l(t, t_i, \tau) dt - \int_\tau^{t_{i+1}} h(t) \nabla_{p_\tau^0} u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt, \quad (8)$$

$$\nabla_{p_\tau^1} \bar{Q} = - \int_{t_i}^\tau h(t) \nabla_{p_\tau^1} u^l(t, t_i, \tau) dt - \int_\tau^{t_{i+1}} h(t) \nabla_{p_\tau^1} u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt, \quad (9)$$

$$\nabla_\tau \bar{Q} = - \int_{t_i}^\tau h(t) \nabla_\tau u^l(t, t_i, \tau) dt - \int_\tau^{t_{i+1}} h(t) \nabla_\tau u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt. \quad (10)$$

Ponownie wykorzystując wzory (6.28-6.31) – po wykonaniu przekształceń – otrzymujemy wyrażenia na pochodne względem parametrów w nowym węźle

$$\begin{aligned}\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{2h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2}, \\ \nabla_{p_\tau^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)} - \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_\tau \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(p_i^0 - u(\tau))}{(\tau - t_i)} + 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (2p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{i+1}^1) \right).\end{aligned}$$

**Uwaga.** Po generacji, liczba węzłów wzrasta o jeden i należy je ponownie ponumerować. A zatem węzeł  $i+1$  będzie miał numer  $i+2$  itd. Dla większej jasności, zachowamy numerację węzłów, taką jaką była przed generacją.

Pamiętając o powyższej uwadze, obliczymy pochodne wskaźnika jakości po generacji, względem parametrów w węźle  $i+1$ , znajdującym się w punkcie  $t_{i+1}$ . Korzystamy ponownie z wyrażenia (6.13a) na przyrost wskaźnika jakości i otrzymujemy następujące formuły.

$$\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q} = - \int_{\tau}^{t_{i+1}} h(t) \nabla_{p_{i+1}^0} u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt - \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} h(t) \nabla_{p_{i+1}^0} u^{i+1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) dt, \quad (11)$$

$$\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} = - \int_{\tau}^{t_{i+1}} h(t) \nabla_{p_{i+1}^1} u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt - \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} h(t) \nabla_{p_{i+1}^1} u^{i+1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) dt, \quad (12)$$

$$\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} = - \int_{\tau}^{t_{i+1}} h(t) \nabla_{t_{i+1}} u^r(t, \tau, t_{i+1}) dt - \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} h(t) \nabla_{t_{i+1}} u^{i+1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) dt. \quad (12)$$

Ponownie wykorzystując wzory (6.28-6.31) – po wykonaniu przekształceń – otrzymujemy wyrażenia na pochodne względem parametrów w węźle  $i+1$ .

$$\begin{aligned} \nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{2h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} - \frac{3h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2}, \\ \nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)} - \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} - \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})}, \\ \nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_{i+1}^0)}{(t_{i+1} - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &\quad + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - 2(p_{i+1}^1 + p_{i+2}^1) \right) + \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - (p_{i+1}^1 + 2p_{i+2}^1) \right). \end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu (zob. wzór (6.40)) wyrażają się wzorami

$$e_i(\tau) = (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^0} Q)^2 + (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^1} Q)^2 + (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_i} Q)^2, \quad (13)$$

$$e(\tau) = (\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_\tau^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_\tau \bar{Q})^2, \quad (14)$$

$$e_{i+1}(\tau) = (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^0} Q)^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2. \quad (15)$$

W podobny sposób można wyprowadzić pozostałe wzory na przyrost normy gradientu. Poniżej podajemy wszystkie możliwe sytuacje.

**b. Łuk sąsiadujący z lewej strony jest łukiem granicznym oraz łuk z prawej strony jest łukiem wewnętrznym**

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)}, \\ \nabla_{t_i} \bar{Q} &= \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &\quad + \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - (p_i^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_i^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{2h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)} - \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{\tau} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(t_i) - u(\tau))}{(\tau - t_i)} + 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &\quad + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - (2p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{i+1}^1) \right).\end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i+1$  wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{2h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} - \frac{3h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2}, \\ \nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)} - \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} - \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})}, \\ \nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_{i+1}^0)}{(t_{i+1} - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &\quad + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{i+1}^0 - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &\quad + \frac{h_3(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^3} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - 2(p_{i+1}^1 + p_{i+2}^1) \right) + \frac{h_2(t_{i+1}, t_{i+2})}{(t_{i+2} - t_{i+1})^2} \left( \frac{6(p_{i+2}^0 - p_{i+1}^0)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} - (p_{i+1}^1 + 2p_{i+2}^1) \right).\end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$\begin{aligned}e_i(\tau) &= (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 - (\nabla_{\tau} \bar{Q})^2, \\ e_{i+1}(\tau) &= (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 - (\nabla_{\tau} \bar{Q})^2.\end{aligned}$$

