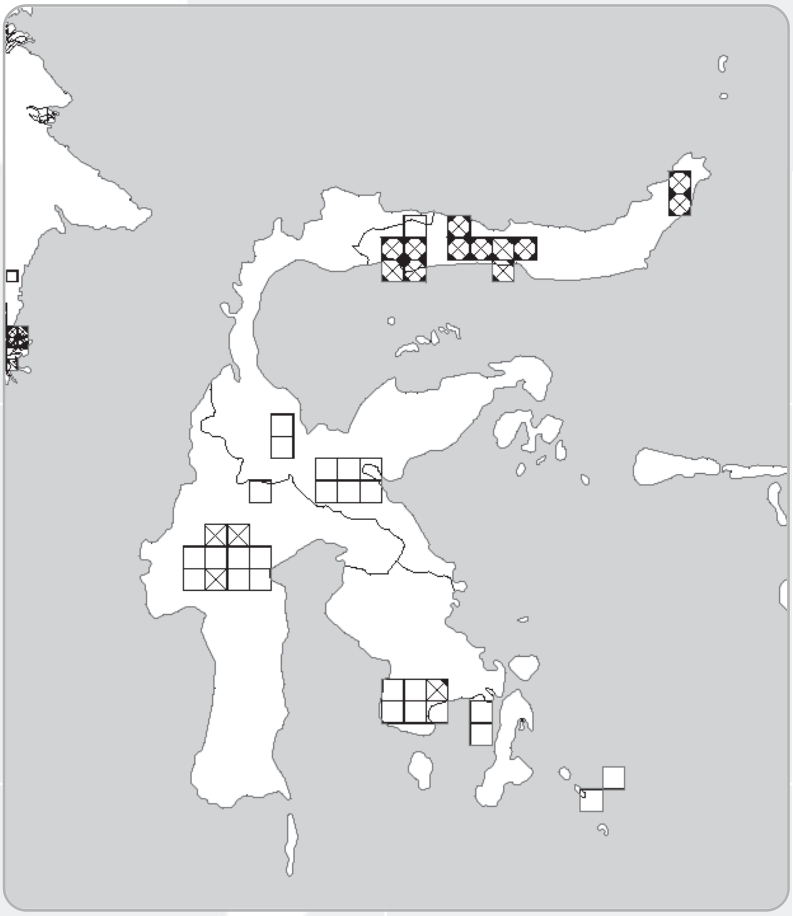
BAB 6

Transformasi Geometri



Sumber: www.geocities.com

Pantograf adalah alat untuk menggambar ulang suatu gambar dengan cara membesarkan dan mengecilkan gambar tersebut. Dengan menggunakan pantograf, Miko Sagala menggambar peta Pulau Sulawesi. Gambar peta yang dibuatnya memiliki bentuk yang sama dengan peta Pulau Sulawesi sesungguhnya dengan ukuran lebih besar. Dengan menggunakan pantograf ini, Miko Sagala telah mendilatasi peta sesungguhnya. Agar kalian lebih paham tentang dilatasi, pelajarilah bab berikut.

A. Translasi

Minggu lalu, Niko Sentera duduk di pojok kanan baris pertama di kelasnya. Minggu ini, ia berpindah ke baris ketiga lajur keempat yang minggu lalu ditempati Ucok. Ucok sendiri berpindah ke baris kedua lajur kedua yang minggu lalu ditempati Martina.

Sumber: smpstece1yk.tripod.com

Gambar 6.1 Niko Sentera dan kawan-kawan sedang belajar

Perhatikan perpindahan tempat duduk Niko Sentera dan Ucok ini.

Hendra	Anah	Irma	Mega	Ganjar	Nunu
Ucok	Riska	Samuel	Gusti	Albert	Rajasa
Bagas	Damai	Boy	Fadel	Katon	Agus
Bani	Asep -1	Feri -2	Ucok	Erika	Utut
Nugi	Martina	Bambang	Oci 2	Mahmud	Andre
Jerisa	Tino	Tia	Pasha	Esti -2	Niko Sentera

Baris

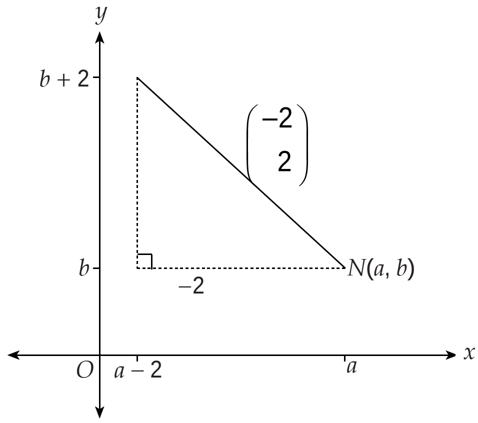
Lajur

Guru

Gambar 6.2
Perpindahan tempat duduk Niko Sentra dan Ucok

- Niko Sentera berpindah 2 lajur ke kiri dan 2 baris ke belakang. Saat berpindah ini, Niko Sentera telah melakukan translasi 2 satuan ke kiri dan 2 satuan ke atas yang ditulis sebagai $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Kemudian, Ucok berpindah 2 lajur ke kiri dan 1 baris ke depan. Saat berpindah ini, Ucok telah melakukan translasi 2 satuan ke kiri dan 1 satuan ke bawah yang ditulis sebagai $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Misalkan, tempat duduk Niko Sentera minggu lalu di titik $N(a, b)$ pada koordinat Cartesius.

Dengan translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, diketahui tempat duduknya minggu ini pada titik $N'(a - 2, b + 2)$.



Gambar 6.3
Translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ titik N pada koordinat Cartesius

Kalian dapat menuliskan translasi ini sebagai berikut

$$N(a, b) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}} N'(a - 2, b + 2)$$

Dengan prinsip yang sama, jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, maka diperoleh bayangannya $P'(a + h, b + k)$.
Secara matematis, ditulis sebagai berikut.

$$\boxed{P(a, b) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} P'(a + h, b + k)}$$

Sekarang, translasikan lagi bayangan yang telah kalian peroleh dengan $T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$. Didapat,

$$P'(a + h, b + k) \xrightarrow{T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

Perhatikan bahwa $P''(a + h + l, b + k + m) = P''(a + (h + l), b + (k + m))$.
Ini berarti, $P''(a + h + l, b + k + m)$ diperoleh dengan mentranslasikan $P(a, b)$ dengan $T = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}$.

Translasi T ini merupakan translasi T_1 dilanjutkan dengan T_2, yang ditulis sebagai $T_2 \circ T_1$.

Oleh karena $T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, maka $T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}$

Akibatnya, titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan T_1 dilanjutkan dengan translasi T_2 menghasilkan bayangan P'' sebagai berikut.

$$P(a, b) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

Contoh

1. Translasi $T_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ memetakan titik $A(1, 2)$ ke $A'(4, 6)$.

a. Tentukan translasi tersebut.

b. Tentukanlah bayangan segitiga ABC dengan titik sudut $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, dan $C(–5, 6)$ oleh translasi tersebut.

c. Jika segitiga yang kalian peroleh pada jawaban b ditranslasikan lagi dengan $T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tentukan bayangannya.

d. Translasikan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$. Samakah jawabannya dengan jawaban c?

