



BAB 6

Limit Fungsi

A. Kompetensi Inti

Sikap	<ol style="list-style-type: none">1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.
Pengetahuan	<ol style="list-style-type: none">3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
Keterampilan	<ol style="list-style-type: none">4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.



B. Kompetensi Dasar dan Indikator


Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar. Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.7 dan KD 4.7.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.7 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, menentukan eksistensi.	<p>3.7.1 Mengomunikasikan makna batas dalam konsep limit.</p> <p>3.7.2 Menemukan contoh aplikasi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari.</p> <p>3.7.3 Menunjukkan limit kiri dan limit kanan pada suatu fungsi.</p> <p>3.7.4 Menunjukkan limit suatu fungsi secara intuitif berdasarkan gambar.</p> <p>3.7.5 Menunjukkan bentuk tentu dan tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu dan menunjukkan dalam grafik.</p> <p>3.7.6 Menemukan sifat-sifat limit suatu fungsi.</p> <p>3.7.7 Menggunakan sifat-sifat suatu fungsi dalam menemukan limit fungsi tersebut.</p> <p>3.7.8 Menemukan limit suatu fungsi aljabar.</p>
2.	4.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.	<p>4.7.1 Menggunakan konsep limit dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar (polinom dan rasional).</p> <p>4.7.2 Menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan cara pendekatan nilai, memfaktorkan atau dengan pergantian fungsi.</p>



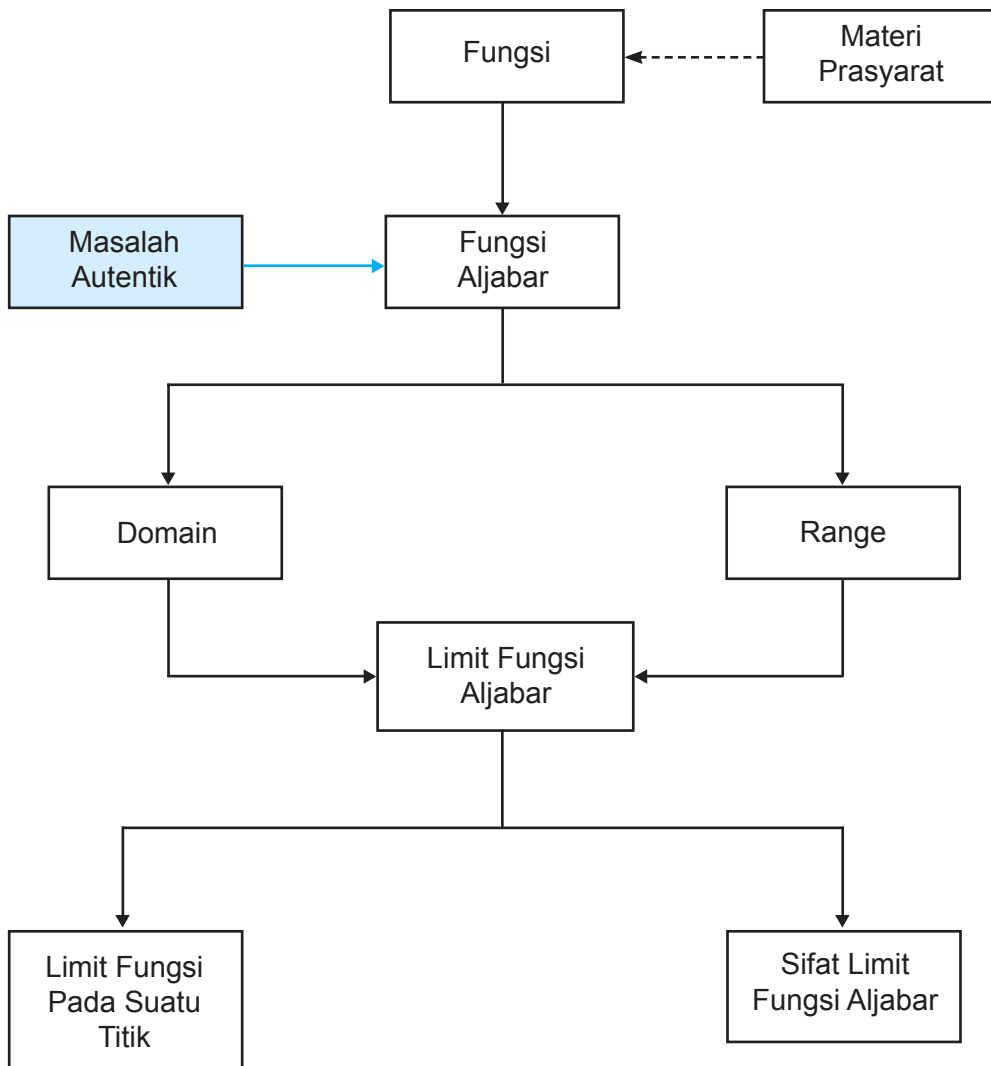
C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep limit fungsi melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku ur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Menyebutkan contoh-contoh aplikasi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari
4. Menunjukkan limit kiri dan limit kanan pada suatu fungsi dengan tabel dan gambar.
5. Menunjukkan limit suatu fungsi secara intuitif berdasarkan gambar.
6. Memberi contoh fungsi yang mempunyai bentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu.
7. Menunjukkan bentuk tentu dan tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu dan menunjukkan dalam grafik.
8. Menemukan sifat-sifat limit suatu fungsi dan mengomunikasikannya dengan kata-kata sendiri.
9. Menggunakan sifat-sifat suatu fungsi dalam menemukan limit fungsi tersebut.
10. Menemukan limit suatu fungsi aljabar dengan pendekatan nilai dan manipulasi aljabar.
11. Menggunakan konsep limit dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar (polinom dan rasional).
12. Menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan cara pendekatan nilai, memfaktorkan atau dengan pergantian fungsi.



