

Matriks



Sumber: www.smanela-bali.net

Pernakah kalian mengamati denah tempat duduk di kelas? Berdasarkan denah tersebut, pada baris dan kolom berapakah kalian berada? Siapa sajakah yang duduk pada baris pertama? Dengan menggunakan matriks, kalian dapat meringkas penyajian denah tersebut sehingga dengan mudah diketahui letak tempat duduk dan teman-teman kalian. Dalam matriks, letak tempat duduk tersebut dinyatakan sebagai elemen-elemen matriks. Agar kalian lebih memahami tentang matriks ini, pelajailah bab berikut.

- A. Pengertian Matriks
- B. Operasi Hitung pada Matriks
- C. Determinan dan Invers Matriks
- D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear

A. Pengertian Matriks



Sumber: Koleksi Penerbit

Pada 17 April 2003, Universitas Pendidikan Literatur Indonesia (UPLI), mewisuda 2.630 mahasiswanya. 209 wisudawan di antaranya adalah wisudawan dari Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FPMIPA). Berikut ini data wisudawan FPMIPA UPLI pada April 2003 tersebut.

Jurusan	Banyak Wisudawan	
	Program Kependidikan	Program Non Kependidikan
Matematika	34	8
Fisika	34	6
Biologi	51	12
Kimia	51	13

Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolomnya, penulisan data tersebut dapat diringkaskan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 34 & 8 \\ 34 & 6 \\ 51 & 12 \\ 51 & 13 \end{pmatrix}$$

Perhatikan susunan kumpulan bilangan di atas. Susunan kumpulan bilangan di atas berbentuk persegi panjang dan dinyatakan dalam baris dan kolom. Susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dengan menggunakan kurung biasa/siku ini disebut *matriks*.

Sebuah matriks dapat diberi nama menggunakan huruf kapital, seperti A , B , C , dan seterusnya. Misalnya nama matriks di atas adalah matriks A .

$$A_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 34 & 8 \\ 34 & 6 \\ 51 & 12 \\ 51 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Baris pertama} \\ \longrightarrow \text{Baris kedua} \\ \longrightarrow \text{Baris ketiga} \\ \longrightarrow \text{Baris keempat} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \text{Kolom pertama} \\ \longrightarrow \text{Kolom kedua} \end{array}$$

Matriks A terdiri atas 4 baris dan 2 kolom. Oleh karena itu, matriks A dikatakan berordo 4×2 . Adapun bilangan-bilangan yang terdapat dalam matriks dinamakan *elemen matriks*. Pada matriks A tersebut, kita dapat menuliskan elemen-elemennya sebagai berikut.

- Elemen-elemen pada baris pertama adalah 34 dan 8.
- Elemen-elemen pada baris kedua adalah 34 dan 6.
- Elemen-elemen pada baris ketiga adalah 51 dan 12.
- Elemen-elemen pada baris keempat adalah 51 dan 13.

- Elemen-elemen pada kolom pertama adalah 34, 34, 51, dan 51.
- Elemen-elemen pada kolom kedua adalah 8, 6, 12, dan 13.

Uraian ini menggambarkan definisi berikut.

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang.

Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.

Kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

Secara umum, matriks berordo $i \times j$ dengan i dan j bilangan asli dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{i \times j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

\longrightarrow Baris pertama
 \longrightarrow Baris kedua
 \longrightarrow Baris ke- i

\longrightarrow Kolom pertama
 \longrightarrow Kolom kedua
 \longrightarrow Kolom ke- j

Beberapa jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks adalah sebagai berikut.

1. *Matriks baris* adalah matriks yang terdiri dari satu baris.
Misalnya: $P = [-5 \ 2]$, $Q = [10 \ 9 \ 8]$
2. *Matriks kolom* adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.

Misalnya:

$$R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. *Matriks persegi* adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom.

Misalnya:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Matriks nol* adalah matriks yang semua elemennya nol.

Misalnya:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. *Matriks identitas* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.

Misalnya:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *Matriks Skalar* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.

