Übungen zur Vorlesung

# Darstellung, Verarbeitung und Erwerb von Wissen

Wintersemester 2021/2022

Lösungsskizze zu Übungsblatt Nr. 5

Abgabetermin: 22.11.2021, 12 Uhr

Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu vier Personen sind möglich. 15.11.2021

---

**Aufgabe 1 (Reiter'sche Default-Theorie: Semi-Monotonie)** $(2 + 18 = 20$ Punkte)

1. Wann ist eine Reiter'sche Default-Theorie $\mathcal{T}$ semi-monoton?
2. Es sei die Reiter'sche Default-Theorie $\mathcal{T} = (W, \Delta)$ mit $W = \{P(a)\}$ und

$$\Delta = \left\{ \delta_1 = \frac{P(a) \ : \ Q(a) \wedge R(a)}{R(a)} \right\}$$

gegeben. Ist $T$ semi-monoton? Beweisen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:**

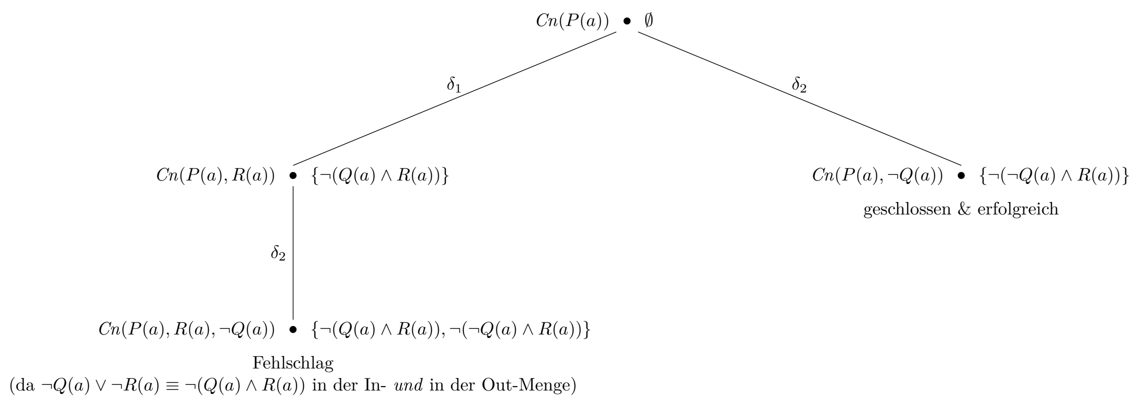
1. Eine Reiter'sche Default-Theorie $\mathcal{T}$ ist genau dann semi-monoton, wenn eine Vergrößerung der Defaultmenge $\Delta$ nicht zur Zerstörung von Extensionen von $\mathcal{T}$ führt, also wenn für jede Defaultmenge $\Delta'$ mit $\Delta \subseteq \Delta'$ jede Extension von $\mathcal{T}$ in einer Extension von $\mathcal{T}' = (W, \Delta')$ enthalten ist.

2. $\mathcal{T}$ hat genau eine Extension, nämlich $E = Cn(\{P(a), R(a)\})$. Ergänzen wir $\mathcal{T}$ um die Default-Regel

$$\delta_2 = \frac{\top : \ \neg Q(a) \wedge R(a)}{\neg Q(a)},$$

so besitzt die resultierende Default-Theorie $\mathcal{T}'$ wiederum genau eine Extension (vgl. Prozessbaum):

$$E' = Cn(\{P(a), \neg Q(a)\}).$$



Im rechten Arm des Prozessbaumes ist $\delta_1$ nicht anwendbar, da $\neg(Q(a) \wedge R(a)) \equiv \neg Q(a) \vee \neg R(a) \in Cn(P(a), \neg Q(a))$. Offensichtlich gilt $E \not\subseteq E'$. $\mathcal{T}$ ist somit nicht semi-monoton.