D. Diagram Alir





E. Proses Pembelajaran

6.1 Konsep Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

- Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
- Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
- Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran.
- Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	Kegiatan Pendahuluan <ul style="list-style-type: none">• Salam dari guru dan Doa dipimpin oleh salah satu siswa.• <i>Apersepsi</i><ul style="list-style-type: none">– Ingatkan siswa konsep fungsi (daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil) dan komposisinya.– Perkenalkan sekilas materi limit fungsi serta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.– Motivasi siswa untuk semangat mempelajari materi limit fungsi.– Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian.
2.	Kegiatan Inti <i>Ayo mengamati</i> Gambar 6.1 <ul style="list-style-type: none">• Arahkan siswa melihat dan memberikan kesempatan mengamati gambar tersebut. Tanya siswa, apakah jika melihat benda yang bergerak semakin jauh maka ukuran objek seakan-akan semakin kecil? Minta siswa untuk memberikan komentar!• Informasikan bahwa bukan ukuran benda yang semakin kecil tetapi mata yang mempunyai batas melihat benda-benda yang jauh.



- Bantu siswa memahami hubungan Gambar 6.1 dengan Gambar 6.2. Gambar 6.2 adalah sketsa sederhana visual bentuk badan jalan sesuai dengan Gambar 6.1 dengan posisi memandang di tengah jalan, sehingga tampak lebar jalan seakan-akan menyempit dari kiri dan kanan badan jalan. Tujuannya adalah memberikan ilustrasi pendekatan kiri dan kanan.

6.1.1 Menemukan Konsep Limit Fungsi

Ayo Menalar

Masalah 6.1

- Minta siswa untuk memahami Masalah 6.1 dalam menemukan konsep limit. Beri kasus yang sama dengan pendekatan ke bilangan yang lain.
- Ajak siswa mencari bilangan bulat yang dekat ke 3. Ajak kembali siswa mencari bilangan real yang dekat ke 3. Pandu siswa memahami dan mencari jawaban dengan Gambar 6.3.
- Berdasarkan Gambar 6.3, misalkan bilangan real yang dekat ke 3 adalah 2,75 atau 3,25. jika interval 2,75 sampai 3,25 diperbesar sehingga diperoleh bahwa ada bilangan real lain yang lebih dekat ke 3, tetapi jika diperbesar kembali interval 2,99 sampai 3,01 maka akan lebih mudah melihat kembali bilangan yang dekat ke 3 dan seterusnya.
- Bantu siswa memahami bahwa banyak bilangan real yang sangat dekat ke 3.
- Bantu siswa memahami pemisalan x sebagai bilangan-bilangan yang mendekati 3 sehingga tertulis $x \rightarrow 3$. Perkenalkan simbol " $x \rightarrow 3$ ". Perkenalkan pendekatan kiri dengan simbol " $x \rightarrow 3^-$ ", serta pendekatan kanan dengan simbol " $x \rightarrow 3^+$ ".
- Berikan contoh kasus yang sama sebagai pembandingan agar siswa lebih mudah memahami.