Misalnya:

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. *Matriks diagonal* adalah matriks persegi yang elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. *Matriks segitiga atas* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

9. *Matriks segitiga bawah* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

10. *Transpos matriks A* atau (A^t) adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke- i matriks A menjadi kolom ke- i dan sebaliknya, menuliskan kolom ke- j matriks A menjadi baris ke- j .

Misalnya:

$$\text{Jika } W = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{maka } W^t = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Beberapa sifat matriks adalah sebagai berikut.

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(cA)^t = cA^t$, c adalah konstanta
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Asah Kompetensi 1

1. Berikut ini adalah data hasil panen Bu Bariah selama 4 bulan (dalam ton).

Hasil panen	Bulan pertama	Bulan kedua	Bulan ketiga	Bulan keempat
Mangga	1	2	3	3
Pisang	5	3	2	4
Jambu	10	8	12	6

Tentukanlah:

- a. bentuk matriks dari data di atas
- b. banyaknya baris dan kolom pada matriks yang anda peroleh
- c. elemen-elemen pada baris pertama
- d. elemen-elemen pada baris ketiga
- e. elemen-elemen pada kolom pertama
- f. elemen-elemen pada kolom ketiga
- g. elemen-elemen pada baris ketiga kolom keempat

2. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- a. banyaknya baris dan kolom
- b. elemen-elemen pada setiap baris
- c. elemen-elemen pada setiap kolom
- d. letak elemen-elemen berikut
 - (i) -2
 - (ii) -3
 - (iii) 4
 - (iv) 5

3. Sebutkanlah jenis dari setiap matriks berikut ini!

$$\begin{array}{lll} \text{a. } K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} & \text{b. } M = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{c. } O = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$d. L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e. N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f. P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Tentukanlah transpos dari setiap matriks berikut!

$$a. P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c. R = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 \\ 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$b. Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d. S = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 & -6 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ 10 & -8 & 6 & 4 \\ -2 & 16 & 14 & -12 \end{pmatrix}$$



1

ASA KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Perhatikan tabel jarak antardua kota dalam satuan kilometer berikut!

Bobot soal: 30

	Bandung	Jakarta	Bogor	Tasikmalaya	Sukabumi	Surabaya
Bandung	0	180	126	106	96	675
Jakarta	180	0	54	275	115	793
Bogor	126	54	0	232	61	801
Tasikmalaya	106	275	232	0	202	649
Sukabumi	96	115	61	202	0	771
Surabaya	675	793	801	649	771	0

- Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolomnya, tuliskanlah matriks yang kita peroleh!
- Tentukanlah ordo matriks!
- Tuliskanlah elemen-elemen pada setiap baris matriks!
- Tuliskanlah elemen-elemen pada setiap kolom matriks!
- Tentukanlah transpos dari matriks tersebut. Samakah matriks tersebut dengan matriks transposnya? Mengapa demikian?

2. Berikan contoh dari setiap matriks berikut!
- Matriks berordo 2×7
 - Matriks berordo 7×2
 - Matriks berordo 5×5
 - Matriks berordo 1×4
 - Matriks berordo 4×1
 - Matriks identitas berordo 5×5
 - Transpos matriks identitas berordo 5×5
3. Tentukanlah x , jika $A^t = B$.

Bobot soal: 30

a. $A = \begin{pmatrix} -2 & x-2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & p \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x+p & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 1 & -4x \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3p \\ x-2p & 0 \end{pmatrix}$

Bobot soal: 40

B. Operasi Hitung pada Matriks

B.1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Niko Sentera dan Ucok mengikuti tes untuk membuat SIM C. Tes ini terdiri atas tes tertulis dan tes praktek. Hasil tes mereka ini tampak seperti pada tabel berikut.

Nama	Nilai Tes		Nilai Total
	Tertulis	Praktek	
Niko Sentera	4	4	8
Ucok	5	2	7

Penjumlahan tersebut dapat juga dilakukan dengan menggunakan matriks, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa kedua matriks yang dijumlahkan memiliki ordo yang sama. Hasil matriks yang diperoleh adalah matriks yang berordo sama, diperoleh dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Bagaimana dengan pengurangan matriks?

