数学笔记

王凌枫

1 性质

1.唯一性 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow A$唯一

2.有界性 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow |\ x_n|\ \leqslant M$

3.保号性$x_n \geqslant 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则$A \geqslant 0$

2 重要公式

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$

③ $\lim\limits_{n\to 0^+}\sqrt[n]{n} = 1$

等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，

$\sin x \sim x, \tan x \sim x$

$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x,$

$(1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x\ln a$

$\arcsin x \sim x, \arctan x \sim x$

3 泰勒展开

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

佩亚诺余项表达式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \text{其中}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, (\xi \in (x_0, x))$$

几个重要泰勒展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + o(x^n)$$

$$\alpha^x = \sum_{i=0}^{n}\frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$= 1 + x\ln\alpha + \frac{\ln^2\alpha}{2}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{dy/dx}$$

1-2 **补充**——反函数求导问题。对于原函数 $y = f(x)$

①求反函数的导数就是求 $\dfrac{dx}{dy}$，本质上就是原函数导数的倒数

②求反函数的二阶导数就是求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

注意：不是对 x=f(y) 求二阶导数

利用公式 $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{dy} = \dfrac{d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)/dx}{dy/dx} = \dfrac{d(dx/dy)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}$

$= \dfrac{d(\frac{1}{y'})}{dx}\cdot\dfrac{1}{y'} = \dfrac{-y''}{(y')^3}$

4 求导公式

$(C)'=0$

$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

---

5 积分公式

$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$

$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$

- $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$

$\int \dfrac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$

- $\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C_1=-\arccos x+C_2$

- $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

$\int \dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\tan x}+C$

$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

$\int \dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$

$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

$\int \dfrac{1}{\tan x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

$\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则称 $y=b$ 为曲线 $f(x)$ 的水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$,其中 $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] \end{cases}$,则称 $y=ax+b$ 为斜渐近线

以下都针对函数 $z=f\left(x,y\right)$ ，函数在 $\left(x_0,y_0\right)$ 的某一领域内有定义

1 可导的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}$$

存在，那么这个极限就是 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处对 x 的偏导，记为 $f_x'\left(x_0,y_0\right)$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

可以认为，偏导就是一元函数的导数，设函数 $\varphi\left(x\right)=f\left(x,y_0\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\varphi'\left(x_0\right)=\left.\frac{df\left(x,y_0\right)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

2 可微的定义

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)$$

如果全增量可以被表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

其中 $A=A\left(x,y\right),B=B\left(x,y\right)$ ，则函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的微分就是 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

证明

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\frac{\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]-\left[f_x'\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0,y_0\right)\Delta y\right]}{\rho}=0$$ 成立，则函数在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 可微。

可微关系

【可导且导函数连续 $\Rightarrow$ 可微】【可微 $\not\Rightarrow$ 可导且导函数连续】【可导 $\Rightarrow$ 可导且原函数连续】

（充分条件）偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处连续 $\Rightarrow$ （条件可以弱化为其一连续，另一存在即可）

（原条件）函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处可微 $\Rightarrow$

（必要条件） $\begin{cases}\text{偏导数}\frac{\partial z}{\partial x}\text{和}\frac{\partial z}{\partial y}\text{在点}\left(x_0,y_0\right)\text{必存在，且}dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\ \text{该点沿任一方向导数存在，且}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}=f_x'\left(x_0,y_0\right)\cos\alpha+f_y'\left(x_0,y_0\right)\cos\beta\end{cases}$

3 方向导数定义

定义一单位向量 $\mathbf{e}$ ，它的方向和 l 的方向一致，如果存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f\left(x_0+\Delta t\cdot\cos\alpha,y_0+\Delta t\cdot\cos\beta\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta t}$$

则称此极限为 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处沿方向 l 的方向导数存在，记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}$

---

4 举例

4.1 不可导，但存在方向导数

方向导数其实就是广义上的偏导，只不过偏导是对于放下与 x 和 y 相同的 l 求取的方向导数，而广义上的方向导数可以是 x 和 y 的线性组合。这出现了一个问题就是，$|x+y|,\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处不可导，但是其任一方向导数存在，因为方向导数不受左右极限相同约束。