Ayo menalar

Masalah 6.2

- Minta siswa untuk memahami Masalah 6.2 dan memahami Gambar 6.4.



- Informasikan maksud gambar bahwa andaikan gerak lintasan bola dan gerak lintasan atlet dimisalkan kurva. Bola dan tangan atlet sama-sama bergerak saling mendekati pada saat dan ketinggian tertentu. Berikan ide-ide secara bebas dan terbuka. Pandu siswa untuk membangun sebuah konsep limit fungsi dan pendefinisian tentang limit fungsi.
- Jelaskan pergerakan bola menuju atlet dan pergerakan atlet menuju bola akan bertemu disuatu saat, misalkan di saat tertentu itu adalah $x = c$ dan ketinggian di saat tertentu itu adalah $y = L$. Arahkan kembali ke Gambar 6.4 (b).

6.1.2 Pemahaman Intuitif Limit Fungsi

Ayo Menalar

Limit Fungsi untuk $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$.

- Ingatkan siswa konsep fungsi (daerah asal, daerah kawan, daerah hasil dan sketsanya di bidang koordinat kartesius).
- Pandu siswa memahami limit fungsi secara intuitif, dengan memperkenalkan limit kiri dan limit kanan dengan memperlihatkan pada gambar. Sepakati bahwa sebelah kiri suatu titik pada garis bilangan horizontal adalah kiri, dan arah sebaliknya adalah kanan.
- Pandu siswa memahami limit secara intuitif pada $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$ berdasarkan Tabel 6.1 dan Gambar 6.5.
- Demonstrasikan proses pengisian setiap sel pada Tabel 6.1. Minta siswa mengamati gerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 2.
- Tunjukkan dan jelaskan pergerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 2 di sumbu x akan mempengaruhi gerakan bilangan dari atas dan bawah bilangan 3 di sumbu y .

Ayo Menanya

- Arahkan kelas ke sesi tanya-jawab. Guru memberi kesempatan kepada siswa untuk bertanya, dan siswa lainnya memberi komentar sebelum guru memberi tanggapan dan memberi jawaban atas pertanyaan siswa. Guru memperhatikan siswa yang belum berani memberi komentar dan mengarahkannya berkomunikasi.



Ayo Menalar

- Dengan proses yang sama, perintahkan siswa berdiskusi, menalar limit fungsi untuk $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \neq 1, x \in R$.
- Dengan panduan yang sama untuk $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \in R, x \neq 1$, minta siswa mengamati Gambar 6.6 dan Tabel 6.2. Arahkan siswa fokus mengamati nilai pendekatan ke 2 di sumbu x dan pendekatan ke 3 di sumbu y pada Tabel 6.2.
- Arahkan siswa melakukan pengamatan pergerakan bilangan dari kiri dan kanan angka 1 di sumbu x akan berpengaruh pada pergerakan bilangan dari atas dan bawah angka 2 di sumbu y .
- Minta siswa mencari nilai $f(1)$? Minta siswa mengamati hubungan Tabel 6.2 dan Gambar 6.6.

Ayo Mengomunikasikan

- Sesuai dengan hasil diskusi kelompok, minta siswa menyaji pendapat atau memberi komentar mereka akan limit fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ untuk } x \neq 1, x \in R$$

Ayo menalar

$$\text{Limit fungsi } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{jika } x > 1 \end{cases} \text{ untuk } x \in R.$$

- Jelaskan bentuk fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$ untuk $x \in R$
- Demonstrasikan proses pengisian setiap sel pada Tabel 6.3. Arahkan siswa mengamati pergerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 1 pada sumbu x dan pergerakan hasil $f(1)$ pada sumbu y .
- Tunjukkan dan jelaskan gerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 1 di sumbu x akan berpengaruh pada gerakan bilangan dari atas dan bawah $f(1)$ di sumbu y . Minta siswa mencari nilai $f(1)$? Arahkan siswa memberi komentar tentang nilai $f(1)$.



- Perkuat pemahaman siswa tentang limit kiri dan limit kanan dengan menggunakan Gambar 6.7.
- Bantu siswa memahami bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai limit di $x = 1$. Kenapa? Perkenalkan bentuk tentu dan tak tentu suatu limit pada titik tertentu. Guru memberikan contoh-contoh fungsi yang dimaksud.
- Berikan kesempatan kepada siswa untuk menjelaskan dengan kata-kata sendiri tentang limit kiri dan limit kanan berdasarkan pemahaman pada contoh-contoh di atas.
- Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 6.1

Definisi 6.1

Misalkan f sebuah fungsi $f: R \rightarrow R$ dan misalkan L dan c anggota himpunan bilangan real. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c .