Pengurangan matriks juga dapat dilakukan jika ordo matriks yang akan dikurangkan sama. Hasil pengurangan matriks ini merupakan matriks yang berordo sama, diperoleh dengan cara mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- | | |
|------------|------------------|
| a. $A + B$ | e. $B - A$ |
| b. $B + A$ | f. $(A + B) + C$ |
| c. $B + C$ | g. $A + (B + C)$ |
| d. $A - B$ | |

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } A + B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(-3) & -2+4 \\ 4+(-2) & 2+1 \\ -1+3 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } A + B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B + A &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+1 & 4+(-2) \\ -2+4 & 1+2 \\ 3+(-1) & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } B + A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } B + C &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+5 & 4+(-5) \\ -2+(-2) & 1+3 \\ 3+1 & 6+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } B + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d. } A - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(-3) & -2-4 \\ 4-(-2) & 2-1 \\ -1-3 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A - B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e. } B - A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3-1 & 4-(-2) \\ -2-4 & 1-2 \\ 3-(-1) & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } B - A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{f. } (A + B) + C &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2+5 & 2+(-5) \\ 2+(-2) & 3+3 \\ 2+1 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } (A + B) + C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{g. } A + (B + C) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+(-1) \\ -2+(-1) & 2+4 \\ -1+4 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Asah Kompetensi 2

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- | | |
|----------------|----------------------|
| a. $A + B$ | f. $B - C$ |
| b. $B + A$ | g. $A + B + C$ |
| c. $(B + C)^t$ | h. $(A - B) - C$ |
| d. $(C + B)^t$ | i. $A - (B - C)$ |
| e. $(A - B)^t$ | j. $A^t - (B - C)^t$ |

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ dan } F = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- | | |
|------------------|------------------|
| a. $(D + E) + F$ | f. $D + (E - F)$ |
| b. $(E + F) + D$ | g. $(F + E) - D$ |
| c. $(D - E) + F$ | h. $(D - F) + E$ |
| d. $D - (E + F)$ | i. $D - (E + F)$ |
| e. $D - (E - F)$ | j. $(D + F) - E$ |

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukanlah $(A + C) - (A + B)$

Proyek Perintis 1979

4. Hitunglah:

$$\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 - 3 & c_1 + 2 \\ a_2 + 2 & b_2 + 4 & 2c_2 \\ 3a_3 & 2b_3 + 1 & c_3 - 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a_1 - 1 & 2b_1 + 4 & c_1 + 1 \\ 3a_2 + 4 & b_2 - 3 & c_2 + 4 \\ 3 - a_3 & 1 - b_3 & 2c_3 \end{pmatrix}$$

5. Diketahui:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ dan } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Jika mungkin, selesaikanlah operasi matriks berikut ini. Jika tidak, berikan alasannya!

- | | |
|------------------|------------------|
| a. $(P + Q) - R$ | c. $P + (Q - R)$ |
| b. $(P - Q) + R$ | d. $P - (Q + R)$ |

B. 2. Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Setelah Kita mempelajari penjumlahan dua dan tiga matriks. Sekarang, lakukan penjumlahan matriks A berordo $i \times j$ secara berulang sebanyak n kali.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

maka:

$$A + A + \cdots + A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$



$$nA = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11} + a_{11} + \dots + a_{11}}_n & \underbrace{a_{12} + a_{12} + \dots + a_{12}}_n & \dots & \underbrace{a_{1j} + a_{1j} + \dots + a_{1j}}_n \\ \underbrace{a_{21} + a_{21} + \dots + a_{21}}_n & \underbrace{a_{22} + a_{22} + \dots + a_{22}}_n & \dots & \underbrace{a_{2j} + a_{2j} + \dots + a_{2j}}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \underbrace{a_{i1} + a_{i1} + \dots + a_{i1}}_n & \underbrace{a_{i2} + a_{i2} + \dots + a_{i2}}_n & \dots & \underbrace{a_{ij} + a_{ij} + \dots + a_{ij}}_n \end{pmatrix}$$

$$nA = \begin{pmatrix} na_{11} & na_{12} & \dots & na_{1j} \\ na_{21} & na_{22} & \dots & na_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ na_{i1} & na_{i2} & \dots & na_{ij} \end{pmatrix}$$

Dari uraian ini, kita dapat menarik kesimpulan sebagai berikut.

