
Front matter

title: "Лабораторная работа н.8" subtitle: "Модель конкуренции двух фирм" author: "Петров Артем Евгеньевич"

Generic otions

lang: ru-RU toc-title: "Содержание"

Bibliography

bibliography: bib/cite.bib csl: pandoc/csl/gost-r-7-0-5-2008-numeric.csl

Pdf output format

toc: true # Table of contents toc-depth: 2 lof: true # List of figures lot: true # List of tables fontsize: 12pt linestretch: 1.5 papersize: a4 documentclass: scrreprt

I18n polyglossia

polyglossia-lang: name: russian options: - spelling=modern - babelshorthands=true polyglossia-otherlangs: name: english

I18n babel

babel-lang: russian babel-otherlangs: english

Fonts

mainfont: PT Serif romanfont: PT Serif sansfont: PT Sans monofont: PT Mono mainfontoptions: Ligatures=TeX romanfontoptions: Ligatures=TeX sansfontoptions: Ligatures=TeX,Scale=MatchLowercase monofontoptions: Scale=MatchLowercase,Scale=0.9

Biblatex

biblatex: true biblio-style: "gost-numeric" biblatexoptions:

- parentracker=true
- backend=biber
- hyperref=auto
- language=auto
- autolang=other*
- citestyle=gost-numeric

Pandoc-crossref LaTeX customization

figureTitle: "Рис." tableTitle: "Таблица" listingTitle: "Листинг" lofTitle: "Список иллюстраций" lotTitle: "Список таблиц" lolTitle: "Листинги"

Misc options

indent: true header-includes:

- \usepackage{indentfirst}
- \usepackage{float} # keep figures where there are in the text
- \floatplacement{figure}{H} # keep figures where there are in the text

---

Цель работы

Рассмотреть задачу об конкуренции двух фирм и решить ее с помощью языка программирования Julia

Задание

Вариант 22

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего

производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2$$
$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2,$$

где $a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$, $a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$, $c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$.

Также введена нормировка $t = c_1\theta$.

{#fig:001 width=70%}

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед M_1M_2 будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0{,}0013\right)M_1M_2 - \frac{a_1}{c_1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 7.1,\ M_0^2 = 8.1,$$
$$p_{cr} = 44, N = 77, q = 1$$
$$\tau_1 = 26, \tau_2 = 21,$$
$$\tilde{p}_1 = 11, \tilde{p}_2 = 8.7$$

***Замечание*:** Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн. единиц.

Обозначения:

N – число потребителей производимого продукта.

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\theta = \frac{t}{c_1}$ - безразмерное время

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

{#fig:002 width=70%}

Теоретическое введение(рис. 1)

Модель конкуренции двух фирм.

Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \qquad (1)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa \qquad (2)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

{#fig:003 width=70%}

{#fig:003 width=70%}

$$\frac{dp}{dt}=\gamma\left(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}}+Nq\left(1-\frac{p}{p_{cr}}\right)\right) \tag{3}$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}}+Nq\left(1-\frac{p}{p_{cr}}\right)=0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p=p_{cr}\left(1-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}\right) \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt}=M\frac{\delta}{\tau}\left(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}}-1\right)-M^2\left(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}}\right)^2\frac{p_{cr}}{Nq}-\kappa \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$:

$$\tilde{M}_{1,2}=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \tag{7}$$

где

$$a=Nq\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p}\frac{\tau}{\delta},\ b=\kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \tag{8}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$\tilde{M}_+=Nq\frac{\tau}{\delta}\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p},\ \tilde{M}_-=\kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr}-\tilde{p})} \tag{9}$$

Первое состояние $\tilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_-$ неустойчиво, так, что при $M < \tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к

{#fig:004 width=70%}

{#fig:004 width=70%}

Модель конкуренции двух фирм.

Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \qquad (1)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa \qquad (2)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

{#fig:005 width=70%}

{#fig:005 width=70%}

$$\frac{dp}{dt}=\gamma\left(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}}+Nq\left(1-\frac{p}{p_{cr}}\right)\right) \tag{3}$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}}+Nq\left(1-\frac{p}{p_{cr}}\right)=0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$p=p_{cr}\left(1-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}\right) \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{dM}{dt}=M\frac{\delta}{\tau}\left(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}}-1\right)-M^2\left(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}}\right)^2\frac{p_{cr}}{Nq}-\kappa \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt=0$:

$$\tilde{M}_{1,2}=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \tag{7}$$

где

$$a=Nq\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p}\frac{\tau}{\delta},\ b=\kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \tag{8}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2<4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$\tilde{M}_+=Nq\frac{\tau}{\delta}\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p},\ \tilde{M}_-=\kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr}-\tilde{p})} \tag{9}$$

Первое состояние $\tilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_-$ неустойчиво, так, что при $M<\tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($dM/dt<0$), то есть, фирма идет к

{#fig:006 width=70%}

{#fig:006 width=70%}

Выполнение лабораторной работы

1. Подключение необходимых библиотек

Подключим необходимые библиотеки:

```
using Plots
using DifferentialEquations
```

2. Выполнение лабораторной для случая 1.

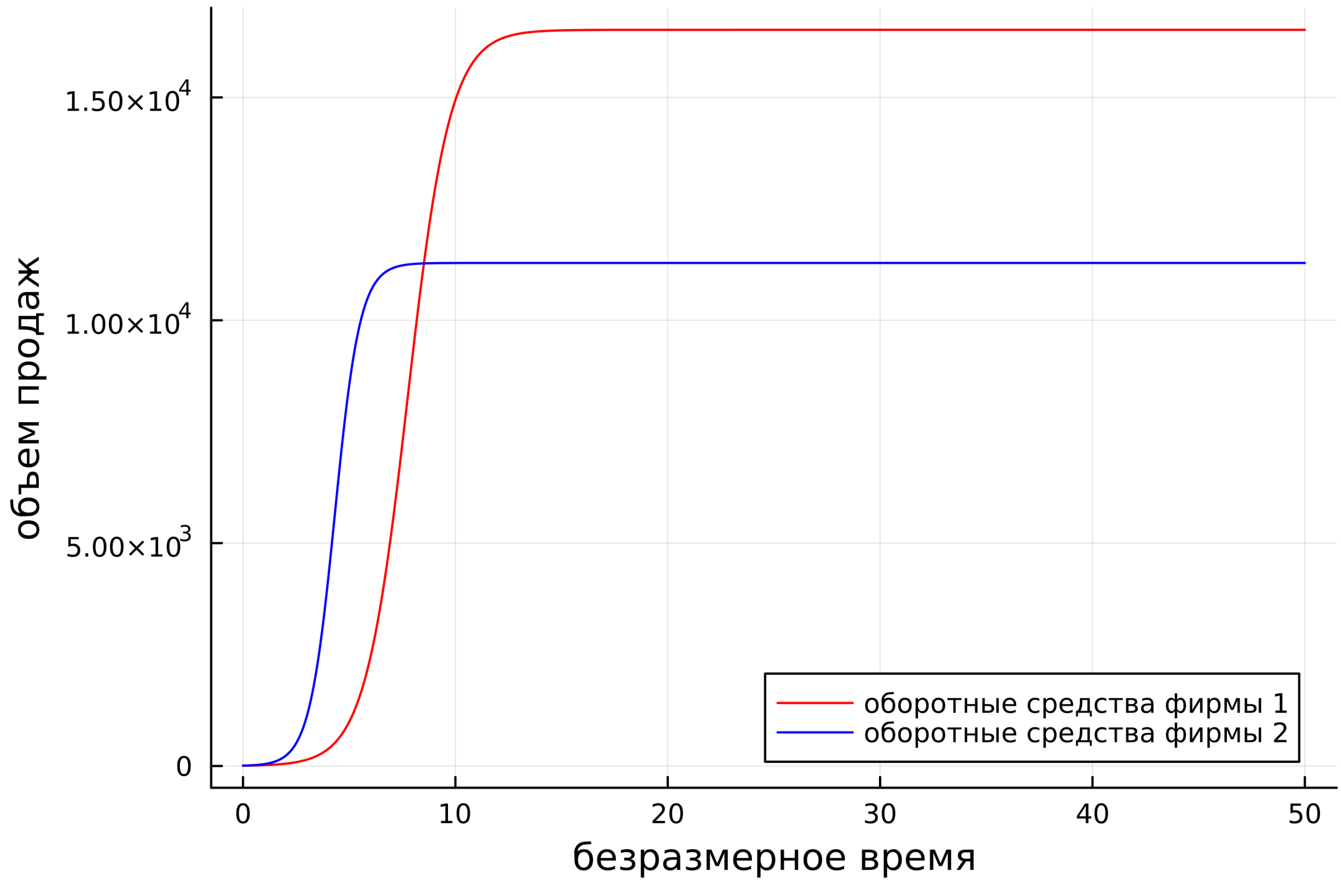
Код программы:

```
M1 = 7.1
M2 = 8.1
p_cr = 44
N = 77
q = 1
tau1 = 26
tau2=21
p1= 11
p2 = 8.7

a1 = p_cr / (tau1^2 * p1^2 * N * q)
a2 = p_cr / (tau2^2 * p2^2 * N * q)
b = p_cr / (tau1^2 * tau2^2 * p1^2 * p2^2 * N * q)
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)

function ode(du, u, p, t)
    du[1] = u[1] - b/c1*u[1] * u[2] - a1/c1*u[1]^2
    du[2] = c2/c1*u[2] - b / c1 * u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2]^2
end

t_arr = (0, 50)
prob = ODEProblem(ode, [M1, M2], t_arr)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

ans1 = [u[1] for u in sol.u]
ans2 = [u[2] for u in sol.u]
t = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 500,
    legend = true,
    xlabel = "безразмерное время",
    ylabel = "объем продаж"
```

```
)

plot!(
    plt,
    t,
    ans1,
    label = "оборотные средства фирмы 1",
    color = :red
)

plot!(
    plt,
    t,
    ans2,
    label = "оборотные средства фирмы 2",
    color = :blue
)

savefig(plt, "./lab8/image/lab8_1.png")
```

