

Vektor



Sumber: <http://images.encarta.msn.com>

Pernahkan kalian melihat lembing yang meluncur di udara saat dilempar oleh atlet lempar lembing? Lembing tersebut meluncur dengan kecepatan dan arah tertentu sesuai dengan keinginan sang atlet. Dalam matematika, lembing yang meluncur ini mewakili sebuah vektor, yaitu suatu besaran yang memiliki besar dan arah. Agar kalian lebih memahami tentang vektor ini, pelajailah bab berikut.

- A. Pengertian Vektor
- B. Operasi pada Vektor
- C. Perbandingan Vektor
- D. Perkalian Skalar Dua Vektor dan Proyeksi Vektor

A. Pengertian Vektor

Untuk memahami tentang vektor, lakukanlah kegiatan berikut.

Aktivitas di Kelas

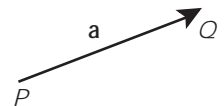
1. Gambarlah sebuah ruas garis pada selembar kertas!
2. Berilah tanda panah pada ujung ruas garis tersebut ini!
3. Sebut titik pangkal ruas garis sebagai titik P dan titik ujungnya sebagai titik Q .
4. Ukurlah panjang ruas garis dengan menggunakan penggaris!
5. Diskusikan dengan teman sebangkumu!
6. Apa yang dapat disimpulkan dari aktivitas ini? Kemukakan hasil kegiatan ini di depan kelas!

Ruas garis berarah yang kalian gambar pada kegiatan ini mewakili sebuah vektor. Panjang garis yang diukur menggunakan penggaris menunjukkan panjang vektor tersebut. Karena titik pangkal P dan titik ujung Q , maka vektor disebut sebagai vektor \overrightarrow{PQ} . Panjang vektor \overrightarrow{PQ} ini dilambangkan dengan $|\overrightarrow{PQ}|$.

Selain cara di atas, sebuah vektor dapat pula ditulis menggunakan:

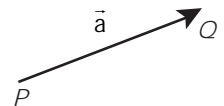
- huruf kecil yang dicetak tebal.

Seperti \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , dan sebagainya. Misalnya, vektor \overrightarrow{PQ} di samping ditulis sebagai vektor \mathbf{a} .



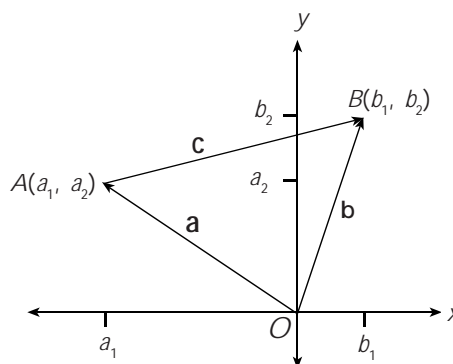
- huruf kecil yang di atas huruf itu dibubuhi tanda panah.

Seperti \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} dan sebagainya. Misalnya vektor \overrightarrow{PQ} dapat ditulis sebagai vektor \vec{a} .



Penulisan vektor dengan menggunakan lambang panah di atas lebih sering digunakan. Karena menggunakan tulisan tangan, vektor yang dibubuhi tanda panah lebih mudah dituliskan daripada yang dicetak tebal. Kalian bebas memilih cara penulisan vektor tersebut.

Sekarang, perhatikan sebarang titik $A(a_1, a_2)$ dan titik $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius berikut.



Gambar 5.1

Titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada bidang Cartesius tersebut, vektor **a** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(a_1, a_2)$. Oleh karena itu, vektor **a** ini dapat kalian tuliskan dalam bentuk pasangan terurut $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Adapun vektor **b** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(b_1, b_2)$. Vektor **b** dapat kalian tuliskan sebagai $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

Dengan menggunakan rumus jarak, kalian dapat menentukan panjang vektor **a** dan **b** ini, yaitu:

$$\text{Panjang vektor } \mathbf{a} \text{ adalah } |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\text{Panjang vektor } \mathbf{b} \text{ adalah } |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Dengan menarik ruas garis dari titik A ke titik B , kalian mendapatkan vektor **c**. Dengan menggunakan rumus jarak, vektor **c** ini dapat di tuliskan sebagai $\mathbf{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ sehingga panjang vektor **c** adalah

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Jika arah vektor **c** dibalik, maka akan didapat vektor $-\mathbf{c}$, yaitu sebuah vektor yang panjangnya sama dengan panjang vektor **c** dengan arah berlawanan. Vektor ini disebut vektor invers dari vektor **c**. Jika ditulis dalam bentuk pasangan terurut, vektor $-\mathbf{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Panjangnya adalah

$$|-\mathbf{c}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Untuk setiap vektor **a** yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor **a**, dilambangkan dengan $\hat{\mathbf{e}}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor **a** dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$ dan $\hat{\mathbf{j}}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan pemahaman yang sama seperti vektor pada bidang (R^2), kalian dapat memahami vektor pada ruang (R^3). Misalnya, ambil sebarang titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dan $B(b_1, b_2, b_3)$ pada ruang (R^3), maka kalian dapat menuliskan vektor **a** yang mewakili vektor \vec{OA} dan vektor **b** yang mewakili vektor \vec{OB} dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ dan } \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Panjang kedua vektor ini masing-masing

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ dan } |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Untuk vektor pada ruang (R^3), juga dapat ditentukan vektor satuannya. Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari \mathbf{a} dirumuskan dengan:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, dan $\hat{\mathbf{k}}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh

1. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(0, 3, 5)$, $B(2, 4, 6)$, dan $C(4, 3, 1)$. Tentukan:
 - a. Vektor \mathbf{p} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B
 - b. Vektor \mathbf{q} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C
 - c. Vektor \mathbf{r} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C
 - d. Keliling segitiga ABC

Jawab:

- a. Vektor \mathbf{p} mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B , maka $\mathbf{p} = \vec{AB} = (2 - 0, 4 - 3, 6 - 5) = (2, 1, 1)$.

Panjang vektor \mathbf{p} adalah $|\mathbf{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{6}$$

- b. Vektor \mathbf{q} mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C , maka $\mathbf{q} = \vec{BC} = (4 - 2, 3 - 4, 1 - 6) = (2, -1, -5)$.

Panjang vektor \mathbf{q} adalah

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$

- c. Vektor \mathbf{r} mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C , maka $\mathbf{r} = \vec{AC} = (4 - 0, 3 - 3, 1 - 5) = (4, 0, -4)$.