### c. Łuk sąsiadujący z prawej strony jest łukiem granicznym oraz łuk z lewej strony jest łukiem wewnętrznym

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_i^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} - \frac{2h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})} - \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)},\end{aligned}$$

$$\nabla_{t_i} \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^3} \left( \frac{6(p_{i-1}^0 - p_i^0)}{(t_i - t_{i-1})} + 2(p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{i-1}, t_i)}{(t_i - t_{i-1})^2} \left( \frac{6(p_i^0 - p_{i-1}^0)}{(t_i - t_{i-1})} - (2p_{i-1}^1 + p_i^1) \right) + \\ + \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (p_i^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right).$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\nabla_{p_i^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{2h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)} - \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{\tau} \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(p_i^0 - u(\tau))}{(\tau - t_i)} + 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_i^0)}{(\tau - t_i)} - (2p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ + \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ + \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{i+1}^1) \right).$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i+1$  wynoszą

$$\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_{i+1}))}{(t_{i+1} - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right).$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$e_i(\tau) = (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^0} Q)^2 + (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^1} Q)^2 + (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_i} Q)^2, \\ e_{i+1}(\tau) = (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^1} Q)^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_{i+1}} Q)^2.$$

#### d. Oba łuki sąsiadujące są łukami granicznymi

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i$ -tym wynoszą

$$\nabla_{p_i^1} \bar{Q} = -\frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)}, \\ \nabla_{t_i} \bar{Q} = \frac{h_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) +$$

$$+ \frac{h_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - (p_i^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right).$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_i^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} - \frac{2h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2}, \\ \nabla_{p_i^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)} - \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{\tau} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^3} \left( \frac{6(u(t_i) - u(\tau))}{(\tau - t_i)} + 2(p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{\hat{h}_2(t_i, \tau)}{(\tau - t_i)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_i))}{(\tau - t_i)} - (2p_i^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{h_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &+ \frac{h_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{i+1}^1) \right). \end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $i+1$  wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)}, \\ \nabla_{t_{i+1}} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_{i+1}))}{(t_{i+1} - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right) + \\ &+ \frac{\hat{h}_2(\tau, t_{i+1})}{(t_{i+1} - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_{i+1}) - u(\tau))}{(t_{i+1} - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_{i+1}^1) \right). \end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$\begin{aligned} e_i(\tau) &= (\nabla_{p_i^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_i^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_i} \bar{Q})^2 - (\nabla_{\tau} \bar{Q})^2, \\ e_{i+1}(\tau) &= (\nabla_{p_{i+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{i+1}^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_{i+1}} \bar{Q})^2 - (\nabla_{\tau} \bar{Q})^2. \end{aligned}$$

#### e. Generacja na łuku początkowym, łuk z prawej strony jest łukiem wewnętrznym

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle 0 wynoszą

$$\nabla_{p_0^0} \bar{Q} = -\frac{2h_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3h_2(0, \tau)}{\tau^2}, \quad \nabla_{p_0^1} \bar{Q} = -\frac{h_3(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{h_2(0, \tau)}{\tau}.$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{2h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{p_0^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^2} + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau} - \frac{h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)}, \\ \nabla_\tau \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} \left( \frac{6(p_0^0 - u(\tau))}{\tau} + 2(p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_0^0)}{\tau} - (2p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \frac{h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_1^1) \right).\end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle 1 wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_0^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} - \frac{2h_3(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)^3} - \frac{3h_2(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)^2}, \\ \nabla_{p_1^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)} - \frac{h_3(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)^2} - \frac{h_2(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)}, \\ \nabla_{t_1} \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_1^0)}{(t_1 - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \\ &+ \frac{h_3(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)^3} \left( \frac{6(p_2^0 - p_1^0)}{(t_2 - t_1)} - 2(p_1^1 + p_2^1) \right) + \frac{h_2(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)^2} \left( \frac{6(p_2^0 - p_1^0)}{(t_2 - t_1)} - (p_1^1 + 2p_2^1) \right).\end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$\begin{aligned}e_0(\tau) &= (\nabla_{p_0^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_0^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2, \\ e_1(\tau) &= (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_0^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_0^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_0^0} \bar{Q})^2.\end{aligned}$$

