座位号：______

姓名：______

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1．本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。

2．应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。

3．涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明：在本卷中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$是单位矩阵，$|\boldsymbol{A}|$表示方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21}-2a_{11} & a_{22}-2a_{12} & a_{23}-2a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{vmatrix}=$

A．$-2m$　　B．$-m$　　C．m　　D．$2m$

2．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,4)^{\mathrm{T}}$，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，则$|\boldsymbol{A}|=0$的充分必要条件是

A．$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关　　B．$\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关

C．$\boldsymbol{A}$的秩为2　　D．$\boldsymbol{A}$中有两行元素对应成比例

4．设线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多个解，则数$a=$

A．-2　　B．-1

C．1　　D．2

5．设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$

C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设 3 阶行列式$\begin{vmatrix}1&5&2\\-1&0&2\\2&3&2\end{vmatrix}$，其代数余子式为$A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，

则$A_{11}-A_{21}+2A_{31}=$________.

7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&-1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$，则行列式$|AB|=$________.

8. 已知n阶矩阵A满足$A^2-A-E=O$，则$A^{-1}=$________.（用矩阵A表示.）

9. 设A为 2 阶矩阵，若存在矩阵$P=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，

则$A=$________.

10. 设向量组$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,2,4)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,3,t)^{\mathrm{T}}$线性无关，则数$t$的取值应满足________.

11. 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&t\end{pmatrix}$，若 3 阶非零矩阵$B$满足$AB=O$，则数$t=$________.

12. 设 4 元非齐次线性方程组$Ax=\beta$的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A,\beta)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&1&0&2\\0&1&2&3&-3\\0&0&a-1&0&a-1\\0&0&0&0&c\end{array}\right)$$

若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有 1 个向量，则数a,c的取值应分别满足________.

13. 设 3 阶可逆矩阵A有特征值为 2，则矩阵$(A^2)^{-1}$必有一个特征值为________.

14. 已知$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&-1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$是其一个特征向量，则$\alpha$对应的特征值为________.

15. 二次型$f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2-3x_1x_2$ 经可逆线性变换$\begin{cases}x_1=y_1+3y_2\\x_2=\quad\ \ y_2\end{cases}$化为________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 2 维列向量，令$A=(\alpha_1,\alpha_3),B=(2\alpha_2,3\alpha_3)$，且已知$|A|=\dfrac{1}{4},|B|=-3$，求行列式$|A-B|$的值.

17. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&5&7\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}7&5&-2\\5&1&9\end{pmatrix}$，求

（1）矩阵X，使得$A+2X=B$；（2）AX^{T}.

18. 设 3 阶矩阵A和B满足关系式$A+B=AB$，其中$B=\begin{pmatrix}2&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求矩阵$A$.

19. 求向量组$\alpha_1=(1,\ 4,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,-1,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,0,-3,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(0,2,-6,3)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 确定数k的值，使线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-1\\2x_1+kx_2-2x_3=0\\kx_1+2x_2+x_3=k\end{cases}$有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&b&0\\-2&a&0\\0&0&3\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=0$，

（1）求数a与b的值；

（2）A是否可以相似对角化？若可以，求可逆矩阵P及对角矩阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

22. 求正交变换$x=Py$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$化为标准形$f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设A为2阶矩阵，已知$|A|<0$，证明A一定可相似对角化.