Panjang vektor \mathbf{r} adalah $|\mathbf{r}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2}$

$$= \sqrt{16 + 16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

- d. Keliling segitiga ABC adalah $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| + |\mathbf{r}| = \sqrt{6} + \sqrt{30} + 4\sqrt{2}$

2. Diketahui vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} di R^2 . Jika $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 7$, dan $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{105}$, tentukan $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Jawab:

Dari $|\mathbf{a}| = 5$, didapat $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 5 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 25 \dots$ Persamaan 1

Dari $|\mathbf{b}| = 7$, didapat $\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 7 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = 49 \dots$ Persamaan 2

Dari $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{105}$, didapat $\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} = \sqrt{105}$

Sehingga diperoleh

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = 105 \Rightarrow a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 = 105$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 105 \dots \text{Persamaan 3}$$

Substitusi persamaan 1 dan 2 ke persamaan 3

$$25 + 49 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 105$$

$$2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 31 \dots \text{Persamaan 4}$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (2a_1b_1 + 2a_2b_2)}$$

$\dots \text{Persamaan 5}$

Substitusi persamaan 1, 2, dan 4 ke persamaan 5

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{25 + 49 - 31} = \sqrt{43}$$

Jadi, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{43}$.



ASA H KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Gambarkan vektor-vektor berikut pada koordinat Cartesius!

a. $\mathbf{k} = (4, 7)$

b. $\mathbf{l} = (7, 4)$

c. $\mathbf{m} = (5, 0)$

d. $\mathbf{n} = (0, -5)$

e. $\mathbf{o} = (-5, -5)$

f. $\mathbf{p} = (-3, 0, 3)$

g. $\mathbf{q} = (6, 7, 8)$

h. $\mathbf{r} = (-2, -2, 0)$

i. $\mathbf{s} = (4, 4, 4)$

j. $\mathbf{t} = (0, 0, 0)$

Bobot soal: 20

2. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(3, 4, 2)$, $B(6, -3, 5)$, dan $C(2, 5, 6)$.

- a. Gambarlah segitiga tersebut.

Bobot soal: 30

- Tentukanlah vektor \mathbf{a} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B dan tentukan panjang vektor \mathbf{a} .
- Tentukanlah vektor \mathbf{b} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C dan tentukan panjang vektor \mathbf{b} .
- Tentukanlah vektor \mathbf{c} yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C dan tentukan panjang vektor \mathbf{c} .
- Tentukanlah keliling segitiga ABC .
- Tentukanlah luas segitiga ABC .

- Diketahui vektor $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, dan $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$. Tentukanlah:

Bobot soal: 20

- | | |
|--|--|
| a. $ \mathbf{u} + \mathbf{v} $ | e. $ \mathbf{w} - \mathbf{u} $ |
| b. $ \mathbf{u} + \mathbf{v} $ | f. $ \mathbf{w} - \mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{u} $ |
| c. $ \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{v} $ | g. $\frac{1}{ \mathbf{w} } \mathbf{w}$ |
| d. $ \mathbf{w} - \mathbf{u} $ | h. $\left \frac{1}{ \mathbf{w} } \right \mathbf{w}$ |

- Diketahui vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} di \mathbb{R}^2 .

Bobot soal: 30

- Jika $|\mathbf{u}| = 5$, $|\mathbf{v}| = 2$, dan $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 19$, tentukanlah $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$
- Jika $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$, dan $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 7$, tentukanlah $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$
- Jika $|\mathbf{u}| = 4$, $|\mathbf{v}| = 3$, dan $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{37}$, tentukanlah $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

Siapa Berani

Buktikan secara geometris dan aljabar bahwa jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} di \mathbb{R}^2 , maka:

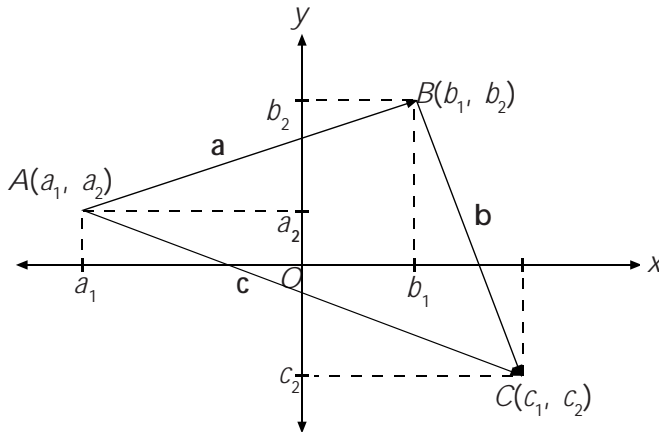
- $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$
- $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$

Sumber: *Elementary Linear Algebra*

B. Operasi pada Vektor

B. 1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Perhatikan titik-titik $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, dan $C(c_1, c_2)$ pada koordinat Cartesius berikut ini!



Gambar 5.2

Titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ dan $C(c_1, c_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada gambar tersebut, vektor \mathbf{a} , \mathbf{b} , dan \mathbf{c} dapat kalian tulis sebagai berikut.

- $\mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Dapat pula ditulis, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{b} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$.

Dapat pula ditulis, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{c} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$.

Dapat pula ditulis, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Sekarang, jumlahkanlah vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} . Karena vektor merupakan matriks kolom, maka kalian dapat menjumlahkan vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} dengan menggunakan aturan penjumlahan matriks. Dengan aturan ini, akan diperoleh

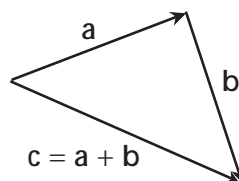
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 + c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 + c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}$.

Uraian tersebut menunjukkan bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Secara geometris, penjumlahan antara vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} ini dapat kalian lakukan dengan dua cara, yaitu:

a. Cara segitiga

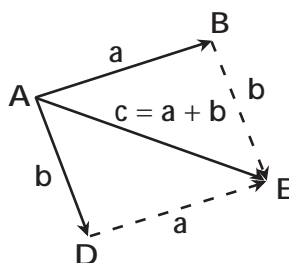
Dalam cara ini, titik pangkal vektor \mathbf{b} berimpit ruas dengan titik ujung vektor \mathbf{a} . Jumlah vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} didapat dengan menarik ruas garis dari titik pangkal vektor \mathbf{a} ke titik ujung vektor \mathbf{b} . Ruas garis ini diwakili oleh vektor \mathbf{c} . Akibatnya, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.



Gambar 5.3

Penjumlahan vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ dengan cara segitiga

b. Cara jajargenjang



Gambar 5.4

Penjumlahan vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ dengan cara jajargenjang

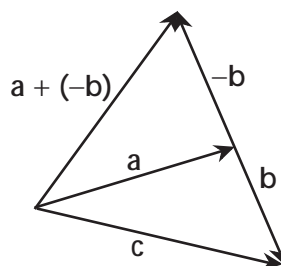
Misalkan, vektor \mathbf{a} mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B dan vektor \mathbf{b} mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal C ke titik D . Dalam cara jajargenjang, titik pangkal vektor \mathbf{a} berimpit dengan titik pangkal vektor \mathbf{b} , yaitu $A = C$.

