ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Sechsundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
J. Sengbusch.

1874.

Fig. 3.

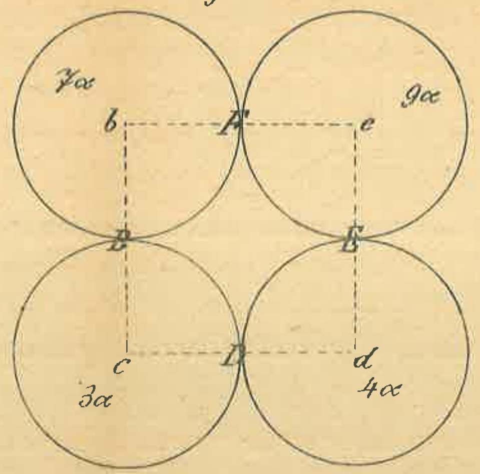


Fig. 2.

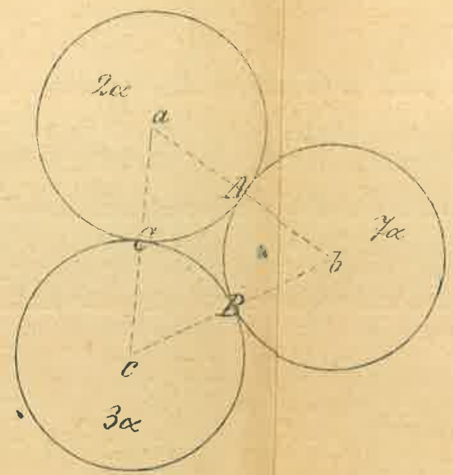


Fig. 1.

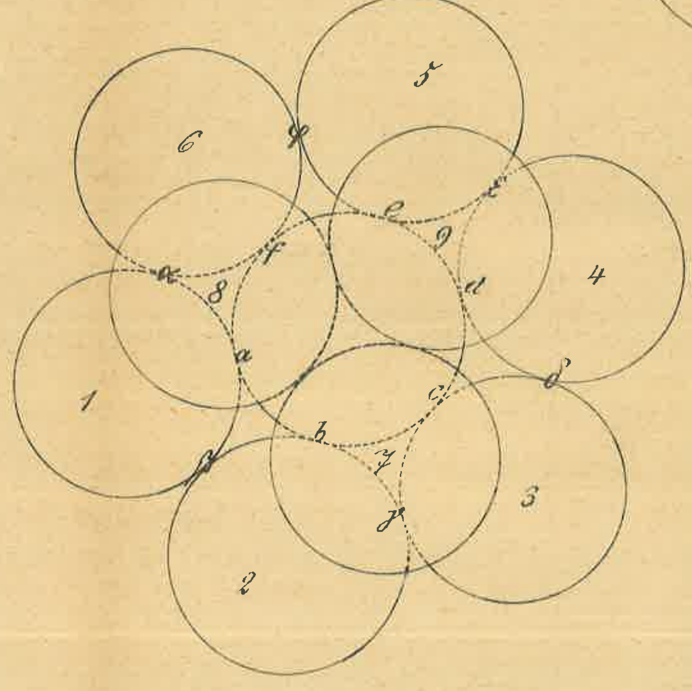


Fig. 4.

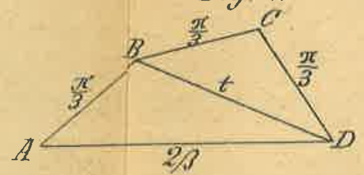
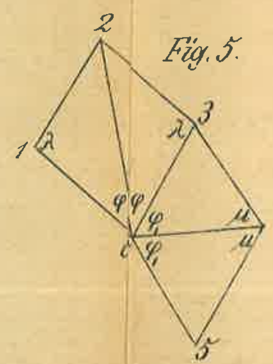


Fig. 5.



No. XXVIII. Bender: Grösste Anzahl Kugeln, die eine Kugel berühren.

Fig. 1.

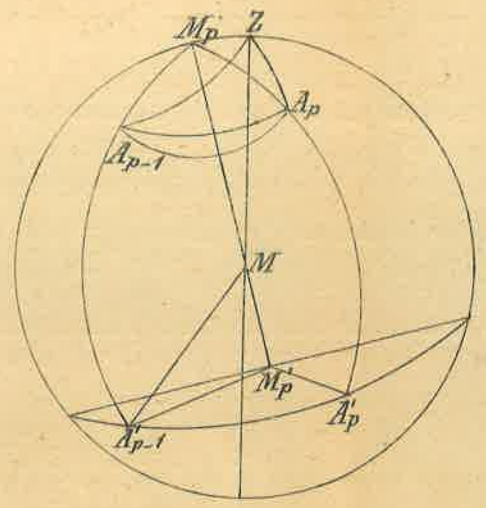
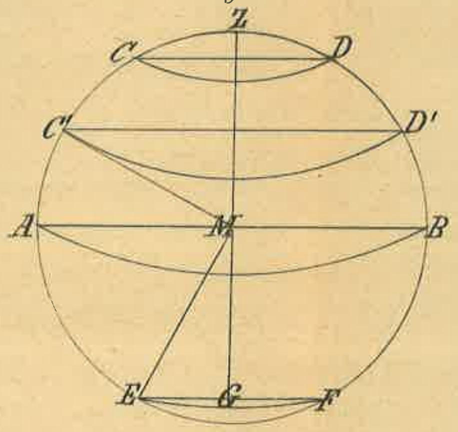


Fig. 2.



No. XXIV. Günther: Ueber sphärische Curven.

XXVIII.

Bestimmung der grössten Anzahl gleich grosser Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen.

Von

Herrn Dr. C. Bender

in Basel.

Um einen Kreis lassen sich, wie leicht zu finden ist, im Maximum sechs Kreise von demselben Radius legen, die alle sechs den ursprünglichen Kreis berühren. Nimmt man an Stelle der Kreise Kugeln, so gehen jedenfalls längs eines grössten Kreises der mittleren Kugel ebenfalls sechs Kugeln, welche die mittlere Kugel berühren. Diese grösste Kreislinie mag den Namen Aequator führen, indem wir uns zugleich die sieben Kugeln in einer Horizontalebene liegend denken. In der Fig. 1. sind diese sieben Kugeln, von oben gesehen, gezeichnet und die äusseren Kugeln mit den Zahlen 1 bis 6 versehen, den Berührungspunkten dieser mit der inneren Kugel die sechs Anfangsbuchstaben des Alphabets beigegeben.

