

Barisan, Deret, dan Notasi Sigma



Sumber: <http://jsa007.tripod.com>

Saat mengendarai motor, pernahkah kalian mengamati speedometer pada motor tersebut? Pada speedometer terdapat angka-angka 0, 20, 40, 60, 80, 100, dan 120 yang menunjukkan kecepatan motor saat kalian mengendarainya. Angka-angka ini berurutan mulai dari yang terkecil ke yang terbesar dengan pola tertentu sehingga membentuk sebuah barisan aritmetika. Agar kalian lebih memahami tentang barisan aritmetika ini, pelajailah bab berikut dengan baik.

- A. Barisan dan Deret Aritmetika
- B. Barisan dan Deret Geometri
- C. Notasi Sigma dan Induksi Matematika
- D. Aplikasi Barisan dan Deret

A. Barisan dan Deret Aritmetika



Niko Sentera memiliki sebuah penggaris ukuran 20 cm. Ia mengamati bilangan-bilangan pada penggarisnya ini. Bilangan-bilangan tersebut berurutan 0, 1, 2, 3, ..., 20. Setiap bilangan berurutan pada penggaris ini mempunyai jarak yang sama, yaitu 1 cm. Jarak antar bilangan berurutan ini menunjukkan selisih antarbilangan. Jadi, selisih antara bilangan pertama dan kedua adalah $1 - 0 = 1$, selisih antara bilangan kedua dan ketiga adalah $2 - 1 = 1$, dan seterusnya hingga selisih antara bilangan kedua puluh dan kedua puluh satunya juga 1.

Bilangan-bilangan berurutan seperti pada penggaris ini memiliki selisih yang sama untuk setiap dua suku berurutannya sehingga membentuk suatu barisan bilangan. Barisan bilangan seperti ini disebut **barisan aritmetika** dengan selisih setiap dua suku berurutannya disebut beda (b).

Barisan aritmetika adalah suatu barisan dengan selisih (beda) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

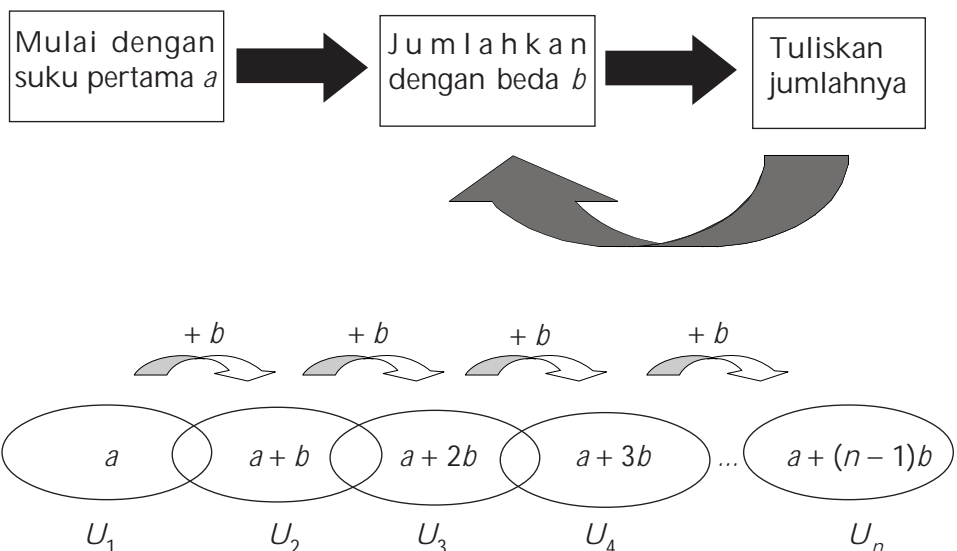
Bentuk umum:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \text{ atau } a, (a + b), (a + 2b), \dots, (a + (n - 1)b)$$

Pada penggaris yang dimiliki Niko Sentera, suku pertamanya 0, ditulis $U_1 = 0$. Adapun suku keduanya, $U_2 = 1$. Beda antara suku pertama dan suku kedua ini adalah $U_2 - U_1 = 1$. Begitu seterusnya, sehingga dapat dikatakan beda suku ke- n dengan suku sebelumnya adalah $U_n - U_{n-1} = 1$.

Pada barisan aritmetika, berlaku $U_n - U_{n-1} = b$ sehingga $U_n = U_{n-1} + b$

Jika kalian memulai barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b maka kalian mendapatkan barisan berikut.



Tampak bahwa, $U_n = a + (n - 1)b$.

Suku ke- n barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1)b$
 di mana U_n = Suku ke- n
 a = Suku pertama
 b = beda
 n = banyaknya suku

Contoh

Diketahui barisan 5, -2, -9, -16, ..., tentukanlah:

- rumus suku ke- n
- suku ke-25

Jawab:

Selisih dua suku berurutan pada barisan 5, -2, -9, -16, ... adalah tetap, yaitu $b = -7$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

- Rumus suku ke- n barisan aritmetika tersebut adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 5 + (n - 1)(-7)$$

$$= 5 - 7n + 7$$

$$= 12 - 7n$$
- Suku ke-25 barisan aritmetika tersebut adalah

$$U_{25} = 12 - 7 \cdot 25$$

$$= 12 - 175$$

$$= -163$$

Jika setiap suku barisan aritmetika dijumlahkan, maka diperoleh **deret aritmetika**.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari barisan aritmetika.
 Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \text{ atau } a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b)$$