Jika A sebuah matriks dan k bilangan real maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen matriks A dengan k .

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- | | | |
|----------------|-------------|-------------------|
| a. $A + A + A$ | d. $-B$ | f. $2(3A)$ |
| b. $3A$ | e. $3A - B$ | g. $(2 \cdot 3)A$ |
| c. $3B$ | | |

Jawab:

$$\text{a. } A + A + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 3A &= 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } 3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 3B &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -9 \\ 21 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } 3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -9 \\ 21 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } -B &= (-1)B = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 & -1(-3) \\ -1 \cdot 7 & -1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e. } 3A - B = 3A + (-B)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } 3A - B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{f. } 2(3A) &= 2 \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 9 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 12 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

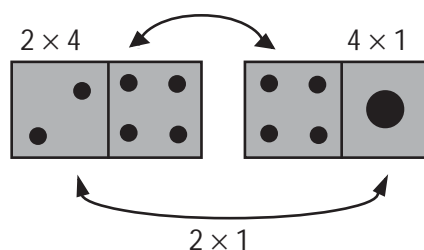
$$\text{Jadi, } 2(3A) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{g. } (2 \cdot 3)A &= 6A = 6 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 4 & 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } (2 \cdot 3)A = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}.$$

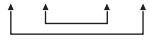
B. 3. Perkalian Dua Matriks

Pernahkah kita bermain domino? Bagaimanakah memasangkan kartu-kartu dalam permainan domino? Agar selembat kartu domino dapat dipasangkan dengan kartu domino yang lain, jumlah mata bagian kanan kartu tersebut harus sama dengan jumlah mata bagian kiri kartu pasangannya.



Prinsip pemasangan kartu domino ini dapat kita gunakan untuk memahami perkalian dua matriks, yaitu sebuah matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B . Adapun elemen-elemen matriks hasil kali ini adalah jumlah dari hasil kali elemen-elemen pada baris matriks A dengan elemen-elemen pada kolom matriks B .

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$



ordo hasil perkalian

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- AB
- BA
- AC
- $AB + AC$
- $A(B + C)$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } AB &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 8 \\ 6 \cdot 1 + 5 \cdot 7 & 6 \cdot 2 + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } AB = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 & 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 69 & 52 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } BA = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 69 & 68 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } AC &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) \\ 6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-3) & 6 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } AC = \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d. } AB + AC = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } AB + AC = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{e. } A(B + C) &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } A(B + C) = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

Asah Kompetensi 3

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}, \quad \text{dan } M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

- | | |
|---------------|---------------------|
| a. KL | i. $(KL)M$ |
| b. LK | j. $K(LM)$ |
| c. KM | k. $-4(KM)$ |
| d. MK | l. $(-4K)M$ |
| e. $KL + KM$ | m. $-4(M^t K^t)$ |
| f. $K(L + M)$ | n. $((-4M^t)K^t)^t$ |
| g. $LK + MK$ | o. $(K(L + M))^t$ |
| h. $(L + M)K$ | p. $((L + M)K)^t$ |

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah matriks C yang memenuhi $3C - 2A = B$.

3. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2c - 3b & 2a + 1 \\ a & b + 7 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah nilai c agar $A = 2B^t$!

4. Tentukan nilai x yang menyebabkan perkalian matriks berikut menghasilkan matriks nol.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Contoh-contoh dan latihan yang telah Kita kerjakan menggambarkan sifat-sifat operasi hitung matriks.

Jika setiap matriks berikut dapat dioperasikan di mana a adalah konstanta, maka berlaku sifat-sifat berikut.

