



# BAB 7

## Turunan

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar.

Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.8, 3.9 dan KD 4.8, 4.9.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.8 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi.	3.8.1 Menemukan sifat-sifat turunan. 3.8.2 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan sifat-sifat turunan. 3.8.3 Mengomunikasikan hubungan garis sekan, garis singgung, dan garis normal. 3.8.4 Menemukan konsep garis sekan dan garis singgung dengan kaitannya dengan konsep limit fungsi. 3.8.5 Menemukan konsep turunan sebagai limit suatu fungsi. 3.8.6 Menemukan aturan-aturan turunan berdasarkan konsep limit fungsi



	<p>3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva.</p>	<p>3.9.1 Menemukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal pada suatu titik.</p> <p>3.9.2 Menunjukkan keberkaitan turunan dalam menentukan titik stasioner serta kecekungan suatu fungsi.</p> <p>3.9.3 Menunjukkan keberkaitan turunan dalam menentukan kemonotonan dan titik belok suatu fungsi.</p> <p>3.9.4 Menyebutkan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari</p>
2.	<p>4.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar.</p> <p>4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung, dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual.</p>	<p>4.8.1 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan konsep limit fungsi.</p> <p>4.8.2 Menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep turunan</p> <p>4.8.3 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan aturan-aturan turunan.</p> <p>4.9.1 Menentukan gradien suatu garis singgung dengan menggunakan konsep turunan dan menentukan persamaannya.</p> <p>4.9.2 Menentukan persamaan garis singgung dan garis normal suatu fungsi.</p> <p>4.9.3 Menentukan titik stasioner, kecekungan, kemonotonan serta titik belok suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.</p> <p>4.9.4 Menganalisis sketsa suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan</p>