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b) \quad \dots \text{ Persamaan 1}$$

Persamaan 1 ini dapat pula ditulis sebagai berikut.

$$S_n = (a + (n - 1)b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad \dots \text{ Persamaan 2}$$

Dengan menjumlahkan Persamaan 1 dan Persamaan 2, kalian mendapatkan

$$S_n = a + (a + b) + \dots + (a + (n - 1)b) \quad \dots \text{ Persamaan 1}$$

$$S_n = (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \dots + a \quad \dots \text{ Persamaan 2}$$

$$\begin{array}{r} S_n = a + (a + b) + \dots + (a + (n - 1)b) \\ S_n = (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \dots + a \\ \hline 2S_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \dots + 2a + (n - 1)b \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ suku}}$

Catatan

- Barisan dituliskan sebagai berikut.
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
- Deret dituliskan sebagai berikut.
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$2S_n = n(2a + (n-1)b)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)$$

Oleh karena $U_n = a + (n-1)b$, maka S_n dapat juga dinyatakan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)b\} = \frac{n}{2} \left\{ a + \underbrace{a + (n-1)b}_{U_n} \right\} = \frac{n}{2} \{a + U_n\}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)b] \text{ atau } S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

di mana S_n = Jumlah suku ke- n

n = banyaknya suku

a = Suku pertama

b = Beda

U_n = Suku ke- n

Contoh

1. Suku kedua suatu deret aritmetika adalah 5. Jumlah suku keempat dan suku keenam adalah 28. Tentukanlah suku kesembilannya.

Jawab:

$$U_2 = 5, \text{ berarti } a + b = 5$$

$$U_4 + U_6 = 28, \text{ berarti:}$$

$$(a + 3b) + (a + 5b) = 28$$

$$(a + b + 2b) + (a + b + 4b) = 28$$

$$(5 + 2b) + (5 + 4b) = 28$$

$$10 + 6b = 28$$

$$6b = 18$$

$$b = 3$$

Dengan mensubstitusi $b = 3$ ke $a + b = 5$, didapat $a + 3 = 5$ sehingga $a = 2$.

Jadi, suku kesembilan deret aritmetika tersebut adalah

$$U_9 = 2 + 8 \cdot 3$$

$$= 2 + 24$$

$$= 26$$

2. Saat diterima bekerja di penerbit Literatur, Meylin membuat kesepakatan dengan pimpinan perusahaan, yaitu ia akan mendapat gaji pertama Rp1.800.000,00 dan akan mengalami kenaikan Rp50.000,00 setiap dua bulan. Jika ia mulai bekerja pada bulan Juli 2004, berapakah gaji yang diterimanya pada bulan Desember 2005?



Sumber: Koleksi Penerbit

Jawab:

Gaji Meylin mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama $a = \text{Rp}1.800.000,00$ dan beda $b = \text{Rp}50.000,00$.

Juli—Agustus 2004	September—Oktober 2004	November—Desember 2004	...	November—Desember 2005
----------------------	---------------------------	---------------------------	-----	---------------------------

U_1

U_2

U_3

U_9

$$U_9 = a + 8b = \text{Rp}1.800.000,00 + 8 \cdot \text{Rp}50.000,00 = \text{Rp}2.200.000,00$$

Jadi, gaji yang diterima Meylin pada bulan Desember 2005 adalah $\text{Rp}2.200.000,00$.

Asah Kompetensi 1

- Tentukanlah suku yang dicantumkan di akhir barisan dan juga suku ke- n dari setiap barisan berikut!
 - $13, 9, 5, \dots, U_{31}$
 - $(2, 3), (-3, 2), (-8, 1), \dots, U_{20}$
 - ${}^2\log \frac{5}{16}, {}^2\log \frac{5}{8}, {}^2\log \frac{5}{4}, \dots, U_{14}$
 - $\frac{n+1}{n-1}, \frac{n+3}{n-3}, \frac{n+5}{n-5}, \dots, U_{19}$
- Suku pertama suatu deret aritmetika adalah $3\frac{1}{4}$, sedangkan suku ke-54 adalah $86\frac{3}{4}$. Tentukanlah jumlah 50 suku pertama deret tersebut!
 - Suku kedua suatu deret aritmetika adalah 25, sedangkan suku ke-6 adalah 49. Tentukanlah jumlah 10 suku pertama deret tersebut!
 - Suku ketiga suatu deret aritmetika adalah -38 , sedangkan suku ke-7 adalah -66 . Tentukanlah jumlah 12 suku pertama deret tersebut!
- Banyak suku suatu deret aritmetika adalah 15. Suku terakhir adalah 47 dan jumlah deret 285. Tentukanlah suku pertama deret tersebut!
- Tentukanlah jumlah deret berikut!
 - Semua bilangan asli yang terletak di antara 1 dan 50 dan habis dibagi 4
 - Semua bilangan bulat yang terletak di antara 1 dan 50 dan tidak habis dibagi 3
 - Semua bilangan genap yang terletak di antara 1 dan 100 dan habis dibagi 3
- Dalam sebuah permainan, 8 kentang ditempatkan pada sebuah garis lurus. Jarak dua kentang yang berdekatan 6 meter. Jarak kentang pertama ke keranjang 6 meter. Seorang peserta mulai bergerak dari keranjang, mengambil satu kentang sekali ambil dan memasukkannya ke dalam keranjang. Tentukanlah total jarak yang harus ditempuh peserta tersebut agar dapat menyelesaikan permainan!