**Aufgabe 2 (Poole'sche Default-Logik)** $(14 + 4 + 4 = 22$ Punkte)

Fineas erzählt Pherb, wie er gesehen hat, dass ihr Schnabeltier Perry im Garten Eier gelegt hat. Candy hat die beiden belauscht und versucht die Eier zu finden, diese sind aber auf mysteriöse Weise verschwunden. Daher glaubt sie den beiden kein Wort, denn sie weiß, dass Schnabeltiere Fell haben und Säugetiere sind. Und da Säugetiere im Allgemeinen keine Eier legen, ist sie sich nicht sicher, ob Schnabeltiere überhaupt Eier legen. Da sie von ihrem Freund Jerome gehört hat, dass man der Reiter-Logik nicht blind vertrauen sollte, will sie ihre Ergebnisse mit einer anderen Logik überprüfen. Sie modelliert ihr Wissen über Schnabeltiere mithilfe der Poole'schen Default-Logik auf folgende Weise:

- $\mathcal{U} = \{perry\}$
- $\mathcal{F} = \{Schnabeltier(perry)\}$
- $\mathcal{D} = \{Säugetier(x) \Rightarrow Hat\_Fell(x), Säugetier(x) \Rightarrow \neg Legt\_Eier(x), Schnabeltier(x) \Rightarrow Legt\_Eier(x),$ $Schnabeltier(x) \Rightarrow Säugetier(x)\}$

1. Bestimmen Sie alle Extensionen der Default-Theorie $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$.
   *Hinweis: Sie können die Konstanten und Prädikate geeignet abkürzen.*
2. Kann Candy unter Zuhilfenahme von Poole'scher Default-Logik *ableiten*, dass Perry Eier legen kann?
3. Ist es durch $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ *erklärbar*, dass Perry Fell hat?

Begründen Sie Ihre Antworten.

**Lösung:**

1. Die Menge aller Grundinstanzen von $\mathcal{D}$ für die Aufgabenteile 1-3 ist

   $$\mathcal{D}' = \left\{ \begin{array}{l} Säugetier(perry) \Rightarrow Hat\_Fell(perry), Säugetier(perry) \Rightarrow \neg Legt\_Eier(perry), \\ Schnabeltier(perry) \Rightarrow Legt\_Eier(perry), Schnabeltier(perry) \Rightarrow Säugetier(perry) \end{array} \right\} .$$

   Wendet man den $Cn$-Operator auf diese Menge vereinigt mit $\mathcal{F}$ an, so ergibt sich, dass $\neg Legt\_Eier(perry), Legt\_Eier(perry) \in Cn(\mathcal{D}' \cup \mathcal{F})$, was eine Inkonsistenz darstellt.

   Maximal mit $\mathcal{F}$ konsistente Teilmengen von $\mathcal{D}$ können erreicht werden, indem genau eine der instantiierten Regeln $Säugetier(perry) \Rightarrow \neg Legt\_Eier(perry)$ $(D_1)$, $Schnabeltier(perry) \Rightarrow Legt\_Eier(perry)$ $(D_2)$ oder $Schnabeltier(perry) \Rightarrow Säugetier(perry)$ $(D_3)$ *nicht* in ein Szenario aufgenommen wird. Wir erhalten also die Extensionen

$$
\begin{aligned}
Cn(D_1 \cup \mathcal{F}) &= Cn\left(\left\{\begin{array}{l} Schnabeltier(perry), Schnabeltier(perry) \Rightarrow Säugetier(perry), \\ Schnabeltier(perry) \Rightarrow Legt\_Eier(perry), \\ Säugetier(perry) \Rightarrow Hat\_Fell(perry) \end{array}\right\}\right) \\
&= Cn(\{Schnabeltier(perry), Säugetier(perry), Legt\_Eier(perry), Hat\_Fell(perry)\}) \\
Cn(D_2 \cup \mathcal{F}) &= Cn\left(\left\{\begin{array}{l} Schnabeltier(perry), Schnabeltier(perry) \Rightarrow Säugetier(perry), \\ Säugetier(perry) \Rightarrow \neg Legt\_Eier(perry), Säugetier(perry) \Rightarrow Hat\_Fell(perry) \end{array}\right\}\right) \\
&= Cn(\{Schnabeltier(perry), Säugetier(perry), \neg Legt\_Eier(perry), Hat\_Fell(perry)\}) \\
Cn(D_3 \cup \mathcal{F}) &= Cn\left(\left\{\begin{array}{l} Schnabeltier(perry), Säugetier(perry) \Rightarrow \neg Legt\_Eier(perry), \\ Schnabeltier(perry) \Rightarrow Legt\_Eier(perry), \\ Säugetier(perry) \Rightarrow Hat\_Fell(perry) \end{array}\right\}\right) \\
&= Cn(\{Schnabeltier(perry), Legt\_Eier(perry), \neg Säugetier(perry) \vee \neg Legt\_Eier(perry), \\
&\qquad \neg Säugetier(perry) \vee Hat\_Fell(perry)\}) \\
&= Cn(\{Schnabeltier(perry), Legt\_Eier(perry), \neg Säugetier(perry), \\
&\qquad \neg Säugetier(perry) \vee Hat\_Fell(perry)\}) \\
&= Cn(\{Schnabeltier(perry), Legt\_Eier(perry), \neg Säugetier(perry)\})
\end{aligned}
$$