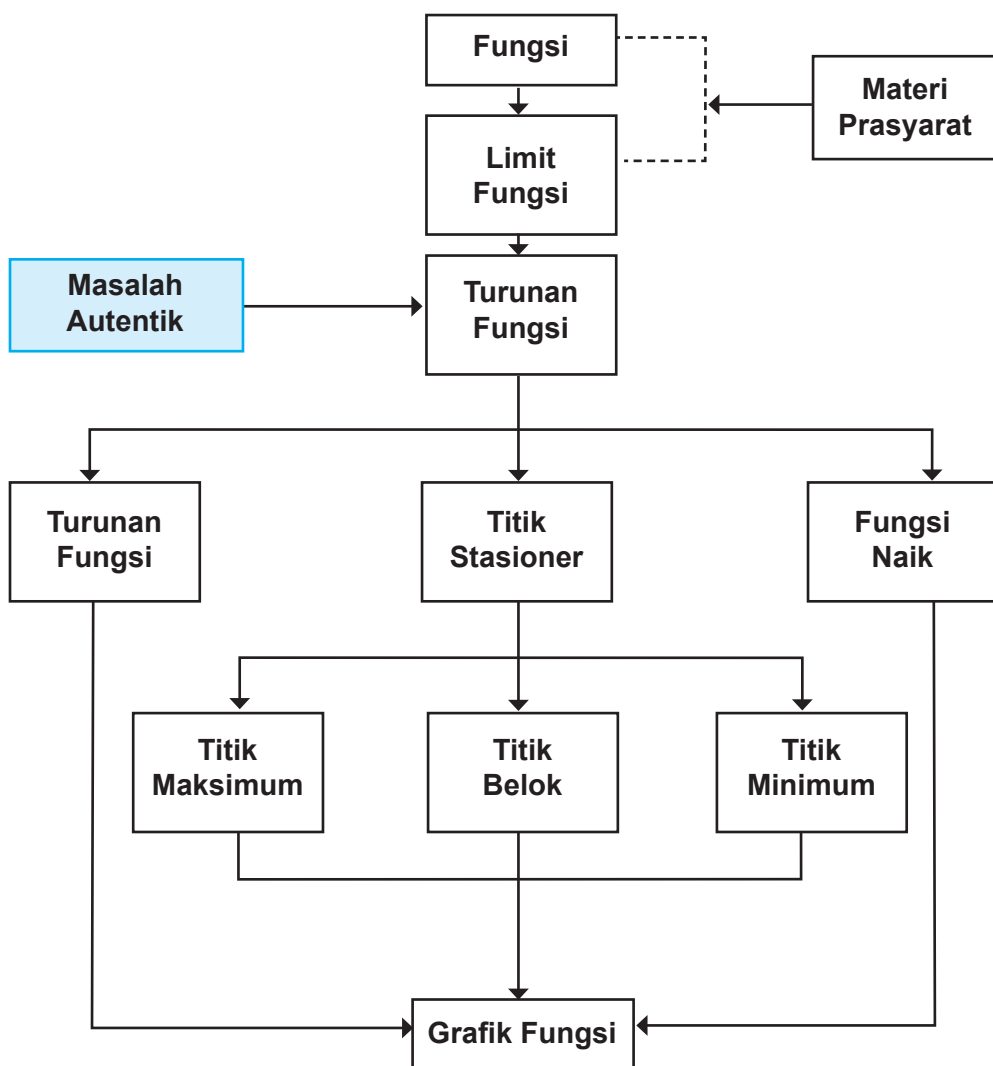
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep turunan melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Mengamati dan menyebutkan contoh penggunaan konsep turunan dalam kehidupan sehari-hari.
4. Menunjukkan garis sekan, garis singgung, garis normal, dan hubungannya pada gambar.
5. Menemukan konsep garis sekan dan garis singgung dengan kaitannya dengan konsep limit fungsi.
6. Menentukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal pada suatu titik.
7. Menemukan konsep turunan sebagai limit suatu fungsi.
8. Menggunakan konsep limit fungsi untuk menemukan turunan suatu fungsi.
9. Menemukan sifat-sifat turunan.
10. Menemukan aturan-aturan turunan berdasarkan konsep limit fungsi.
11. Menggunakan aturan-aturan turunan untuk menemukan turunan suatu fungsi.
12. Menemukan titik stasioner suatu fungsi dan kecekungannya dengan menggunakan konsep turunan.
13. Menemukan interval kemonotonan dan titik belok suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.
14. Menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep turunan.
15. Menganalisis dan menggambar sketsa suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 7.1 Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuklah kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan kembali siswa konsep fungsi dan konsep limit kiri dan limit kanan suatu fungsi</li><li>❖ Informasikan bahwa ada keterkaitan konsep limit fungsi dengan konsep turunan suatu fungsi</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <b>7.1.1 Menemukan Konsep garis sekan dan Garis Tangen Pengantar</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Informasikan kepada siswa, bahwa turunan adalah materi yang sangat aplikatif dalam kehidupan sehari-hari. Berikan contoh nyata aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah kecepatan, percepatan, masalah nilai optimal, dan lain-lain.</li></ul>



### Ayo Menalar

#### Masalah 7.1

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.1. Minta siswa memberikan komentar tentang arti menyinggung pada suatu grafik.
- ❖ Informasikan mengenai garis singgung dan garis sekan serta hubungannya.
- ❖ Minta siswa mengamati Gambar 7.2 dan meminta mengajukan berbagai pertanyaan terkait gambar serta menemukan pemaknaan istilah tali busur, garis normal, dan garis singgung pada kurva.
- ❖ Ingatkan kembali konsep gradien suatu garis yang melalui dua titik.
- ❖ Minta siswa mencoba menggambarkan tali busur (garis sekan)  $PQ$ , dengan posisi titik  $Q$  berada pada kurva yang semakin mendekati posisi titik  $P$ . Arahkan siswa menganalisis perubahan gerakan tali busur  $PQ$ . Untuk menemukan pengertian garis sekan arahkan siswa mengamati Gambar 7.3.