Jawab:

a.

$$A(1, 2) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}} A'(1 + p, 2 + q) = A'(4, 6)$$

Diperoleh $1 + p = 4$. Sehingga, $p = 3$

$2 + q = 6$. Didapat, $q = 4$

Jadi, translasi tersebut adalah $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Translasi $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, artinya memindahkan suatu titik 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas. Dengan mentranslasikan titik-titik A', B', dan C' dari segitiga ABC dengan translasi T_1, kalian memperoleh segitiga $A'B'C'$ sebagai berikut.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A(1, 2) \longrightarrow A'(1 + 3, 2 + 4) = A'(4, 6)$$
$$B(3, 4) \longrightarrow B'(3 + 3, 4 + 4) = B'(6, 8)$$
$$C(–5, 6) \longrightarrow C'(–5 + 3, 6 + 4) = C'(–2, 10)$$

Jadi, bayangan segitiga ABC adalah segitiga A'B'C' dengan titik $A'(4, 6)$, $B'(6, 8)$, dan $C'(–2, 10)$.

c.

$$A'(4, 6) \xrightarrow{T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}} A''(4 + (-1), 6 + (-1)) = A''(3, 5)$$
$$B'(6, 8) \longrightarrow B''(6 + (-1),\ 8 + (-1)) = B''(5, 7)$$
$$C'(-2, 10) \longrightarrow C''(-2 + (-1), 10 + (-1)) = C''(-3, 9)$$

Jadi, bayangan segitiga A′B′C′ adalah segitiga $A''\ B''\ C''$ dengan titik $A''(3, 5)$, $B''(5, 7)$, dan $C''(-3, 9)$.

d. Translasi $T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ 4 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bayangan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$ adalah sebagai berikut.

$$A(1, 2) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} A''(1 + 2,\ 2 + 3) = A''(3, 5)$$
$$B(3, 4) \longrightarrow B''(3 + 2,\ 4 + 3) = B''(5, 7)$$
$$C(-5, 6) \longrightarrow C''(-5 + 2,\ 6 + 3) = C''(-3, 9)$$

Jadi, bayangan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$ adalah segitiga $A''B''C''$ dengan titik $A''(3, 5)$, $B''(5, 7)$, dan $C''(-3, 9)$.

Perhatikan bahwa segitiga yang kalian peroleh pada jawaban **c** sama dengan segitiga yang kalian peroleh pada jawaban **d**.

2. Tentukanlah bayangan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Ambil sebarang titik $P(a, b)$ pada $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, sehingga $(a - 3)^2 + (b + 1)^2 = 4$ . . . (*)

Translasikan titik P dengan $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sehingga kalian memperoleh

titik $P(a, b) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}} P'(a + (-5),\ b + 2) = P'(a - 5,\ b + 2)$

Jadi, titik $P'(a - 5,\ b + 2)$.

Perhatikan bahwa: $a' = a - 5$. Dari persamaan (*), didapat $a = a' + 5$.

$b' = b + 2$. Dari persamaan (*), didapat $b = b' - 2$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), akan diperoleh

$$((a' + 5) - 3)^2 + ((b' - 2) + 1)^2 = 4$$
$$(a' + 2)^2 + (b' - 1)^2 = 4$$

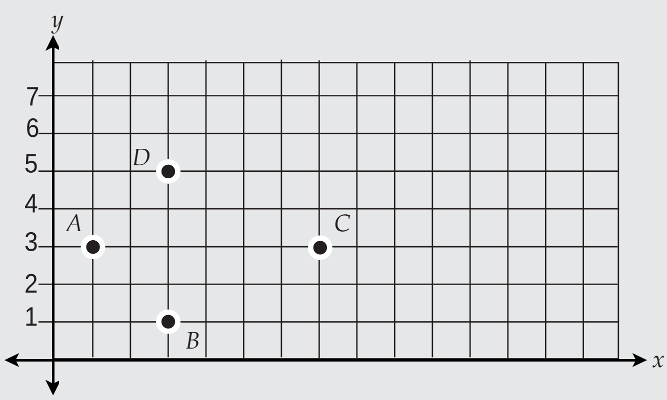
Jadi, bayangan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ jika ditranslasikan oleh

$T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Asah Kompetensi 1

1. Tentukanlah translasi yang sesuai untuk pemetaan berikut!
   - **a.** Titik $A(3, 9)$ ditranslasikan dengan T_1 menghasilkan $A'(9, 3)$
   - **b.** Titik $B(2, -6)$ ditranslasikan dengan T_2 menghasilkan $B'(-6, -3)$
   - **c.** Titik $C(-4, 7)$ ditranslasikan dengan T_3 menghasilkan $C'(-4, 0)$
   - **d.** Titik $D(3, 9)$ ditranslasikan dengan T_4 menghasilkan $D'(3, 9)$

2. Perhatikan bidang koordinat berikut!



   - **a.** Tarik garis dari titik A ke B, B ke C, C ke D, dan D ke A. Bangun apakah yang kalian peroleh?
   - **b.** Tentukanlah keliling dan luas bangun $ABCD$ tersebut!
   - **c.** Tentukanlah bayangan bangun $ABCD$ dengan translasi $T = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Bangun apakah yang kalian peroleh? Kongruenkah dengan bangun $ABCD$?
   - **d.** Tentukanlah keliling dan luas bangun hasil translasi ini!

3. Diketahui titik $P(2, 3)$.
   - **a.** Gambarlah segitiga siku-siku PQR yang memiliki luas enam petak satuan!
   - **b.** Tentukanlah koordinat titik Q dan R!
   - **c.** Tentukanlah keliling dan luas segitiga tersebut!

e. Tentukanlah bayangan segitiga PQR dengan translasi $T = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bangun apakah yang kalian peroleh? Kongruenkah dengan segitiga PQR?

f. Tentukanlah keliling dan luas bangun hasil translasi!

4. Tentukan bayangan kurva berikut

   a. Garis $3x + 2y - 3 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. Parabola $y = x^2 + 1$ ditranslasikan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Bayangan garis $y = 2 - x$ oleh translasi $T_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -b \end{pmatrix}$ adalah $y = -x$. Tentukan translasi T_1 dan T_2 tersebut.

6. Bayangan lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ adalah $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Tentukanlah nilai $a + b$.

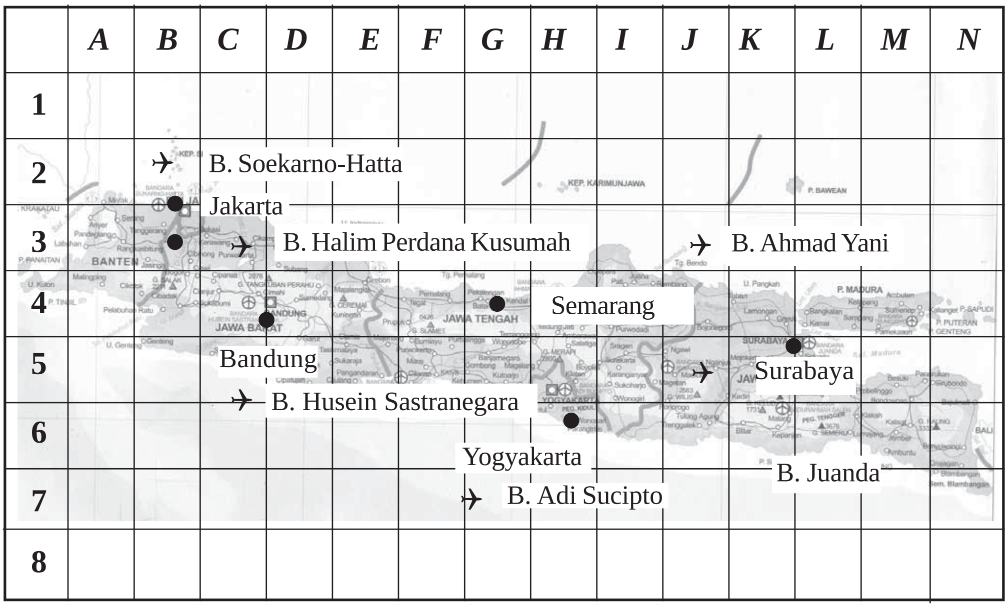
Siapa Berani

Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang ditarik dari titik (8, 0). Jika lingkaran tersebut ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, tentukan persamaan bayangannya. Tentukan pula persamaan garis singgung setelah ditranslasikan!