Dengan membuat jajargenjang $ABED$, akan diperoleh

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BE} && \text{(Oleh karena } \vec{AD} = \vec{BE} \text{)} \\ &= \vec{AE} && \text{(Gunakan cara segitiga)}\end{aligned}$$

Oleh karena $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$, dan $\vec{AE} = \mathbf{c}$, maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

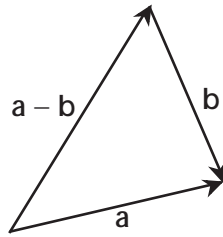
Sekarang, jika vektor \mathbf{a} dijumlahkan dengan invers vektor \mathbf{b} , maka kalian mendapatkan penjumlahan vektor $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ sebagai berikut.



Gambar 5.5

Penjumlahan vektor $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Seperti pada bilangan real, kalian dapat menuliskan $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Secara geometris, kalian dapat mengurangi \mathbf{a} dengan \mathbf{b} sebagai berikut.



Gambar 5.6
Pengurangan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ secara geometris

Dengan menggunakan aturan penjumlahan dan pengurangan matriks kolom, kalian dapat menyatakan aturan penjumlahan dan pengurangan vektor sebagai berikut.

- Untuk \mathbf{a} dan \mathbf{b} vektor-vektor di R^2 , berlaku

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

- Untuk \mathbf{a} dan \mathbf{b} vektor-vektor di R^3 , berlaku

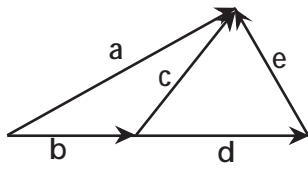
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



Gambar 5.7
Penjumlahan vektor

Perhatikan gambar berikut!

Dari gambar di samping, kalian dapat menyatakan:

- $b + c = a$
- $d + e = c$
- $b + d + e = a$

Contoh

Diketahui vektor-vektor $a = (0, -2, -1)$, $b = (2, 3, 4)$, dan $c = (-3, 0, 3)$, tentukan:

1. $a + b$
2. $b + a$
3. $b + c$
4. $b - c$
5. $c - b$
6. $a + a$
7. $a - a$
8. $a + 0$
9. $(a + b) + c$
10. $a + (b + c)$

Jawab:

1. $a + b = (0, -2, -1) + (2, 3, 4) = (0 + 2, -2 + 3, -1 + 4) = (2, 1, 3)$

Jadi, $a + b = (2, 1, 3)$.

2. $b + a = (2, 3, 4) + (0, -2, -1) = (2 + 0, 3 + (-2), 4 + (-1)) = (2, 1, 3)$

Jadi, $b + a = (2, 1, 3)$.

3. $b + c = (2, 3, 4) + (-3, 0, 3) = (2 + (-3), 3 + 0, 4 + 3) = (-1, 3, 7)$

Jadi, $b + c = (-1, 3, 7)$.

4. $b - c = (2, 3, 4) - (-3, 0, 3) = (2 - (-3), 3 - 0, 4 - 3) = (5, 3, 1)$

Jadi, $b - c = (5, 3, 1)$.

5. $c - b = (-3, 0, 3) - (2, 3, 4) = (-3 - 2, 0 - 3, 3 - 4) = (-5, -3, -1)$

Jadi, $c - b = (-5, -3, -1)$.

6. $a + a = (0, -2, -1) + (0, -2, -1) = ((0 + 0, -2 + (-2), -1 + (-1))) = (0, -4, -2)$

Jadi, $a + a = (0, -4, -2)$.

7. $a - a = (0, -2, -1) - (0, -2, -1) = ((0 - 0, -2 - (-2), -1 - (-1))) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$

Jadi, $a - a = \mathbf{o}$.

8. $a + \mathbf{o} = (0, -2, -1) + (0, 0, 0) = (0 + 0, -2 + 0, -1 + 0) = (0, -2, -1) = a$

Jadi, $a + \mathbf{o} = a$.

9. $(a + b) + c = (2, 1, 3) + (-3, 0, 3) = (2 + (-3), 1 + 0, 3 + 3) = (-1, 1, 6)$

Jadi, $(a + b) + c = (-1, 1, 6)$.

10. $a + (b + c) = (0, -2, -1) + (-1, 3, 7) = (0 + (-1), -2 + 3, -1 + 7) = (-1, 1, 6)$

Jadi, $a + (b + c) = (-1, 1, 6)$.

Asah Kompetensi 1

1. Diketahui vektor-vektor berikut.

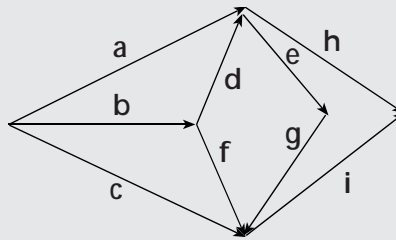


Jika $|a| = 2|c|$, dan $|b| = 2\frac{1}{2}|c|$, gambarkan vektor-vektor berikut!

- | | |
|------------------|------------------------|
| a. $a + b$ | k. $a - b$ |
| b. $b + a$ | l. $b - a$ |
| c. $b + c$ | m. $b - c$ |
| d. $c + b$ | n. $c - b$ |
| e. $a + c$ | o. $a - c$ |
| f. $c + a$ | p. $c - a$ |
| g. $(a + b) + c$ | q. $(a - b) + c$ |
| h. $(b + a) + c$ | r. $a - (b + c)$ |
| i. $a + (b + c)$ | s. $(a - b) + (a - c)$ |
| j. $a + (c + a)$ | t. $(a - b) - (a - c)$ |

2. Berdasarkan gambar berikut, tuliskanlah operasi-operasi vektornya dalam bentuk yang paling sederhana.

- a. $b + d$
 b. $b + f$
 c. $d + e$
 d. $a + e + g$
 e. $c - b$
 f. $c + i - h$



3. Diketahui vektor-vektor $a = (-5, -4, -3)$; $b = (1, 2, 3)$; dan $c = (-3, 8, 5)$; tentukanlah:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a. $ a + b $ | m. $(a + b) + c$ |
| b. $ b + c $ | n. $(b + a) + c$ |
| c. $ a - b $ | o. $a + (b + c)$ |
| d. $(a + b) + c $ | p. $a + (c + a)$ |
| e. $ a + (b + c)$ | q. $a - b$ |
| f. $(a - b) + c $ | r. $b - a$ |
| g. $a + b$ | s. $b - c$ |
| h. $b + a$ | t. $c - b$ |
| i. $b + c$ | u. $a - c$ |
| j. $c + b$ | v. $c - a$ |
| k. $a + c$ | w. $(a - b) + (a - c)$ |
| l. $c + a$ | x. $(a - b) - (a - c)$ |