Die Berührungspunkte der äusseren Kugeln unter sich liegen auf einem Kreis von dem Radius $m\alpha$, welchen man nicht unzweckmässig Festhaltungskreis nennen kann, da er gleichsam die Kugeln unter sich festzuhalten scheint. Bei weiterer Betrachtung hat man die Bezeichnung Festhaltungskreis zu vertauschen mit dem Namen Festhaltungskugel, welche den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller auf die innere Kugel aufgelegten äusseren Kugeln unter sich vorstellt.

Legen wir nun oberhalb der Kugeln 2 und 3 auf die innere Kugel eine andre und zwar die Kugel 7 in der Weise auf, dass sie zugleich mit 2 und 3 tangirt, so schneiden die Kugeln 2, 3 und 7 aus der Festhaltungskugel ein sphärisch gekrümmtes Flächenstück heraus, dessen Bild, soweit es in einfacher Weise geschehen kann, in Fig. 2. gegeben ist. In dieser Figur bedeuten 2α, 3α und 7α die durch das Einlegen der Kugeln 2, 3 und 7 auf der Festhaltungskugel sich zeichnenden sphärisch gekrümmten Flächenstückchen und a, b, c pie Mittelpunkte der letzteren.

Die diese 3 Punkte a, b, c direct verbindenden Linien sind Bogen grösster Kreise und auf jeder derselben liegt der Berührungspunkt zweier von drei hier in Betracht gezogenen Auflegungskugeln.

Aus dem Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks kann man durch Abzug der drei sphärisch gekrümmten Stücke aAC, bAB, cBC das innerhalb liegende sphärisch gekrümmte Stück finden. Ehe jedoch dieses wirklich ausgeführt werde, mögen uns erst einige Vorbetrachtungen beschäftigen.

Geben wir dem Radius der gleich grossen Kugeln die Bezeichnung r, so findet man den Radius h der Festhaltungskugel

$$h = 2r\cos\tfrac{1}{3}R$$

wo die Bezeichnung R einen rechten Winkel vorstellen soll.

Die Oberfläche der Festhaltungskugel ist daher $= 12\pi r^2$ also geradezu dreimal so gross, als die Oberfläche einer jeden der gleichen Kugeln.

Das sphärische Dreieck abc Fig. 2. ist ein gleichseitiges und jeder der drei Bogen entspricht einem Winkel am Mittelpunkte der Kugel von $\tfrac{2}{3}R$.

Die Grösse eines der drei Winkel, an welchen die Buchstaben a, b und c stehen, leitet sich ab aus der Gleichung:

$$\cos a = \frac{\cos(bc) - \cos(ac)\cos(ab)}{\sin(ac).\sin(ab)}$$

woher

$$\cos a = \tfrac{1}{3}$$

was einem Winkel

$$a = 0{,}78365314R$$

entspricht.

Der Inhalt J des sphärischen Dreiecks abc wird nun ausgedrückt durch:

$$J = h^2(3a - 2R)$$
$$J = 3\pi r^2(0{,}17547971)$$

Die drei gleichen sphärischen Flächenstückchen aAC, bAB und cCB bestimmen sich jede

$$= \frac{0{,}78365314}{4} \cdot 3\pi r^2(0{,}267949191)$$
$$= 0{,}05249480 66 \,.\, 3\pi r^2$$

(Der Ausdruck $3\pi r^2(0{,}267949191)$ stellt hierbei die krumme Oberfläche eines jeden der drei, in Fig. 2. mit a, b, c bezeichneten Kugelhauben vor).

Das sphärisch gekrümmte Flächenstück ABC ist daher:

$$= 3\,\pi r^2 . 0{,}01799529 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathrm{I.}$$

Nicht alle Kugeln können in der eben betrachteten Weise auf der inneren Kugel aufliegen, was schon daraus hervorgeht, dass der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks abc nicht geradezu in dem Flächeninhalt des Festhaltungskreises mit einer ganzen Zahl aufgeht, auch könnte dies weiter nur dann sein, wenn der oben berechnete sphärische Winkel des Dreiecks abc mit einer ganzen Zahl in $4R$ enthalten wäre, denn in jedem Punkte, in welchem die auf der Festhaltungskugel aufgezeichneten Dreiecke zusammenstossen, müsste bei der entsprechenden ganzen Vervielfachung des Dreieckwinkels, die Bedingung, wonach auch auf der Kugeloberfläche die Winkel um einen Punkt 4 Rechte betragen, erfüllt sein.

Wenn auch schon diese Gründe entscheidend genug sind den Gedanken an die durchgängig gleichmässige Lagerung der aufliegenden Kugeln, wie Fig. 2. darstellen soll, zurückzudrängen, so werden wir noch weiter bestärkt durch die Betrachtung der Fig. 1., in welcher gewissermassen ein Aufbau der äusseren Kugeln um die innere, von oben gesehen, versinnlicht ist. Denken wir uns einmal die Kugel 7, wie schon erwähnt, der Art auf 2 und 3 gelegt, dass eine Tangirung dieser Kugeln statt hat, so können wir unmöglich zwischen 3 und 4 in derselben Weise wieder eine Kugel 9 in gleicher Weise zwischen 4 und 5 legen. Geschieht dies, so müssen notwendig die Kugel 7 und 9 sich berühren und weiter noch die Berührungspunkte der Kugeln 2, 7, 9, 5 auf einem grössten Kreise der mittleren Kugel liegen.

Die in der Fig. 1. angegebene Kugel 8 liegt in der nämlichen Weise oberhalb der Kugeln 1 und 6 auf der mittleren Kugel auf, wie 9 oberhalb 4 und 5, und 7 oberhalb 2 und 3 auf der mittleren Kugel aufliegen. Es lässt sich leicht nachweisen, dass ebenso wol 8 und 9, als auch 8 und 7 bei dieser Lagerung sich berühren müssen, denn verfolgen wir die Berührungspunkte der Kugeln 1, 8, 9, 4 auf der mittleren Kugel, so müssen diese auf einem Halbkreise eines grössten Kreises der letzteren zu liegen kommen. Da nun ohne Zweifel 1 und 8, ebenso 4 und 9 sich berühren, so müssen notwendigerweise auch 8 und 9 unter sich tangiren, denn auf einem solchen Halbkreise eines grössten Kreises finden nur die Berührungspunkte von vier Kugeln Platz.

