1 反常积分敛散性

注意：一旦判定在积分区间内发散，则奇偶性规律失效

通用办法是直接写出原函数或积分然后判定

这里补充其他无法积分的反常积分敛散性判定方法

(1)定义域无穷反常积分

形式：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$、$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$、$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

判断方法：若∃ k 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{Ax^k}=1$，

则 Ax^k 是 $f(x)$ 的等价无穷大，

如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{+\infty} Ax^k dx$ 可积，即 $k<-1$

那么原无穷积分可积

注意：$k=-1$ 时，$\int_a^{+\infty} Ax^{-1}dx = A\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$ 是不可积分的极限形式

(2)值域无界反常积分（瑕积分）

形式：$\int_a^{a+1}\dfrac{1}{x-a}dx$、$\int_0^a \ln x dx$、$\int_a^{a+1}\dfrac{1}{x(x^2-a^2)\ln x}$

判断方法：若∃ k 使得 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{A(x-a)^k}=1$，

则 $A(x-a)^k$ 是 $f(x)$ 在 $x=a^+$ 处的等价无穷小

如果 $\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_a^{a+1} A(x-a)^k dx$ 可积，即 $k>-1$

那么原瑕积分可积

注意：对于 $\int_0^a Ax^k dx = A\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^a$，若 $k\le -1$ 则不可积

(3)混合型

混合型就是对积分区间内无界函数进行无穷积分

拆解成 (1)无界反常积分、(2)无穷反常积分判定敛散性

(4)其他

注意：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\sin x dx = 0$ 但 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ 发散不存在.

2 级数积分求和 (极限形式)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{i}{n}} \int_0^1 f(x)dx$$

3 对数函数瑕积分证明

(1) $\int_0^a \ln x dx$ **可积分**

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0} -2x^{\frac{1}{2}}=0$

由 $\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a = 2\sqrt{a}$ 得 $\int_0^a \ln x dx$ 可积分

(2) $\int_0^a \ln^n x dx$ **可积**

证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^n x}{x^{-\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n=0$

(3) $\int_0^1 \ln^n x dx = (-1)^n n!$

证明：$t=-\ln x$，$x=e^{-t}$，$dx=-e^{-t}dt$

$=\int_0^1 (-t)^n e^{-t}dt = (-1)^n\int_0^1 t^n e^{-t}dt$

$=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1}e^{-t}dt=(-1)^n\Gamma(n+1)$

$=(-1)^n n!$

4 求 0 到+∞指数积分

超纲：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha-1)=(\alpha-1)!$

$\Gamma(n)=(n-1)!$；

$\Gamma(1)=1$；$\Gamma(2)=1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\int_0^{+\infty} t^{\boxed{n-1}}e^{-t}dt=\Gamma(n)$$

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$