4. Secara geometri, buktikan bahwa:

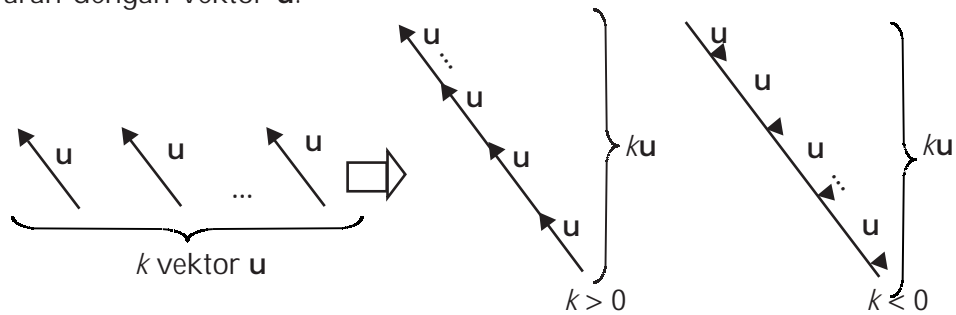
- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| a. $u + v = v + u$ | c. $u + o = o + u = u$ |
| b. $(u + v) + w = u + (v + w)$ | d. $u + (-u) = -u + u = o$ |

B. 2. Perkalian Skalar dengan Vektor

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari penjumlahan vektor. Apa yang terjadi jika vektor-vektor yang dijumlahkan adalah k vektor yang sama? Dalam penjumlahan tersebut, kalian akan mendapatkan sebuah vektor baru yang setiap komponen-komponennya diperoleh dengan mengalikan k dengan setiap komponen-komponen vektor \mathbf{u} . Akibatnya, vektor baru tersebut segaris dengan vektor \mathbf{u} dan memiliki panjang $k|\mathbf{u}|$.

Jika k skalar tak nol dan vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, maka $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$.

Dalam perkalian skalar dengan vektor ini, jika $k > 0$, maka vektor $k\mathbf{u}$ searah dengan vektor \mathbf{u} . Adapun jika $k < 0$, maka vektor $k\mathbf{u}$ berlawanan arah dengan vektor \mathbf{u} .



Gambar 5.8
Perkalian skalar dengan vektor \mathbf{u}

Contoh

1. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$ dan $\mathbf{b} = (2, 3, 2)$, tentukan vektor $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(1, 4, 5) + 3(2, 3, 2) \\ &= (2 \times 1, 2 \times 4, 2 \times 5) + (3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 2) \\ &= (2, 8, 10) + (6, 9, 6) \\ &= (8, 17, 16)\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (8, 17, 16)$.

2. Buktikan bahwa vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, kalian harus menunjukkan ada bilangan real k sehingga $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} = k\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(-3, 0, 6) - k(1, 0, -2) = (0, 0, 0)$$

$$(-3, 0, 6) - (k, 0, -2k) = (0, 0, 0)$$

$$(-3 - k, 0, 6 + 2k) = (0, 0, 0)$$

Didapat, $k = -3$, maka, $\mathbf{u} = -3\mathbf{v}$.

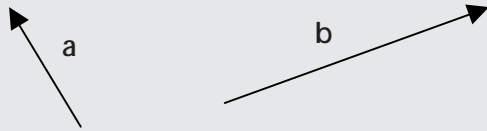
Jadi, vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.

Asah Kompetensi 2

1. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, -2, -1)$, dan $\mathbf{c} = (-1, -2, 3)$. Hitunglah:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a. $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ | d. $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ |
| b. $2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ | e. $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ |
| c. $-\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$ | f. $4\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ |

2. Diketahui vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} seperti gambar berikut.



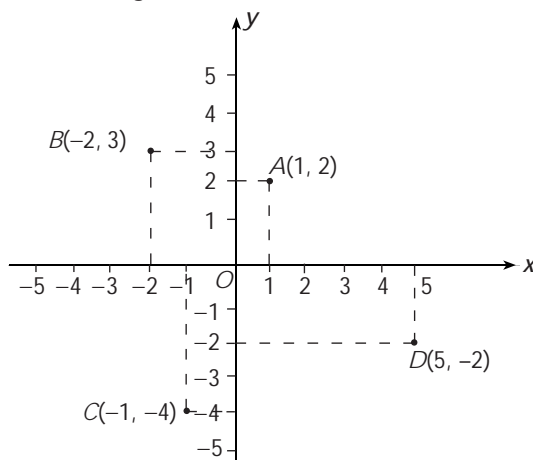
Gambarkan vektor \mathbf{c} jika:

- $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
- $\mathbf{c} = -3\mathbf{a} + \mathbf{b}$

- Carilah vektor dengan titik pangkal $P(2, -1, 4)$ yang mempunyai arah sama seperti vektor $\mathbf{v} = (7, 6, -3)!$
- Carilah vektor dengan titik ujung $Q(2, 0, -7)$ yang arahnya berlawanan dengan vektor $\mathbf{v} = (-2, 4, -1)!$
- Buktikanlah bahwa vektor $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (-4, 2, -6)!$
- Diketahui titik $A(2, 4, 6)$, $B(6, 6, 2)$, dan $C(14, 10, -6)$. Tunjukkan bahwa titik A , B , dan C segaris (kolinier)!

B.3. Sifat-Sifat Operasi Hitung pada Vektor

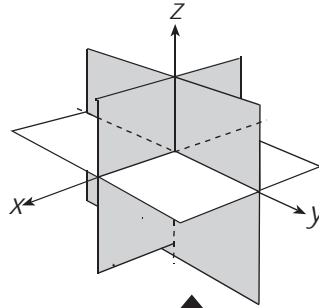
Vektor di R^2 berhubungan dengan letak suatu titik pada sebuah bidang dengan pasangan bilangan (x, y) merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat bidang.



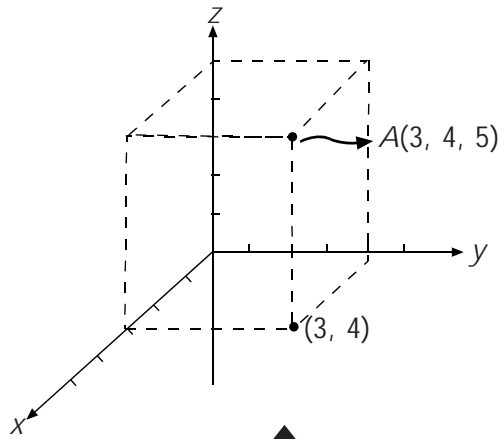
Gambar 5.9
Koordinat Cartesius di R^2

Vektor R^2 mempunyai pasangan bilangan (x, y, z) yang merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat ruang ke tiga sumbu membentuk tiga bidang, yaitu bidang xy , bidang xz , dan bidang yz .