Der Nachweis für die Berührung der Kugeln 7 und 8 ist ganz in derselben Weise zu führen.

In der Fig. 1. ist nur die Lagerung der Kugeln oberhalb der Ebene des Papiers aufgezeichnet; von der gerade entgegengesetzten Seite bietet sich uns das nämliche Bild dar.

Nachdem wir in obigem unsere Aufmerksamkeit auf den leeren Zwischenraum gerichtet hatten, welchen die Kugeln 2, 3, 7 in der Festhaltungskugel lassen, wenden wir uns nun zu dem leeren Zwischenraum, welcher in der Oberfläche der Festhaltungskugel von den Kugeln 3, 7, 4, 9 gebildet wird. Hierzu diene Fig. 3. Die dort gezeichneten Kreise 3α, 4α, 7α, 9α stellen wieder kreisförmig begrenzte Stücke des Festhaltungskreises (Kugelhauben) vor, welche man sich so gebildet denken kann, als ob die aus der Festhaltungskugel herausragenden Teile der Kugeln 3, 4, 7, 9 geradezu von der Festhaltungskugel abgetrennt oder abgelöst worden wären. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte dieser Kugelhauben bilden ein gleichseitiges sphärisches Viereck, wovon jede Seite $= \frac{2}{3}R$ ist. Dass diese Verbindungslinien Bogen grösster Kreise der Festhaltungskugel sind, bedarf wol kaum des Nachweises. Der Winkel c des 4Ecks $bcde$ ist leicht zu bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass die Mittelpunkte von 2, 3 und 7 jenes oben Fig. 2. betrachtete sphärische Dreieck abc bilden und die Kugel 2 mit 3 und 4 auf dem sogenannten Aequator liegen. Wir finden daher den Winkel c durch Abzug des oben berechneten Winkels a von $2R$ daher:

$$1{,}21634686\ R$$

Bedenkt man nun, dass die Mittelpunkte der durch die Kugeln 4, 9, 5 auf der Festhaltungskugel gebildeten Kugelhauben das gleiche sphärische Dreieck zeichnen, wie dies in Fig. 2. von den Kugeln 2, 3, 7 näher ausgeführt wurde, und dass weiter Kugel 5 mit den Kugeln 2, 3, 4 auf dem Aequator liegt, so folgt daraus, dass auch die Winkel c und d einander gleich sein müssen.

Denken wir uns die Diagonalen bd und ce gezogen, so finden wir aus der Congruenz der sphärischen Dreiecke *bcd* und *cde*, dass diese Diagonalen einander gleich sind, woraus weiter folgt, dass

$$\angle b = \angle c = \angle d = \angle e.$$

Der Flächeninhalt des sphärischen 4 Ecks *bcde* berechnet sich aus den zwei sphärischen Dreiecken *bcd* und *bed*. Die Winkel *b* und *d* werden durch die Diagonale *bd* halbirt, daher jeder der an *bd* anliegenden Winkel

$$= 0{,}60817343\,R$$

Der Inhalt des sphärischen Vierecks *bcde* ist daher

$$= 0{,}43269372 \,.\, 3\pi r^2.$$

Die Oberfläche eines jeden der Kugelhaubenausschnitte *bBF*, *cBD*, *dDE*, *eEF* ergiebt sich

$$= 0{,}081479793 \,.\, 3\pi r^2$$

woraus als Oberflächengrösse des sphärisch gekrümmten Stücks *BD EF* resultirt:

$$= 0{,}10677455 \,.\, 3\pi r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Fassen wir die durch das Einlegen der Auflegungskugel in die Festhaltungskugel gebildeten leeren Räume näher in's Auge, so finden wir bei der Lagerung, wie sie in Fig. 1. angedeutet ist, nur Räume von dem Flächeninhalt I. und dem Flächeninhalt II. und zwar 8 der ersteren und 6 der letzteren Grösse. Addiren wir diese zusammen und subtrahiren die erhaltene Summe von der Oberfläche der Festhaltungskugel ab, so bleibt gerade noch Platz übrig für zwölf Kugelhauben, (welche man sich in der bekannten Weise gebildet denken kann) wie nachfolgende Rechnung zeigt:

12 Kugelhauben	$= 3{,}215390 \times 3\pi r^2$
8 leere Räume I.	$= 0{,}143962 \times 3\pi r^2$
6 „ „ II.	$= 0{,}640647 \times 3\pi r^2$
Oberfläche der Festhaltungskugel	$= 3{,}999999 \times 3\pi r^2$

was mit der Formel $12\pi r^2$ übereinstimmt.

Es ist unschwer nachzuweisen, dass keine andre Anordnung ein grösseres Resultat liefert und wir sagen daher:

Auf eine Kugel von beliebig gegebenem Radius lassen sich nicht mehr als zwölf Kugeln von demselben Radius auflegen.

Basel den 25. Mai 1869.

Bemerkung der Redaction.

Der vorstehende Aufsatz schliesst mit einer Behauptung, die unbewiesen bleibt, die aber bewiesen werden müsste, damit die anfangs gestellte Frage entschieden sei. Gezeigt ist nur, dass 12 gleiche Kugeln eine gleiche Kugel so berühren können, dass jede derselben 4 umliegende Kugeln berührt. Von dieser Lage aus sind indes ohne Durchdringung noch sehr vielfache Verschiebungn der 12 Kugeln möglich. Die Frage bleibt bestehen, ob sie sich so verschieben lassen, dass eine 13te gleiche Kugel zwischen ihnen Platz findet. Zur Entscheidung ist sogar die getroffene Anordnung insofern die ungünstigste, als der Kranz um den Aequator den sphärischen Flächenraum, der für die ungerade Zahl 7 ausreichen soll, halbirt. Der strenge Beweis, dass 13 gleiche Kugeln eine gleiche Kugel nicht ohne gegenseitige Durchdringung berühren können, lässt sich führen, ohne eine Verschiebung von mehr als 2 Kugeln auf einmal in Betracht zu ziehen. Um die angeregte Frage zu erledigen, möge er hier folgen.

