

Явные методы Рунге — Кутты [\[править | править код \]](#)

Семейство явных методов Рунге — Кутты является обобщением как явного метода Эйлера, так и классического метода Рунге — Кутты четвёртого порядка. Оно задаётся формулами

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{k}_i,$$

где *h* — величина шага сетки по *x*, а вычисление нового значения проходит в *s* этапов:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_n + c_2 h, \mathbf{y}_n + a_{21} h \mathbf{k}_1), \\ &\dots \\ \mathbf{k}_s &= \mathbf{f}(x_n + c_s h, \mathbf{y}_n + a_{s1} h \mathbf{k}_1 + a_{s2} h \mathbf{k}_2 + \dots + a_{s,s-1} h \mathbf{k}_{s-1}) \end{aligned}$$

Конкретный метод определяется числом *s* и коэффициентами *b_i*, *a_{ij}* и *c_i*. Эти коэффициенты часто упорядочивают в таблицу (называемую *таблицей Бутчера*):

0					
<i>c</i> ₂	<i>a</i> ₂₁				
<i>c</i> ₃	<i>a</i> ₃₁	<i>a</i> ₃₂			
⋮	⋮	⋮	⋱		
<i>c</i> _{<i>s</i>}	<i>a</i> _{<i>s</i>1}	<i>a</i> _{<i>s</i>2}	⋯	<i>a</i> _{<i>s</i><i>s</i>−1}	
	<i>b</i> ₁	<i>b</i> ₂	⋯	<i>b</i> _{<i>s</i>−1}	<i>b</i> _{<i>s</i>}

Для коэффициентов метода Рунге — Кутты должны быть выполнены условия

∑

j
=
1

i
−
1

a

i
j

=

c

i

{\displaystyle \sum _{j=1}^{i-1}a_{ij}=c_{i}}

 для *i* = 2, . . . , *s*. Если требуется, чтобы метод имел порядок *p*, то следует также обеспечить условие

$$\bar{\mathbf{y}}(h+x_0) - \mathbf{y}(h+x_0) = O(h^{p+1}),$$

где

y
¯

(
h
+

x

0

)

{\displaystyle \bar{\mathbf{y}}(h+x_{0})}

 — приближение, полученное по методу Рунге — Кутты. После многократного дифференцирования это условие преобразуется в систему полиномиальных уравнений относительно коэффициентов метода.

В случае схем Рунге-Кутты, S-слой состоит из одного элемента, значение на котором будем интерпретировать как **x**. Число скрытых элементов равно числу стадий *s*, значение в *i*-м узле есть **k_iΔt**. На R-элементе получается Δ**x** = **x̂** − **x**. В качестве операции σ используется **f(·) · Δt**.

Из вершины **x** во все вершины скрытого слоя идут стрелки с весами 1. Из элементов скрытого слоя выходят стрелки типа *a_{ij}*, которые соединяют *i*-ый узел слоя A с *j*-м узлом того же слоя, и стрелки *b_i*, соединяющая *i*-й узел слоя A с элементом Δ**x**. Обозначим сигнал в *i*-м узле скрытого слоя как *k_iΔt*. В этом узле суммируются с весами все приходящие в него сигналы, что дает

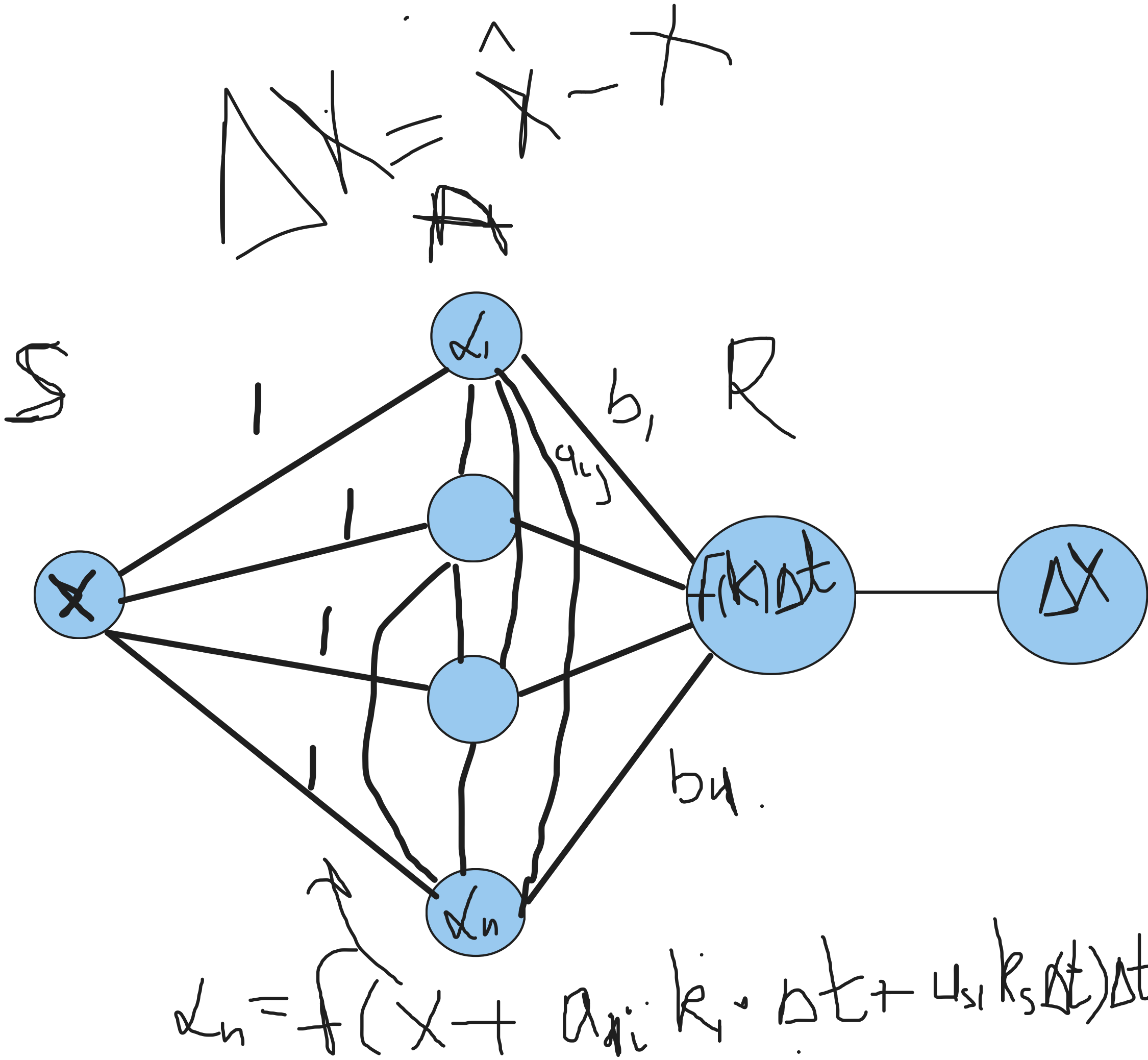
$$k_i \Delta t = \mathbf{f}(\mathbf{x} + a_{1i} k_1 \Delta t + \dots + a_{si} k_s \Delta t) \Delta t.$$

Эти сигналы складываются с весами *b_i*:

$$\Delta \mathbf{x} = b_1 k_1 \Delta t + \dots b_s k_s \Delta t.$$

$\Delta t = const$

$-x$



$a_{1i} k_1 \Delta t$