### Ayo Mengomunikasikan

- ❖ Arahkan siswa secara kelompok menuliskan ciri-ciri garis sekan dan menuliskan pengertian garis sekan, garis tangen, serta menemukan aturan penentuan gradien garis sekan dan garis tangen. Minta siswa mempresentasikan hasil kerja kelompok dan arahkan ke sesi tanya jawab antara kelompok penyaji, dan siswa pendengar. Guru memantau kebenaran konsep yang disajikan.



- ❖ Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 7.1.

### Definisi 7.1:

Misalkan  $f : S \rightarrow R$  adalah fungsi kontinu dan titik  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$  pada kurva  $f$ . Garis sekan menghubungkan

titik  $P$  dan  $Q$  dengan gradien  $m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

### Ayo Menalar

- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.3. Tunjukkan, jika titik  $Q$  mendekati  $P$  maka  $\Delta x \rightarrow 0$  sehingga diperoleh garis singgung di titik  $P$  dengan gradien:

$$m_{\text{PGS}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ (Jika limitnya ada).}$$

- ❖ Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 7.2.

### Definisi 7.2:

Misalkan  $f$  adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik  $P(x_1, y_1)$  pada kurva  $f$ . Gradien garis singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  adalah limit gradien garis sekan di titik  $P(x_1, y_1)$ , ditulis:  $m_{\text{GS}} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ (Jika limitnya ada)}$$

### Ayo Mengamati

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.1 untuk diamati. Guru mendemonstrasikan proses penyelesaian pada Contoh 7.1. Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok. Ingatkan siswa kembali konsep limit fungsi dan konsep persamaan garis lurus.





### Ayo Menalar

- ❖ Setelah siswa dipandu menyelesaikan Contoh 7.1, minta siswa menyelesaikan Latihan 7.1 dan mendemonstrasikan hasil kerjanya di depan kelas. Pandu dan bantu jika ada proses yang kurang tepat.
- ❖ Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 7.1.

### Latihan 7.1

Tentukan persamaan garis singgung di titik dengan absis  $x = -1$  pada kurva  $f(x) = x^4$ .

#### Alternatif Penyelesaian.

Misalkan  $x_1 = -1$  dan  $y_1 = (-1)^4 = 1$  sehingga titik singgung  $P(-1,1)$ .

Gradien garis singgung adalah:  $m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-1 + \Delta x)^4 - (-1)^4}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x) + (-1)][(-1 + \Delta x) - (-1)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + 1](-2 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(-1 + \Delta x)^2 + 1](-2 + \Delta x) = -4$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah  $y - 1 = -4(x - (-1))$  atau  $y + 4x + 3 = 0$ .



### 7.1.2 Turunan Sebagai Limit Fungsi

#### Ayo Menalar

- ❖ Jelaskan tujuan pembelajaran.
- ❖ Minta siswa memahami sub-bab 7.1.2. Informasikan bahwa turunan sebagai limit fungsi. Berdasarkan konsep gradien sebagai limit fungsi pada suatu titik, tunjukkan konsep turunan sebagai limit fungsi. Ingatkan kembali konsep limit fungsi. Arahkan siswa membangun Definisi 7.3 dan Definisi 7.4 serta memahaminya.

#### Definisi 7.3

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $c$  jika dan hanya jika  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  ada.

#### Definisi 7.4

Misalkan  $f : S \rightarrow R$  dengan  $S \subseteq R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada  $S$  jika dan hanya jika fungsi  $f$  dapat diturunkan di setiap titik  $c$  di  $S$ .

#### Ayo Mencoba

- ❖ Arahkan siswa memahami langkah-langkah penyelesaian pada Contoh 7.2.
- ❖ Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa.

#### Ayo Menalar

- ❖ Bantu siswa memahami Definisi 7.5. Guru mengaitkan kembali ke materi limit fungsi (limit kiri dan kanan).