§. 1. Die Mittelpunkte aller gleichen Kugeln, welche eine gleiche Kugel berühren, liegen auf einer Kugel, deren Radius = 1 sei. Auf dieser verbinde man je zwei Mittelpunkte durch einen Normalbogen und tilge von je zwei Normalbogen, die sich schneiden, immer den längsten, falls sie einander gleich sind, einen von beiden. Dann bleibt ein Netz von sphärischen Dreiecken, welches die Kugel einfach bedeckt; die Mittelpunkte sind deren Ecken. Ist nun 13 die Anzahl der Ecken, so ist nach Euler's Satz 11 die Differenz der Bogen- und Dreiecksanzahl. Da sich letztere wie 3 : 2 verhalten, so sind sie einzeln 33 und 22. Die Anzahl der Bogen, welche von allen Ecken ausgehen, ist hiernach 66. Folglich gehen mindestens von 1 Ecke mehr als 5 Bogen aus. Das Resultat ist:

Es giebt 13 Ecken, 33 Bogen und 22 Dreiecke; mindestens um 1 Ecke liegen mehr als 5 Dreiecke.

§. 2. Die Bogen sind einer doppelten Beschränkung unterworfen:

1) Kein Bogen ist $< \frac{\pi}{3}$.

2) Kein Bogen ist grösser als die Verbindung der Gegenecken der zwei anstossenden Dreiecke.

Die erste Beschränkung folgt aus der Bedingung, dass sich die 13 Kugeln nicht durchdringen sollen, die zweite aus dem Tilgungsgesetz der Bogen §. 1.

§. 3. Ein sphärisches Viereck $ABCD$ (Fig. 4.) habe eine Seite $AD = 2\beta$, die übrigen $= \frac{\pi}{3}$, die Diagonale $BD = t$, welche den Winkel ADC in $ADB = \varrho$ und $BDC = \sigma$, und das Viereck V in die Dreiecke $ADB = \Delta$ und $BDC = \Delta'$ teilt. Sei β constant, t unabhängig variabel; es wird die Variation von V gesucht. Man hat die Formeln:

$$\cos\frac{\Delta}{2} = \frac{1+2\cos 2\beta + 2\cos^2\frac{t}{2}}{4\sqrt{3}\cos\beta\cos\frac{t}{2}}; \quad \cos\frac{\Delta'}{2} = \frac{1+2\cos^2\frac{t}{2}}{3\cos\frac{t}{2}}$$

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta\sin\frac{t}{2}\sin\varrho; \quad \sin\frac{\Delta'}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t}{2}\sin\sigma$$

$$\cos\varrho = \frac{1-2\cos 2\beta\cos t}{2\sin 2\beta\sin t}; \quad \cos\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$$

Für ein Maximum oder Minimum V ist

$$\partial\Delta' = -\partial\Delta$$

Differentiirt man die Cosinus, setzt für die Sinus ihre Werte, erhebt ins Quadrat, und führt auch $\sin^2\varrho$, $\sin^2\sigma$ auf t zurück, so geht die letztere Gleichung über in

$$(\cos t - \tfrac{1}{2} + \sin\beta)(\cos t - \tfrac{1}{2} - \sin\beta)(\cos t + 1) = 0$$

Der letzte Factor kann nicht verschwinden, weil t als Dreiecksseite $< BC + CD = \frac{2\pi}{3}$ ist, der zweite gleichfalls nicht, wofern β zwischen $\frac{\pi}{3}$ und π enthalten ist. Eine Wendung der Variation von V ist daher nur möglich bei

$$\cos t = \tfrac{1}{2} - \sin\beta$$

Differentiirt man zum zweitenmal und setzt diesen Wert ein, so kommt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\sin\frac{t}{2}(3-2\sin\beta)^2}{12\sqrt{3}\sin\beta\cos^5\frac{t}{2}\sin^3\sigma}$$

folglich entspricht der obige Wert einem Maximum. Er ist derjenige, für welchen beide Diagonalen einander gleich werden, das Viereck somit symmetrisch ist.

§. 4. Liegen nun um einen Punkt (0) herum n (und zwar mehr als 5) Dreiecke, gegen einander begrenzt durch n Bogen, die wir Radien nennen wollen, und sind 2 benachbarte Radien (02), (03) $> \frac{\pi}{3}$, so braucht man nur die Endpunkte der nächsten Radien (01) und (04) zu verbinden, so dass von dem ganzen, aus jenen Dreiecken bestehenden $n$eck N ein Viereck (1234) abgeschnitten wird, um das Resultat von §. 3. anwenden zu können. Um N so klein als möglich zu erhalten, müssen offenbar alle Seiten ihren kleinsten Wert $\frac{\pi}{3}$ haben; die Verbindungslinie 2β ist dann $\geqq \frac{\pi}{3}$ und $< 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$. Betrachtet man alle Ecken von N als fest ausser (2) und (3), und verschiebt letztere so, dass sich die Differenz der Diagonalen des Vierecks vergrössert, so wird nach §. 3. das Viereck, folglich auch das $n$eck kleiner. Folglich kann der kleinste Wert erst an der äussersten Grenze eintreten, d. i. wenn (02) oder (03) $= \frac{\pi}{3}$ wird, und man hat den Satz:

Im kleinst möglichen $n$eck, gebildet aus n um einen Punkt liegenden Dreiecken, können keine zwei benachbarten Radien $> \frac{\pi}{3}$ sein.

§. 5. Die Radien (01), (03), (05) (Fig. 5.) und die $n$eckseiten (12), (23), (34), (45) seien $= \frac{\pi}{3}$, die Punkte (0), (1), (5) seien fest, der Punkt (3) unabhängig verschiebbar. Es wird der kleinste Wert des Sechseck (012345) gesucht. Sei

$$\varphi = \text{Winkel } (102) = (203)$$
$$\varphi_1 = \text{Winkel } (304) = (405)$$

dann ist $\varphi + \varphi_1$ constant $= c$, also

$$\partial\varphi_1 = -\partial\varphi \tag{1}$$

und wenn λ den Winkel $(012) = (032)$, μ den Winkel $(034) = (054)$ bezeichnet, das Sechseck

$$S = 4\varphi + 4\varphi_1 + 2\lambda + 2\mu - 4\pi = 4(c-\pi) + 2(\lambda + \mu)$$
$$\partial S = 2\,\partial(\lambda + \mu)$$

also für ein Maximum oder Minimum S

$$\partial\mu = -\partial\lambda \tag{2}$$

Stellt man gemäss den Relationen:

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \cot\varphi; \quad \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \cot\varphi_1$$

λ, μ in φ, φ_1 dar, so gibt Gl. (2) mit Anwendung von (1),

$$\cos^2\varphi = \cos^2\varphi_1$$

Da $\varphi + \varphi_1$ weder 0 noch π sein kann, so gilt allein die Lösung $\varphi = \varphi_1$. Differentiirt man S zum zweiten mal, und setzt dann $\varphi = \varphi_1$, so kommt:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} = -\frac{48\sin 2\varphi}{(1+3\cos^2\varphi)^2} < 0$$

folglich entspricht $\varphi = \varphi_1$ einem Maximum S, und es giebt kein Minimum. Lässt man also φ über φ_1 hinaus wachsen, so wird das $n$eck kleiner, und die Grenze tritt erst ein, wenn der Radius (02) $= \frac{\pi}{3}$ wird, oder die Radien (06), (07), etc. die Grenze der 2ten Bedingung im §. 2. erreichen.

§. 6. Die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten $= \frac{\pi}{3}$ sind; seien $= \alpha$; dann ist

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{3}$$

Die Winkel eines regelmässigen Vierecks, dessen Seiten $= \frac{\pi}{3}$ sind, seien $= \gamma$; dann ist

$$\cos\gamma = -\tfrac{1}{3}, \quad \text{also} \quad \gamma = \pi - \alpha$$

§. 7. Hat man nun ein Sechseck, dessen Seiten sämmtlich $= \frac{\pi}{3}$, und dessen Radien abwechselnd $= \frac{\pi}{3}$ sind, und man lässt einen dazwischen liegenden Radius bis auf $\frac{\pi}{3}$ abnehmen, so werden die Winkel der zwei anstossenden Dreiecke $= \alpha$; daher bleibt für die 4 übrigen Dreiecke ein Winkelraum $= 2\pi - 2\alpha$ um den gemeinsamen Punkt herum übrig, so dass bei gleicher Teilung je zwei derselben ein Viereck mit dem Centriwinkel $= \pi - \alpha$ bilden. Dies ist dann nach §. 6. ein regelmässiges Viereck, also seine Diagonalen, deren eine ein Radius ist, einander gleich. Hiermit ist genau die Grenze erreicht, welche die 2te Bedingung von §. 2. der Grösse jenes Radius gestattet; bei jeder Verschiebung würde ein Doppel-Centriwinkel $< \pi - \alpha$, der ihn halbirende Radius grösser als die denselben kreuzende Diagonale, und man hat den Satz:

Das kleinste aus 6 Dreiecken um einen Punkt herum bestehende Sechseck hat 4 Radien $= \frac{\pi}{3}$ und 2 Radien gleich der Diagonale des regelmässigen Vierecks für die Seite $\frac{\pi}{3}$.

Da jedes der 2 gleichseitigen Dreiecke $= 3\alpha - \pi$, jedes der 2 regelmässigen Vierecke $= 4(\pi - \alpha) - 2\pi = 2\pi - 4\alpha$ ist, so ergiebt sich:

Das kleinste Sechseck ist $= 2(\pi - \alpha)$.

§. 8. Liegen mehr als 6 Dreiecke um einen Punkt herum, so kann man das daraus gebildete $n$eck leicht auf ein Sechseck zurückführen. Im voraus seien alle n Seiten $= \frac{\pi}{3}$ gemacht. Hat es dann benachbarte Radien (02), (03) $> \frac{\pi}{3}$, so verkleinere man es nach §. 4., indem man bei unveränderten Punkten (1), (4) die kleinere der sich kreuzenden Diagonalen (13), (24) verkürzt, bis entweder sie selbst oder einer der Radien $= \frac{\pi}{3}$ wird. Im ersten Falle sondert die Diagonale ein gleichseitiges Dreieck vom $n$eck ab, und dieses hat dann eine Seite weniger. Dies wiederhole man, bis entweder nur ein Sechseck übrig bleibt, oder keine benachbarten Radien mehr $> \frac{\pi}{3}$ sind. Ist im letztern Falle die Seitenzahl noch > 6, so bildet mindestens einer der Radien $> \frac{\pi}{3}$ zu beiden Seiten mit zwei Radien $= \frac{\pi}{3}$ Winkel $= \frac{2\pi}{7} < \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, also letztere Radien mit einander einen Winkel $< \pi - \alpha$, folglich ist nach §. 6. der mittlere Radius grösser als die ihn kreuzende Diagonale; diese schneidet wieder ein Dreieck ab, und man kann so lange fortfahren, bis nur ein Sechseck übrig bleibt. Die abgesonderten Dreiecke sind nie kleiner als ein gleichseitiges. Das Ergebniss lautet:

Ein sphärisches $n$eck, gebildet aus mehr als 6 um einen Punkt herum liegenden Dreiecken, ist nie kleiner als das kleinste Sechseck plus $(n-6)$ gleichseitigen Dreiecken.

§. 9. Was die übrigen Dreiecke betrifft, so können diese zwar kleiner als die gleichseitigen zur Seite $\frac{\pi}{3}$ sein, aber nur wenn ein Winkel $> 2\alpha$ ist; denn einen Rhombus, den eine Diagonale in zwei gleichseitige Dreiecke teilt, teilt die andre in zwei Dreiecke mit den Winkeln 2α, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$. Käme nun im gesammten Netze ein solches Dreieck vor, so hätten zwischen den Schenkeln des stumpfen Winkels 2 gleichseitige Dreiecke Platz; man könnte daher den Gesammtraum der umliegenden Dreiecke immer vermindern, indem man statt der langen Dreiecksseite die Halbirungslinie des stumpfen Winkels in der Länge $= \frac{\pi}{3}$ zur scheidenden Dreieckseite machte, und die 2 Dreiecke zwischen den 3 Schenkeln wären dann noch immer jedes grösser als ein gleichseitiges. Man kann daher, wenn man stets die günstigste Lage für alle Punkte wählt, in der Tat $3\alpha-\pi$ als den kleinsten Wert eines Dreiecks ansehen.