- $P + Q = Q + P$
- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
- $P(Q + R) = PQ + PR$
- $(P + Q)R = PR + QR$
- $P(Q - R) = PQ - PR$
- $(P - Q)R = PQ - QR$
- $a(P + Q) = aP + aQ$
- $a(P - Q) = aP - aQ$
- $(a + b)P = aP + bP$
- $(a - b)P = aP - bP$
- $(ab)P = a(bP)$
- $a(PQ) = (aP)Q = P(aQ)$
- $(PQ)R = P(QR)$



ASA H KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

Bobot soal: 20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika $A + B^t = C^2$, tentukan nilai d .

2. Tentukanlah nilai a dan b yang memenuhi persamaan-persamaan berikut!

Bobot soal: 20

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 \\ 14 & -23 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+b & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & d \\ -b & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & 1 \\ c & a+1 \end{pmatrix}$

3. Diketahui: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bobot soal: 60

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Tentukanlah $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Siapa Berani

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Perlihatkan bahwa persamaan $AX = X$ dapat dinyatakan sebagai $(A - I)X = 0$. Kemudian, gunakan hasil ini untuk menentukan matriks X !
- Dengan cara yang sama, tentukanlah matriks Y yang memenuhi $AY = 4Y$!

C. Determinan dan Invers Matriks

C.1. Determinan

Suatu matriks persegi selalu dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang disebut *determinan*. Determinan dari matriks persegi A dinotasikan dengan $|A|$.

Untuk matriks A berordo 2×2 , determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Jika } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ maka determinan matriks } A \text{ adalah } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Adapun untuk matriks B berordo 3×3 , determinan matriks B ini didefinisikan sebagai berikut menggunakan kaidah Sarrus.

$$\text{Jika } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ maka determinan matriks } B \text{ adalah}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Contoh

$$\text{Diketahui matriks } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah $|A|$ dan $|B|$.

Jawab:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2)3 = 4 + 6 = 10$$

Jadi, $|A| = 10$.

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3)(-6)(-3) + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 10 - 54 + 16 + 60 + 48 + 3 = 83 \end{aligned}$$

Jadi, $|B| = 83$.

Asah Kompetensi 4

1. Tentukanlah determinan dari setiap matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 22 & -1 & -6 \\ -10 & -7 & 14 \end{pmatrix}, \text{ dan } F = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x dari setiap persamaan berikut

a. $\begin{vmatrix} 2x & x+1 \\ 3 & x+5 \end{vmatrix} = 1$

d. $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = -2$

b. $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

e. $\begin{vmatrix} 2x-1 & -3 \\ -x & x+1 \end{vmatrix} = 3$

c. $\begin{vmatrix} 6-x & 0 \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

f. $\begin{vmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

3. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buktikan bahwa $|AB| = |A||B|$.

Siapa Berani

Tanpa mengevaluasi determinan secara langsung, tunjukkan bahwa:

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \theta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \theta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \theta) \end{vmatrix} = 0$$

Sumber : *Elementary Linear Algebra*

C. 2. Invers Matriks

Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I_{n \times n}$ dengan I matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{n \times n}$, A dan B disebut *saling invers*. Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika $|A| = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.

Contoh

Tunjukkan bahwa $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ saling invers!

Jawab:

Kita harus membuktikan bahwa $AB = BA = I_{2 \times 2}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa bentuk $AB = BA = I_{2 \times 2}$ sehingga dapat dikatakan bahwa A dan B saling invers.

Catatan

Sifat-sifat invers matrik:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berordo 2×2 ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj } A \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Untuk menentukan invers suatu matriks dengan ordo 3×3 , kalian harus memahami tentang matriks minor, kofaktor, dan adjoint.

a. Matriks Minor

Matriks minor M_{ij} diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j matriks A berordo 3×3 , sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2×2 . Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks A , ditulis dengan $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor-minor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. Kofaktor