2. Damit Candy ableiten kann, dass Perry Eier legen kann, muss $Legt\_Eier(perry) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{Poole}(\mathcal{F})$ sein, also im Schnitt der Extensionen liegen.

   Es gilt aber:

$$
\begin{aligned}
&Legt\_Eier(perry) \notin Cn(D_2 \cup \mathcal{F}) \\
\text{und daher } &Legt\_Eier(perry) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{Poole}(\mathcal{F}),
\end{aligned}
$$

   Candy kann also nicht ableiten, dass Perry Eier legen kann.

3. Weiterhin ist $Hat\_Fell(perry)$ Element zweier Extensionen (nämlich $Cn(D_1 \cup \mathcal{F})$ und $Cn(D_2 \cup \mathcal{F})$), daher ist $Hat\_Fell(perry)$ *erklärbar* (wobei es schon erklärbar wäre, wenn es nur in einer Extension liegen würde). Beachten Sie, dass es aber nicht ableitbar ist, weil $Hat\_Fell(perry)$ nicht im Schnitt der Extensionen liegt, also $Hat\_Fell(perry) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{Poole}(\mathcal{F})$.

**Aufgabe 3 (Vergleich Reiter vs. Poole)** ($5 + 5 + 8 + 8 + 6 = 32$ Punkte)

Jerome vertraut Candy's Ergebnissen nicht und hat sein Wissen mithilfe einer Reiter'schen Default-Theorie $\mathcal{T}$ =(W,$\Delta$) modelliert, wobei $W = \{Schnabeltier(perry)\}$. Er hat mithilfe eines Prozessbaumes folgende Extensionen bestimmt:

- $Cn(Schnabeltier(perry), Säugetier(perry), \neg Legt\_Eier(perry), Hat\_Fell(perry))$
- $Cn(Schnabeltier(perry), Säugetier(perry), Legt\_Eier(perry), Hat\_Fell(perry))$

Er möchte seine Ergebnisse nun mit denen von Candy vergleichen.

1. Bestimmen Sie in kompakter Form alle Schlussfolgerungen, die sich aus der Default-Theorie mit Hilfe der Inferenzrelation $\mid\!\sim_{\Delta}^{Reiter}$ ziehen lassen. Entscheiden Sie, ob die Inferenz

$$Schnabeltier(perry) \mid\!\sim_{\Delta}^{Reiter} Säugetier(perry)$$

   in dieser Theorie gültig ist.

2. Bestimmen Sie für die Poole'sche Default-Theorie $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ aus Aufgabe 2 die Menge $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{Poole}(\mathcal{F})$ in kompakter Form, also alle Schlussfolgerungen, die sich aus der Poole'schen Default-Theorie $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ bestimmen lassen. Entscheiden Sie auch hier ob die Inferenz

$$\mathit{Schnabeltier(perry)} \mid\!\sim_{\mathcal{D}}^{Poole} \mathit{Säugetier(perry)}$$

gültig ist.

3. Vergleichen und beurteilen Sie die Aussagekraft der verschiedenen Inferenzrelationen anhand der Reiter'schen Default-Theorie $\mathcal{T}$ bzw. der Poole'schen Default-Theorie $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ zum Schnabeltier-Beispiel.

4. Wie könnte man die Mengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{D}$ aus Aufgabe 2 modifizieren, damit man die gleichen Extensionen wie bei der Reiter'schen Default-Theorie $\mathcal{T}$ erhält?

5. Wie könnte man die Default-Regeln der Reiter'schen Default-Theorie $\mathcal{T}$ modellieren, um die gleichen Extensionen wie bei der Poole'schen Default-Theorie zu erhalten?