§. 10. Nach dem Vorstehenden ist der kleinste Raum, den die 22 Dreiecke einnehmen würden, nicht kleiner als das kleinste Sechseck $= 2(\pi-\alpha)$ plus dem 16fachen gleichseitigen Dreieck $= 16(3\alpha-\pi)$, das ist nicht kleiner als

$$46\alpha - 14\pi$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \alpha = \arccos\tfrac{1}{3} &= 0{,}7836532 \text{ Rechten} \\ 46\alpha &= 36{,}04805 \text{ Rechten} \\ 14\pi &= 28 \quad\;\; \text{Rechten, also} \\ \hline \text{das Netz} &\overset{=}{>} 8{,}04805 \text{ Rechten.} \end{aligned}$$

Hiernach würden die 22 Dreiecke bei jeder Anordnung mehr als die Kugelfläche bedecken, folglich können 13 gleiche Kugeln nicht ohne gegenseitige Durchdringung eine gleiche Kugel berühren.

XXIX.

Fünf ungedruckte Briefe von Gemma Frisius.

Nach den Originalen in der Universitätsbibliothek zu Upsala

herausgegeben von

Maximilian Curtze,

Gymnasiallehrer zu Thorn.

Die unten abgedruckten fünf Briefe des bedeutenden belgischen Mathematikers und Arztes Gemma Frisius befinden sich in einer zwei Bände umfassenden höchst interessanten Sammlung von Briefen fast ausnahmlos gerichtet an den bekannten Freund des Copernicus, Johannes Dantiscus[1]). Diese Sammlung wird in der Universitätsbibliothek zu Upsala aufbewahrt, war behufs Benutzung bei den Arbeiten zur Säcularfeier des Copernicus auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers dem Copernicus-Verein zu Thorn auf längere Zeit leihweise überlassen worden, und ich benutzte die Zeit ihrer hiesigen Anwesenheit die fünf Briefe, welche sich in ihr von dem genannten Mathematiker befinden, zu copieren. Sie hatten für mich doppeltes Interesse. Einmal geben sie über einige dunkle Puncte im Leben des Schreibers Aufschluss, bringen also eine willkommene Bereicherung des Abschnittes, welchen A. Quetelet in seiner Histoire des sciences mathématiques chez les Belges[2]) unserm Autor widmet, andrerseits haben zwei derselben Beziehungen auf Copernicus und dessen neues Weltsystem, und sind von hohem Interesse für die Geschichte desselben. Dies ist der Grund, der mich bewog sie hier abdrucken zu lassen. Die nöthigen Erläuterungen werde ich den Briefen selbst nachfolgen lassen. Ich bemerke nur noch, dass ich grosse

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebenundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1875.

$$A_1 = \frac{B+C}{2}, \quad B_1 = \frac{C+A}{2}, \quad C_1 = \frac{A+B}{2}.$$

Or si nous désignons par R, R', R_1 les rayons des cercles circonscrits à ces trois triangles, nous aurons

$$R = \frac{a}{2\sin A},$$

$$R' = \frac{a'}{2\sin A'} = \frac{a\cos A}{2\sin 2A} = \frac{a\cos A}{4\sin A\cos A} = \frac{a}{4\sin A},$$

$$R_1 = \frac{a_1}{2\sin A_1} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \times \frac{1}{2\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \times \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin A};$$

donc on voit de suite que

$$R_1 = 2R = 4R'.$$

Si en autre S, S', S_1 expriment les surfaces de nos trois triangles ABC, $A'B'C'$, A_1, B_1, C_1 on trouvera aisément que

$$S' = 2S\cos A\cos B\cos C,$$

et

$$S_1 = \frac{S}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

IX.

Ein stereometrisches Problem.

Von

Siegmund Günther.

§. 1. Vor Kurzem wurde in dieser Zeitschrift von Bender[1]) die Aufgabe behandelt, die grösste Anzahl congruenter Kugeln anzugeben, welche sich auf ein und dieselbe Kugel vom gleichen Radius auflegen lassen. Die Aufgabe ist an und für sich von geometrischem Interesse, sie hat jedoch auch eine molecularphysicalische Bedeutung, insoferne sie die Anzahl derjenigen Atome normirt, welche mit einem gegebenen Atome allerhöchstens in directen Contact zu treten vermögen. Anders formulirt können wir auch sagen: Man ersieht daraus, wie viele Atome sich zu gleicher Zeit in der Wirkungssphäre eines Atomes von doppeltem Radius, also achtfachem körperlichen Inhalte befinden können. Hiebei ist allerdings jedes einzelne Atom als kugelförmig vorausgesetzt; allein wie wenig innere Gründe dieser Hypothese zur Seite stehen mögen, so werden wir uns derselben gleichwohl[2]) im Interesse der Rechnung wie einer übersichtlichen Darstellung der Erscheinungen nicht entschlagen können.

Die Auflösung von Bender war, wie in einer Notiz[3]) der Redaction hervorgehoben wurde, insoferne keine genügende, als sie zwar nachwies, dass bei einer bestimmten Anordnung, für 12 Kugeln Platz vorhanden sei, es aber unentschieden liess, ob nicht durch geeignete Verschiebung dieser Kugeln der zum Auflegen einer dreizehnten Kugel erforderliche Raum hergestellt werden könnte. Diesen Kernpunkt der Frage hat Hoppe in jener Anmerkung erledigt und gezeigt, dass 12 in der Tat die Maximalzahl sei. Da jedoch zu dieser Feststellung die Variation von 6 Kugeln verwandt wurde, so dürfte es sich wohl empfehlen, die nämliche Untersuchung zuvor mit Hülfe einfacherer Betrachtungen durchzuführen. Um noch einmal in Kürze das Ziel der eigentlichen Aufgabe zu fixiren: Es soll gezeigt werden, dass es unmöglich ist, 13 gleiche Kugeln mit einer ebensolchen zur Berührung zu bringen.

1) Bender, Bestimmung der grössten Anzahl von Kugeln, welche sich auf eine gleiche Kugel auflegen lassen, Archiv d. Math. u. Phys. 56. Band. S. 302.

2) Budde, Ueber die Abweichungen der Gase, insbesondere des Wasserstoffs, vom Mariotte'schen Gesetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrgang. S. 298.

3) Hoppe, Anmerkung zu Bender's Aufsatz Archiv d. Math. u. Phys. 56. Band. S. 307.