Ketiga bidang tersebut membagi ruang dimensi tiga menjadi 8 daerah seperti Gambar 5.10.



Gambar 5.10
Daerah perpotongan pada ruang dimensi tiga



Gambar 5.11
Koordinat Cartesius di R^3

Sifat-sifat yang terdapat dalam operasi hitung vektor adalah sebagai berikut.

Jika \mathbf{a} , \mathbf{b} , dan \mathbf{c} vektor-vektor di R^2 atau di R^3 dan k serta l skalar tak nol maka berlaku hubungan berikut.

- | | |
|--|---|
| 1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | 5. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$ |
| 2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | 6. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ |
| 3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ | 7. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ |
| 4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | 8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ |

Dalam buku ini akan dibuktikan sifat 1, sifat 2, sifat 4, dan sifat 7. Untuk sifat-sifat yang lain, dapat kalian buktikan sendiri.

Pembuktian sifat 1

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\
 &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\
 &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) \\
 &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) \\
 &= \mathbf{b} + \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, maka:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= ((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) + (c_1, c_2, c_3) \\&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3) \\&= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) \\&= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3)) \\&= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\&= (a_1, a_2, a_3) + ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)) \\&= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Pembuktian sifat 2

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka :

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$$

Jadi, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Pembuktian sifat 4

Ambil sebarang skalar k dan l serta vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka :

$$\begin{aligned}(k + l)\mathbf{a} &= (k + l)(a_1, a_2, a_3) \\&= ((k + l)a_1, (k + l)a_2, (k + l)a_3) \\&= (ka_1 + la_1, ka_2 + la_2, ka_3 + la_3) \\&= (ka_1, ka_2, ka_3) + (la_1, la_2, la_3) \\&= k(a_1, a_2, a_3) + l(a_1, a_2, a_3) \\&= k\mathbf{a} + l\mathbf{a}\end{aligned}$$

Jadi, $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$.

Pembuktian sifat 7



ASA H KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Buktikan secara geometri bahwa:

a. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$

b. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$

c. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$

Bobot soal: 20

2. Tentukanlah vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} , jika

$$\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (7, 2, -2) \text{ dan } 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = (12, 0, -1).$$

Bobot soal: 20

3. Diketahui titik $A(7, 3, 6)$, $B(1, 0, 0)$, dan $C(3, 2, 1)$. Tentukan panjang \overline{AB} , \overline{AC} , dan \overline{BC} . Kemudian, buktikanlah bahwa C terletak pada garis AB .

Bobot soal: 20

4. Diketahui titik $A(-6, -2, -4)$, $B(3, 1, 2)$, dan $C(6, 2, 4)$. Tunjukkan bahwa titik A , B , dan C segaris (kolinier).

Bobot soal: 20

5. Tentukanlah semua skalar c_1 , c_2 , dan c_3 yang memenuhi $c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = \mathbf{o}$.

Bobot soal: 20

C. Perbandingan Vektor



Niko Sentera pergi dari rumah ke sekolahnya dengan berjalan kaki melintasi sebuah jalan yang lurus. Jika saat ini, ia telah meninggalkan rumah sejauh m meter dan ia harus menempuh jarak n meter lagi untuk tiba di sekolah, maka perbandingan jarak yang telah ditempuh dengan jarak yang belum ditempuhnya adalah $m : n$.

Misalkan:

Posisi rumah Niko Sentera adalah P

Posisi sekolah adalah Q

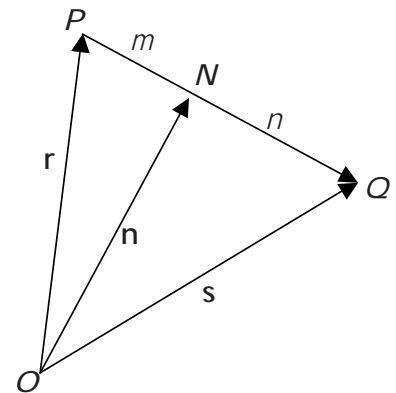
Posisi Niko Sentera saat ini adalah N

maka dapat dituliskan $PN : NQ = m : n$.

Dari perbandingan ini, kalian dapat menyatakan titik N sebagai vektor posisi \mathbf{n} dalam vektor posisi titik P dan Q . Caranya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{r} + \overline{PN} \\ &= \mathbf{r} + \frac{m}{m+n} \overline{PQ} \\ &= \mathbf{r} + \frac{m}{m+n} (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \\ &= \frac{m\mathbf{r} + n\mathbf{r} + m\mathbf{s} - m\mathbf{r}}{m+n} \\ &= \frac{m\mathbf{s} + n\mathbf{r}}{m+n}\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \mathbf{n} = \frac{m\mathbf{s} + n\mathbf{r}}{m+n}.$$



- Jika $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di R^2 , maka $\mathbf{n} = \frac{m \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{m+n}$

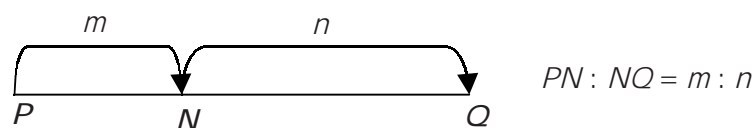
$$\text{Koordinat titik } N \text{ adalah } N \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

- Jika $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$ di R^3 , maka $\mathbf{n} = \frac{m \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{m+n}$

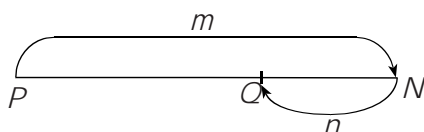
$$\text{Koordinat titik } N \text{ adalah } N \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

Dalam perbandingan $PN : NQ = m : n$ terdapat dua kasus, yaitu:

- Titik N membagi PQ di dalam.



2. Titik N membagi PQ di luar.



$$PN : NQ = m : (-n)$$

Contoh

Tentukanlah koordinat suatu titik pada garis hubung $A(2, 3, 4)$ dan $B(6, 7, 8)$ di dalam dan di luar dengan perbandingan $1 : 3$.

Jawab:

Misalkan, titik tersebut adalah titik P .

- Untuk titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan $1 : 3$, berlaku $AP : PB = 1 : 3$.

Koordinat titik P dapat kalian tentukan dengan cara berikut.

$$P\left(\frac{1 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{1 + 3}, \frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 3}{1 + 3}, \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 4}{1 + 3}\right) = P(3, 4, 5)$$

Jadi, titik $P(3, 4, 5)$.

- Untuk titik P membagi AB di luar dengan perbandingan $1 : 3$, berlaku $AP : PB = 1 : -3$.