Info Math

Tanpa menggunakan rumus, bagaimanakah cara menentukan jumlah 100 bilangan asli pertama? Caranya adalah sebagai berikut.

Misalkan, $J = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Kalian juga dapat menuliskan, $J = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$.

Sekarang, jumlahkan kedua nilai J tersebut.

$$\begin{array}{r} J = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ J = 100 + 99 + 98 + \dots + 1 \\ \hline 2J = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \\ 2J = 100 \times 101 \\ 2J = 10.100 \\ J = 5.050 \end{array}$$

Jadi, jumlah 100 bilangan asli pertama adalah 5.050.

Bentuk umum penjumlahan bilangan asli dari 1 sampai n :

$$\begin{array}{r} J_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ J_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2J_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ 2J_n = n(n+1) \\ J_n = \frac{n}{2}(n+1) \end{array}$$



GaMeMath

Di balik huruf-huruf yang membentuk kata **HITUNG** berikut tersembunyi bilangan-bilangan dengan pola tertentu.

H I T U N G

Jika huruf N, G, dan T berturut-turut menyembunyikan lambang bilangan 396, 418, dan 352, tentukanlah lambang bilangan yang tersembunyi di balik huruf H, I, dan U!

B. Barisan dan Deret Geometri

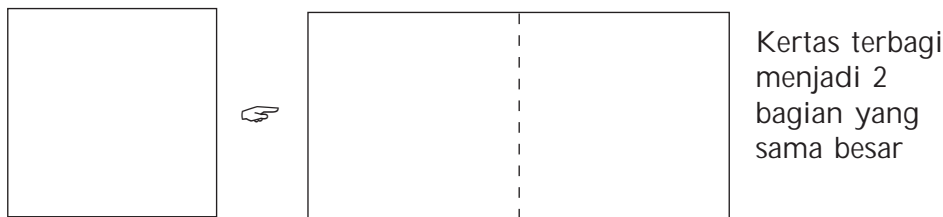
B. 1. Barisan Geometri

Niko Sentera mempunyai selembar kertas.

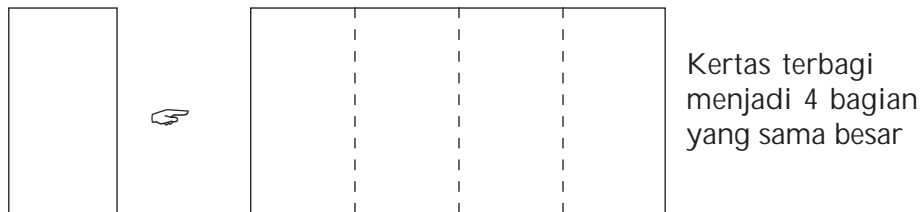
1 bagian kertas



Ia melipat kertas ini menjadi 2 bagian yang sama besar.

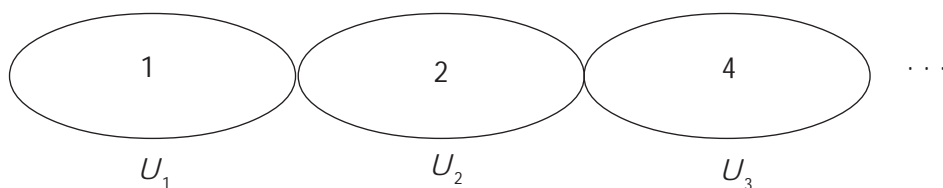


Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.



Niko Sentera terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat ini, ia selalu membuka hasil lipatan dan mendapatkan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian sebelumnya.

Sekarang, perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki

perbandingan yang sama, yaitu $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = 2$.

Tampak bahwa, perbandingan setiap dua suku berurutan pada barisan tersebut selalu tetap. Barisan bilangan seperti ini disebut **barisan geometri** dengan perbandingan setiap dua suku berurutannya dinamakan rasio (r).

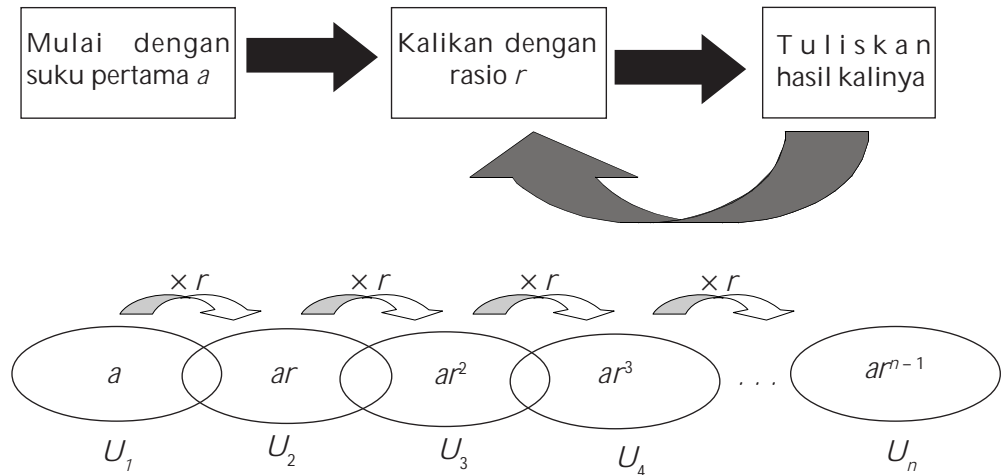
Barisan geometri adalah suatu barisan dengan pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Bentuk umum:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \text{ atau } a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$$

Pada barisan geometri, berlaku $\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$ sehingga $U_n = r U_{n-1}$

Jika kalian memulai barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r maka kalian mendapatkan barisan berikut.