#### **f. Generacja na łuku początkowym, łuk z prawej strony jest łukiem granicznym**

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle 0 wynoszą

$$\nabla_{p_0^0} \bar{Q} = -\frac{2h_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3h_2(0, \tau)}{\tau^2}, \quad \nabla_{p_0^1} \bar{Q} = -\frac{h_3(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{h_2(0, \tau)}{\tau}.$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\begin{aligned}\nabla_{p_0^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{2h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2}, \\ \nabla_{p_1^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^2} + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau} - \frac{h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)}, \\ \nabla_\tau \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} \left( \frac{6(p_0^0 - u(\tau))}{\tau} + 2(p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_0^0)}{\tau} - (2p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{h_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} \left( \frac{6(u(t_1) - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \frac{h_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_1) - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_1^1) \right).\end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle 1 wynoszą

$$\nabla_{p_1^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)},$$

$$\nabla_{t_1} \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_1))}{(t_1 - \tau)} + 2(\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(\tau, t_1)}{(t_1 - \tau)^2} \left( \frac{6(u(t_1) - u(\tau))}{(t_1 - \tau)} - (2\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right).$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$e_0(\tau) = (\nabla_{p_0^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_0^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2,$$

$$e_1(\tau) = (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_{t_1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_1} Q)^2.$$

### **g. Generacja na łuku końcowym, łuk z lewej strony jest łukiem wewnętrzny**

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $s$  wynoszą

$$\nabla_{p_s^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})^2} - \frac{2h_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^3} - \frac{3h_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2},$$

$$\nabla_{p_s^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})^2} + \frac{\hat{h}_2(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})} - \frac{h_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2} - \frac{h_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)},$$

$$\begin{aligned} \nabla_{t_s} \bar{Q} = & \frac{\hat{h}_3(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})^3} \left( \frac{6(p_{s-1}^0 - p_s^0)}{(t_s - t_{s-1})} + 2(p_{s-1}^1 + p_s^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_{s-1}, t_s)}{(t_s - t_{s-1})^2} \left( \frac{6(p_s^0 - p_{s-1}^0)}{(t_s - t_{s-1})} - (2p_{s-1}^1 + p_s^1) \right) + \\ & + \frac{h_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_s^0)}{(\tau - t_s)} - 2(p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{h_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_s^0)}{(\tau - t_s)} - (p_s^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right). \end{aligned}$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2} - \frac{2h_3(\tau, T)}{(T - \tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, T)}{(T - \tau)^2},$$

$$\nabla_{p_\tau^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)} - \frac{h_3(\tau, T)}{(T - \tau)^2} - \frac{h_2(\tau, T)}{(T - \tau)},$$

$$\begin{aligned} \nabla_\tau \bar{Q} = & \frac{\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^3} \left( \frac{6(p_s^0 - u(\tau))}{(\tau - t_s)} + 2(p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau - t_s)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_s^0)}{(\tau - t_s)} - (2p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ & + \frac{h_3(\tau, T)}{(T - \tau)^3} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T - \tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{s+1}^1) \right) + \frac{h_2(\tau, T)}{(T - \tau)^2} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T - \tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{s+1}^1) \right). \end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle końcowym ( $s+1$ ) wynoszą

$$\nabla_{p_{s+1}^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(\tau, T)}{(T - \tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, T)}{(T - \tau)^2}, \quad \nabla_{p_{s+1}^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T - \tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T - \tau)},$$

$$\nabla_T \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_{s+1}^0)}{(T-\tau)} + 2(p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - (2p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) + \\ + 1 - H(\psi(T), x(T), p_{s+1}^0).$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$e_s(\tau) = (\nabla_{p_s^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_s^0} Q)^2 + (\nabla_{p_s^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_s^1} Q)^2 + (\nabla_{t_s} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_s} Q)^2,$$

$$e_{s+1}(\tau) = (\nabla_{p_{s+1}^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{s+1}^0} Q)^2 + (\nabla_{p_{s+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{s+1}^1} Q)^2 + (\nabla_T \bar{Q})^2 - (\nabla_T Q)^2.$$