Koordinat titik P dapat kalian tentukan sebagai berikut.

$$P\left(\frac{1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2}{1 + (-3)}, \frac{1 \cdot 7 + (-3) \cdot 3}{1 + (-3)}, \frac{1 \cdot 8 + (-3) \cdot 4}{1 + (-3)}\right) = P(0, 1, 2)$$

Jadi, titik $P(0, 1, 2)$.



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah koordinat titik P yang terletak pada garis AB jika:
 - a. $A(2, 0, 1)$, $B(10, 4, 5)$, dan $AP : PB = 3 : 1$
 - b. $A(1, 1, 1)$, $B(3, -2, 5)$, dan $AP : PB = 3 : -2$
2. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah $A(3, 0, 6)$, $B(0, 3, -3)$, dan $C(1, 0, -4)$. Titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan $1 : 2$, Titik Q adalah titik tengah AC , dan titik R membagi BC di luar dengan perbandingan $2 : 1$. Tentukanlah koordinat-koordinat titik P , Q , dan R .
3. Buktikan bahwa $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, 0)$, $C(-1, 4, 1)$ adalah titik-titik sudut segitiga siku-siku samakaki. Tentukanlah koordinat titik sudut keempat dari persegi $ABCD$.
4. Diketahui segitiga ABC dengan $\overline{AB} = a$ dan $\overline{AC} = b$. Titik D pada sisi BC dengan $BD : DC = 1 : 2$ dan titik E pada AC dengan $AE : EC = 2 : 1$.

Bobot soal: 20

Bobot soal: 20

Bobot soal: 10

Bobot soal: 40

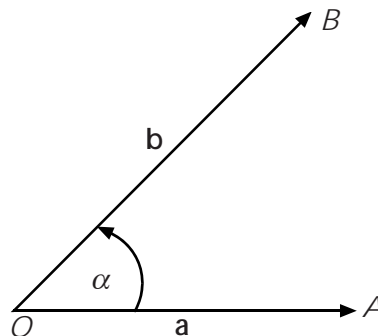
- Nyatakan vektor \overrightarrow{AE} dan \overrightarrow{AD} dalam vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} .
 - Jika M titik potong antara garis AD dan BE , nyatakan vektor dalam vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} .
 - Jika perpanjangan garis CM memotong garis AB di titik F , tentukanlah perbandingan $AF : FB$.
 - Jika perpanjangan garis DE memotong garis AB atau perpanjangannya di titik H , tentukan perbandingan $AH : HB$.
5. Diketahui jajargenjang $OABC$, D adalah titik tengah OA . Buktikanlah bahwa CD dibagi dua oleh OB dengan perbandingan 1 : 2. Buktikan juga bahwa OB dibagi dua oleh CD dengan perbandingan 1 : 2.

Bobot soal: 10

Siapa Berani

D , E , dan F berturut-turut titik tengah sisi AB , BC , dan CA suatu segitiga ABC . Buktikanlah bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$

D. Perkalian Skalar Dua Vektor dan Proyeksi Vektor



Jika \mathbf{a} dan \mathbf{b} vektor-vektor tak nol dan α sudut di antara vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} , maka perkalian skalar vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} didefinisikan oleh $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$.

Jika dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, perkalian skalar dua vektor ini didefinisikan sebagai berikut.

Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n , maka hasil kali dalam atau perkalian skalarnya adalah

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vektor-vektor di R^2 , maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
- Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor-vektor di R^3 , maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Dalam perkalian skalar dua vektor terdapat sifat-sifat berikut.

Jika \mathbf{a}, \mathbf{b} , dan \mathbf{c} vektor-vektor di R^2 atau di R^3 dan k skalar tak nol, maka:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
3. $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

Dalam buku ini akan dibuktikan sifat 1 dan sifat 3. Untuk sifat-sifat lainnya, dapat dibuktikan sendiri.

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka:

Misalkan $\mathbf{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ dan $\mathbf{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \cdot (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$

$$= a_1 b_1 \hat{i} \cdot \hat{i} + a_2 b_1 \hat{i} \cdot \hat{j} + a_3 b_1 \hat{i} \cdot \hat{k} + a_1 b_2 \hat{i} \cdot \hat{j} + a_2 b_2 \hat{j} \cdot \hat{j} + a_3 b_2 \hat{j} \cdot \hat{k} + a_1 b_3 \hat{i} \cdot \hat{k} + a_2 b_3 \hat{j} \cdot \hat{k} + a_3 b_3 \hat{k} \cdot \hat{k}$$

karena $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ dan

karena \hat{i}, \hat{j} , dan \hat{k} saling tegak lurus, maka $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dan k skalar tak nol, maka :

$$\begin{aligned} k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= (ka_1 b_1 + ka_2 b_2 + ka_3 b_3) \quad \dots (*) \\ &= (ka_1) b_1 + (ka_2) b_2 + (ka_3) b_3 \\ &= (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Dari persamaan (*), diperoleh

$$k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_1(kb_1) + a_2(kb_2) + a_3(kb_3) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$$

Perhatikan gambar berikut!

Proyeksi vektor \mathbf{a} pada vektor \mathbf{b} adalah vektor \mathbf{c} .

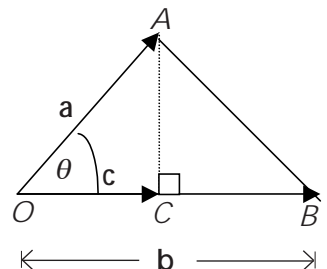
Perhatikan segitiga AOB !

$$\text{Pada segitiga } AOB, \cos \theta = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cos \theta = |\mathbf{a}| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

Jadi, panjang proyeksi vektor \mathbf{a} pada vektor \mathbf{b} adalah $|\mathbf{c}| = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

Setelah mengetahui panjangnya, kalian dapat pula menentukan vektor proyeksi tersebut, yaitu:

$$\mathbf{c} = |\mathbf{c}| \times \text{vektor satuan } \mathbf{c}$$



Pembuktian sifat 1

Oleh karena c berimpit dengan b maka vektor satuan c adalah $\frac{b}{|b|}$

$$\text{Jadi, } c = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b$$

Sehingga proyeksi vektor a pada vektor b adalah vektor

$$c = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b$$

Contoh

Diketahui vektor $a = (1, -1, 0)$ dan $b = (-1, 2, 2)$. Tentukanlah:

- besar sudut yang dibentuk oleh vektor a dan vektor b
- panjang proyeksi vektor a pada vektor b
- vektor proyeksi a pada vektor b

Jawab:

- Untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh vektor a dan vektor b , terlebih dahulu tentukanlah $a \cdot b$, $|a|$, dan $|b|$.

$$a \cdot b = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 = -1 - 2 = -3$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|b| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Misalkan sudut yang dibentuk oleh vektor a dan vektor b adalah θ , maka:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Didapat $\theta = 135^\circ$.