Contoh

Diketahui barisan 27, 9, 3, 1, ... Tentukanlah:

- rumus suku ke- n
- suku ke-8

Jawab :

Rasio dua suku berurutan pada barisan 27, 9, 3, 1, ... adalah tetap, yaitu $r = \frac{1}{3}$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan geometri.

- Rumus suku ke- n barisan geometri tersebut adalah
$$\begin{aligned} U_n &= 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= 3^3 (3^{-1})^{n-1} \\ &= 3^3 \cdot 3^{-n+1} \\ &= 3^{4-n} \end{aligned}$$
- Suku ke-8 barisan geometri tersebut adalah
$$\begin{aligned} U_8 &= 3^{4-8} \\ &= 3^{-4} \\ &= \frac{1}{81} \end{aligned}$$

B.2. Deret Geometri

Jika setiap suku barisan geometri tersebut dijumlahkan, maka diperoleh *deret geometri*.

Deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan geometri.
Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \text{ atau } a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad \dots \text{ Persamaan 1}$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan 1 dengan r , didapatkan persamaan 2 berikut.

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad \dots \text{ Persamaan 2}$$

Sekarang, kurangkan persamaan 1 dengan persamaan 2.

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n)$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, |r| < 1$$

B. 3. Deret Geometri Tak Terhingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri dengan $|r| < 1$. Jumlah S dari deret geometri tak hingga adalah

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

Rumus pada deret geometri berlaku juga untuk n tak terhingga. Adapun untuk n tak terhingga terdapat dua kasus yang harus kalian perhatikan, yaitu:

Kasus 1

Jika $-1 < r < 1$, maka r^n menuju 0.

$$\text{Akibatnya, } S_\infty = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

Deret geometri dengan $-1 < r < 1$ ini disebut *deret geometri konvergen* (memusat).

Kasus 2

Jika $r < -1$ atau $r > 1$, maka untuk $n \rightarrow \infty$, nilai r^n makin besar.

Untuk $r < -1$, $n \rightarrow \infty$ dengan n ganjil didapat $r^n \rightarrow \infty$

Untuk $r < -1$, $n \rightarrow \infty$ dengan n genap didapat $r^n \rightarrow \infty$

Untuk $r > 1$, $n \rightarrow \infty$ didapat $r^n \rightarrow \infty$

$$\text{Akibatnya, } S_\infty = \frac{a(1 \pm \infty)}{1 - r} = \pm \infty$$

Deret geometri dengan $r < -1$ atau $r > 1$ ini disebut *deret geometri divergen* (memencar).

Catatan

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, |r| < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, |r| > 1$$

Contoh

1. Suatu deret geometri mempunyai suku ke-5 sama dengan 64 dan suku ke-2 sama dengan 8. Tentukanlah jumlah 10 suku pertama dan jumlah n suku pertama deret geometri tersebut!

Jawab:

$$U_2 = 8, \text{ berarti } ar = 8$$

$$U_5 = 64, \text{ berarti:}$$

$$ar^4 = 64$$

$$ar \cdot r^3 = 64$$

$$8r^3 = 64$$

$$r^3 = 8$$

Didapat $r = 2$.

Dengan mensubstitusi $r = 2$ ke persamaan $ar = 8$, kalian mendapatkan $a \cdot 2 = 8$ sehingga $a = 4$.

$$\begin{aligned} \text{Jumlah } n \text{ suku pertama deret ini adalah } S_n &= \frac{4(1 - 2^n)}{1 - 2} \\ &= \frac{4 - 4 \cdot 2^n}{-1} \\ &= 4 \cdot 2^n - 4 \\ &= 2^2 \cdot 2^n - 4 \\ &= 2^{2+n} - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jumlah 10 suku pertama deret ini adalah } S_{10} &= 2^{2+10} - 4 \\ &= 2^{12} - 4 \\ &= 4.096 - 4 \\ &= 4.092 \end{aligned}$$

2. Tentukanlah nilai x agar deret geometri $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ konvergen.

Jawab:

Terlebih dahulu, kalian harus menentukan rasio dari deret tersebut.

$$r = \frac{x}{1} = x$$

Agar deret geometri tersebut konvergen, haruslah $-1 < r < 1$ sehingga $-1 < x < 1$.



3. Niko Sentera memotong seutas tali menjadi 5 potong. Panjang kelima potong tali ini membentuk barisan geometri. Jika potongan yang paling pendek 2 cm dan potongan yang paling panjang 162 cm, berapakah panjang tali semula?

Jawab:

Panjang potongan yang paling pendek merupakan U_1 , sedangkan panjang potongan yang paling panjang merupakan U_5 .

Jadi, $U_1 = 2$ cm dan $U_5 = 162$ cm.

Dari $U_1 = 2$ cm, didapat $a = 2$ cm.

Dari $U_5 = 162$ cm, didapat $ar^4 = 162$ cm.

Oleh karena $a = 2$ cm, maka $2 \cdot r^4 = 162$ cm. Didapat, $r^4 = 81$.

Jadi, $r = 3$.

Panjang tali semula merupakan jumlah 5 suku pertama deret geometri tersebut, yaitu:

$$S_5 = \frac{2(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{2(1 - 243)}{-2} = 242 \text{ cm}$$

Jadi, panjang tali semula adalah 242 cm.