#### **h. Generacja na łuku końcowym, łuk z lewej strony jest łukiem granicznym**

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle  $s$  wynoszą

$$\nabla_{p_s^1} \bar{Q} = -\frac{h_3(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^2} - \frac{h_2(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)},$$

$$\nabla_{t_s} \bar{Q} = \frac{h_3(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_s))}{(\tau-t_s)} - 2(p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{h_2(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_s))}{(\tau-t_s)} - (p_s^1 + 2\dot{u}(\tau)) \right).$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^3} - \frac{3\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^2} - \frac{2h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2},$$

$$\nabla_{p_\tau^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^2} + \frac{\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)} - \frac{h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^2} - \frac{h_2(\tau, T)}{(T-\tau)},$$

$$\nabla_\tau \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^3} \left( \frac{6(u(t_s) - u(\tau))}{(\tau-t_s)} + 2(p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(t_s, \tau)}{(\tau-t_s)^2} \left( \frac{6(u(\tau) - u(t_s))}{(\tau-t_s)} - (2p_s^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ + \frac{h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_{s+1}^1) \right) + \frac{h_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_{s+1}^1) \right).$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle końcowym ( $s+1$ ) wynoszą

$$\nabla_{p_{s+1}^0} \bar{Q} = \frac{2\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2}, \quad \nabla_{p_{s+1}^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)},$$

$$\nabla_T \bar{Q} = \frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_{s+1}^0)}{(T-\tau)} + 2(p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2} \left( \frac{6(p_{s+1}^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - (2p_s^1 + p_{s+1}^1) \right) +$$

$$+ 1 - H(\psi(T), x(T), p_{s+1}^0).$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$e_s(\tau) = (\nabla_{p_s^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_s^1} Q)^2 + (\nabla_{t_s} \bar{Q})^2 - (\nabla_{t_s} Q)^2,$$

$$e_{s+1}(\tau) = (\nabla_{p_{s+1}^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{s+1}^0} Q)^2 + (\nabla_{p_{s+1}^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_{s+1}^1} Q)^2 + (\nabla_T \bar{Q})^2 - (\nabla_T Q)^2.$$

**i. Generacja dla przypadku, w którym sterowanie składa się z jednego łuku wewnętrznego**

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle 0 wynoszą

$$\nabla_{p_0^0} \bar{Q} = -\frac{2h_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3h_2(0, \tau)}{\tau^2}, \quad \nabla_{p_0^1} \bar{Q} = -\frac{h_3(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{h_2(0, \tau)}{\tau}.$$

Pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w nowym węźle wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_\tau^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} - \frac{3\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} - \frac{2h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} - \frac{3h_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2}, \\ \nabla_{p_\tau^1} \bar{Q} &= -\frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^2} + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau} - \frac{h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^2} - \frac{h_2(\tau, T)}{(T-\tau)}, \\ \nabla_\tau \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(0, \tau)}{\tau^3} \left( \frac{6(p_0^0 - u(\tau))}{\tau} + 2(p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \frac{\hat{h}_2(0, \tau)}{\tau^2} \left( \frac{6(u(\tau) - p_0^0)}{\tau} - (2p_0^1 + \dot{u}(\tau)) \right) + \\ &+ \frac{h_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - 2(\dot{u}(\tau) + p_1^1) \right) + \frac{h_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - (\dot{u}(\tau) + 2p_1^1) \right). \end{aligned}$$

Po generacji, pochodne wskaźnika jakości względem parametrów w węźle końcowym (s+1) wynoszą

$$\begin{aligned} \nabla_{p_1^0} \bar{Q} &= \frac{2\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} - \frac{3\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2}, \quad \nabla_{p_1^1} \bar{Q} = -\frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^2} + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)}, \\ \nabla_T \bar{Q} &= \frac{\hat{h}_3(\tau, T)}{(T-\tau)^3} \left( \frac{6(u(\tau) - p_1^0)}{(T-\tau)} + 2(p_1^1 + p_1^0) \right) + \frac{\hat{h}_2(\tau, T)}{(T-\tau)^2} \left( \frac{6(p_1^0 - u(\tau))}{(T-\tau)} - (2p_1^1 + p_1^0) \right) + \\ &+ 1 - H(\psi(T), x(T), p_1^0). \end{aligned}$$