### Definisi 7.5

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi  $f$  memiliki turunan kanan pada titik  $c$  jika dan hanya jika

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ ada.}$$

- Fungsi  $f$  memiliki turunan kiri pada titik  $c$  jika dan hanya jika

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ ada.}$$

- ❖ Berdasarkan pemahaman konsep turunan sebagai limit fungsi maka bangun Sifat 7.1. Ingatkan kembali siswa konsep limit kiri dan limit kanan suatu fungsi.

### Sifat 7.1

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $x \in S$  dan  $L \in R$ .

Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $x$  jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis:

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L$$

### Ayo Menalar

- ❖ Untuk memperkuat pemahaman siswa akan Definisi dan sifat turunan, ajukan Contoh 7.3 untuk dibaca dan dipahami. Guru memandu menunjukkan definisi dan sifat turunan yang terkandung pada Gambar 7.4.
- ❖ Arahkan siswa menalar Definisi 7.5.



3.	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep turunan dari yang dipelajari.</li><li>❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.</li><li>❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>
----	---

## 7.2 Turunan Fungsi Aljabar

### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3-4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan kembali konsep gradien dan turunan sebagai limit fungsi.</li><li>❖ Informasikan kepada siswa, berdasarkan turunan sebagai limit fungsi, akan dikaji aturan-aturan turunan melalui limit fungsi.</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran dan cara penilaian.</li></ul></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### Ayo Menalar

#### Masalah 7.2

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.2.
- ❖ Jelaskan kepada siswa kesulitan-kesulitan yang mungkin terjadi pada saat menurunkan suatu fungsi dengan menggunakan limit fungsi. Arahkan siswa memahami Contoh 7.3 ( $a$  dan  $b$ ) dan memahami kesulitan yang muncul padaproses penyelesaian pada Contoh 7.3 ( $c$  dan  $d$ ). Untuk mempermudah menyelesaikan Contoh 7.3 ( $c$  dan  $d$ ), diperlukan aturan-aturan turunan.
- ❖ Pandu siswa memahami aturan turunan ( $a$ ) dan memberikan contohnya. Minta siswa menyelesaikan kembali Contoh 7.3 dengan menggunakan aturan turunan ( $a$ ). Guru memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan siswa.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.2. Berikan kesempatan kepada siswa menjelaskan kinerjanya di depan kelas. Arahkan ke sesi tanya-jawab.
- ❖ Berikut penyelesaian Latihan 7.2.

#### Latihan 7.2

Coba kamu buktikan sendiri jika  $f(x) = au(x)$  dengan  $u'(x)$  ada, maka  $f'(x) = au'(x)$

#### Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{au(x + \Delta x) - au(x)}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \\ &= au'(x) \end{aligned}$$



- ❖ Minta siswa memahami aturan turunan (b). Guru memberikan contoh dan mendemonstrasikan proses penyelesaiannya.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.3. Berikan kesempatan kepada siswa menjelaskan kinerjanya di depan kelas. Arahkan ke sesi tanya-jawab.
- ❖ Berikut penyelesaian Latihan 7.3.

### Latihan 7.3

Buktikan bahwa turunan fungsi  $f(x) = u(x) - v(x)$  adalah

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

#### Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - v(x + \Delta x)) - (u(x) - v(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) - (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x) - v'(x) \end{aligned}$$

### Ayo Menalar

- ❖ Dengan menggunakan aturan-aturan turunan yang telah diperoleh, arahkan siswa memahami Contoh 7.5. Guru dapat memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan.
- ❖ Pandu siswa memahami aturan turunan (c) pada Contoh 7.5. Guru memberikan contoh dan mendemonstrasikan proses penyelesaiannya.



### Ayo Mencoba

- ❖ Guru mengajukan beberapa contoh dan mengajak siswa mencoba menyelesaikannya.