GaMeMath

Suatu malam, Dimas bermimpi sangat aneh. Dalam mimpinya, ia berlibur ke Surabaya. Ia berangkat ke Surabaya naik pesawat. Ketika tiba di bandara, ia merasa heran karena bandara tersebut adalah Halim Perdana Kusumah. Dalam hati, ia pun bertanya-tanya, “Di kota mana sebenarnya aku ini?”

Jika dalam mimpi Dimas terjadi perpindahan letak bandara Halim Perdana Kusumah, tentukan translasi yang memindahkan bandara tersebut ke Surabaya. Untuk membantu menjawab teka-teki mimpi Dimas, kalian dapat mengamati peta berikut!



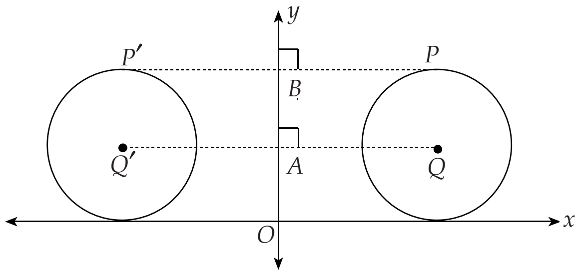
Sumber: Atlas Indonesia dan Dunia

Gambar 6.4
Peta pulau jawa

B. Refleksi

Kalian pasti sering bercermin. Ketika bercermin, amatilah diri dan bayangan kalian. Apakah memiliki bentuk dan ukuran yang sama? Amati pula jarak diri kalian ke cermin. Samakah dengan jarak bayangan kalian ke cermin? Dengan bercermin dan menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, kalian akan menemukan beberapa sifat pencerminan.

Sekarang, perhatikan lingkaran Q yang dicerminkan terhadap sumbu-y berikut ini.



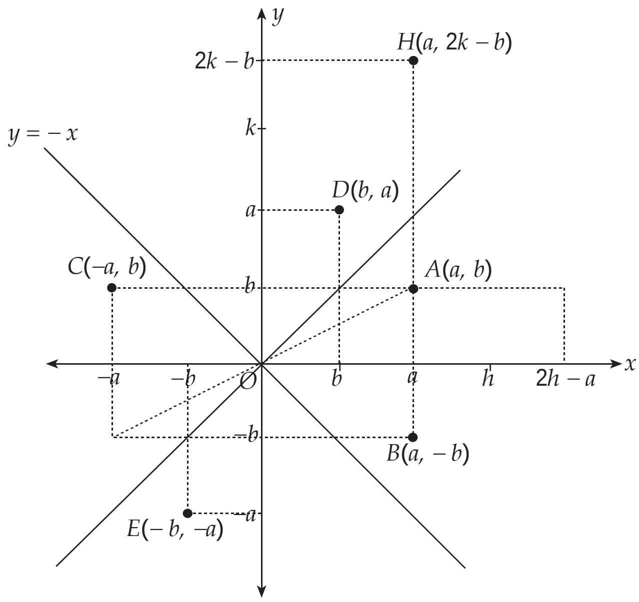
Gambar 6.5
Lingkaran Q yang dicerminkan terhadap sumbu–y.

Dari gambar tersebut, kalian dapat mengatakan bahwa:

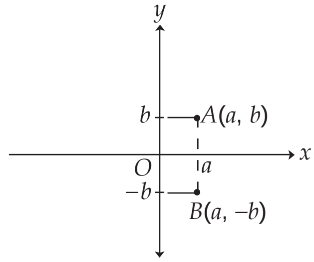
- Lingkaran Q kongruen dengan bayangannya, yaitu lingkaran Q'.
- Jarak setiap titik pada lingkaran Q ke cermin sama dengan jarak setiap titik bayangannya ke cermin, yaitu $QA = Q'A$ dan $PB = P'B$.
- Sudut yang dibentuk oleh cermin dengan garis yang menghubungkan setiap titik ke bayangannya adalah sudut siku-siku.

Sifat-sifat tersebut merupakan *sifat-sifat refleksi.*

Dengan menggunakan sifat-sifat ini, kalian dapat menentukan bayangan sebuah titik yang dicerminkan terhadap suatu garis atau terhadap suatu titik lain. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 6.6
Bayangan sebuah titik yang dicerminkan terhadap garis atau titik lainnya



Gambar 6.7
Pencerminan titik A terhadap sumbu-x

Dari gambar tampak bahwa:

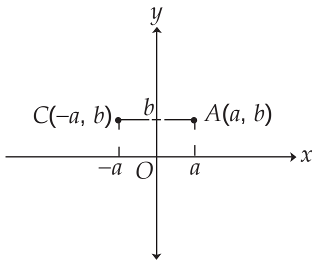
- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu-x menghasilkan bayangan titik $B(a', b')$ dengan $a' = a$ dan $b' = -b$.

$$\boxed{A(a,\ b) \longrightarrow B(a, -b)}$$

$$a' = a \;\Rightarrow a' = 1 \cdot a + 0 \cdot b,\; b' = -b \Rightarrow b' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.8
Pencerminan titik A terhadap sumbu-y

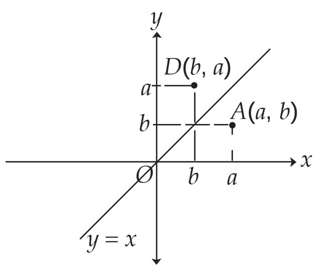
- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu-y menghasilkan bayangan titik C(a', b') dengan $a' = -a$ dan $b' = b$.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}y} C(-a, b)$$

$a' = -a \Rightarrow a' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$
$b' = b \quad \Rightarrow b' = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$C = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.9
Pencerminan titik A terhadap garis $y = x$

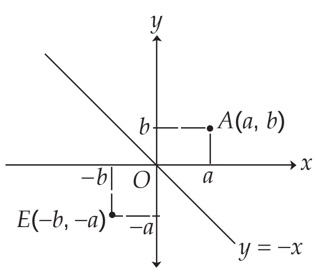
- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan titik $D(a', b')$ dengan $a' = b$ dan $b' = a$.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = x} D(b, a)$$

$a' = b \Rightarrow a' = 0 \cdot a + 1 \cdot b$
$b' = a \Rightarrow b' = 1 \cdot a + 0 \cdot b$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$D = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.10
Pencerminan titik A terhadap garis $y = -x$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan titik $E(a', b')$ dengan $a' = -b$ dan $b' = -a$.