График для случая 1.

В итоге, получим вот такой график(рис. 1):



{#fig:007 width=70%}

3. Выполнение лабораторной для случая 2.

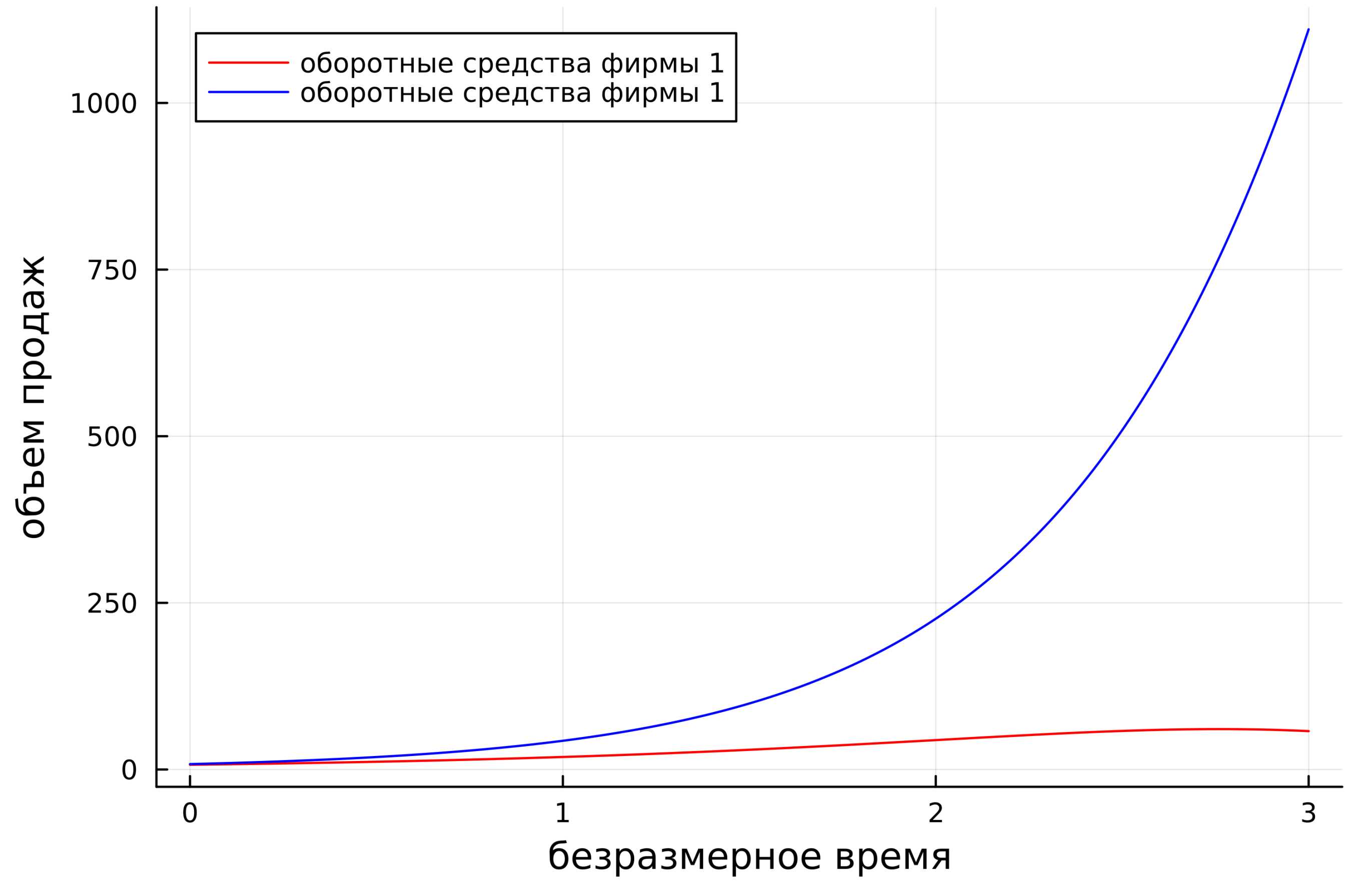
Код программы:

```
M1 = 7.1
M2 = 8.1
p_cr = 44
N = 77
q = 1
tau1 = 26
tau2=21
p1= 11
p2 = 8.7

a1 = p_cr / (tau1^2 * p1^2 * N * q)
a2 = p_cr / (tau2^2 * p2^2 * N * q)
b = p_cr / (tau1^2 * tau2^2 * p1^2 * p2^2 * N * q)
c1 = (p_cr - p1) / (tau1 * p1)
c2 = (p_cr - p2) / (tau2 * p2)

function ode(du, u, p, t)
    du[1] = u[1] - (b/c1+0.0013)*u[1] * u[2] - a1/c1*u[1]^2
    du[2] = c2/c1*u[2] - b / c1 * u[1] * u[2] - a2 / c1*u[2]^2
end

t_arr = (0, 3)
prob = ODEProblem(ode, [M1, M2], t_arr)
sol = solve(prob, dtmax = 0.01)

ans1 = [u[1] for u in sol.u]
ans2 = [u[2] for u in sol.u]
t = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi = 500,
    legend = true,
    xlabel = "безразмерное время",
    ylabel = "объем продаж"
)

plot!(
    plt,
    t,
    ans1,
    label = "оборотные средства фирмы 1",
    color = :red
)

plot!(
    plt,
    t,
    ans2,
    label = "оборотные средства фирмы 2",
    color = :blue
```

```
)

savefig(plt, "./lab8/image/lab8_2.png")
```

График для случая 2.

В итоге, получим вот такой график(рис. 2):



{#fig:008 width=70%}

Выводы

В этой лабораторной работе мы изучили задачу о конкуренции двух фирм и подкрепили свои знания языка Julia и его библиотек.