§. 2. Denken wir uns, es seien wirklich auf die Kugel vom Radius R 13 ihr gleiche Kugeln aufgelegt, und legen wir an jede derselben aus dem Mittelpunkte der gegebenen Kugel (wir wollen dieselbe mit I bezeichnen) einen Berührungskegel; alsdann ist ersichtlich, dass keine zwei dieser Kegel einander schneiden dürfen, indem sonst auch mit den von ihnen umhüllten Kugeln das Gleiche der Fall wäre. Jeder solche Berührungskegel ist eine Rotationsfläche und schneidet deshalb aus der concentrischen Kugel I einen kleinen Kreis vom Radius ϱ aus. Der obigen Bedingung können wir dann auch die substituiren, dass diese Kugelkreise sich nicht schneiden dürfen. Im Ganzen entstehen unsrer Annahme gemäss 13 solche Kreise, deren Flächen zusammengenommen kleiner sein müssen als die Oberfläche von Kugel I. Dass sich diess wirklich so verhält, kann ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden.

Bezeichnen wir die Oeffnung jedes einzelnen Kegels mit α, so besteht offenbar die Relation

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{2R} = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\alpha = 60^0.$$

Den sphärischen Radius ϱ ergiebt demzufolge die Proportion

$$\varrho : 2r\pi = 30 : 360,$$

woraus

$$\varrho = \frac{r\pi}{6}$$

folgt. Der in sphärischem Masse gemessene Inhalt eines kleinen Kugelkreises vom Radius ϱ bestimmt sich gleich

$$r^2 . 2\pi(1-\cos\varrho).$$

Setzt man somit der Einfachheit halber $r = 1$, so ist der Inhalt

$$J = 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi(1-\cos 30^0) = \pi(2-\sqrt{3}).$$

Wird dann

$$\sqrt{3} = 1{,}73205$$

angenommen, so erhält man

$$13J = 13 . 3{,}1416 . (2-1{,}73) = 10{,}9433.$$

Hingegen ist die Gesammtoberfläche der Kugel I gleich

$$4r^2\pi = 4 . 3{,}1416 = 12{,}5664.$$

Die Differenz hat also den Wert

$$12{,}5664 - 10{,}9433 = 1{,}623.$$

Es fragt sich also nunmehr, ob die sonst noch in Frage kommenden Oberflächenstücke nicht einen grössten Flächeninhalt liefern, als die so eben berechnete Zahl ausdrückt.

§. 3. Um hierüber ins Klare zu kommen, denken wir uns die 13 Kugeln in eine möglichst nahe Lage gebracht. Der bessern Uebersicht halber beginnen wir mit 4 Kugeln, die wir so anordnen, dass das zwischen den vier zugehörigen Kreisen mit dem Radius ϱ eingeschlossne Stück der Oberfläche von Kugel I ein Kleinstes wird. Damit überhaupt diese Figur eine geschlossne sei, müssen die 4 Kugeln so liegen, dass je zwei davon eine dritte berühren. Die weitren Betrachtungen können wir entschieden auch an vier in Einer Ebene befindlichen Kreisen vornehmen, indem die uns hier interessirenden Verhältnisse auf der Sphäre die nämlichen sind.

Es seien (Fig. 1) die 4 gleichen Kreise um A, B, C, D so construirt, dass bezüglich in den vier Punkten E, F, G, H Berührung eintritt; es entsteht dann ein Rhombus $ABCD$ mit der Seite er und dem spitzen Winkel $ABC = \varphi$. Um zu ermitteln, bei welchem Winkel φ das (in der Figur schraffirte) krummlinige Viereck $EFGH$ ein (natürlich nur relatives) Kleinstes wird, sehen wir zunächst zu, unter welchen Umständen sie ein Grösstes ist, und verschieben hierauf die Kreise so lange, als es angeht, die so erreichte Schlussstellung wird dann das gesuchte Minimum repräsentiren.

Der Inhalt des Rhombus ist

$$2r . 2r\sin\alpha,$$

Die vier Sectoren *AEH*, *BEF*, *CFG*, *DGH* ergeben zusammen den Kreisinhalt

$$r^2\pi,$$

so dass demnach der Inhalt jener Figur

$$j = 4r^2\sin\alpha - r^2\pi$$

sein wird. Der Ausdruck erhält seinen grössten Wert dann, wenn

$$\sin\alpha = 1, \quad \alpha = 90^0$$

ist.

Wird nunmehr das Quadrat bei gleichbleibender Seitenlänge verschoben, bis eine weitere Verschiebung nicht mehr möglich ist, so gelangt man zu einer Anordnung der Kreise, bei welcher zwei der vorhin getrennt liegenden einander tangiren, und aus der viereckigen Figur *EFGH* sind zwei congruente dreieckige mit einem gemeinschaftlichen Eckpunkte geworden. Für den Winkel φ ist dann die Relation diese:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{2r} = \tfrac{1}{2},$$

$$\varphi = 60^0.$$

Auf die Kugelfläche übertragen lautet dieses Resultat so:

Vier eine gegebene Kugelfläche von gleichem Radius berührende Kugeln nehmen von jener dann den geringsten Oberflächenteil in Anspruch, wenn die durch die vier Berührungspunkte der von den Tangentialkegeln aus der ersten Kugel ausgeschnittenen Kreise gebildete sphärische Viereck in zwei congruente Dreiecke zerfällt.

§. 4. Die nächste Frage, welche wir uns vorlegen müssen, ist die nach dem Flächeninhalt eines solchen Dreieckes. *A*, *B*, *C* (Fig. 2) mögen die sphärischen Centra dreier solcher Kreise sein, so dass

$$AD = AE = BD = BF = CE = CF = \varrho$$

ist. Wir suchen den Flächeninhalt l des (schraffirten) sphärischen Dreieckes *DEF* zu bestimmen.