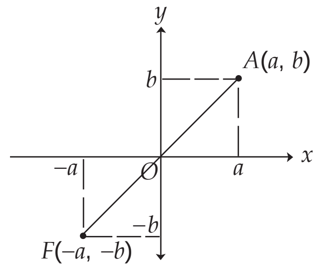
$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = -x} E(-b, -a)$$

$a' = -b \Rightarrow a' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$
$b' = -a \Rightarrow b' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$E = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap titik asal menghasilkan bayangan titik $F(a', b')$ dengan $a' = -a$ dan $b' = -b$.



Gambar 6.11
Pencerminan titik A terhadap titik asal

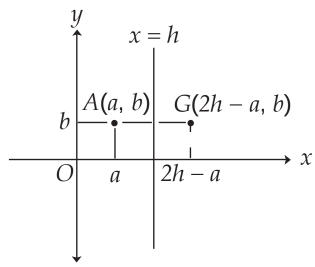
$$A(a, b) \xrightarrow[\text{Titik asal}]{O(0,\,0)} F(-a, -b)$$

$a' = -a \Rightarrow a' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$
$b' = -b \Rightarrow b' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$F = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $x = h$ menghasilkan bayangan titik $G(a', b')$ dengan $a' = 2h - a$ dan $b' = -b$.



Gambar 6.12
Pencerminan titik A terhadap garis $x = h$

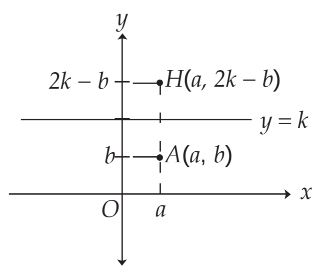
$$A\ (a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} G\ (2h - a, b)$$

$a' = 2h - a \Rightarrow a' = (-1 \cdot a + 0 \cdot b) + 2h$
$b' = b \qquad\quad \Rightarrow b' = (0 \cdot a + 1 \cdot b) + 0$

Jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut.

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = k$ menghasilkan bayangan titik $H(a', b')$ dengan $a' = a$ dan $b' = 2k - b$.



Gambar 6.13
Pencerminan titik A terhadap garis $y = k$

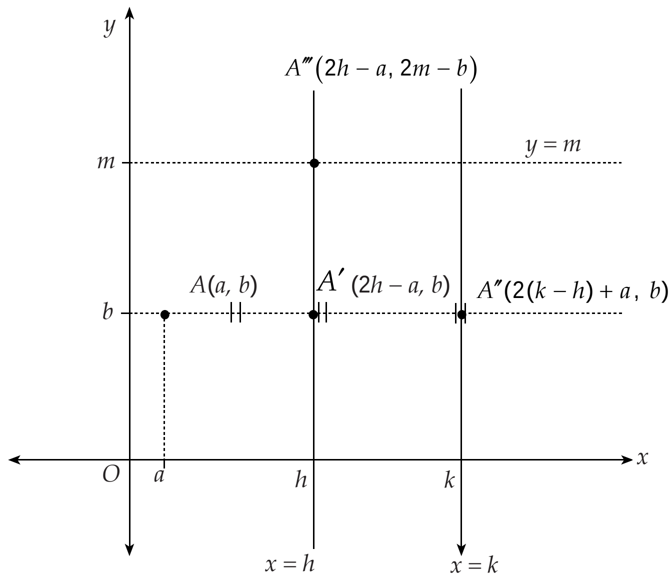
$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = k} H(a, 2k - b)$$

$a' = a \qquad\quad \Rightarrow a' = (1 \cdot a + 0 \cdot b) + 0$
$b' = 2k - b \Rightarrow b' = (0 \cdot a - 1 \cdot b) + 2k$

Jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut.

$$H = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

Bagaimana jika dua refleksi dikomposisikan?
Misalnya, titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = k$.
Untuk mengetahui pencerminan ini, amatilah gambar berikut!



Gambar 6.14
Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $x = h$ dan $x = k$

Dari gambar, tampak bahwa:

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} A'(2h - a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = k} A''(2(k - h) + a, b)$$

Dengan cara yang sama, kalian dapat menentukan bayangan titik $A(a, b)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = m$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = n$ sebagai berikut.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = m} A'(a, 2m - b) \xrightarrow{\text{Garis } y = n} A''(a, 2(n - m) + b)$$

Sekarang, jika titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap dua garis yang saling berpotongan tegak lurus, misalnya pencerminan terhadap garis $x = h$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = m$. Diperoleh bayangan A''' sebagai berikut.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} A'(2h - a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = m} A'''(2h - a, 2m - b)$$

Contoh

1. Tentukan bayangan jajargenjang $ABCD$ dengan titik sudut $A(-2, 4)$, $B(0, -5)$, $C(3, 2)$, dan $D(1, 11)$ jika

a. dicerminkan terhadap sumbu-x

b. dicerminkan terhadap sumbu-y

c. dicerminkan terhadap sumbu-x. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y

d. dicerminkan terhadap sumbu-y. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

Jawab:

a. Pencerminan terhadap sumbu-x

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A'B'C'D'$ dengan titik sudut $A'(-2, -4)$, $B'(0, 5)$, $C'(3,-2)$, dan $D'(1,-11)$.

b. Pencerminan terhadap sumbu-y

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y adalah jajargenjang $A'B'C'D'$ dengan titik sudut $A'(2, 4)$, $B'(0, -5)$, $C'(-3, 2)$, dan $D'(-1, 11)$.

c. Pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y.

Pada jawaban a, kalian telah menemukan bayangan jajargenjang $ABCD$ yang dicerminkan terhadap sumbu-x. Sekarang hasil pencerminan tersebut, cerminkan lagi terhadap sumbu-y sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2, -4)$, $B''(0, 5)$, $C''(-3, -2)$, dan $D''(-1, -11)$.

Bayangan jajargenjang $ABCD$ ini dapat pula kalian tentukan dengan terlebih dahulu menentukan matriks komposisi refleksi terhadap sumbu-x dilanjutkan refleksi terhadap sumbu-y sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu–y adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2, -4)$, $B''(0, 5)$, $C''(-3, -2)$, dan $D''(-1, -11)$.

d. Pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

Pada jawaban b, kalian telah menemukan bayangan jajargenjang $ABCD$ yang dicerminkan terhadap sumbu-y. Sekarang hasil pencerminan tersebut, cerminkan lagi terhadap sumbu-x sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2, -4)$, $B''(0, 5)$, $C''(-3, -2)$, dan $D''(-1, -11)$.

Bayangan jajargenjang $ABCD$ ini dapat pula kalian tentukan dengan terlebih dahulu menentukan matriks komposisi refleksi terhadap sumbu-y dilanjutkan refleksi terhadap sumbu-x sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2, -4)$, $B''(0, 5)$, $C''(-3, -2)$, dan $D''(-1, -11)$.

2. Tentukan bayangan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3$.

Jawab:

Ambil sembarang titik $P(a, b)$ pada $y = x^2 + 2x + 1$, sehingga $b = a^2 + 2a + 1$ (*).

Refleksikan titik P terhadap garis $y = 3$ sehingga kalian memperoleh titik $P'(a', b')$.

Dengan mencerminkan titik $P(a, b)$ terhadap garis $y = 3$, kalian memperoleh titik $A'(a', b')$

$$P(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = 3} P'(a, 2 \cdot 3 - b) = P'(a, 6 - b)$$

Jadi, titik $P'(a, 6 - b)$.

Perhatikan bahwa: $a' = a$

$b' = 6 - b$. Dari persamaan ini, didapat $b = 6 - b'$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), kalian memperoleh:

$6 - b' = (a')^2 + 2a' + 1$

$b' = -(a')^2 - 2a' + 5$

Jadi, bayangan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3$ adalah $y = -x^2 - 2x + 5$.