Kofaktor dari baris ke- i dan kolom ke- j dituliskan dengan A_{ij} . Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Kofaktor-kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}| \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}| \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}| \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|M_{21}| \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| = |M_{22}| \\ A_{23} &= (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|M_{23}| \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} |M_{31}| = |M_{31}| \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} |M_{32}| = -|M_{32}| \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} |M_{33}| = |M_{33}| \end{aligned}$$

c. Adjoint

Misalkan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan A_{ij} kofaktor dari matriks A , maka

$$\text{Adjoint } A \text{ (Adj } A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Untuk matriks A berordo 3×3 , maka

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Contoh

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Jawab:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = 46 - 47 = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 3) = -13$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 0) = -16$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 6) = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan determinan dari matriks berordo 3×3 , selain dengan kaidah Sarrus, dapat juga digunakan matriks minor dan kofaktor.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Determinan matriks A ($\det A$) dapat ditentukan menggunakan rumus:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \text{(ii)} \quad |A| &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}| \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \text{(iii)} \quad |A| &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ &= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}| \\ &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Contoh

Tentukan determinan dari matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Untuk menentukan determinannya, dapat digunakan ketiga rumus yang telah dijelaskan di atas. Gunakan salah satu rumus tersebut.

$$\begin{aligned} |B| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (16 - 9) - 3 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (3 - 4) \\ &= 7 - 3 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Asah Kompetensi 5

1. Tentukanlah invers dari setiap matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \\ \frac{1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \text{ dan } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x sehingga setiap matriks berikut singular!

$$A = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 1 & 3x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 4 & x \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & x+2 & x \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Jika matriks $(A - kI)$ adalah matriks singular, tentukanlah nilai k !

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Jika $XA = B$, tentukanlah matriks X .

EBTANAS 1995



ASAHA KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah syarat agar matriks $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers.

Bobot soal: 10

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tunjukkan bahwa $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Bobot soal: 10

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Bobot soal: 50

Jika $|A^t| = k|A|$, tentukanlah nilai k .

EBTANAS 1997

4. Tunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ habis dibagi 19.

Bobot soal: 30

Buktikan bahwa jika matriks B dapat bertukar tempat, maka $AB^{-1} = B^{-1}A$ jika dan hanya jika $AB = BA$.

Sumber: *Elementary Linear Algebra*

D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, metode eliminasi, dan metode substitusi. Pada bab ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan matriks. Misalkan, sistem persamaan linear berikut.

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat kita tuliskan dalam persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Persamaan matriks ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan sifat berikut.

1. Jika $AX = B$, maka $X = A^{-1}B$, dengan $|A| \neq 0$
2. Jika $XA = B$, maka $X = BA^{-1}$, dengan $|A| \neq 0$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

$$3x - 4y = 5$$

$$5x + 6y = 1$$

Jawab:

Terlebih dahulu, ubah sistem persamaan linear tersebut menjadi persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

Kemudian, tentukan determinan matriks A , yaitu :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - (-20) = 38$$

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ - & + \end{matrix}$

Penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dapat kita tentukan dengan cara berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{19} \\ -\frac{11}{19} \end{pmatrix}$$

X A⁻¹ B

Jadi, $x = \frac{17}{19}$ dan $y = -\frac{11}{19}$.

Selain dengan cara di atas, sistem persamaan linear dapat juga diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer berikut.

Jika $AX = B$ maka $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, ..., $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$.

A_j adalah matriks yang didapat dengan mengganti elemen-elemen pada kolom- j dari matriks A dengan elemen-elemen matriks B .

Contoh

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan aturan Cramer!

$$3x - 4y = 5$$

$$5x + 6y = 1$$

Jawab:

Terlebih dahulu, tentukan $|A|$, $|A_1|$, dan $|A_2|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 34$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\text{Jadi, } x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19} \text{ dan } y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19}.$$

Dengan demikian, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut

$$\text{adalah } x = \frac{17}{19} \text{ dan } y = -\frac{11}{19}.$$



4

ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan invers matriks dan aturan Cramer.