- Misalkan vektor proyeksi a pada b adalah c , maka:

$$|c| = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{-3}{3} = -1 = 1$$

Jadi, panjang proyeksi vektor a pada vektor b adalah 1.

- Vektor proyeksi a pada b adalah

$$c = |c| \cdot \frac{b}{|b|} = 1 \cdot \frac{(-1, 2, 2)}{3} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 90 menit

1. Tentukan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, dan sudut antara vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} jika:
 - a. $\mathbf{a} = (2, 1)$ dan $\mathbf{b} = (-3, 2)$
 - b. $\mathbf{a} = (2, 6)$ dan $\mathbf{b} = (-9, 3)$
 - c. $\mathbf{a} = (-7, 1, 3)$ dan $\mathbf{b} = (5, 0, 1)$
 - d. $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{b} = (8, 3, 4)$
2. Dari vektor-vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} pada soal nomor 1, tentukan:
 - a. Panjang proyeksi vektor \mathbf{a} pada vektor \mathbf{b}
 - b. Vektor proyeksi \mathbf{a} pada \mathbf{b}
 - c. Panjang proyeksi vektor \mathbf{b} pada vektor \mathbf{a}
 - d. Vektor proyeksi \mathbf{b} pada \mathbf{a}
3. Gunakan vektor-vektor untuk menentukan sudut-sudut di bagian dalam segitiga dengan titik-titik sudut $(-1, 0)$, $(-2, 1)$, dan $(1, 4)$.
4. Misalkan, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ dengan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Apakah $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Jelaskan!
5. Diketahui $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, dan sudut antara vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} adalah lancip α dengan $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Tentukanlah:
 - a. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
 - b. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
 - c. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
 - d. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
6. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (7, 6, 4)$, $\mathbf{b} = (-5, 3, -2)$, dan $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$. Tentukanlah panjang proyeksi vektor \mathbf{a} pada vektor $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
7. Diketahui segitiga PQR dengan $P(5, 1, 5)$, $Q(11, 8, 3)$, dan $R(-3, -2, 1)$. Tentukanlah:
 - a. panjang \overrightarrow{PR}
 - b. panjang \overrightarrow{PQ}
 - c. panjang proyeksi \overrightarrow{PR} pada \overrightarrow{PQ}
 - d. proyeksi vektor \overrightarrow{PR} pada \overrightarrow{PQ}
 - e. luas segitiga PQR
8. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ dan $\mathbf{b} = (4, 10, -8)$. Tentukan nilai x agar vektor $(\mathbf{a} + x\mathbf{b})$ tegak lurus pada vektor \mathbf{a} .

Bobot soal: 10

Bobot soal: 20

Bobot soal: 10

Bobot soal: 10

Bobot soal: 10

Bobot soal: 10

Bobot soal: 20

Bobot soal: 10

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Diketahui vektor $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$ dan $\mathbf{b} = (2, y, 2)$. Jika panjang proyeksi \mathbf{a} pada \mathbf{b} adalah $\frac{1}{2}|\mathbf{b}|$, tentukanlah nilai y yang mungkin!

Rangkuman

1. Penulisan vektor

- Dengan huruf kecil dicetak tebal.

Misalkan: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$

- Dengan huruf kecil yang di atas huruf tersebut dibubuhi tanda panah.

Misalkan: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

2. Panjang vektor \mathbf{a} dirumuskan sebagai berikut:

- Jika $\mathbf{a} \in R^2, \mathbf{a} = (a_1, a_2)$, maka $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Jika $\mathbf{a} \in R^3, \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3. Jika vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ dan vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, maka vektor yang menghubungkan vektor \mathbf{a} dan \mathbf{b} adalah vektor $\mathbf{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Panjang vektor \mathbf{c} adalah

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

4. Untuk setiap vektor \mathbf{a} yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor \mathbf{a} , dilambangkan dengan $\hat{\mathbf{e}}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor \mathbf{a} dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari \mathbf{a} dirumuskan dengan:

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

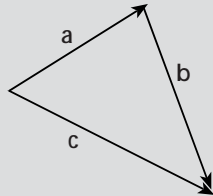
5. Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$ adalah vektor maka sifat-sifat operasi hitung pada vektor adalah sebagai berikut

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{k}(\mathbf{l}\mathbf{a}) = (\mathbf{k}\mathbf{l})\mathbf{a}$

- $k(a + b) = ka + kb$
- $(k + l)a = ka + la$
- $1a = a$

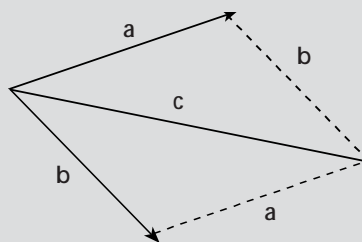
5. Penjumlahan antara vektor a dan b dapat dilakukan dengan dua cara berikut ini.

- Cara segitiga



Titik pangkal vektor b berimpit dengan titik ujung vektor a .

- Cara jajargenjang



Titik pangkal vektor a berimpit dengan titik pangkal vektor b .

6. Sifat-sifat perkalian skalar dua vektor

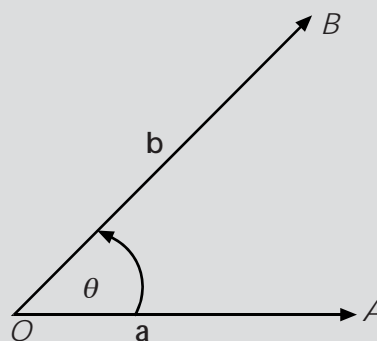
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb)$, k adalah konstanta
- $a \cdot a = |a|^2$