方向导数和偏导数都是一个标量。

4.2 可导，但方向导数不存在

4.3 可导不可微

对于二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$，可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-x^2y\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$，$\therefore$该二元函数可导

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\left[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\right]-\left[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在（与接近轨迹有关）

4.4 导函数不连续却可微

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

x 导函数

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x'(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 后一项不存在，所以在 $(0,0)$ 处不可导。

但是可微，证明略

间断点类型补充	第一类间断点		第二类间断点	
	可去间断点	跳跃间断点	无穷间断点	震荡间断点
	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$	$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=(a\sim b)$
	补充定义就变成连续	$\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{x}\Big\vert_{x=0}$	$\sin\dfrac{1}{x}\Big\vert_{x=0}$

1 基本-坐标变换

(1)极坐标

$$\iint_{round} f(x,y)dS=\int d\theta\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho$$

(2)球坐标

$$\iiint_{sphere} f(x,y,z)dV$$
$$=\int d\theta\int sin\varphi d\varphi\int f(rcos\theta sin\varphi,rsin\theta sin\varphi,rcos\varphi)r^2dr$$

(3)柱坐标

$$\iiint_{pillar} f(x,y,z)dV=\int d\theta\int\rho d\rho\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)dz$$

2 两类积分转换

联系

L 曲线的切线向量为向量 $\boldsymbol{\tau}$

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L\left(Pcos(\mathbf{t},\mathbf{x})+Qcos(\mathbf{t},\mathbf{y})\right)ds$$

若 l 的方向和 s 的方向一致，则对于方向导数

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial\,\mathbf{t}}=f_x'(x,y)cos(\mathbf{t},\mathbf{x})+f_y'(x,y)cos(\mathbf{t},\mathbf{y})$$

$$\int_L\frac{\partial f(x,y)}{\partial\mathbf{t}}ds=\int_L\left[f_x'(x,y)cos(\mathbf{t},\mathbf{x})+f_y'(x,y)cos(\mathbf{t},\mathbf{y})\right]ds$$
$$=\int_L f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$$

补充

1-8 线性常微分方程

对于此类线性常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

#注意：永远记住自己用的公式是左右都有分布的形式，否则会搞错符号！！！！！

可以写出当 $Q=0$ 时的齐次解 $y=C_1e^{-\int P(x)dx}$

然后写出 $Q=Q(x)$ 时的通解 $C_1=C_1(x)=u(x)$

$\Rightarrow y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ （常数变易法）$u(x)=C_1$

带入到原式，可以得到

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y$$

$$y'+P(x)y=Q(x)\Rightarrow y'+P(x)y=u'(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}\Rightarrow u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

因此，通解为

$$y=\ u(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

3 弧长线积分

(1)参数法 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\alpha\leqslant t\leqslant\beta$

$$\int f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

(2)直角坐标法

$$\int f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

(3)极坐标法

$$\int f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)cos\theta,\rho(\theta)sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

4 坐标线积分

积分值与积分路径有关

$$\int_{L(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

(1)计算方法①——直接法（参数描述法）

$$\int_{L(AB)}Pdx+Qdy=$$
$$\int_\alpha^\beta\left[P\left(x(t),y(t)\right)x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt$$

x，y 由参数 t 函数形式描述（没有回头线）

(2)计算方法②——格林公式、斯托克斯公式

① L 是 D 的正向边界曲线（D 始终在 L 前行方向的左侧）

② P，Q 必须在 D 上处处有一阶连续偏导

#注意：格林公式中间的运算符号是负号，当两者相等时，闭环积分恒等于零

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

斯托克斯公式 $di\cdot dj$ 投影到 dS

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

利用斯托克斯计算后，会出现 $dydz$，$dxdz$，$dxdy$ 这样的坐标平方微分子，可以逆运用直接投影法，将对于平面的积分变为面微分 dS

(3)计算方法③——补线减差-格林公式

(4)计算方法④——等价四条件

①线积分 $\int Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow$

② C 为 D 区域中任一光滑闭曲线 $\oint_C Pdx+Qdy=0\Leftrightarrow$

③类似无旋流动条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)\in D\Leftrightarrow$