Przyrosty kwadratu normy gradientu wyliczamy korzystając z wyrażenia (14) oraz ze wzorów

$$e_0(\tau) = (\nabla_{p_0^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_0^1} \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2,$$

$$e_1(\tau) = (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 - (\nabla_T \bar{Q})^2 + (\nabla_{p_1^1} \bar{Q})^2 - (\nabla_{p_1^0} \bar{Q})^2 + (\nabla_T \bar{Q})^2 - (\nabla_T \bar{Q})^2.$$

W ten sposób wyczerpaliśmy wszystkie możliwości generacji jednowęzłowych. Efektywność generacji płaskich, opisanych w p 6.5.3, wyznaczamy kierując się analogicznymi zasadami.

**Literatura**

1. Abramcham R., Marsden J.E.(1978): *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass. (1978).
2. Agrachev A., Sachkov J. (2004): *Control theory from the geometric viewpoint*. Springer-Verlag Berlin.
3. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. (1987): *Optimal Control*. Consultants Bureau, New York. A division of Plenum Publishing Corporation.
4. Bania P. (1999): *Model i sterowanie magnetyczną lewitacją*. Praca magisterska AGH, Kraków.
5. Bania P. (2000): *Stabilizujące sprzężenie zwrotne dla systemu magnetycznej lewitacji*. Półrocznik Automatyka, Wyd. AGH, Kraków.
6. Bania P. (2004): *Nonlinear Model Predictive Controller for Heating System*. Proc. 10th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics 30.08.2004-02.09.2004, Międzyzdroje, Poland, vol. 1, pp. 511-516.
7. Bania P. (2005): *Wyznaczanie ograniczeń stanu końcowego w nieliniowej regulacji predykcyjnej*. Materiały piątej krajowej konferencji Metody i systemy komputerowe CMS'05, Kraków.
8. Bania P. (2006): *Czy sterowanie predykcyjne wymaga dokładnej optymalizacji*. Półrocznik Automatyka, Wyd. AGH, Kraków.
9. Bania P., Korytowski A., Szymkat M., Gorczyca P. (2005a): *Optimal Control of a Laboratory Antilock Brake System* Proc. 16th IFAC world congress July 3 - 8, 2005, Prague.
10. Betts J.T. (1998): *Survey of numerical methods for trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 2, March-April 1998, 193-207.
11. Betts J.T. (2001): *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. SIAM.
12. Bornard G., Hammouri H. (1991): *A high gain observer for a class of uniformly observable systems*. Proc. IEEE CDC, Brighton, GB.
13. Brdyś M., Chen S., Roberts P. D. (1986): *An extension to the modified two-step algorithm for steady-state system optimization and parameters estimation*. Int. Journal of System Science, 17: 1229-1243.
14. Brdyś M., Tatjewski P. (1994): *An algorithm for steady-state optimising dual control of uncertain plants*. Proc. 1st IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems, 249-254, Smolenice, Słowacja.
15. Busawon K. K., De Leon-Morales J. (2000): *An observer design for uniformly observable non-linear systems*. Int. J. Control, vol. 73, No. 15, 1375-1381.
16. Chen H. (1997): *Stability and Robustness Considerations in Nonlinear Model Predictive Control*. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 674. VDI Verlag, Dusseldorf, 1997. Towards a Sampled-Data Theory for Nonlinear Model Predictive Control.
17. Chen H., Allgöwer F. (1998a): *A Quasi Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme With Guaranteed Stability*. Automatica vol. 34, No. 10, pp. 1205-1217.
18. Chen H., Allgöwer F. (1998b): *A computationally attractive nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability for stable systems*. J. Proc. Cont., Vol. 8, Nos. 5-6, pp. 475-485.
19. Chen, H., Kremling, A., & Allgöwer, F. (1995): *Nonlinear predictive control of a benchmark CSTR*. Proceedings of third European Control Conference, Rome, Italy, pp. 3247–3252.
20. Clarke D. W., Mohtadi C & Tuffs P. S. (1987): *Generalized predictive control. Part 2: Extensions and interpretations*. Automatica, 23(2), 149-160.
21. Cutler C. R., & Ramaker B. L. (1980): *Dynamic matrix control - a computer control algorithm*. Proceedings Joint Automatic Control Conference, San Francisco, CA.
22. Demidowicz B.P. (1972): *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, W-wa.
23. Diehl M., Findeisen R., Schwarzkopf S., Uslu I., Allgöwer F., Bock H.G. and Schlöder J. (2002): *An efficient approach for nonlinear model predictive control of largescale systems. Part I: Description of the methodology*. Automatisierungstechnik, 12:557-567, 2002.
24. Fehlberg E. (1985): *Some old and new Runge-Kutta formulas with stepsize control and their error coefficients* in Compute Vol. 34, Number 3 / September, 1985.

