

绝密★启用前

2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

(课程代码 02198)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 已知 4 阶行列式 D 的某一行元素及其余子式都为 a ($a \neq 0$), 则 $D =$
A. 0 B. a^2 C. $-a^2$ D. $4a^2$
2. 设 n 阶矩阵 A 可逆, 则 $(2A)^* =$
A. $2A^{-1}$ B. $2^{n-1}|A|A^{-1}$ C. $2^{n-1}|A|^{-1}A^{-1}$ D. $\frac{1}{2}|A|^{n-1}A^{-1}$
3. 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 且满足 $ABC = E$, 则
A. $A^{-1} = B^{-1}C^{-1}$ B. $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ C. $B^{-1} = AC$ D. $B^{-1} = CA$
4. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是矩阵 A 的
A. 列向量组线性相关 B. 列向量组线性无关
C. 行向量组线性相关 D. 行向量组线性无关
5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 的关系为
A. 相似但不合同 B. 合同但不相似
C. 合同且相似 D. 不合同也不相似

线性代数试题第 1 页 (共 3 页)

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 100 & 201 \\ 202 & 200 & 398 \\ 297 & 300 & 601 \end{vmatrix} =$ _____.
7. 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $|A| = 3$, $|B| = \frac{2}{3}$, 则 $|2AB^{-1}| =$ _____.
8. 设向量 $\alpha = (1, 2, 3, 4)^T$, 则 $\alpha^T \alpha =$ _____.
9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $PAP =$ _____.
10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.
11. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则常数 $a =$ _____.
12. 若向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 3, a)^T$ 线性相关, 则数 $a =$ _____.
13. 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0, $r(A) = 2$, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 通解为 _____.
14. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 0, 2$, 则 $|A| =$ _____.
15. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围为 _____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
17. 已知向量 $\alpha = (2, 0, 1)^T$, 求 (1) $A = \alpha\alpha^T$; (2) A^{2019} .
18. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足关系式 $2X = XA - B$, 求 X .

线性代数试题第 2 页 (共 3 页)

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\alpha_2 = (2, 5, -3, -3)^T$, $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 2)^T$, $\alpha_4 = (6, 17, -9, -9)^T$

的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用所求的极大线性无关组表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$$

当 a 为何值时, 方程组无解? 有无穷多解? 在有无穷多解时求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

22. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为标

准形 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 求正交矩阵 Q .

四、证明题: 本题 7 分.

23. 设 A 为 3 阶可逆矩阵, 若 3 维列向量组 α_1, α_2 线性无关, 证明向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2$ 线性无关.