④微分原函数 $\exists F(x,y)$ 使 $P(x,y)dx+Q(x,y)=dF(x,y)$

解题思路	
I 观察是否封闭	II 积分函数是否路径无关

概要	封闭	路径有关	【格林公式】
		路径无关	【原函数】或【分段积分】
	不封闭		【补线】或【直接法】
		路径有关	【补线】+【原函数】

1 二者联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$
$$\iint_{\Sigma}[Pcos(\mathbf{n},\mathbf{yOz})+Qcos(\mathbf{n},\mathbf{xOz})+Rcos(\mathbf{n},\mathbf{xOy})]dS$$

进一步联系：对于封闭曲面，$\mathbf{n}$ 为任意曲面外法线向量

$$\iint_{\Sigma闭}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$$
$$=\iint_{\Sigma闭}\left[\frac{\partial f}{\partial x}cos(\mathbf{n},\mathbf{yOz})+\frac{\partial f}{\partial y}cos(\mathbf{n},\mathbf{xOz})+\frac{\partial f}{\partial z}cos(\mathbf{n},\mathbf{xOy})\right]dS$$
$$=\iint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dxdz+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$
$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV$$

2 对面积的面积分

(1)形式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

(2)计算方法①

关注【对称奇偶性】√

通过 $z=z(x,y)$ 画出积分曲面的**草图**

注意：对称相消只存在于区域对称且关于对称坐标为奇函数

关系式可以关于面 xy、面 xz、面 yz 对称，关键就是观察是否可以替换 z、y、x 符号。如下

$$yOz\Rightarrow f(\dot{x},y,z),\forall x\to \pm x$$
$$zOx\Rightarrow f(x,\dot{y},z),\forall y\to \pm y$$
$$xOy\Rightarrow f(x,y,\dot{z}),\forall z\to \pm z$$

(3)计算方法②

如果找不到关于坐标面对称的，但是存在一个**类似的对称平面**，那么可以

$$\iint f(x-x_0,y-y_0,z-z_0)dS=0\Rightarrow$$
$$\iint[f(x,y,z)-g(x,y,z)]dS\Rightarrow$$
$$\iint f(x,y,z)dS=\iint g(x,y,z)dS$$

(4)计算方法③

直接投影法

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

3 对坐标的面积分

(1)形式

$$\iint_{\Sigma} Pdzdy+Qdxdz+Rdxdy$$

(2)计算方法①——直接法

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=I_{yz}+I_{xz}+I_{xy}$$
$$\begin{cases} I_{yz}=\pm\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz\,,\#x=x(y,z)\\ I_{xz}=\pm\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz\,,\#y=y(x,z)\\ I_{xy}=\pm\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy\,,\#z=z(x,y)\end{cases}$$

注意：正负号由【曲面的法向量】和【对应坐标轴正方向】决定，夹角为锐角则为正！

过程详解：

①利用投影法，将 Sigma 投影到各个微分平面上，（第三坐标—>第一第二坐标）

②观察对称奇偶性，能消就消。（奇偶性要注意符号，有些曲面分正负两部分）

③做个计算，然后求和。

(3)计算方法②——（封闭曲面）高斯

对于封闭曲面，使用高斯方法(符号中的左式积分为**封闭积分**)

封闭曲线内存在函数奇点则不能使用高斯法

注意：这里的Σ默认是外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

(4)计算方法③

补面，然后**高斯**

注意：补面需要写出补充的面方程

1 梯度

(1)定义

函数 $f(x,y,z)$ 在空间坐标系（或平面坐标系）中，在 P 点时方向导数取最大值对应的方向向量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，就是梯度

$$|\boldsymbol{A}(x,y,z)| = max\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\}$$

(2)表达式

$$\boldsymbol{grad}\ f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

梯度是**向量**

*注意：梯度<u>**处理的对象**</u>不是场，而是一个<u>标量函数</u>*

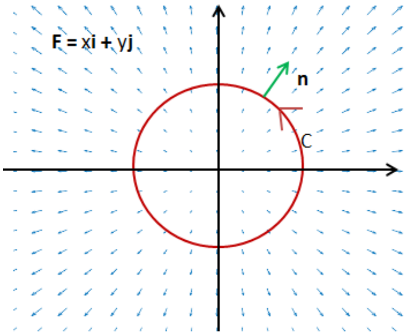
*注意：梯度是<u>**向量**</u>*

2 通量

(1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【有向曲面一侧】的对 $\boldsymbol{u}$ 的面积分为通量



(2)计算

$$\Phi = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

注意： 通量是**标量**!