Catatan

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_{\infty} = S_{\text{ganjil}} - S_{\text{genap}}$$

$$S_{\text{ganjil}} = \frac{a}{1 - r^2}$$

$$S_{\text{genap}} = \frac{ar}{1 - r^2}$$

$$r = \frac{S_{\text{ganjil}}}{S_{\text{genap}}}$$

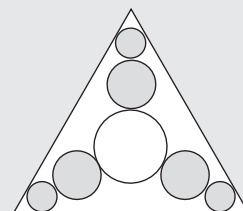
Asah Kompetensi 2

- Tentukanlah suku yang dicantumkan di akhir barisan dan juga suku ke- n dari setiap barisan berikut!
 - $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \dots, U_{10}$
 - $128, -64, 32, \dots, U_{12}$
 - $1, \sqrt{2}, 2, \dots, U_9$
 - $1, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a^2+2a+1}, \dots, U_6$
- Suku kedua suatu deret geometri adalah 10, suku ke-4 adalah 40, dan suku ke- n adalah 160. Jika suku-suku deret geometri tersebut merupakan suku-suku positif, tentukanlah jumlah n suku pertama deret tersebut!
 - Suku ke-5 suatu deret geometri adalah 12 dan suku ke-8 adalah 96. Tentukanlah jumlah 8 suku pertama deret tersebut!
 - Suku ke-5 suatu deret adalah geometri x^3 dan suku ke-8 adalah x^4 . Tentukanlah jumlah 6 suku pertama deret tersebut!
 - Suku pertama suatu deret geometri adalah x^{-4} , suku ke-3 adalah x^{2a} , dan suku ke-8 adalah x^{52} . Tentukanlah nilai a dan jumlah 10 suku pertama deret tersebut!
- Tentukan nilai x agar deret geometri berikut konvergen.
 - $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \dots$
 - $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots$
 - $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^3 + \dots$
 - $\cos x + \cos x \sin x + \cos x \sin^2 x + \dots$
- Jika U_n menyatakan suku ke- n barisan geometri, a suku pertama, dan r rasio, maka tentukan $\frac{U_{n+2} \cdot U_{n-2}}{(U_{n-1})^2}$.
- Di antara bilangan 7 dan 448 disisipkan dua bilangan sehingga keempat bilangan tersebut membentuk barisan geometri. Tentukan rasio dari barisan tersebut!
- Tentukan nilai x agar $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^x = 1.364$
- Diketahui $P = {}^{64}\log(x-2) + {}^{64}\log^2(x-2) + {}^{64}\log^3(x-2) + \dots$
Agar $1 < P < 2$, tentukanlah nilai x . Olimpiade Matematika SMU, 2000
- Tiga orang membagi sebuah apel. Pertama, apel dibagi menjadi empat bagian sehingga setiap orang mendapat bagian. Bagian keempat dibagi empat bagian dan setiap orang mendapat bagian, demikian seterusnya. Berapa bagiankah yang didapat oleh mereka masing-masing?

Siapa Berani

Perhatikan gambar di samping!

Di dalam segitiga samasisi yang panjang sisinya 20 cm diisi lingkaran-lingkaran yang jumlahnya sampai tak hingga. Tentukanlah luas lingkaran seluruhnya!





ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 90 menit

1. Jika U_n menyatakan suku ke- n , S_n jumlah n suku pertama, a suku pertama, dan b beda barisan aritmetika, tentukanlah:

a. $U_{n+3} - 3U_{n+2} + 3U_{n+1} + U_n$

b. $S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$

Bobot soal: 20

2. a. Di antara bilangan 3 dan 57 disisipkan 8 bilangan sehingga terbentuk barisan aritmetika. Tentukanlah beda dari barisan tersebut!

- b. Di antara bilangan 2 dan 62 disisipkan 9 bilangan sehingga terbentuk deret aritmetika. Tentukanlah jumlah suku-suku deret tersebut!

- c. Di antara bilangan a dan b disisipkan 4 bilangan sehingga terbentuk barisan geometri dengan rasio. Jika jumlah semua bilangan tersebut 53, tentukanlah suku kedua dari barisan tersebut!

Bobot soal: 20

3. Tiga bilangan rasional membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan 42 dan hasil kalinya 2.520. Tentukanlah bilangan terkecilnya!

Bobot soal: 20

4. U_1, U_2, U_3, U_4 , dan U_5 adalah 5 suku pertama deret geometri. Jika $\log U_1 + \log U_2 - \log U_3 + \log U_4 + \log U_5 = 5 \log 3$ dan $U_4 = 12$, tentukanlah U_5 .

Bobot soal: 20

Olimpiade Matematika SMU, 2001

5. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5, maka akan terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukanlah jumlah barisan aritmetika dan barisan geometri yang terbentuk!

Bobot soal: 10

6. Pada barisan bilangan 4, x , y , z diketahui tiga suku pertama membentuk barisan geometri dan tiga suku terakhir membentuk barisan aritmetika. Tentukanlah nilai $x + y$.

Bobot soal: 10

Olimpiade Matematika SMU, 2001

C. Notasi Sigma dan Induksi Matematika

Notasi sigma yang dilambangkan dengan " Σ " adalah sebuah huruf Yunani yang artinya penjumlahan. Notasi ini digunakan untuk meringkas penulisan penjumlahan bentuk panjang dari jumlah suku-suku yang merupakan variabel berindeks atau suku-suku suatu deret.