Asah Kompetensi 2

1. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, dan $C(5, 6)$. Tentukan bayangan segitiga ABC tersebut jika:

a. dicerminkan terhadap sumbu-x
b. dicerminkan terhadap sumbu-y
c. dicerminkan terhadap garis $y = x$
d. dicerminkan terhadap garis $y = -x$
e. dicerminkan terhadap titik O
f. dicerminkan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$
g. dicerminkan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap titik O
h. dicerminkan terhadap titik O, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 2$
i. dicerminkan terhadap garis $y = 2$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = -1$
j. dicerminkan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 2x$.

2. Tentukanlah bayangan titik $A(3, 2)$ oleh:

a. pencerminan terhadap garis $x = 1$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 4$
b. pencerminan terhadap garis $x = 4$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 1$
c. pencerminan terhadap garis $y = 1$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = -3$
d. pencerminan terhadap garis $y = -3$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 1$.

3. Tentukanlah bayangan titik $A(4, 3)$ oleh:

a. pencerminan terhadap garis $y = 2x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$
b. pencerminan terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 2x$
c. pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$

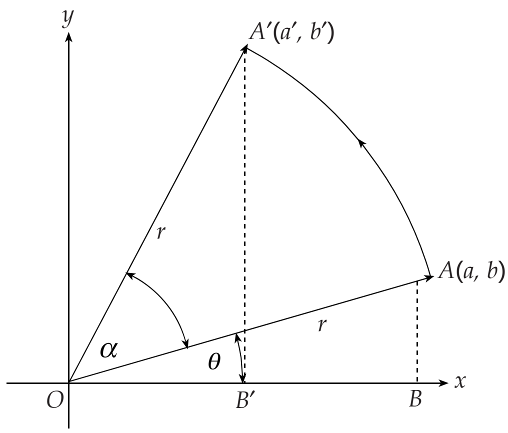
d. pencerminan terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x
e. pencerminan terhadap garis $y = -x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y
f. pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$.

4. Tentukanlah bayangan kurva berikut!
   a. Garis $x + 2y - 2 = 0$ dicerminkan terhadap garis $x = -9$.
   b. Parabola $y = x^2 - 2$ dicerminkan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 1$.
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, dan dilanjutkan dengan dua kali pencerminan terhadap sumbu-x.

C. Rotasi

Dengan menggunakan jangka, Anakota membuat sebuah busur lingkaran. Ia menusukkan jarum jangka pada titik O, kemudian memutar jangka dengan sudut putar α berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. Melalui peragaan ini, Anakota telah melakukan rotasi sebesar a dengan pusat titik O.

Misalkan, posisi awal pensil jangka pada titik $A(a, b)$. Setelah dirotasi sebesar α dengan pusat titik O, posisi pensil jangka ini berada pada titik $A(a', b')$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 6.15
Rotasi titik $A(a, b)$ sebesar α dengan pusat titik O

Posisi awal pensil jangka ini dapat pula ditulis dalam koordinat kutub, $A(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Adapun posisi pensil jangka setelah diputar sebesar α dengan arah berlawanan dengan arah perputaran jarum dapat ditulis sebagai $A'\left(r\cos(\theta+\alpha)\right)$.

Jadi, dinyatakan dalam bentuk matriks, persamaan tersebut menjadi matriks berikut.

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\sin\alpha \\ a\sin\alpha + b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi pensil jangka setelah diputar sebesar α tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Uraian ini menggambarkan rumus rotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$ sebagai berikut.

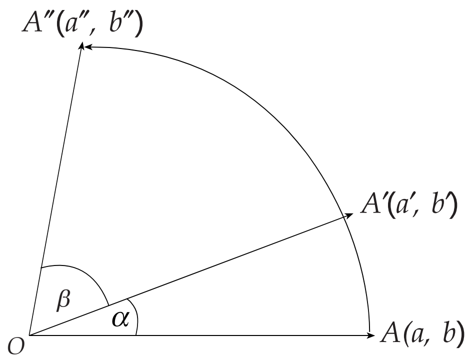
$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Adapun untuk rotasi sebesar α dengan pusat titik $P(m, n)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - m \\ b - n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Nilai α bertanda positif jika arah putaran sudut berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan bertanda negatif jika arah putaran sudut searah dengan arah perputaran jarum jam.

Bagaimana jika titik $A(a, b)$ dirotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$. Kemudian, rotasi lagi sebesar β dengan pusat yang sama?
Perhatikan gambar berikut!



Gambar 6.16
Rotasi titik $A(a, b)$ dengan pusat titik O sebesar α dan dilanjutkan rotasi sebesar β

Tampak bahwa posisi rotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$. Kemudian dilanjutkan rotasi sebesar β dengan pusat yang sama diwakili oleh rotasi sebesar $(\alpha + \beta)$ dengan pusat titik $O(0, 0)$.
Akibatnya, bayangan titik A dapat kalian tentukan sebagai berikut.

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh

1. Tentukan bayangan titik $A(-1, -2)$ yang dirotasi berturut-turut sebesar 180° dan 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat yang sama, yaitu titik $O(0, 0)$.

Jawab:

Merotasi titik $A(-1, -2)$ berturut-turut sebesar 180° dan 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat yang sama, yaitu titik $O(0, 0)$ sama artinya dengan merotasi titik A sebesar 270° dengan pusat $O(0, 0)$.
Bayangan titik A adalah sebagai berikut.

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik $A(-1, -2)$ adalah $A''(-2, 1)$.

2. Tentukan bayangan parabola $y = x^2 + 1$ yang dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$.

Jawab:

Ambil sembarang titik $A(a, b)$ pada $y = x^2 + 1$ sehingga $b = a^2 + 1$ (*).
Rotasikan titik A sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$. Dengan rotasi ini, kalian memperoleh titik $A'(a', b')$.

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90)^\circ & -\sin(-90)^\circ \\ \sin(-90)^\circ & \cos(-90)^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b-(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+3 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

Jadi, titik $A'(b + 3, -a - 1)$.

Perhatikan bahwa: $a' = b + 3$, dari persamaan ini didapat $b = a' - 3$ dan dari $b' = -a - 1$ didapat $a = -b' - 1$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), kalian memperoleh:

$a' - 3 = (-b' - 1)^2 + 1$

$a' - 3 = (b')^2 + 2b' + 2$

$a' = (b')^2 + 2b' + 5$

Jadi, bayangan parabola $y = x^2 + 1$ yang dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$ adalah $x = y^2 + 2y + 5$.

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah bayangan titik-titik berikut!

a. Titik $P(-1, 5)$ dirotasi 270° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Titik $Q(5, 2)$ dirotasi 60° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $A(2, 2)$.

c. Titik $R(3, -4)$ dirotasi 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dirotasi 30° dengan arah dan pusat yang sama.

d. Titik $S(-6, -7)$ dirotasi 45° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $B(-3, 5)$. Kemudian, dilanjutkan dirotasi 135° dengan arah dan pusat yang sama.

e. Titik $T(2, -9)$ dirotasi 240° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar C(–3, –6). Kemudian, dilanjutkan dirotasi 15° dengan pusat yang sama dan arah putar berlawanan.