Versteht man unter l' den Flächeninhalt eines der drei Sectoren

ADE, *BFD*, *CEF*,

unter l'' hingegen den Flächeninhalt des gesammten Dreieckes *ABC*, so ist offenbar

$$l = l'' - 3l'.$$

Sowohl für l', als auch für l'', ist die Kenntniss des Winkels

$$BAC = ACB = CBA = \psi$$

erforderlich. Eine bekannte Formel liefert

$$\cos 2\varrho = \cos^2 2\varrho + \sin^2 2\varrho \cos\psi,$$

woraus

$$\cos\psi = \frac{\cos 2\varrho(1-\cos 2\varrho)}{1-\cos^2 2\varrho} = \frac{\cos 2\varrho}{1+\cos 2\varrho}$$

sich ergiebt. Setzt man für ϱ den früher gefundenen Wert ein, so fliesst hieraus weiter

$$\psi = \operatorname{arc\,cos}\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}} = \operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3}.$$

Dann gilt die Proportion

$$\operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3} : 2\pi = l' : J,$$

und mit Substitution des bekannten Wertes von J aus §. 2,

$$l' = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3}.$$

Sind α, β, γ die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist dessen Flächeninhalt durch den Ausdruck

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

gegeben; in unsrem Falle sind diese drei Winkel unter sich gleich, und man hat

$$l'' = 3\operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3} - \pi.$$

Da l' und l'' jetzt gefunden sind, so bekommt man zum Schlusse

$$l = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3} - \pi.$$

Wie oft dürfen wir diese Grösse l zu sich selbst addiren, um die oben erhaltene Zahl

$$1{,}623$$

zu erreichen, resp. zu überschreiten?

§. 5. Die ganze Rechnung soll, da sie nicht zur Feststellung von Grössenbeziehungen, sondern nur zur Erkenntniss gewisser Grenzbedingungen dienen soll, unter Annahme der günstigsten Umstände geführt werden. Zur Berechnung des obigen Ausdrucks hat man:

$$\operatorname{arc\,cos}\tfrac{1}{3} = 0{,}39183\,.\pi; \quad \tfrac{3}{2}\sqrt{3} = 2{,}59808$$

Das Product ist nicht ganz $1{,}018\,.\,\pi$, also

$$l = 0{,}018\pi = 0{,}05655.$$

Diese Zahl ist in 1,623 etwas mehr als 28 mal enthalten. Nun kann jede aufgelegte Kugel nie mit 6 andern in Berührung kommen, also nie 6 Bogendreiecke wie DEF begrenzen. Lassen wir aber auch diese zu hoch gegriffene Zahl gelten, so werden zwischen den aufgelegten Kugeln immer erst $\frac{6}{3}\,13 = 26$ solche Zwischenräume entstehen, also, da noch 28 Platz haben, die Unmöglichkeit der Berührung von 13 Kugeln nicht dargetan sein. Zum Beweise ist es demnach erforderlich den durch die Anordnung notwendigen Ueberschuss der Zwischenräume über ihr Minimum in Rechnung zu ziehen, ein Standpunkt, von dem jeder neue Versuch einer Vereinfachung des citirten Beweises auszugehen hat. Es hat sich ergeben:

Selbst trotz des absichtlich zu hoch angenommenen Wertes einer gewissen Zahl, nehmen je 3 von 13 gleichen eine Kugel des nämlichen Radius berührenden Kugeln keinen so grossen Teil jener Kugel für sich in Anspruch, dass sich die Unmöglichkeit ergäbe, 13 Kugeln in der verlangten Weise anzuordnen.

§. 6. Die bisher angestellten Betrachtungen hatten nur den Zweck, die Unmöglichkeit von 13 congruenten Berührungskugeln ein und derselben Kugel darzutun. Es könnte jedoch möglich sein, a priori die grösste Anzahl solcher Berührungskugeln zu bestimmen. Die Angabe einer solchen Methode ist der Zweck der nächsten Zeilen, es verhilft uns dazu folgende Ueberlegung.

Wir nehmen an, es gäbe n solcher Kugeln; n ist natürlich eine ganze positive Zahl. Wir nehm es es als möglich an, diese n Kugeln in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, dass die ihre Centra mit dem Mittelpunkte von Kugel I verbindenden Radien sämmtlich gleiche Winkel mit einander einschliessen. Irgend drei der Berührungspunkte werden dann ein sphärisch gleichseitiges Dreieck bilden, und es erhebt sich die Aufgabe, die Kugelfläche in n solche Dreiecke einzuteilen — eine Aufgabe, wie solche bereits den arabischen Mathematikern bis zu einem gewissen Grade sehr geläufig gewesen zu sein scheinen. Jene Aufgabe liefert uns in ihrer Lösung die Seitenlänge jenes Dreiecks, und es bleibt uns dann nur noch zu untersuchen, für welches n diese Länge noch statthaft ist. Für alle ganzzahligen positiven Werte n ist alsdann die bewusste Anordnung nicht mehr möglich. Den uns unbekannten Winkel des Dreiecks setzen wir gleich x. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks, den Radius zur Einheit genommen,

$$3x - \pi,$$

und zur Bestimmung von x besteht die Gleichung

$$n(3x - \pi) = 4\pi,$$

woraus der Wert

$$x = \pi\frac{n+4}{3n}$$

sich herleitet.

Die Seite y berechnet sich aus der bereits benützten Gleichung

$$\cos y = \cos^2 y + \sin^2 y \cos x.$$

Diese Gleichung giebt, wie oben, zunächst

$$\cos x = \frac{\cos y}{1+\cos y},$$

also

$$\cos y = \frac{\cos x}{1-\cos x},$$

und, mit Einsetzung der gefundenen Werte,

$$\cos y = \frac{\cos\pi\frac{n+4}{3n}}{1-\cos\pi\frac{n+4}{3n}}.$$

Andererseits ist jedoch y insoweit bestimmt, als es eine Grenze giebt, welche diese Grösse nicht überschreiten darf, ohne die Aufgabe illusorisch zu machen; es darf nämlich y nicht kleiner sein, als die Distanz zweier Berührungspunkte der Kugeln. Diese ist 60^0, und wir haben demgemäss die Gleichung

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2} = \frac{\cos\pi\frac{n+4}{3n}}{1-\cos\pi\frac{n+4}{3n}}$$

aufzulösen. Diess giebt

$$3\cos\pi\frac{n+4}{3n} = 1,$$

$$\pi\,\frac{n+4}{3n} = \operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3}.$$

Nun ist

$$\pi\cdot\frac{22+4}{3.22} = \frac{13\pi}{33} > \operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3},$$

$$\pi\cdot\frac{23+4}{3.23} = \frac{9\pi}{23} < \operatorname{arc}\cos\tfrac{1}{3}.$$

d. h. bei 22 Dreiecken giebt es noch eine Lösung, bei 23 hingegen nicht mehr. Erstere Zahl widerspricht nicht dem Falle von 13 Kugeln. Das hier angewandte Verfahren kann also nicht a priori entscheiden.