Jika diketahui suatu barisan tak berhingga $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, maka jumlah dari n suku pertama barisan tersebut dinyatakan dengan $\sum_{k=1}^n a_k$.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Jumlah suatu deret aritmetika dan geometri (S_n) dapat ditulis dalam notasi sigma, yaitu:

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Untuk deret aritmetika:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a + (k-1)b) = a + (a+b) + (a+2b) + \dots + (a+(n-1)b)$$

Untuk deret geometri:

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

Contoh

Tentukanlah bentuk umum dari setiap deret berikut dengan menggunakan notasi sigma dan hitunglah hasil dari penjumlahan deret tersebut!

- $1 + 3 + 5 + 7 + 9$
- $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$
- $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$

Jawab:

$$a. \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{n=1}^5 (2n-1) = 25.$$

Pada notasi sigma ini, $n = 1$ disebut batas bawah, sedangkan 5 disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan 5 bilangan ganjil pertama.

$$b. \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Pada notasi sigma ini, $k = 1$ disebut batas bawah, sedangkan n disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan n bilangan ganjil pertama.

$$c. \quad 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1).$$

Pada notasi sigma ini, $k = 1$ disebut batas bawah sedangkan n disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan n bilangan kuadrat pertama.

Pada contoh nomor 2, kalian menyatakan bahwa jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2 . Adapun pada contoh nomor 3, kalian menyatakan bahwa jumlah n bilangan kuadrat pertama adalah $n(n+1)(2n+1)$. Apakah rumus yang kalian tuliskan tersebut benar?

Untuk membuktikannya, kalian dapat menggunakan induksi matematika yang telah kalian pelajari di kelas X. Langkah-langkah pembuktian tersebut adalah sebagai berikut.

- Buktikan rumus tersebut berlaku untuk $n = 1$.
- Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$,
- Buktikanlah bahwa rumus tersebut berlaku juga untuk $n = k + 1$.

Dengan induksi matematika ini, kalian dapat membuktikan contoh nomor 2 dan contoh nomor 3.

Akan dibuktikan $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Misalkan, $P(n) = 2n - 1$

Untuk $n = 1$, $P(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Jadi, untuk $n = 1$, rumus berlaku sebab ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.

Misalkan rumus berlaku untuk $n = k$, maka $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Selidiki, apakah rumus berlaku untuk $n = k + 1$?

Untuk $n = k + 1$, pada ruas kiri didapat,

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Pada ruas kanan persamaan, didapat $(k + 1)^2$.

Jadi, untuk $n = k + 1$, ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu $(k + 1)^2$.

Dengan demikian, $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk $n = k$ dan untuk $n = k + 1$, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan asli.

Sekarang, akan dibuktikan $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{1}{2} n(n + 1)(2n + 1)$.

Misalkan $P(n) = n^2$.

Untuk $n = 1$, pada ruas kiri persamaan $P(1) = 1^2 = 1$.

Pada ruas kanan didapat $\frac{1}{6} \cdot 1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$.

Jadi, untuk $n = 1$ rumus berlaku, sebab ruas kiri dan ruas persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.

Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$, maka

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1).$$

Selidiki, apakah rumus berlaku untuk $n = k + 1$?

Untuk $n = k + 1$, didapat ruas kiri persamaan,

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 4 + 9 + 16 + \dots + k^2}_{\frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1)} + (k + 1)^2 &= \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1) \left(\frac{2k^2}{6} + \frac{7k}{6} + 1 \right) \\ &= (k + 1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= (k + 1)(k + 2)(2k + 3) \end{aligned}$$

Pada ruas kanan persamaan, juga didapat $\frac{1}{6} (k + 1)(k + 2)(2k + 3)$.

Jadi, untuk $n = k + 1$, ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu $(k + 1)(k + 2)(2k + 3)$.

Dengan demikian, $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ berlaku untuk $n = k$ dan untuk $n = k+1$ sehingga kalian dapat membuat kesimpulan bahwa $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ di mana n adalah bilangan asli.

Berikut ini adalah sifat-sifat notasi sigma.

Jika m dan n adalah bilangan asli, dengan $m \leq n$ dan $c \in R$, maka berlaku:

1. $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
2. $\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$
3. $\sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k$
4. $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_k - p$
5. $\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$
6. $\sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_k$
7. $\sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0$
8. $\sum_{k=m}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=m}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=m}^n a_k \cdot b_k + \sum_{k=m}^n b_k^2$

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah bentuk notasi sigma dari setiap deret berikut!
 - a. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$
 - b. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$
 - c. $1 + 8 + 27 + 64 + \dots$
 - d. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \dots$
 - e. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

2. Nyatakanlah bentuk notasi sigma berikut dalam bentuk deret!

a. $\sum_{n=2}^6 (2n + 1)$

c. $\sum_{n=1}^6 (1 - 4n)$

b. $\sum_{n=1}^5 (n^2 - 1)$

d. $\sum_{n=5}^{10} \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)$

3. Tentukanlah bentuk notasi sigma dari penjumlahan berikut!

a. $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n$

b. $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{20}$

c. $a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots + ab^{2n-1} + b^{2n}$

4. Buktikanlah!

a. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c. $(a_0 + 1) + (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_{n-1} + 1) = \sum_{n=1}^1 an$

D. Aplikasi Barisan dan Deret

Barisan dan deret banyak digunakan dalam bidang ekonomi seperti perbankan, perdagangan, dan lain sebagainya. Lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Rina menanam modal sebesar Rp20.000.000,00 dengan bunga majemuk 5%. Berapakah besar modal setelah 2 tahun?