*Aturan Turunan 7.1:*

*Misalkan  $f$ ,  $u$ ,  $v$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval  $I$ ,  $a$  bilangan real dapat diturunkan maka:*

1.  $f(x) = a \rightarrow f'(x) = a$
2.  $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$
4.  $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5.  $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6.  $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7.  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

### Ayo Menalar

- ❖ Perintahkan siswa memahami Contoh 7.5 dan alternatif penyelesaiannya.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.4 dengan memanfaatkan pemahaman konsep pada sub-bab 7.1 dan aturan turunan.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian latihan 7.4



#### Latihan 7.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  di titik  $P(2, 4)$ .

#### Alternatif Penyelesaian:

Titik  $P(2,4)$  berada pada kurva  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  sebab jika kita substitusikan nilai  $x = 2$  maka  $f(2) = \frac{2^2}{\sqrt{2-1}} = 4$ .

Pertama, kita tentukan turunan pertama dari fungsi  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  dengan memisalkan  $u(x) = x^2$  sehingga  $u'(x) = 2x$  dan  $v(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$  sehingga  $v'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$ . Dengan demikian,

turunan pertama fungsi adalah  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$  atau

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1}.$$

Gradien garis singgung kurva di titik

$P(2,4)$  adalah  $f'(2) = \frac{4-2}{1} = 2$  sehingga persamaan garis singgung tersebut adalah  $y - 4 = 2(x - 2)$  atau  $y - 2x = 0$ .





3.	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dari yang dipelajari.</li><li>❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.</li><li>❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>
----	--

### 7.3 Aplikasi Turunan

#### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3-4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran.
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan siswa kembali konsep turunan dan aturan-aturannya.</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran kepada siswa. Informasikan aplikasi-aplikasi turunan.</li></ul></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### 7.3.1 Konsep Kemonotonan Fungsi

#### Ayo Mengamati

- ❖ Minta siswa mengamati Gambar 7.5a dan Gambar 7.5b. Minta siswa memberikan pendapatnya. Arahkan siswa memahami fungsi naik dan turun dari gambar-gambar.
- ❖ Jelaskan Definisi 7.6 kepada siswa serta menunjukkan dengan grafik.

Definisi 7.6:

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$

- Fungsi  $f$  dikatakan naik jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi  $f$  dikatakan turun jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

#### Ayo Mengamati

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.7 dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikannya. Guru memberikan contoh lain untuk dicoba dikerjakan siswa.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.5 dengan berkelompok. Siswa mempresentasikan kinerjanya di depan kelas. Guru memantau kebenaran konsep yang dipresentasikan siswa.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.5.

#### Latihan 7.5

Bagaimana jika  $f(x) = x^3$ ,  $x \in R$  dan  $x < 0$ , apakah grafik fungsi  $f$  adalah fungsi naik? Selidiki!



### Alternatif Penyelesaian

$$f(x)=x^3, \ x \in R \text{ dan } x > 0$$

Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in R$  dengan  $x_1 < x_2 < 0$

$$x=x_1 \Rightarrow f(x_1)=x_1^3$$

$$x=x_2 \Rightarrow f(x_2)=x_2^3$$

Karena  $x_1 < x_2 < 0$  maka  $x_1^3 < x_2^3$

Karena  $x_1^3 < x_2^3$  maka  $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian,  $\forall x \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Dapat disimpulkan  $f$  adalah fungsi naik.