2. Tentukanlah bayangan bangun berikut. Kemudian, tentukan pula luas bangun bayangan tersebut!

a. Segitiga ABC dengan $A(5, 0)$, $B(-10, 10)$, dan $C(0, -15)$ dirotasi sebesar 225° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Lingkaran $x^2 + y^{2-6x} + 10y - 10 = 0$ dirotasi 30° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $P(-2, -3)$.

3. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini!

a. Garis $x - y + 3 = 0$ dirotasi $\frac{\pi}{3}$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Garis $y = x + 2$ dirotasi $\frac{\pi}{6}$ searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$. Dilanjutkan dirotasi $\frac{\pi}{4}$ dengan arah dan pusat yang sama.

c. Parabola $x^2 + 6y = 0$ dirotasi $\frac{\pi}{3}$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $P(4, 2)$. Dilanjutkan dirotasi $\frac{\pi}{2}$ dengan pusat yang sama dan arah berlawanan.

1 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Diketahui segitiga ABC dengan titik $A(-8, -2)$, $B(2, 1)$, dan $C(-3, 4)$. Z adalah titik berat segitiga ABC. Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan segitiga ABC dan titik beratnya menjadi segitiga $A'B'C'$ dan C' (2,3). Tentukanlah translasi tersebut dan koordinat A', B', dan C'

Bobot soal: 20

2. A adalah translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan B adalah translasi $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tentukanlah $(B \circ A \circ B \circ A \circ B)(-1, -2)$.

Bobot soal: 60

3. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini!

Bobot soal: 20

a. Garis $y = -3x + 1$ dirotasikan sebesar 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar titik $O(0, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

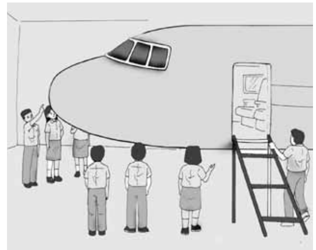
b. Lingkaran yang berpusat di titik (2, –3) dan menyinggung sumbu-x dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar titik $P(2, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$.

c. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = 3x$. Kemudian, dilanjutkan dengan translasi $T = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siapa Berani

Tentukanlah matriks pencerminan terhadap garis $y = x \tan \alpha$ sebagai komposisi transformasi!

D. Dilatasi

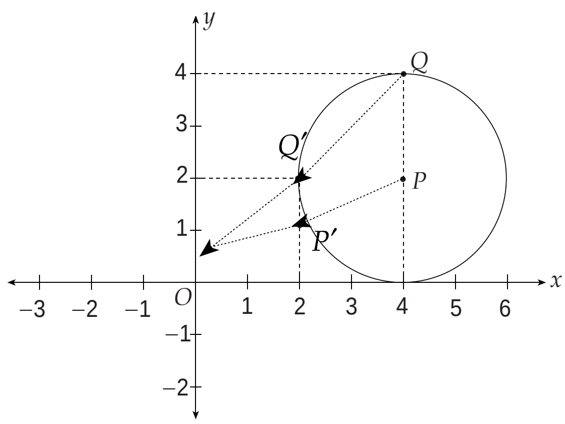


Aini dan teman-temannya berkunjung ke IPTN. Di sana, mereka mengamati miniatur sebuah pesawat terbang. Miniatur pesawat terbang ini mempunyai bentuk yang sama dengan pesawat terbang sesungguhnya, tetapi ukurannya lebih kecil. Bentuk seperti miniatur pesawat terbang ini telah mengalami dilatasi diperkecil dari pesawat terbang sesungguhnya.

Selain dilatasi diperkecil, terdapat pula dilatasi diperbesar, misalnya pencetakan foto yang diperbesar dari klisenya. Faktor yang menyebabkan diperbesar atau diperkecilnya suatu bangun ini disebut faktor dilatasi. Faktor dilatasi ini dinotasikan dengan huruf kecil, misalnya k.

- Jika $k < -1$ atau $k > 1$, maka hasil dilatasinya diperbesar
- Jika $-1 < k < 1$, maka hasil dilatasinya diperkecil
- Jika $k = 1$, maka hasil dilatasinya tidak mengalami perubahan

Sekarang, perhatikan lingkaran pada Gambar 6.10 yang berpusat di titik $P(4, 2)$ dan melalui titik $Q(4, 4)$ berikut yang didilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala $\frac{1}{2}$. Bayangan yang diperoleh adalah lingkaran yang berpusat di titik $P'(2, 1)$ dan melalui titik $Q'(2, 2)$. Lingkaran ini sebangun dengan lingkaran P dengan ukuran diperkecil.



Gambar 6.10

Dilatasi lingkaran P terhadap pusat O dengan faktor skala $\frac{1}{2}$

kalian dapat menentukan lingkaran hasil dilatasi ini dengan menggunakan matriks seperti berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P' & Q' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dengan dilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala $\frac{1}{2}$, diperoleh lingkaran dengan titik pusat $P'(2, 1)$ dan melalui titik $Q'(2, 2)$.

Secara umum, dilatasi ini sebagai berikut.

- Titik $P(a, b)$ didilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala k menghasilkan titik $P'(ka, kb)$.

  Secara matematis, ditulis:

  $$P(a, b) \xrightarrow{[O, k]} P'(ka, kb)$$

  Kalian dapat menyatakannya dalam bentuk matriks berikut.

  $$P' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Titik $P(a, b)$ didilatasi terhadap pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k menghasilkan titik $P'(k(a-m)+m,\ k(b-n)+n)$.

  Secara matematis, ditulis:

  $$P(a, b) \xrightarrow{[F(m, n),\ k]} P'(k(a-m) + m, k(b-n) + n)$$

Kalian dapat menyatakannya dalam bentuk matriks berikut.

$$P' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - m \\ b - n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Contoh

Tentukanlah bayangan titik $P(5, 6)$ jika didilatasikan oleh:

1. [O, 3]

Jawab:

$P(5, 6) \xrightarrow{[O, 3]} P'(3 \cdot 5, 3 \cdot 6) = P'(15, 18)$

Jadi, titik $P'(15, 18)$.

2. $[F(2, 3), 4]$

Jawab:

$P(5, 6) \xrightarrow{[F(2,3),\ 4]} P'(4(5-2) + 2, 4(6-3) + 3) = P'(14, 15)$

Jadi, titik $P'(14, 15)$.

Aktivitas di Kelas

Komposisi transformasi dengan menggunakan matriks akan diperlukan pada pembahasan selanjutnya. Kalian telah membahas matriks transformasi pada subbab sebelumnya. Sekarang rangkumlah semua matriks komposisi tersebut dengan menyalin dan melengkapi tabel berikut!

No.	Jenis Transformasi	Matriks
1.	Refleksi terhadap sumbu-x	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
2.	Refleksi terhadap sumbu-y	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
3.	Refleksi terhadap sumbu $y = x$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
4.	Refleksi terhadap sumbu $y = -x$	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
5.	Rotasi sejauh θ terhadap titik pusat O	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
6.	Dilatasi terhadap O dengan faktor skala k	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
7.	Dilatasi terhadap pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k	$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

Diskusikan dengan teman-temanmu dan hasilnya tuliskan di papan tulis.

E. Komposisi Transformasi dengan Matriks

Transformasi T memetakan titik $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$. Hubungan antara (x', y') dengan (x, y) ditentukan oleh:

$$\begin{matrix} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{matrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, matriks yang bersesuaian dengan transformasi T adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Berikut ini adalah tabel matriks-matriks transformasi geometri berordo 2×2.