**Lösung:**

1. Die Menge der Schlussfolgerungen ist der Schnitt aller Extensionen.

$$\begin{aligned}
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \neg \mathit{Legt_Eier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}) \cap \\
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Legt_Eier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}) \\
=&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}, \mathit{Legt_Eier(perry)} \vee \neg \mathit{Legt_Eier(perry)}) \\
=&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)})
\end{aligned}$$

Diese Menge enthält *Säugetier(perry)*, daher ist die Inferenz $\mathit{Schnabeltier(perry)} \mid\!\sim_{\Delta}^{Reiter} \mathit{Säugetier(perry)}$ gültig.

2. Die Mengen der Schlussfolgerungen ist auch hier der Schnitt aller Extensionen (die Extensionen ergeben sich aus Aufgabe 2.1):

$$\begin{aligned}
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Legt_Eier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}) \cap \\
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \neg \mathit{Legt_Eier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}) \cap \\
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \neg \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Legt_Eier(perry)}) \\
=&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)}) \cap \\
&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \neg \mathit{Säugetier(perry)}, \mathit{Legt_Eier(perry)}) \\
=&Cn(\mathit{Schnabeltier(perry)}, \mathit{Säugetier(perry)} \vee \mathit{Legt_Eier(perry)}, \mathit{Hat_Fell(perry)} \vee \neg \mathit{Säugetier(perry)}, \\
&\mathit{Hat_Fell(perry)} \vee \mathit{Legt_Eier(perry)})
\end{aligned}$$

Diese Menge enthält nicht *Säugetier(perry)*, daher ist die Inferenz $\mathit{Schnabeltier(perry)} \mid\!\sim_{\mathcal{D}}^{Poole} \mathit{Säugetier(perry)}$ nicht gültig.

3. Die Poole'sche Default-Theorie beruht stärker auf der klassischen Logik, deswegen kann ein Poole'scher Default $A(x) \Rightarrow B(x)$ auch in seiner kontrapositiven Form $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ aktiv werden. Dies führt tendenziell zu mehr Extensionen und somit zu einer kleineren Menge an aussagekräftigen Formeln, die in allen Extensionen (also im Schnitt) liegen.

   Konkret führt zum Beispiel in Aufgabenteil 2.1 die kontrapositive Anwendung von $\mathit{Säugetier(perry)} \Rightarrow \neg \mathit{Legt\_Eier(perry)}$ dazu, dass $\neg \mathit{Säugetier(perry)} \in Cn(D_3 \cup \mathcal{F})$. Es gilt, dass $\neg \mathit{Säugetier(perry)} \notin Cn(D_1 \cup \mathcal{F})$ und $\neg \mathit{Säugetier(perry)} \notin Cn(D_2 \cup \mathcal{F})$. Diese zusätzliche Aussage in $Cn(D_3 \cup \mathcal{F})$ führt, dazu dass der Schnitt über alle Extensionen weniger aussagekräftig ist. Das sieht man daran, dass abgesehen von *Schnabeltier(perry)*, ein Fakt der bereits in $\mathcal{F}$ enthalten ist, die Formelmenge im $Cn$-Operator in Aufgabenteil 2 nur aus Disjunktionen besteht.

Insgesamt gilt, dass die Poole'sche Default-Theorie vorsichtiger ist als die Reiter'sche Default-Theorie.

4. Anstelle des Defaults $\mathit{Schnabeltier}(x) \Rightarrow \mathit{Säugetier}(x)$ könnte man eine entsprechende allquantifizierte Formel $\forall x\ \mathit{Schnabeltier}(x) \Rightarrow \mathit{Säugetier}(x)$ als sichere Regel in $\mathcal{F}$ aufnehmen, so dass die dritte Extension $Cn(D_3 \cup \mathcal{F})$ aus Aufgabe 2.1 nicht mehr zustande kommt. Dann haben die Reiter- und Poole-Theorien die gleichen Extensionen, da die beiden Extensionen aus der Aufgabenstellung genau den anderen beiden Extensionen aus Aufgabe 2.1 entsprechen.

