绝密 ★ 考试结束前

全国2020年8月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

说明:在本卷中,A^{T}表示矩阵A的转置矩阵,A^*表示矩阵A的伴随矩阵,E是单位矩阵,$|A|$表示方阵A的行列式,$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 若行列式$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & -2 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix}=1$,则$\begin{vmatrix} x+2 & y-4 & z-2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的秩为2,则

A. $a\neq b$且$a+2b=0$　　B. $a\neq b$且$a+2b\neq 0$

C. $a=b$且$a+2b\neq 0$　　D. $a=b$或$a+2b=0$

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,而向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,则

A. α_1必可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出　　B. α_2必可由$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性表出

C. α_3必可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表出　　D. α_4必可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出

4．设2阶矩阵A满足$\left|2E+3A\right|=0$，$\left|E-A\right|=0$，则$\left|A\right|=$

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

5．设二次型$f(x_1,x_2)=kx_1^2+kx_2^2+2x_1x_2$正定，则数$k$的取值范围是

A．$k<-1$　　B．$-1<k<0$　　C．$0<k<1$　　D．$k>1$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．已知行列式$\begin{vmatrix}1&5&2\\-1&0&2\\2&3&2\end{vmatrix}$，其代数余子式为$A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，

则$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$________.

7．行列式$\begin{vmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&a_2&b_2\\b_3&a_3&0&0\\a_4&0&0&0\end{vmatrix}=$________.

8．设A是3阶矩阵，$r(A)=1$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&5&0\end{pmatrix}$，则$r(AB)=$________.

9．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&5&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$

__________.

10．设向量组$\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$，$\alpha_4=(1,1,1)^T$的秩为3，则数a的取值应满足________.

11．设向量$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,-1)^T$，$(\alpha_1,\alpha_2)$表示$\alpha_1$与$\alpha_2$的内积，

则$\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=$________.

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解且 $\boldsymbol{\eta}_1\neq\boldsymbol{\eta}_2$，则其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________.

13．若线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+ax_3=1 \\ 2x_1+6x_2-8x_3=1 \end{cases}$ 无解，则数 $a=$________.

14．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -3 和 2，则 $\left|\boldsymbol{B}^2\right|=$________.

15．二次型 $f(x_1,x_2)=-3x_1^2+4x_1x_2$ 经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1=y_1+\dfrac{2}{3}y_2 \\ x_2=\qquad y_2 \end{cases}$ 化为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的值.

17．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$.

18．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(-1,5,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．设 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & c+1 & 0 \end{array}\right)$$

讨论 a,c 为何值时方程组有无穷多解并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$，试判定 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，并说明理由.

22．用正交线性变换化二次型 $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2-3x_1x_2$ 为标准形，并写出所作的正交线性变换.

四、证明题：本题 7 分。

23．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 可逆且 $\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}$.