No.	Transformasi	Pemetaan	Matriks transformasi
1.	Identitas (I)	$(x, y) \rightarrow (x, y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.	Dilatasi dengan faktor skala k	$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
3.	Refleksi (M) a. terhadap sumbu-x (M_x)	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

	b. terhadap sumbu-y (M_y)	$(x, y) \to (-x, y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	c. terhadap garis $y = x$ ($M_{y=x}$)	$(x, y) \to (y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	d. terhadap garis $y = -x$ ($M_{y=-x}$)	$(x, y) \to (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.	Rotasi terhadap titik asal $O(0,0)$		
	a. sebesar θ (R_θ)	$(x, y) \to (x', y')$ $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ $y' = x \cos \theta + y \cos \theta$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
	b. sebesar $\frac{\pi}{2}$ $(+90°)$	$(x, y) \to (-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	c. sebesar $-\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$	$(x, y) \to (y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	d. sebesar π (setengah putaran)	$(x, y) \to (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jika T_1 dan T_2 masing-masing adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks-matriks.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

maka komposisi transformasi yang dinyatakan dengan:

a. $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

b. $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Hasil perkalian $M_1 \cdot M_2$ belum tentu sama dengan hasil perkalian $M_2 \cdot M_1$.

Contoh

1. Diketahui T_1 dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks-matriks yang bersesuaian, tentukanlah koordinat bayangan yang dinyatakan dengan komposisi transformasi berikut ini.

a. $T_2 \circ T_1$ (2, 3)

b. $T_2 \circ T_1$ (–1, 4)

Jawab:

a. $T_2 \circ T_1$ (2, 3)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, $T_2 \circ T_1$ (2, 3) = (10, 9)

b. $T_2 \circ T_1\ (-1, 4)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, $T_2 \circ T_1\ (-1, 4) = (-3, 5)$

2. T_1 adalah transformasi pencerminan terhadap garis $y = -x$. T_2 adalah transformasi perputaran setengah putaran terhadap titik asal. Tentukan bayangan titik $P(3, -5)$ yang ditransformasikan terhadap T_1 dan dilanjutkan terhadap T_2.

Jawab:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformasi $T_2 \circ T_1$:

$$P(3, -5) \xrightarrow{T_2 \circ T_1} P''$$

$$P'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan akhir titik $P(3, -5)$ terhadap transformasi T_1 dan T_2 adalah $(-5, 3)$.

2 ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah bayangan titik-titik berikut ini!

Bobot soal: 20

a. $P(-2, -4)$ didilatasikan oleh $\left[O, \frac{1}{4}\right]$

b. $R(9, 6)$ didilatasikan oleh $[O, -9]$

c. $S(12, -8)$ didilatasikan oleh $[F(3, 2), 2]$

d. $T(-10, 21)$ didilatasikan oleh $\left[G\left(-\frac{1}{2}, 5\right), -\frac{1}{2}\right]$

2. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini!

Bobot soal: 40

a. Garis $3x - 5y + 15 = 0$ yang didilatasikan oleh $[O, 5]$

b. $y = \frac{1}{x}$ yang didilatasikan oleh $\left[O, -\frac{2}{5}\right]$

c. $x^2 - 4y^2 = 9$ yang didilatasikan oleh $\left[F(-5, 1), \frac{3}{4}\right]$

d. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 14 = 0$ yang didilatasikan oleh $[G(-10, 10), -5]$

3. Tentukanlah bayangan bangun-bangun berikut. Kemudian, tentukan pula luas bangun bayangan tersebut!

Bobot soal: 30

a. Segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, dan $C(3, 6)$ oleh dilatasi $\left[O, -\frac{2}{7}\right]$.

b. Persegi panjang $ABCD$ dengan titik-titik sudut $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(1, 7)$, dan $D(4, 7)$ oleh dilatasi $[O, 3]$.

c. Lingkaran yang berpusat di titik $P(-5, 2)$ dan berjari-jari 4 oleh dilatasi $[F(-6, -7), -2]$.

4. Tentukanlah bayangan dari parabola $y = x^2 + 1$ yang ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan oleh dilatasi $[O, 3]$.

Bobot soal: 10

Rangkuman

1. Translasi (pergeseran) merupakan transformasi yang memindahkan titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.
   - Jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = (h, k)$, maka akan diperoleh P' sebagai berikut

$$P(a, b) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} P'(a + h, b + k)$$

   - Jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = (h, k)$ dilanjutkan dengan $T_2 = (l, m)$, maka akan diperoleh P'' sebagai berikut.

$$P(a, b) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

2. Refleksi (pencerminan) merupakan transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan sifat bayangan cermin.
   - Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap sumbu-x, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}x} B(a, -b)$$

   - Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap sumbu-y, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}y} C(-a, b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = x} D(b, a)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = -x} E(-b, -a)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap titik asal $O(0, 0)$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Titik asal}} F(-a, -b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan garis x terhadap garis $x = h$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} G(2h - a, b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direflesikan terhadap garis $y = k$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = k} H(a, 2k - b)$$

3. Rotasi (perputaran) merupakan transformasi yang memutar suatu bidang.

- Jika titik $A(a, b)$ dirotasikan sebesar α dengan titik dengan titik pusat O, maka akan diperoleh

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\sin\alpha \\ a\sin\alpha + b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Jika titik $A(a, b)$ dirotasikan sebesar α dengan titik pusat $P(m, n)$, maka akan diperoleh

$$A' = \begin{pmatrix} a' - m \\ b' - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - m)\cos\alpha - (b - n)\sin\alpha \\ (b - m)\sin\alpha + (b - n)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

4. Dilatasi (perkalian) merupakan transformasi yang memperkecil atau memperbesar suatu bidang.

- Jika titik $A(a, b)$ didilatasikan terhadap titik pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{[O, k]} A'(ka, kb)$$

- Jika titik $A(a, b)$ dilatasikan terhadap titik pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k, maka akan diperoleh:

$$A(a, b) \xrightarrow{[F(m, n, k]} A'(k(a - m) + m, k(b - n) + n)$$

Ulangan Bab 6

I. Pilihlahlah jawaban yang paling tepat!

1. Bayangan titik $A(1, 4)$ oleh translasi $T(2, 3)$ adalah . . . .

A. $A'(3, 7)$
B. $-A'(3, 5)$
C. $A'(4, 3)$
D. $A'(4, 6)$
E. $A'(4, 4)$

2. Jika titik $M(2, 1)$ direfleksikan terhadap garis $x = 3$ dan terhadap garis $y = 3$, maka bayangan M'' adalah . . . .

A. $M''(4, 1)$
B. $M''(2, 5)$
C. $M''(5, 4)$
D. $M''(2, 4)$
E. $M''(5, 1)$

3. Jika titik $P(1, 2)$ diputar 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal koordinat O, maka bayangan dari titik P adalah . . . .

A. $P'(2, -1)$
B. $P'(2, -1)$
C. $P'(2, 1)$
D. $P'(-2, 1)$
E. $P'(1, -2)$

4. Jika titik $B(2, 6)$ dilatasi terhadap $T(0, -1)$, maka bayangan titik B adalah . . . .

A. $B'(4, 12)$
B. $B'(1, 3)$
C. $B'(-2, 12)$
D. $B'(2, 12)$
E. $B'(-2, -6)$

5. Garis g tegak lurus pada bidang V dan bidang W membentuk sudut lancip dengan V. Jika W memotong V menurut suatu garis s, maka proyeksi g pada W . . . .