7. Sudut antara dua vektor

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

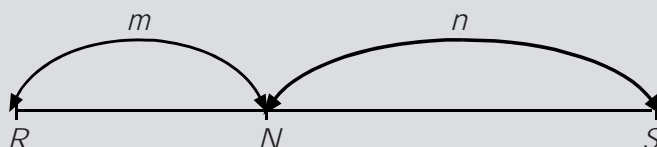
Sehingga

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$$

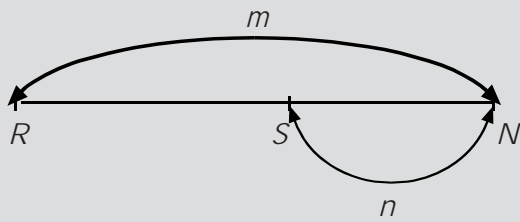


8. Perbandingan vektor

- Titik N membagi PQ di dalam $\Rightarrow PN : NQ = m : n$



- Titik N membagi PQ di luar $\Rightarrow PN : NQ = m : (-n)$



Ulangan Bab 4

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

- Diketahui titik $P(1, 7)$ dan $Q(4, 1)$. Titik R adalah sebuah titik pada garis hubung PQ sehingga $\vec{PR} = \frac{1}{3}\vec{PQ}$. Koordinat titik C adalah
 A. $(5, 2)$ D. $(1, -2)$
 B. $(3, -6)$ E. $(4, 2)$
 C. $(2, 5)$
- Diketahui $C = 16i - 15j + 12k$ dan d vektor yang segaris (kolinear) berlawanan arah dengan c . Jika $|d| = 75$, maka $d = \dots$
 A. $-16i + 15j - 12k$
 B. $32i - 30j + 24k$
 C. $-32i + 30j - 24k$
 D. $-48i + 45j - 36k$
 E. $-56i + 36j - 24k$
- Diberikan segi enam beraturan $ABCDEF$. Jika $\vec{AB} = u$ dan $\vec{AF} = v$, maka $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = \dots$
 A. $2u + 2v$ D. $6u + 6v$
 B. $4u + 4v$ E. $8u + 8v$
 C. $5u + 5v$
- Jika $\vec{OA} = (1, 2)$, $\vec{OB} = (4, 2)$ dan $\theta = \angle(\vec{OA}, \vec{OB})$ maka $\tan \theta = \dots$
 A. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{16}$
 B. $\frac{3}{4}$ E. $\frac{6}{13}$
 C. $\frac{4}{3}$
- Jika $a = (2, k)$, $b = (3, 5)$, dan sudut (a, b) adalah $\frac{\pi}{4}$, maka konstanta positif k adalah
 A. $\frac{1}{4}$ D. 4
 B. $\frac{1}{2}$ E. 8
 C. 2
- Jika sudut antara vektor $a = i + \sqrt{2}j + pk$ dan $b = i - \sqrt{2}j + pk$ adalah 60° , maka $p = \dots$
 A. $-\frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$ D. $-\sqrt{5}$ atau $\sqrt{5}$
 B. -1 atau 1 E. $-\sqrt{7}$ atau $\sqrt{7}$
 C. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$
- Diketahui persegi panjang $OABC$ dan D titik tengah OA , CD memotong diagonal AB di P . Jika $\vec{OA} = a$ dan $\vec{OB} = b$, maka \vec{OP} dapat dinyatakan sebagai
 A. $\frac{1}{2}(a + b)$ D. $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$
 B. $\frac{1}{3}(a + b)$ E. $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$
 C. $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$
- $ABCDEF$ adalah segi enam beraturan dengan pusat O , jika \vec{AB} dan \vec{BC} masing-masing dinyatakan oleh vektor u dan v , maka sama dengan
 A. $u + v$ D. $2v - u$
 B. $u - 2v$ E. $3v - u$
 C. $v - u$
- Diketahui kubus $OABC.DEFG$. Jika $\vec{OA} = (1, 0, 0)$ dan $\vec{OC} = (0, 0, 1)$, maka vektor proyeksi \vec{AF} ke \vec{OF} adalah

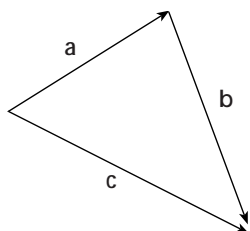
- A. $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ D. $\frac{2}{3}(1, 1, 1)$
 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ E. $\frac{3}{4}(1, 1, 1)$
 C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$

10. Diketahui $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Jika panjang proyeksi \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah 6, maka x adalah

- A. 8 D. -6
 B. 10 E. -8
 C. -4

11. Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \dots$

- A. \mathbf{c}
 B. $2\mathbf{a}$
 C. $2\mathbf{b}$
 D. $2\mathbf{c}$
 E. \mathbf{c}



12. Diketahui kubus $OABC.DEFG$. Jika $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 0)$, dan $\overrightarrow{OD} = (0, 0, 1)$. Vektor proyeksi \overrightarrow{OD} ke \overrightarrow{OF} adalah

- A. $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ D. $\frac{2}{3}(1, 1, 1)$
 B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$ E. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
 C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$

13. Sudut antara vektor $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (2x+1)\mathbf{j} - x\sqrt{3}\mathbf{k}$ dan \mathbf{b} adalah 60° . Jika panjang proyeksi \mathbf{a} ke \mathbf{b} sama dengan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, maka $x = \dots$

- A. 4 atau $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ atau -1
 B. 1 atau 4 E. $-\frac{1}{2}$ atau 1
 C. 1 atau 2

14. Diketahui \mathbf{u} dan \mathbf{v} vektor tak nol sebarang, $\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$. Jika $\theta = \angle(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ dan $\phi = \angle(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$, maka

- A. $\phi - \theta = 90^\circ$ D. $\theta - \phi = 90^\circ$
 B. $\theta + \phi = 90^\circ$ E. $\theta - \phi = 180^\circ$
 C. $\theta = \phi$

15. Sebuah vektor \mathbf{x} dengan panjang $\sqrt{5}$ membuat sudut lancip dengan vektor $\mathbf{y} = (3, 4)$. Jika vektor \mathbf{x} diproyeksikan ke vektor \mathbf{y} , panjang proyeksinya 2. Vektor \mathbf{x} tersebut adalah

- A. $(1, 2)$ atau $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$
 B. $(2, 1)$ atau $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$
 C. $(1, 2)$ atau $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$
 D. $(2, 1)$ atau $\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)$
 E. $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ atau $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Misalkan $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$ dan $\mathbf{c} = (3, 2, -1)$. Hitunglah:

- a. $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ d. $3(\mathbf{a} - 7\mathbf{b})$
 b. $7\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ e. $-3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$
 c. $-\mathbf{c} + \mathbf{b}$ f. $2\mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{c})$

2. Gambarlah vektor-vektor berikut!

- a. $\mathbf{m} = (-3, 7)$ d. $\mathbf{p} = (2, 3, 4)$
 b. $\mathbf{n} = (-6, -2)$ e. $\mathbf{q} = (2, 0, 2)$
 c. $\mathbf{o} = (0, -4)$ f. $\mathbf{r} = (0, 0, -2)$

3. Misalkan $\mathbf{p} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{q} = (1, 1, 0)$ dan $\mathbf{r} = (2, 2, -4)$. Hitunglah:

- a. $|\mathbf{p} + \mathbf{q}|$ d. $|3\mathbf{p} - 5\mathbf{q} + \mathbf{r}|$
 b. $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ e. $\frac{1}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}$
 c. $|-2\mathbf{p}| + 2|\mathbf{p}|$ f. $\left|\frac{1}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}\right|$

4. Buktikanlah bahwa:
 $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

5. Buktikanlah!

- a. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$
 b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$