### Masalah 7.3

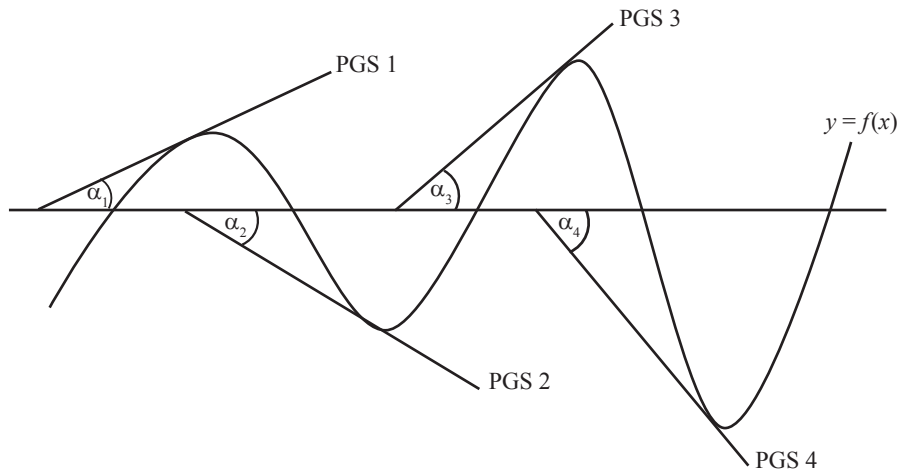
#### Ayo Menalar

- ❖ Arahkan siswa memahami Masalah 7.3. Minta siswa memahami masalah dengan Gambar 7.6 dan memahami fungsi naik dan fungsi turun pada Gambar 7.7.
- ❖ Minta siswa memahami interval pada sumbu  $t$  untuk gerak naik dan turun fungsi pada Gambar 7.7.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.6 dengan berkelompok dan menyajikan hasil diskusi kelompoknya didepan kelas. Guru memantau kebenaran konsep.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.6.



### Latihan 7.6

Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.



Gambar 7.8: Garis singgung di interval fungsi naik dan fungsi turun

Garis singgung menyinggung fungsi di interval naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu  $x$  positif. Konsep gradien garis singgung adalah tangen sudut garis terhadap sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Berdasarkan gambar di atas diperoleh data pada tabel berikut:



Tabel 7.1: Hubungan gradien garis singgung dengan fungsi naik/turun

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	$\alpha_1$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^\circ - \alpha_2$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	$\alpha_3$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^\circ - \alpha_4$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Berdasarkan Gambar 7.8 dan Tabel 7.1 dapat disimpulkan:

- Jika garis singgung menyinggung grafik di interval fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut di kuadran I. Hal ini menyebabkan gradien adalah positif atau  $m = f'(x) > 0$ .
- Jika garis singgung menyinggung grafik di interval fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut di kuadran IV. Hal ini menyebabkan gradien adalah negatif atau  $m = f'(x) < 0$ .

Dengan demikian, dapat kita simpulkan kembali:

Tabel 7.1a: Hubungan turunan pertama dengan fungsi naik/turun

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) = a$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) = a$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) = a$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) = a$	Fungsi tidak pernah naik



- ❖ Arahkan siswa membaca Sifat 7.2. Guru menjelaskan kembali dengan melalui Gambar 7.8

### Sifat 7.2

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap  $x \in I$  maka

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka fungsi selalu naik pada interval  $I$ .
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka fungsi selalu turun pada interval  $I$ .
3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka fungsi tidak pernah turun pada interval  $I$ .
4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka fungsi tidak pernah naik pada interval  $I$ .

### Ayo Mencoba

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.8, Contoh 7.9, dan Contoh 7.10 dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal yang diajukan dengan menggunakan Sifat 7.2.
- ❖ Guru memberikan persoalan yang serupa untuk dikerjakan siswa.

### 7.3.2 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

#### Ayo Mengamati

- ❖ Informasikan kepada siswa, aplikasi turunan dalam menentukan nilai optimal dan titik belok suatu fungsi.
- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.4.

#### Ayo Mengamati

##### Masalah 7.4

- ❖ Guru boleh menggunakan media (tali) untuk memperlihatkan gelombang berjalan dan mengarahkan siswa memahaminya berdasarkan Gambar 7.11.



- ❖ Ingatkan siswa kembali konsep garis singgung di suatu titik pada grafik fungsi. Perintahkan siswa mengamati garis singgung (PGS) yaitu PGS 1, PGS 2, PGS 3, dan PGS 4 yang menyinggung kurva tepat dititik optimal (maksimum/minimum) fungsi tersebut.
- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.12 dan hubungannya dengan Gambar 7.11 sehingga diperoleh Tabel 7.2.
- ❖ Pandu siswa membangun Sifat 7.3.