25. Findeisen R., Imsland L., Allgöwer F., Foss B.A. (2003a): *State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control: An Overview*. European Journal of Control 9:190-206.
26. Findeisen R., Imsland L., Allgöwer F., Foss B.A. (2003b): *Output Feedback stabilization of Constrained Systems With Nonlinear Predictive Control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control 2003;13:211-227.
27. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A. (1980): *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. PWN, W-wa.
28. Fontes F. A. C. C. (2000): *A general Framework to Design Stabilizing nonlinear Model Predictive Controller*. Syst. Contr. Letters 42(2):127-143.
29. Fontes F. A. C. C. (2000a). *Normality in the necessary conditions of optimality for control problems with state constraints*. In: Proceedings of the IASTED Conference on Control and Applications. Cancun, Mexico.
30. Fontes F. A. C. C. (2003a): *Discontinuous feedbacks, discontinuous optimal controls, and continuous-time model predictive control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 13, no. 3–4, pp. 191–209, 2003.
31. Fontes F. A. C. C., Magni L. (2003b): *Min-Max Model Predictive Control of Nonlinear Systems Using Discontinuous Feedbacks*. IEEE Transactions on Automatic Control vol. 48, NO. 10, October 2003 pp. 1750 –1755.
32. Garcia C. E. & Morshedi A. M. (1986): *Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC)*. Chemical Engineering Communications, 46, 73-87.
33. Gauthier J. P., Kupka I. A. K., (1994): *Observability and observer for non-linear systems*. SIAM Journal of Control and Optimization, 32, 975-994.
34. Gyurkovics E. (1998): *Receding horizon control via Bolza-type optimization*. Systems and Control Letters, 35:195-200.
35. Hargraves C.R., Paris S.W. (1987): *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*. J. Guidance, **10**(4), 338-342.
36. Hartl R. F., Sethi S. P., and Vickson G. (1995): *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints*, SIAM Review, 37 (1995), pp. 181–218.
37. Hiltman P., Chudej K., Breitner M.(1990): *Eine modifizierte zur Lösung von Mehrpunkt-Ranwertproblem – Benutzer-Anleitung*. Report Nr. 14 des Sonderforschungsbereichs 255.
38. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. (1979): *Theory of Extremal Problems*. North Holland-Amsterdam-New York-Oxford.
39. Jadababaie A., Yu J., Hauser J. (2001): *Unconstrained Receding-Horizon Control of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, NO. 5, may 2001, 776-782.
40. Jakubczyk B. (2001): *Introduction to geometric nonlinear control; Controllability and Lie Bracket*. Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory 3-28 September, Trieste, Italy.
41. Jezielski E. (2006): *Dynamika robotów*. WNT, W-wa.
42. Kierzenka J., Shampine L.F. (2001): *A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE*. ACM Transactions on Mathematical Software, **27**(3), 299-316.
43. Koon W.S., Lo M., Marsden J.E., Ross S.D.(2002): *Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons*. Contemporary Mathematics, Volume 292 (2002).
44. Korytowski A., Szymkat M., Turnau A., (1998): *Optymalnociasowe sterowanie wahadłem na wózku*. Praca opublikowana w książce *Komputerowe wspomaganie w obliczeniach naukowo technicznych - przykłady zastosowań pakietów MATLAB i MAPLE V* pod red. M. Szymkata CCATIE Kraków 1998, s. 177-270.
45. Korytowski A., Szymkat M., Turnau A., (2002): *Neighboring optimization for constrained control problems in real time*. International Symposium on computer aided control design September 18-20, 2002 Glasgow, Scotland, U.K.
46. Kudrewicz J. (1970): *Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników*. PWN, W-wa.
47. Kudrewicz J. (1993): *Fraktale i Chaos*. WNT, W-wa.