5. Man muss für die Modellierung der Defaults Implikationen verwenden (vgl. Vorlesungsfolien Kapitel 3, Folie 65):

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\top \ :\ \mathit{Säugetier(perry)} \Rightarrow \mathit{Hat\_Fell(perry)}}{\mathit{Säugetier(perry)} \Rightarrow \mathit{Hat\_Fell(perry)}}, \\
\delta_2 &= \frac{\top \ :\ \mathit{Säugetier(perry)} \Rightarrow \neg \mathit{Legt\_Eier(perry)}}{\mathit{Säugetier(perry)} \Rightarrow \neg \mathit{Legt\_Eier(perry)}}, \\
\delta_3 &= \frac{\top \ :\ \mathit{Schnabeltier(perry)} \Rightarrow \mathit{Legt\_Eier(perry)}}{\mathit{Schnabeltier(perry)} \Rightarrow \mathit{Legt\_Eier(perry)}}, \\
\delta_4 &= \frac{\top \ :\ \mathit{Schnabeltier(perry)} \Rightarrow \mathit{Säugetier(perry)}}{\mathit{Schnabeltier(perry)} \Rightarrow \mathit{Säugetier(perry)}}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 4 (Gelfond-Lifschitz-Redukt)** $(6 + 21 = 27$ Punkte$)$

Betrachten Sie das folgende logische Programm $\mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{P} & = & \{ & G(a) & \leftarrow & F(a),\ \mathit{not}\ G(b).,\\
 & & & F(b) & \leftarrow & \mathit{not}\ G(a).,\\
 & & & G(c) & \leftarrow & G(a),\ G(b),\ F(a).,\\
 & & & F(a) & \leftarrow & \mathit{not}\ F(b).,\\
 & & & G(b) & \leftarrow & F(b). \quad \}
\end{array}
$$

1. Bestimmen Sie für $\mathcal{P}$ die induzierte Signatur und daraus das Herbranduniversum $H_u$ und die Herbrandbasis $\mathcal{H}(\mathcal{P})$.

**Lösung:**

1. Das Programm $\mathcal{P}$ hat die Signatur:
   $\Sigma = \{a/0, b/0, c/0; F/1, G/1\}$

   Das Herbranduniversum beinhaltet alle Grundterme über $\sum$:
   $H_u = \{a, b, c\}$

Die Herbrandbasis beinhaltet alle Grundatome über $\sum$:
$\mathcal{H}(\mathcal{P}) = \{F(a), F(b), F(c), G(a), G(b), G(c)\}$

2. Bilden Sie bezüglich der folgenden Mengen die Gelfond-Lifschitz-Redukte von $\mathcal{P}$. Entscheiden Sie begründet, ob es sich bei den Mengen um Antwortmengen von $\mathcal{P}$ handelt.

   (a) $S_1 = \{F(a), G(a)\}$
   (b) $S_2 = \{F(b), G(b)\}$
   (c) $S_3 = \{G(a), G(c), G(b), F(a)\}$

**Lösung:**

Es gilt:

(a) Das Gelfond-Lifschitz-Redukt von $\mathcal{P}$ bzgl. $S_1$ ist

$$\mathcal{P}^{S_1} = \{G(a) \leftarrow F(a).,\quad G(c) \leftarrow G(a), G(b), F(a).,\quad F(a).,\quad G(b) \leftarrow F(b).\}.$$

Für den Abschluss gilt $Cl(\mathcal{P}^{S_1}) = \{F(a), G(a)\} = S_1$ und damit ist $S_1$ eine Antwortmenge von $\mathcal{P}$.

(b) Das Gelfond-Lifschitz-Redukt von $\mathcal{P}$ bzgl. $S_2$ ist

$$\mathcal{P}^{S_2} = \{F(b).,\quad G(c) \leftarrow G(a), G(b), F(a).,\quad G(b) \leftarrow F(b).\}.$$

Für den Abschluss gilt $Cl(\mathcal{P}^{S_2}) = \{F(b), G(b)\} = S_2$ und damit ist $S_2$ eine Antwortmenge von $\mathcal{P}$.

(c) Das Gelfond-Lifschitz-Redukt von $\mathcal{P}$ bzgl. $S_3$ ist

$$\mathcal{P}^{S_3} = \{G(c) \leftarrow G(a), G(b), F(a).,\quad F(a).,\quad G(b) \leftarrow F(b).\}.$$

Für den Abschluss gilt $Cl(\mathcal{P}^{S_3}) = \{F(a)\} \neq S_3$ und damit ist $S_3$ keine Antwortmenge von $\mathcal{P}$.