### Sifat 7.3

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada sehingga:

1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut stasioner/kritis.
  2. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik minimum fungsi.
  3. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) > 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik maksimum fungsi.
  4. Jika  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok.
- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.11 dan Contoh 7.12. Ingatkan siswa konsep fungsi kuadrat.

### 7.3.3 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi pada Suatu Interval

#### Masalah 7.5

#### Ayo Mengamati

- ❖ Perintahkan siswa membaca, mengamati, menalar Gambar 7.15 dan meminta siswa mengkomunikasikan pendapatnya.
- ❖ Minta siswa mencari contoh fungsi sesuai Gambar 7.15
- ❖ Ajukan Contoh 7.13 untuk dikerjakan siswa kembali.



#### **7.3.4 Konsep Turunan dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan**

##### **Ayo Menalar**

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami aplikasi turunan dalam masalah percepatan dan kecepatan.
- ❖ Pandu siswa mempelajari konsep berdasarkan Masalah 7.6.

##### **Ayo Mengamati**

##### **Masalah 7.6**

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami aplikasi turunan dalam kecepatan dan percepatan berdasarkan Masalah 7.6.
- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.17 dengan kaitannya dengan Tabel 7.3 dan Tabel 7.4.
- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.14 dan Contoh 7.15 untuk dikerjakan kembali secara bersama-sama.
- ❖ Guru memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok.

#### **3. Kegiatan Penutup**

- ❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- ❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep dari yang dipelajari.
- ❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- ❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- ❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.





## 7.4 Menggambar Grafik Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan siswa kembali konsep turunan, aturan turunan dan aplikasinya.</li><li>❖ Informasikan kepada siswa, aplikasi turunan dalam menentukan titik stasioner, kecekungan dan kemonotonan suatu fungsi berguna untuk mensketsa grafik fungsi tersebut.</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <b>Ayo Menalar</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Pandu siswa menggunakan konsep turunan untuk menganalisis kurva suatu fungsi dan mensketsanya.</li><li>❖ Minta siswa memahami Contoh 7.16. Pandu siswa memahami langkah-langkah penggunaan konsep turunan.</li></ul>



### *Ayo Mencoba*

- ❖ Pandu siswa mensketsa kurva fungsi tersebut. Tunjukkan kembali langkah  $a-d$  pada grafik (Gambar 7.18). Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa secara berkelompok.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.7.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.7

### **Latihan 7.7**

Analisis dan sketsalah kurva fungsi  $f(x) = x^4 + 2x^3$ .

#### **Alternatif Penyelesaian:**

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ atau } x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, kurva melalui sumbu  $x$  di titik  $A(0, 0)$  atau  $B(-2, 0)$

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ atau } 2x+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Nilai } f(0) = 0 \text{ atau } f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$$

Jadi, titik stasioner fungsi adalah  $A(0, 0)$  atau  $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ .

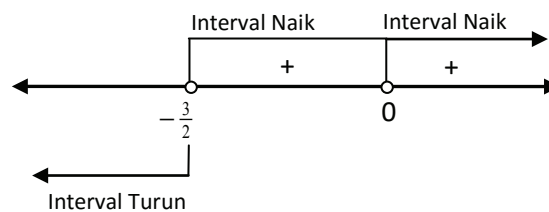


Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun  
Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

**Ingat pelajaran pertidaksamaan**



Jadi, fungsi akan naik pada  $x > -\frac{3}{2}$ ,  $x \neq 0$  dan turun pada  $x < -\frac{3}{2}$ .

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi

Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasioner ke turunan kedua fungsi.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x \text{ sehingga } f''(x) = 0$$

Titik  $A(0,0)$  bukanlah sebuah titik balik.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x \text{ sehingga } f''(-\frac{3}{2}) = 9 > 0$$

Titik  $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$  adalah titik balik minimum.