Jawab:

Misalkan M adalah modal awal, b adalah bunga setiap tahun, n adalah periode, dan M_n adalah modal setelah ditambah bunga majemuk.

- $M = \text{Rp}20.000.000,00$
- $n = 2$
- $b = 5\% = 0,05$
- $M_n = M(1 + b)^n$
 $= 20.000.000(1 + 0,05)^2$
 $= 20.000.000(1,05)^2$
 $= 22.050.000$

Jadi, setelah 2 tahun modalnya menjadi Rp22.050.000,00.

2. Wagiman membeli sebuah komputer seharga Rp3.000.000,00. Setiap satu bulan kerja terjadi penyusutan sebesar 10% dari harga beli. Berapakah harga jual komputer tersebut pada akhir 9 bulan kerja?

Jawab:

Misalkan M adalah harga beli, p adalah penyusutan, n adalah periode, dan M_n adalah modal setelah ditambah harga majemuk.

- $M = \text{Rp}3.000.000,00$
- $p = 10$
- $n = 9$

Harga komputer pada akhir periode n adalah $M = M \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

Maka harga jual komputer pada akhir 9 bulan kerja adalah

$$\begin{aligned} 3.000.000 \left(1 - \frac{10}{100}\right)^9 &= 3.000.000(1 - 0,1)^9 \\ &= 3.000.000(0,9)^9 \\ &= 3.000.000 \cdot 0,387 \\ &= 1.161.000 \end{aligned}$$

Jadi, harga jual komputer setelah 9 bulan kerja adalah Rp1.161.000,00.

Asah Kompetensi 4

1. Pada setiap awal tahun Wisnu menanamkan modalnya sebesar Rp5.000.000,00 dengan bunga majemuk 6% per tahun. Hitunglah jumlah seluruh modal Wisnu setelah 3 tahun!
2. Makmur membeli sebuah motor dengan harga Rp10.000.000,00. Setiap tahun diperkirakan menyusut 15%. Tentukanlah harga jual motor tersebut setelah 2 tahun!



2

ASA KEMAMPUAN

Waktu : 90 menit

1. Tuliskan penjumlahan berikut dengan notasi sigma. Kemudian, tentukanlah hasil penjumlahannya

a. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{50}$

b. $1 + 16 + 81 + 256 + \dots + n^4$

c. $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \dots$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

Bobot soal: 20

$$d. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{1997 \cdot 1999}$$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

$$e. \frac{1}{5^{-10}+1} + \frac{1}{5^{-9}+1} + \dots + \frac{1}{5^{-1}+1} + \frac{1}{5^0+1} + \dots + \frac{1}{5^{10}+1}$$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

2. Tentukanlah hasil penjumlahan yang dituliskan dengan notasi sigma berikut!

Bobot soal: 10

$$a. \sum_{n=1}^7 2^{n-1}$$

$$c. \sum_{k=0}^{10} (2^k - 2^{k-1})$$

$$e. \sum_{l=3}^7 (-1)^l (5l^2 - 4l)$$

$$b. \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$d. \sum_{i=-1}^6 (2i^2 - 3i + 1)$$

3. Buktikanlah dengan induksi matematika!

Bobot soal: 30

- a. Untuk semua bilangan asli n , berlaku:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- b. Untuk semua bilangan asli $n \geq 1$, berlaku

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

- c. Untuk semua bilangan asli n , berlaku $(1+h)^n \geq 1+nh$

- d. Untuk semua bilangan asli $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

- e. Untuk semua bilangan asli n , $(2+n) + (2-n)$ selalu merupakan bilangan bulat

4. Ferdy membuka tabungan di bank pada bulan Desember 2003 sebesar Rp500.000,00. Pada bulan Januari 2004, Ferdy menabung Rp50.000,00, kemudian pada bulan Maret 2004 menabung lagi sebesar Rp55.000,00. Pada bulan-bulan berikutnya, Ferdy menabung Rp60.000,00, Rp65.000,00, dan seterusnya sampai bulan Desember 2004. Berapakah jumlah seluruh tabungan Ferdy sampai akhir tahun 2004? (tidak termasuk bunga bank).

Bobot soal: 20

5. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 meter. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai, bola itu dipantulkan lagi dan mencapai tinggi $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukanlah panjang seluruh jalan yang dilalui bola itu sampai berhenti!

Bobot soal: 20

Andika ingin mengambil uang di ATM yang hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000,00 dan Rp50.000,00. Kelipatan berapakah uang yang dapat diambil Andika jika ia akan mengambil kedua pecahan uang tersebut?

Sumber : Matematika Diskrit



Sumber: www.andrew.cmu.edu

Rangkuman

1. Barisan adalah bilangan-bilangan yang diurutkan menurut suatu aturan tertentu. Bentuk umum barisan dituliskan sebagai berikut.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$$

2. Deret adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan. Bentuk umum deret dituliskan sebagai berikut.

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

3. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan dengan selisih setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Selisih dua suku berurutannya disebut beda (b). Bentuk umum suku ke- n barisan aritmetika dituliskan sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

di mana U_n = Suku ke- n

a = Suku pertama

b = Beda

n = Banyaknya suku

4. Deret aritmetika adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan aritmetika. Bentuk umum jumlah n suku pertama deret aritmetika dituliskan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

di mana S_n = Jumlah suku ke- n

n = Banyaknya suku

a = Suku pertama

b = Beda

U_n = Suku ke- n

5. Barisan geometri adalah barisan bilangan dengan perbandingan setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Perbandingan setiap dua suku berurutannya disebut rasio (r). Bentuk umum suku ke- n barisan geometri dituliskan sebagai berikut.