48. Kwon W. H., Han S. (2005): *Receding Horizon Control. Model Predictive Control for State Models.* Springer-Verlag London.
49. La Salle J., Lefshetz S. (1966): *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej.* PWN, W-wa.
50. Lee E. B. and Markus.L. (1967): *Foudations of Optimal Control Theory.* Wiley, New York, 1967.
51. Luyben W. L. (1976): *Modelowanie, symulacja i sterowanie procesów przemysłu chemicznego.* WNT, W-wa.
52. Maciejowski J.M. (2002): *Predictive Control with Constraints.* Prentice Hall, London.
53. Malanowski K. (1994): *Stability and sensitivity of solutions to nonlinear optimal control problems.* Appl. Math. Optim., 32 (1994), pp. 111–141.
54. Malanowski K. (2003): *On normality of lagrange multipliers for state constrained optimal control problems.* Optimization 52(1), 75-91.
55. Malanowski K. and Maurer H. (1996): *Sensitivity analysis for parametric control problems with control-state constraints.* Comput. Optim. Appl., 5 (1996), pp. 253–283.
56. Marec J. P. (1979): *Optimal space trajectories.* Elsevier scientific Pub. Co. New York 1979.
57. Martinsen F., Biegler L. T., Foss B. A. (2004): *A new optimization algorithm with application to nonlinear MPC.* J. Proc. Cont. 14 853-865.
58. Maurer H., Büskens C., Kim J.-H.R., Kaya C.Y. (2005): *Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang–bang controls.* Optimal Control Applications and Methods, 26, (2005), 129–156.
59. Maurer H., Oberle H. J. (2002): *Second order sufficient conditions for optimal control problems with free final time: the Riccati approach.* SIAM J. Control Optim. 2002 Vol. 41, No. 2, pp. 380–403.
60. Mayne D. Q., Michalska H. (1990): *Receding Horizon Control of Nonlinear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, 35:814-824.
61. Mayne D. Q., Rawlings J. B., Rao C. V. Scokaert P. O. M. (2000): *Constrained Model Predictive control: Stability and Optimality.* Automatica 36 (2000) 789-814.
62. Michalska H. (1997): *A new formulation of Receding horizon Stabilising Control without terminal constraint on the state.* European Journal of Control 3:2-14.
63. Michalska H., Mayne D. Q. (1993): *Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, 38:1623-1633.
64. Michalska H., Mayne D. Q. (1995): *Moving horizon observers and observer-based control.* IEEE Transactions on Automatic Control, 40(6), 995-1006.
65. Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych.* WNT, W-wa.
66. Morari M. (1983): *Robust stability of systems with integral control.* In Proc. 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, pages 865–869, Los Angeles, CA, 1983.
67. Morari M., Lee J. H. (1999): *Model predictive control: Past, present and feature.* Computers and Chemical Engineering 23, 667-682.
68. Oberle, H.J. and Grimm W. (1989): *BNDSCO - A Program for the numerical solution of optimal control problems.* Report No. 515-89/22, Institut for Flight Systems Dynamics, Oberpfaffenhofen, German Aerospace Research Establishment DLR, Oberpfaffenhofen, Germany.
69. Palczewski A. (1999): *Równania różniczkowe zwyczajne: teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych.* WNT, W-wa.
70. Penrose R. (2000): *Nowy umysł cesarza.* PWN, W-wa.
71. Pesch H. J. (1989a): *Real-time computation of feedback controls for constrained optimal control problems, Part I: Neighboring extremals.* Optimal Control Applications and Methods, vol. 10, No 2, pp. 129-145.
72. Pesch H. J. (1989b): *Real-time computation of feedback controls for constrained optimal control problems, Part II: A corrections method based on multiple shooting.* Optimal Control Applications and Methods, vol. 10, No 2, pp. 147-171.
73. Piłat A. (2004): *Sterowanie systemami magnetycznego zawieszenia.* Rozprawa doktorska. AGH, Kraków.

74. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. (1992): *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
75. Prett D. M. & Gillette R. D. (1980): *Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit*. Proceedings of the joint automatic control conference, WP5-c.
76. Prigogine I. (2000): *Kres pewności, czas, chaos i nowe prawa natury*. Wyd. W.A.B., W-wa.
77. Primbs J. A., Nevistic V. & Doyle J. C. (1998): *On receding horizon extensions and control Lyapunov functions*. Proceedings of the American automatic control conference, pp. 3276-3280.
78. Qin S. J. and Badgwell T. A. (1997): *An overview of industrial model predictive control technology*. In Fifth International Conference on Chemical Process Control, volume 93 of AIChE Symposium Series, pages 232-256, 1997.
79. Qin S. J. and Badgwell T. A. (1998): *An overview of nonlinear model predictive control applications*. In Nonlinear Model Predictive Control Workshop, Ascona, Switzerland, 1998.
80. Rao C. V., Rawlings J. B. (1998): *Nonlinear moving horizon estimation*. Preprints of international symposium on nonlinear model predictive control: Assessment and future directions, Monte Verita` , Ascona, Switzerland pp. 146-163.
81. Rao G. P., Unbehauen H. (2006): *Identification of continuous-time systems*. IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol.153, No. 2, March.
82. Respondek W. (2001): *Geometry of static and dynamic feedback*. Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory 3-28 September, Trieste, Italy and Bedlewo-Warsaw, Poland.
83. Richalet J., Rault A. Testud J., L. & Papon J. (1978): *Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes*. Automatica, 14, 413-428.
84. Sastry S., Bodson M. (1994): *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall Advanced Reference Series 1994.
85. Scokaert, P. O. M., Mayne, D. Q., & Rawlings, J. B. (1999): *Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)*. IEEE Transactions on Automatic Control, 44(3), 648-654.
86. Serban R., Koon W.S., Lo M., Marsden J.E., Petzold L.R., Ross S.D., Wilson R.S. (2002): *Halo orbit mission correction maneuvers using optimal control*. Automatica 38 (2002), 571-583.
87. Serban R., Petzold L.R. (2000): *COOPT - A software package for optimal control of large-scale, differential-algebraic equation systems*. Mathematics and computers in simulation, 56(2), 187-203.
88. Spong M. W., Vidyasagar M. (1997): *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, W-wa.
89. Stoer J., Burilsch R. (1987): *Wstęp do analizy numerycznej* PWN, W-wa
90. Szymkat M., Korytowski A.(2003): *Method of monotone structural evolution for control and state constrained optimal control problems*. European Control Conference ECC 2003, University of Cambridge, U.K., September 1-4, 2003.
91. Szymkat M., Korytowski A.(2007): *Evolution of structure for direct control optimization*. Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization 27 (2007) 165-193.
92. Tatjewski P. (2002): *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych*. Wyd. EXIT, W-wa.
93. Turnau A. (2002): *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym – algorytmy inteligentne i optymalno czasowe*. Wyd. AGH, Kraków 2002.
94. Turnau A., Korytowski A., Szymkat M. (1999): *Time optimal control for the pendulum-cart system in real-time*. Proc. 1999 IEEE CCA, Kohala Coast, Hawai'i, August 22-27, 1999, 1249-1254.
95. Turnau A., Szymkat M., Korytowski A., Kołek K. (2005): *A Robust Repetitive Control Scheme with Relaxed Minimum Time Criterion*, 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, July 3-8, 2005.
96. Tyagunov A.A. (2004): *High performance MPC for process industry*. Technische Universiteit Trondheim, Germany, Ph. D. Thesis.
97. Von Stryk O. (1999): *User's guide for DIRCOL - a direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems*. Ver. 2.1, Technical University of Munich.
98. Von Stryk O., Schlemer M. (1994): *Optimal control of the industrial robot Manutec r3*. In: E. Burilsch, D. Kraft (eds): *Computational optimal control*, International series of Numerical Mathematics 115 (Basel: Birkhauser, 1994), 367-382.