绝密★启用前

2019年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=k$，则$\begin{vmatrix} 2a_1 & 6a_2 \\ b_1 & 3b_2 \end{vmatrix}=$

A. k　　B. $2k$

C. $3k$　　D. $6k$

2. 设A为2阶矩阵，将A的第1行与第2行互换得到矩阵B，再将B的第2行加到第1行得到单位矩阵　，则$A^{-1}=$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设向量$\beta=(2,1,b)^{\mathrm{T}}$可由向量组$\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,a)^{\mathrm{T}}$线性表出，则数$a,b$满足关系式

A. $a-b=4$　　B. $a+b=4$

C. $a-b=0$　　D. $a+b=0$

4. 设齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则数$k=$

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

5. 设3阶实对称矩阵A的秩为2，则A的非零特征值个数为

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}=$________.

7. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a-1 & b+1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________.

8. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$________.

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，若 $B=A^2-2A+E$，则 $B=$________.

10. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则数 $a=$________.

11. 设向量 $\alpha=(1,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,-2)^{\mathrm{T}}$，$(\alpha,\beta)$ 表示 α 与 β 的内积，则 $\beta-\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=$

________.

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right)$$

若该线性方程组有惟一解，则数 a 的取值应满足________.

13. 设 A 为 n 阶矩阵，若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $|A|=$________.

14. 设 A 为 n 阶矩阵，且满足 $|3A+2E|=0$，则 A 必有一个特征值为________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2$ 的矩阵 $A=$________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}$.

17. 设向量 $\alpha=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，求 A 和 A^5.

18. 设矩阵 A，B 满足关系式 $X=XA+B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，

求矩阵 X.

19. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ 的秩和列向量组的一个极大无关组，并将其余列向量由该极大无关组线性表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

确定数 a,b 为何值时，方程组有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 设 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$ 是实对称矩阵 A 的 2 个特征值，λ_1 对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 λ_2 对应的特征向量 α_2 与矩阵 A.

22. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2-4x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量 β 可由向量组 α_1,α_2 线性表出. 证明：如果 α_1,α_2 线性无关，则表示法惟一.