$$U_n = ar^{n-1}$$

di mana U_n = Suku ke- n

a = Suku pertama

r = Rasio

n = Banyaknya suku

6. Deret geometri adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan geometri. Bentuk umum jumlah n suku pertama deret geometri dituliskan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$$

di mana S_n = Jumlah suku ke- n

a = Suku pertama

r = Rasio

n = Banyaknya suku

7. Deret geometri tak terhingga terdiri dari dua kasus.

- Deret geometri konvergen (memusat)

Jika $-1 < r < 1$, maka $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

- Deret geometri divergen (memencar)

Jika $r < -1$ atau $r > 1$, maka $S_\infty = \pm\infty$

8. Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika:

- a. Buktikan bahwa rumus berlaku untuk $n = 1$.
- b. Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$.
- c. Buktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk $n = k + 1$.

Ulangan Bab 5

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

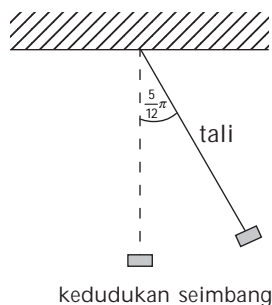
- Jumlah bilangan-bilangan bulat antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7 adalah
A. 66.661 D. 54.396
B. 45.692 E. 36.456
C. 73.775
- Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah 8, dan jumlah semua suku pada urutan genap adalah $\frac{8}{3}$. Suku kelima deret tersebut adalah
A. 1 D. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{3}$
- Jumlah suku-suku nomor ganjil suatu deret geometri tak terhingga adalah 4. Rasio deret tersebut adalah $\frac{1}{2}$. Maka deret tersebut adalah
A. $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \dots$ D. $\frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}, \dots$
B. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ E. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \dots$
C. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \dots$
- Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = \frac{1}{2}n(11 - n)$. Suku ke-100 adalah
A. -1 D. 6
B. -94 E. 3
C. 12
- Diketahui deret bilangan $10 + 12 + 14 + 16 + \dots + 98$. Jumlah bilangan dari deret bilangan yang habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah
A. 1.380 D. 3.300
B. 1.500 E. 4.400
C. 1.980
- Jumlah 10 suku pertama deret ${}^a\log \frac{1}{x} + {}^a\log \frac{1}{x^2} + {}^a\log \frac{1}{x^3} + \dots$ adalah
A. $-55 {}^a\log x$ D. $\frac{1}{45} {}^a\log x$
B. $\frac{1}{55} {}^a\log x$ E. $\frac{1}{35} {}^a\log x$
C. $-45 {}^a\log x$
- U_n adalah suku ke- n suatu deret. Jika suku pertama deret itu 100 dan $U_{n+1} - U_n = -6$ untuk setiap n , maka jumlah semua suku deret itu yang positif adalah
A. 888 D. 864
B. 886 E. 846
C. 884
- Hasil kali suku kedua dan suku keempat dari suatu barisan geometri yang semua sukunya positif adalah 16. Jika jumlah tiga suku pertama adalah 7, maka suku pertamanya adalah
A. 4 D. 1
B. $\frac{3}{2}$ E. 0
C. 2
- Tiga bilangan memberikan suatu deret geometri. Jika hasil kalinya adalah 216 dan jumlahnya adalah 26, maka rasio deret tersebut adalah
A. 2 atau $\frac{1}{2}$ D. 3 atau $\frac{1}{3}$
B. 18 atau 2 E. 4 atau $\frac{1}{4}$
C. 36 dan 20

10. Diketahui barisan sepuluh bilangan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$. Jika $a_1 = 2p + 25$, $a_2 = -p + q$, $a_3 = 3p + 7$, dan $a_{n+1} - a_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 9$, maka jumlah semua bilangan itu adalah \dots

- A. -240 D. -180
B. -220 E. -160
C. -200

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Sebuah ayunan memiliki panjang tali 60 cm mulai berayun dari posisi terjauh ke kedudukan seimbang sebesar $\frac{5}{12}\pi$ rad. Posisi terjauh yang dicapainya setiap kali berkurang sebesar 15 posisi dari sebelumnya. Tentukanlah panjang busur yang dijalani ujung ayunan itu sampai berhenti penuh!



2. Edwin menumpuk bata dalam bentuk barisan. Banyaknya bata pada baris pertama lebih banyak satu bata dari banyaknya bata pada baris di atasnya. Tumpukan bata dimulai dari 200 bata pada baris pertama dan baris terakhir satu bata. Hitunglah jumlah semua bata yang ditumpuk!
3. Berdasarkan survei, populasi hewan P bertambah menjadi empat kali lipat setiap 5 tahun. Jika pada tahun 200 populasi hewan P adalah 640 ekor, berapakah populasi hewan tersebut pada tahun 1990?
4. Grafik hasil produksi suatu pabrik per tahun merupakan suatu garis lurus. Jika produksi pada tahun pertama 150 unit dan pada tahun ketiga 190, tentukanlah produksi tahun ke-10!
5. Riska membeli barang kredit seharga Rp880.000,00. Ia melakukan pembayaran dengan diangsur berturut-turut setiap bulan sebesar Rp25.000,00, Rp27.000,00, Rp29.000,00, demikian seterusnya. Berapa lamakah kredit barang tersebut akan lunas?