- 3. Kegiatan Penutup**
- ❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
  - ❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep dan aturan turunan dari yang dipelajari.
  - ❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
  - ❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
  - ❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

## **F. Penilaian**

### **Prosedur Penilaian**

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5	Konsep	Tes tertulis	Kegiatan penutup



## 1. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerja sama	Keaktifan	Menghargai Pendapat Teman	Tanggung Jawab		
1							
2							
3							
4							
...							

### Keterangan Skor:

- 1 =(belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator
- 2 =(mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten
- 3 =(mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten
- 4 =(membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten

**Skor Maksimal = 16**

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$



## 2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep turunan	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep turunan	5
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep turunan namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep turunan.	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
Total		Skor maksimal =	15
		Skor minimal =	0



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas Presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	A s p e k					Jumlah Skor	Nilai
		Komunikasi	Sistematika Penyampaian	Penguasaan Materi	Keberanian	Antusias		
1								
2								
3								
4								
5								
...								

#### Keterangan Skor:

##### Komunikasi:

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

##### Sistematika Penyampaian:

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

##### Penguasaan Materi:

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas



**Keberanian:**

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

**Antusias:**

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

**G. Pengayaan**

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior, berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada Kurikulum Matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.



## H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.

## I. Rangkuman

Kita telah menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifatnya dari berbagai pemecahan dunia nyata. Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat turunan fungsi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut:

- Misalkan  $f: R \rightarrow R$  adalah fungsi kontinu dan titik  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$  pada kurva  $f$ . Garis sekan adalah yang menghubungkan titik  $P$  dan  $Q$  dengan gradien  $m_{sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$



2. Misalkan  $f$  adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik  $P(x_1, y_1)$  pada kurva. Gradien garis tangen/singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  adalah nilai limit garis sekan di titik  $P(x_1, y_1)$ , ditulis  $n_{\tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
3. Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$  dengan  $\Delta x > 0$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada titik  $c$  jika dan hanya jika nilai  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  ada.
4. Misalkan  $f : S \rightarrow R$  dengan  $S \subseteq R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada  $S$  jika dan hanya jika fungsi  $f$  dapat diturunkan pada setiap titik  $c$  di  $S$ .
5. Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $c \in S$  dan  $L \in R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $c$  jika dan hanya jika nilai turunan kiri sama dengan nilai turunan kanan, ditulis:  $f'(c) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = L$ .
6. Aturan Turunan:  
Misalkan  $f, u, v$  adalah fungsi bernilai real pada interval  $I$ ,  $a$  bilangan real dapat diturunkan maka:
  1.  $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
  2.  $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
  3.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = ax^{n-1}$
  4.  $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
  5.  $f(x) = a[u(x)]^n \rightarrow f'(x) = au'(x)[u(x)]^{n-1}$
  6.  $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
  7.  $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
  8.  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$



7. Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada  $x \in I$  maka:
1. Jika  $f'(x) > 0$  maka kurva selalu naik pada interval  $I$
  2. Jika  $f'(x) < 0$  maka kurva selalu turun pada interval  $I$
  3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka kurva tidak pernah turun pada interval  $I$
  4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka kurva tidak pernah naik pada interval  $I$
8. Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan ada turunan pertama dan kedua pada  $x_1 \in I$  sehingga:
1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut dengan stasioner/kritis.
  2. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) > 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik minimum fungsi.
  3. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik maksimum fungsi.
  4. Jika  $f''(x_1) = 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok.
9. Kecepatan adalah laju perubahan dari fungsi  $s = f(t)$  terhadap perubahan waktu  $t$ , yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)e^{i\theta} \text{ atau } v(t) = s'(t)$$

Percepatan adalah laju perubahan dari fungsi kecepatan  $v(t)$  terhadap perubahan waktu  $t$ , yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi integral. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, limit fungsi, dan turunan. Hal ini sangat berguna dalam penentuan integral suatu fungsi sebagai antiturunan. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.