Latihan 6.1

- Koordinir siswa untuk berdiskusi mengerjakan Latihan 6.1 dan menjelaskan di depan kelas serta mengumpulkan hasil diskusi.

Ayo Menalar

- Arahkan siswa untuk membentuk kelompok diskusi (3–4 orang). Perintahkan siswa menghubungkan definisi limit dengan Gambar 6.8 dan Gambar 6.9.
- Setelah salah satu kelompok menyajikan hasil kerja kelompoknya, arahkan siswa ke sesi tanya-jawab. Dengan demikian, siswa mempunyai kesempatan untuk memberikan komentar dan saling menanggapi. Guru harus memberikan kesimpulan akhir.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.1.

Berdasarkan Gambar 6.8 maka:

Limit di $x = -3$	Limit di $x = 1$	Limit di $x = 4$
$f(-3) = 5$	$f(1) = 3$	$f(4) = \text{tidak tentu}$
$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$
$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5,5$	$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$



$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
Ada limit	Tidak ada limit	Ada limit

Berdasarkan Gambar 6.9 maka:

Gambar A	Gambar B	Gambar C	Gambar D
$f(c)$ = ada	$f(c) = \infty$	$f(c)$ = tidak tentu	$f(c)$ = ada
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ = ada	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ = ada	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ = ada
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ = ada	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ = ada	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ = ada
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
Ada limit	Tidak ada limit	Ada limit	Tidak ada limit

Ayo Menalar

- Minta siswa membaca Contoh 6.1 dan membantu siswa memahami Contoh 6.1 melalui sketsa pada Gambar 6.10. Ingatkan siswa bentuk umum fungsi kuadrat, fungsi linier dan fungsi konstan.
- Tunjukkan pada siswa model fungsi lintasan lebah dan sketsa lintasannya pada Gambar 6.11.
- Bantu siswa memahami Tabel 6.4 dan Tabel 6.5 dengan keterkaitannya pada Gambar 6.11.
- Demonstrasikan proses perhitungan limit kiri dan limit kanan pada Tabel 6.4 dan Tabel 6.5 serta menunjukkan keterkaitannya dengan Gambar 6.11.

Ayo Mengkomunikasikan

- Minta siswa memberi komentar akan pendekatan $f(t)$ pada saat t mendekati 1 dari kiri–kanan, dan pada saat t mendekati 2 dari kiri–kanan sesuai dengan pemahaman mereka akan limit kiri dan limit kanan pada Contoh 6.1 tersebut.

3. Kegiatan Penutup

- Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.



	<ul style="list-style-type: none">• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.• Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.• Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.
--	--

6.2 Sifat-Sifat Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

- 3.6.1 Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
- 3.6.2 Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
- 3.6.3 Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	Kegiatan Pendahuluan <ul style="list-style-type: none">• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.• <i>Apersepsi</i><ul style="list-style-type: none">– Ingatkan siswa akan limit kiri dan limit kanan serta definisi limit fungsi yang telah dipelajari sebelumnya.– Informasikan kepada siswa, materi yang akan dipelajari adalah sifat-sifat limit fungsi.
2.	Kegiatan Inti <i>Ayo menalar</i> <ul style="list-style-type: none">• Ingatkan siswa materi sebelumnya. Berdasarkan Gambar 6.1, Masalah 6.1, Masalah 6.2, pemahaman limit fungsi secara intuitif serta Definisi 6.1, Arahkan siswa untuk membangun Sifat 6.1.• Perkenalkan kepada siswa simbol penulisan limit kiri $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ dan limit kanan $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$



Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.2 dan mengamati Tabel 6.6. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.2.

Sifat 6.1

Misalkan f sebuah fungsi $f: R \rightarrow R$ dan L, c bilangan real. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

Sifat 6.2

Misalkan $f(x) = k$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \rightarrow c} k = k$.

- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.2 dengan menggunakan gambar fungsi $y = f(x) = k$.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.2 dengan kata-kata sendiri.

Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.3 dan mengamati Tabel 6.7. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.3.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.3 dengan menggunakan gambar fungsi $y = f(x) = k$.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.3 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.3

Misalkan $f(x) = x$, adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \rightarrow c} x = c$.

Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.4 dan mengamati Tabel 6.8. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.4.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.4 dengan menggunakan gambar fungsi $y = f(x) = kx$ dengan mengambil sembarang nilai k bilangan real.



- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.4 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.4

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$$

Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.5 dan mengamati Tabel 6.9. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.5.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.5 dengan menggunakan gambar fungsi $y = f(x) = kx^2$ dengan mengambil sembarang nilai k bilangan real.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.5 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.5

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c ,

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$$

Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.6 dan mengamati Tabel 6.10 dan Tabel 6.11. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.6.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.6 dengan menggunakan gambar fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ dan $f(x) = x^2 + 4x$.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.6 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.6

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c ,

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \pm \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$$



Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.7 dan mengamati Tabel 6.12. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.7.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.7 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.7

Misalkan f, g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan c adalah bilangan real, maka $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.8 dan mengamati Tabel 6.13. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.8.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.8 dengan menggunakan gambar fungsi $y = f(x) = 8x^3$.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.8 dengan kata-kata sendiri.

Sifat 6.8

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan c adalah bilangan real dan n adalah bilangan positif maka $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$

Ayo Menalar

- Koordinir siswa untuk membentuk kelompok dan mengerjakan Latihan 6.2 dan mendemonstrasikan di depan kelas kerja serta mengumpulkan hasil kerja kelompok.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.2.

**Latihan 6.2**

Tunjukkan dengan pendekatan nilai, $\lim_{x \rightarrow 2} x = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x})^3$

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7
$\sqrt[3]{x}$	1,14	1,19	1,24	1,26	1,26	...	1,26	...	1,26	1,26	1,28	1,36	1,39
$(\sqrt[3]{x})^3$	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7

3. Kegiatan Penutup

- Minta siswa mengkomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat-sifat limit fungsi dari yang dipelajari.
- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

6.3 Menentukan Nilai Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	Kegiatan Pendahuluan <ul style="list-style-type: none"> • Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa. • <i>Apersepsi</i> <ul style="list-style-type: none"> – Informasikan kepada siswa tentang tujuan pembelajaran. – Jelaskan kepada siswa bentuk tentu dan bentuk tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu. Ingatkan kembali Latihan 6.1.



2. Kegiatan Inti

Ayo Menalar

- Jelaskan fungsi yang berbentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu serta alasannya. Tunjukkan kepada siswa bentuk tentu dan tak tentu dengan gambar. Minta siswa mencari fungsi lainnya yang mempunyai bentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu dan memaparkan di depan kelas. Ingatkan kembali Latihan 6.1.
- Demonstrasikan kepada siswa proses penyelesaian Contoh 6.9 dan Contoh 6.10.
- Pandu siswa mendapatkan nilai-nilai pada setiap sel pada Tabel 6.14, Tabel 6.15 dan Tabel 6.16.
- Arahkan siswa mengamati pergerakan nilai x dan y mendekati 2 dari kiri dan kanan pada Tabel 6.14, mengamati pergerakan nilai x dan y mendekati 1 dari kiri dan kanan pada Tabel 6.15, dan mengamati pergerakan nilai x dan y mendekati -1 dari kiri dan kanan Tabel 6.16.

Ayo Mencoba

- Guru memberikan permasalahan yang serupa untuk dicoba atau dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok
- Arahkan siswa berani menyampaikan hasil kerjanya.

Ayo Menalar

- Instruksikan siswa mengerjakan Latihan 6.3 secara individu atau berkelompok dan menyajikannya hasil kerjanya di depan kelas.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.3

Latihan 6.3

Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ dengan menunjukkan pendekatan nilai dan proses pergantian fungsi dengan faktorisasi.

Alternatif Penyelesaian

- Minta siswa menunjukkan nilai limit dengan pengamatan pada tabel.

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ maka pendekatan fungsi pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut:



Tabel 6.17 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,05	1,1	1,5
y	3,71	7,18	7,60	7,92	7,99	...	0/0	...	8,01	8,08	8,39	8,78	11,47

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka akan mendekati 8.

Ayo Mengkomunikasikan

- Minta siswa mendapatkan nilai limit dengan proses aljabar. Minta siswa mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas. Arahkan siswa untuk bertanya-jawab.