A. tegak lurus pada V
B. tegak lurus pada s
C. sejajar dengan V
D. sejajar dengan s
E. sejajar dengan W

6. Bidang V dan W berpotongan tegak lurus sepanjang garis g. Garis l membentuk sudut 45°dengan V dan 30° dengan W. Sinus sudut antara l dan g adalah . . . .

A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

7. Diketahui satu transformasi T dinyatakan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, maka transformasi T adalah . . . .

A. Pencerminan terhadap sumbu-x
B. Pencerminan terhadap sumbu-y
C. Perputaran $\frac{1}{2}\pi$
D. Perputaran $-\frac{1}{2}\pi$
E. Perputaran $\frac{1}{4}\pi$

8. Diketahui T_1 dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

maka $T_2 \circ T_1 (-3, 1) =$ . . . .

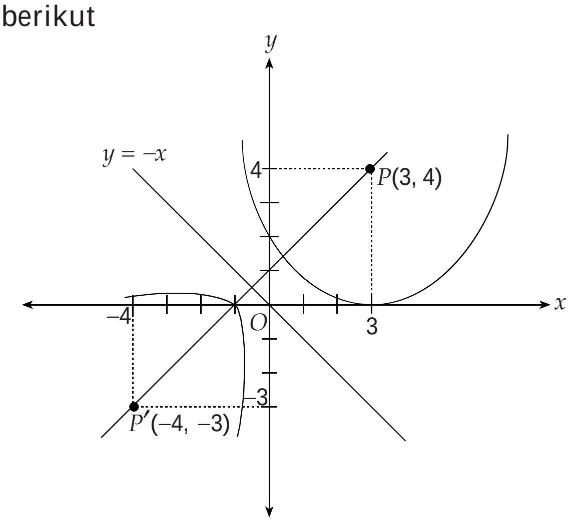
A. (4, 12)
B. (–4, –12)
C. (4, –12)
D. (–4, –6)
E. (4, 6)

9. Diketahui ΔPQR dengan titik-titik sudut $P(1, 3)$, $Q(1, -4)$, dan $R(-2, 1)$. Jika ΔPQR

direfleksikan terhadap sumbu-x kemudian dilanjutkan dengan dilatasi (0, –1), maka koordinat bayangannya adalah . . . .

A. $P'(-1, 3), Q'(1, -4)$, dan $R'(2, -1)$
B. $P'(-1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, 1)$
C. $P'(1, 3), Q'(1, -4)$, dan $R'(2, -1)$
D. $P'(1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, -1)$
E. $P'(1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, 1)$

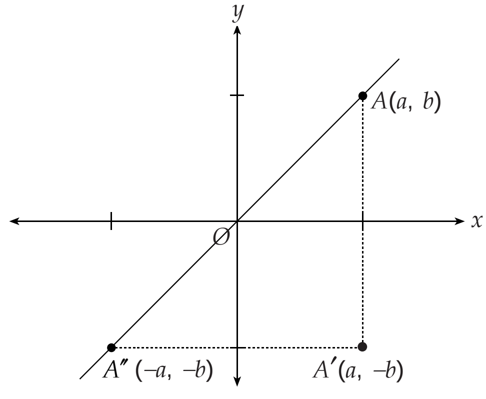
10. Suatu lingkaran digambarkan sebagai berikut



Jika lingkaran yang berpusat di (3, 4) dan menyinggung sumbu-x dicerminkan pada $y = -x$, maka persamaan lingkaran yang terjadi adalah . . . .

A. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$
D. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 9 = 0$
E. $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$

11. Suatu pencerminan ditunjukkan seperti gambar berikut.



Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu-x dan bayangannya dicerminkan pula terhadap sumbu-y. Bayangan terakhir titik A merupakan . . . .

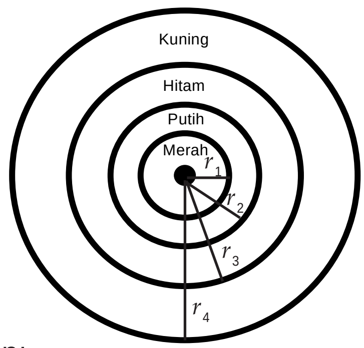
A. Perputaran titik A dengan titik pusat O sebesar π radian berlawanan perputaran jarum jam.
B. Perputaran titik A dengan titik pusat O sebesar 2π radian berlawanan perputaran jarum jam.
C. Pencerminan titik A terhadap garis $y = -x$
D. Pencerminan titik A terhadap garis $y = x$
E. Pencerminan titik A terhadap sumbu-y

12. Jika garis $3x - 2y = 6$ ditranslasikan terhadap $T(2, 3)$, maka . . . .

A. $3x - 2y = 6$
B. $3x - 2y = 3$
C. $3x + 2y = 4$
D. $3x - 2y = -4$
E. $3x - 2y = -11$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Sebuah lingkaran target dibuat warna-warni seperti gambar berikut.



dengan:

$r_1 = \frac{1}{2} r_2$ $\quad$ $r_3 = \frac{3}{4} r_4$

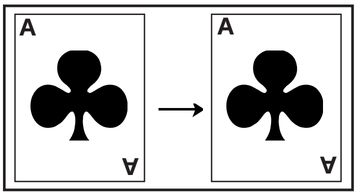
$r_2 = \frac{1}{2} r_4$

Tentukanlah faktor skala dari:
A. Merah ke Putih
B. Merah ke Hitam
C. Merah ke Kuning
D. Kuning ke Putih
E. Hitam ke Putih

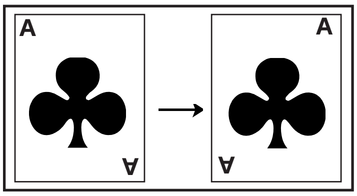
2. Sebuah bangun mula-mula ditransformasikan dengan refleksi terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan rotasi 90° searah dengan jarum jam terhadap titik asal O. Tentukanlah bayangannya!

3. Sebutkan jenis transformasi yang memetakan tiap gambar berikut ini!

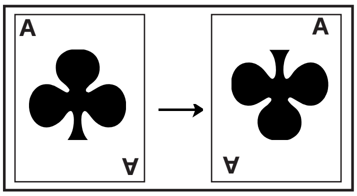
A.



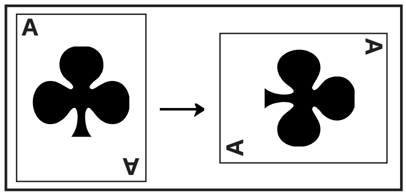
B.



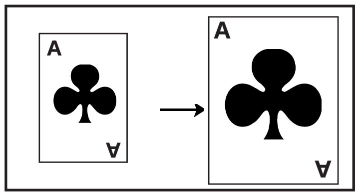
C.



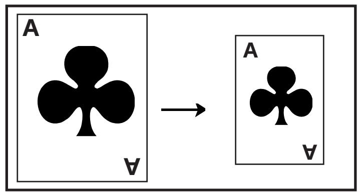
D.



E.



F.



4. Tentukanlah persamaan bayangan dari garis $3x - y + 2 = 0$ oleh refleksi terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dengan rotasi 90° terhadap O.

5. Titik $P(x, y)$ direfleksikan terhadap $y = x$ menghasilkan bayangan titik Q. Kemudian, diputar 90° dengan titik pusat O, sehingga bayangan akhirnya adalah $R(1, -2)$. Tentukan:
   A. koordinat titik P
   B. koordinat titik Q