座位号：____

姓名：____

绝密★启用前

2021年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明： 在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设A,B为3阶矩阵，则必有

A. $|AB|=|BA|$　　B. $|A+B|=|A|+|B|$

C. $|kA|=k|A|$　　D. $(AB)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$

2. 设A为2阶矩阵，若已知$A^*=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$

A. $\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

3. 设向量组$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$(a,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,b,0)^{\mathrm{T}}$线性相关，则数a,b可取值为

A. $a=0,b=0$　　B. $a=0,b=1$

C. $a=1,b=0$　　D. $a=1,b=1$

4. 设非齐次线性方程组$Ax=b$，其中A为$m\times n$阶矩阵，$\mathrm{r}(A)=r$，则

A. 当$r=n$时，$Ax=b$有惟一解

B. 当$r<n$时，$Ax=b$有无穷多解

C. 当$r=m$时，$Ax=b$有解

D. 当$m=n$时，$Ax=b$有惟一解

5. 设3阶实对称矩阵A的秩为1，则A的特征值$\lambda=0$的重数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 已知行列式$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&4\\3&2&6\end{vmatrix}$，则第 3 列元素的代数余子式之和 $A_{13}+A_{23}+A_{33}=$__________.

7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是 3 维列向量，且 3 阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_1|=m$，$|\alpha_2,\beta_2,\alpha_1|=n$，则$|\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$__________.

8. 若$\alpha=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=$__________.

9. 设A为 2 阶矩阵，将A的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第 2 行加到第 1 行得到单位矩阵$\boldsymbol{E}$，则$A=$__________.

10. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，则数$a=$__________.

11. 设向量组$\alpha_1=(a,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,-4,5)^{\mathrm{T}}$，若存在不全为零的常数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，则数$a=$__________.

12. 设向量η是 4 元齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系，则 $r(A)=$__________.

13. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$相似，则数$a=$__________.

14. 设 3 阶矩阵A的特征值为$2,3,4$，则$|A-\boldsymbol{E}|=$__________.

15. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$正定，则数$t$的取值范围为__________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&0\\1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{vmatrix}$的值.

17. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-8&3&2\\4&-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{B}A+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

18. 设$A=\begin{pmatrix}6&3&0\\-2&6&0\\0&0&12\end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{X}$满足关系式$A+6\boldsymbol{X}=A\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$.

19. 求向量组$\alpha_1=(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(6,8,0,3)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=4\\-x_1+4x_2+x_3=16\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$的通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 判定矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$能否相似于对角矩阵，说明理由.

22. 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设向量组α_1,α_2线性无关，向量β_1可由α_1,α_2线性表出，向量β_2不能由α_1,α_2线性表出，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1+\beta_2$线性无关.