Cara II (Faktorisasi)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^3 - 30x^2 + 6x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^3 - 26x^2 - 4x^2 + 4x + 2x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(26x^2 - 4x + 2)}{(x-1)x^2 + x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1} \quad \text{karena } x \neq 1 \\
 &= \frac{26 - 4 + 2}{1^2 + 1 + 1} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Ayo Menalar

- Demonstrasikan proses penyelesaian pada Contoh 6.11. Bantu siswa memahami strategi pemisalan atau pergantian fungsi. Minta siswa memberi komentar akan perubahan $x \rightarrow 1$ menjadi $y \rightarrow 1$. Ingatkan kembali konsep limit.



Ayo Mencoba

- Guru memberikan permasalahan yang serupa untuk dikerjakan siswa dan mendemonstrasikan prosesnya di papan tulis. Arahkan siswa ke sesi tanya-jawab.
- Bantu siswa memahami Contoh 6.12. Berikan kesempatan kepada siswa untuk mengamati Tabel 6.18 dan mengomunikasikan pemahaman mereka.
- Minta siswa untuk menunjukkan konsep limit pada Tabel 6.18 dengan mengamati nilai-nilai pada setiap sel. Ingatkan siswa konsep limit kiri dan limit kanan.
- Berikan waktu pada siswa menggunakan manipulasi aljabar pada proses limit tersebut. (lihat alternatif penyelesaian 2 dan alternatif penyelesaian 3).
- Berikut adalah alternatif penyelesaian 2 dan alternatif penyelesaian 3 sesuai dengan buku siswa.

Alternatif Penyelesaian 2

$$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$$

$$f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{(0,25t^2 + 0,5t) - f(5)}{t - 5} \\&= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,25t^2 + 0,5t - 8,75}{t - 5} \\&= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t^2 + t - 17,5)}{t - 5} \\&= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t + 3,5)(t - 5)}{t - 5} && \text{karena } t \neq 5 \\&= \lim_{t \rightarrow 5} 0,5(0,5t + 3,5) \\&= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5) \\&= 3\end{aligned}$$

Alternatif Penyelesaian 3

Jika t diganti menjadi $T + 5$, maka $T = t - 5$ dan jika $t \rightarrow 5$ maka $T \rightarrow 0$, sehingga:



	$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$ $f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$ $f(T + 5) = 0,25(T + 5)^2 + 0,5(T + 5) = 0,25T^2 + 3T + 8,75$ $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(T + 5) - f(5)}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(0,25T^2 + 3T + 8,75) - 8,75}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{0,25T^2 + 3T}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} 0,25T + 3$ $= 3$
3.	Kegiatan Penutup <ul style="list-style-type: none">• Minta siswa mengkomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.• Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.• Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.• Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

F. Penilaian

Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5.	Pemahaman konsep	Tes Tertulis	Kegiatan penutup



1. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerja sama	Keaktif-an	Menghargai pendapat teman	Tanggung jawab		
1.							
2.							
3.							
4.							
...							

Keterangan Skor:

- 1 = (belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator.
- 2 = (mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten.
- 3 = (mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten.
- 4 = (membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten.

Skor Maksimal = 16

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep limit fungsi	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep limit fungsi	5



No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep limit fungsi namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep limit fungsi.	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
Total		Skor maksimal =	15
		Skor minimal =	0

3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas Presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	A s p e k					Jumlah Skor	Nilai
		Komu- nikasi	Siste- matika penyam- paian	Penguasa- an Materi	Kebera- nian	Antu- sias		
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
...								

**Keterangan Skor:****Komunikasi:**

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar, tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

Penguasaan Materi:

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

Antusias:

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

Sistematika Penyampaian:

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang, tidak jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

Keberanian:

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

Skor Maksimal = 20

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

G. Pengayaan

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan, terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).



Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada kurikulum matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, check up diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.

H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- a. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- b. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- c. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.



I. Rangkuman

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c , sangat bergantung pada kedudukan titik c dan domain fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi domain fungsi adalah himpunan bilangan real dimana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi f mempunyai nilai limit di titik c , apabila nilai limit kiri sama dengan nilai limit kanan dari fungsi tersebut pada titik c .
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c . Titik c tidak harus anggota domain fungsi, tetapi c anggota himpunan bilangan real.
5. Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.
6. Misalkan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.
 - a. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
 - b. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
 - c. $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$
 - d. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \pm \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
 - e. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
 - f. $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \right]$ dengan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
 - g. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
 - h. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$