Bobot soal: 40

a. $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$	e. $\begin{cases} 3y - 7 + x = 0 \\ x = -6y - 14 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3y - 4x + 12 = 0 \end{cases}$	f. $\begin{cases} x = 5 \\ 9 - x = 0 \end{cases}$
c. $\begin{cases} 3y - 2x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$	g. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$
d. $\begin{cases} y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$	h. $\begin{cases} x - 1 = 2(y - 1) \\ x + y = 5(x - y + 3) \end{cases}$

2. Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan invers matriks dan aturan Cramer.

Bobot soal: 60

a. $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5 = 0 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y - z = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
c. $\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ -y + 2z = 4 \end{cases}$
d. $\begin{cases} x + y + 2x = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$
e. $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$
f. $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ -x + 5y + z = 9 \\ 3x - 6y - 9z + 6 = 0 \end{cases}$

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.
2. Baris suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.
3. Kolom suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.
4. Jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks
 - Matriks baris, yaitu matriks yang terdiri dari satu baris.
 - Matriks kolom, yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom.
 - Matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya.
 - Matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya nol.
 - Matriks identitas, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.
 - Matriks skalar, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
 - Matriks diagonal, yaitu matriks persegi yang elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
 - Matriks segitiga atas, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.
 - Matriks segitiga bawah, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.
5. Matriks A transpos (A^t) adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke- i matriks A menjadi kolom ke- i dan sebaliknya.
Beberapa sifat matriks adalah sebagai berikut.
 - a. $(A + B)^t = A^t + B^t$
 - b. $(A^t)^t = A$
 - c. $(cA)^t = cA^t$, c adalah konstanta
 - d. $(AB)^t = B^t A^t$

6. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

7. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ulangan Bab 3

1. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jika $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$, maka

- A. $y = 3x$ D. $y = \frac{x}{3}$
 B. $y = 2x$ E. $y = \frac{1}{2}x$
 C. $y = x$

2. Invers dari matriks $\begin{pmatrix} \frac{1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \\ \frac{-1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \end{pmatrix}$

adalah

- A. $\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$

3. Jika $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 24 \end{pmatrix}$, maka x dan y berturut-turut adalah

- A. 3 dan 2 D. 4 dan 5
 B. -3 dan -2 E. -2 dan 4
 C. 3 dan -2

4. Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}, \quad \text{dan}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Jika } A + B^t = C^t, \text{ di mana } B^t \text{ transpos dari } B, \text{ maka nilai } d \text{ adalah}$$

- A. -1 D. -2
 B. 0 E. -4
 C. 1

5. A , B , dan C adalah matriks persegi ordo dua dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, dan $AC = B$. Maka matriks C adalah

- A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. Invers matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ adalah

- A. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$

7. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ adalah

- A. $\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

8. Nilai determinan $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ adalah
- A. 3
 B. 2
 C. 1
 D. 0
 E. $\frac{1}{2}$

9. Diketahui $K = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 4b \\ 8 & 3c & 11 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Kalau $K = L^t$, maka c adalah

- A. 16
 B. $\frac{7}{3}$
 C. 14
 D. 13
 E. 12

10. Diketahui

$$3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ maka nilai}$$

a adalah

- A. 4
 B. 2
 C. -2
 D. -4
 E. -6

11. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka

$A \times B = \dots$

- A. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 11 & 13 & 8 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 11 & 12 & 8 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 13 & 8 & 13 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

12. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \dots$

- A. $\begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

13. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

maka $(AB)C = \dots$

- A. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 46 & 38 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 14 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$



14. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Nilai $(AB)^{-1} = \dots$

A. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

15. Misalkan A adalah matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Nilai dari

$A^2 - 2A + I$ adalah \dots

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. x dan y memenuhi persamaan matriks.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 3 & 2x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah nilai $x + y$.

2. Jika diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah $(AB)^{-1}A^t$.

3. Jika x memenuhi

$$\begin{pmatrix} {}^x\log a & \log(2a-b) \\ \log(b-2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log b & 1 \\ \log a & 1 \end{pmatrix}$$

maka tentukanlah nilai x .

4. Jika a , b , c dan d memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2d & c \\ b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

maka tentukanlah $a + b + c + d$.

5. Hitunglah determinan dari:

a. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

b. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$