3 环量

(1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【封闭有向曲线 l 】的沿一定方向对 $\boldsymbol{u}$ 的积分

#l 围成的区域为 D

(2)计算公式

$$\Gamma = \oint_{\partial D} \vec{u}\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz$$

注意： 环量为**标量**

4 散度

(1)定义及条件

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

P,Q,R 都有一阶连续偏导，各方向取导然后求和就是散度

(2)计算公式

散度类似于**向量**点乘**哈密顿算子**

$$div\ \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

注意： 散度是标量

5 旋度

(1)计算公式

$$\boldsymbol{rot}\ \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

注意： 旋度是向量

6 质心、转动惯量

(1)质心内容

略

(2)转动惯量

定义：

所谓转动惯量，就是 $f(x,y,z)$ 的**密度**乘以该点到转动轴的**距离的平方**的**积分**

公式

$l: ax + by + cz + d = 0$

$$|D|^2 = \left(\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 = \frac{(ax+by+cz+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

点到直线距离平方公式

通量	Φ	$\int$ 向量场·面法向量 $\rightarrow$	标量
梯度	$\vec{\nabla} f(x,y,z)$	标量 $\rightarrow$	向量
环量	$\oint_{\partial D} \vec{u}\cdot d\vec{r}$	$\int$ 向量场·线切向量 $\rightarrow$	标量
旋度	$\boldsymbol{rot}\ \vec{\boldsymbol{u}}$	向量交叉求导行列式 $\rightarrow$	向量
散度	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$	$\vec{\nabla}$ 向量场 $\rightarrow$	标量

1 求收敛域格式

(1) 观察是否需要分类讨论，极限是否存在（不存在也有收敛的情况）

如果不存在，则需要使用夹逼定理。

(2) 写计算通式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underline{\qquad\qquad} < 1$$

(3) 求取并写出【收敛半径 R】

(4) 带入边界值，判断边界值是否可以被包含

当 x=左边界值时，原级数为......收敛/发散

当 x=右边界值时，原级数为......收敛/发散

(5) 写出收敛域

所以收敛域为........... $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

2 级数求和

(1) 化幂为函

☆把幂级数公式里面的 $a^n,(\frac{1}{a})^n$ 化为 x^n .

如果幂级数里面没有，那就创造一个，然后带入 1

(2) 写出求和公式 $S(x)$ ，利用求和公式

$$\sum_{n=a}^{\infty} Cx^n = Cx^a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

(3) 设法将所给的幂级数系数消去

有 $\frac{1}{n}$ 因子就　求导后积分

有 $n+1$ 因子就　　积分后求导

#注意

以上操作可以是针对 $S(x)$ 的，也可以是针对 $\sum a_n(x)$ 的。即可以全体也可以局部。

例：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$

① $S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ => $S''(x)=\frac{2}{1+x^2}$

积分还原 $S'(x)=2arctanx$

$S(x)=2x\cdot arctanx - x\ln(1+x^2)$　$x\in[-1,1]$

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

3 展开为幂级数

(1) 确定是否为可展开的初等函数

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$；　$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$；　$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$；　$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$；　$e^x=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

(2) 计算并写出收敛区间

(3) 变化形式，代入公式

$$f(x)-f(0)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{f'}(x)dx \quad \therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)+f(0)$$

#注意：如果需要求导，有时候全部一起和单个求导有区别，关键是看求导运算是否耦合，如何耦合则推荐单个求导，如果不耦合，全部一起求导。

例：$f_1(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

$f_2(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

第一个函数耦合，第二个函数不耦合

$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},x\in(-1,1)$

$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},x\in(-1,1)$

4 求幂级数的和函数

(1) 求【收敛半径 R】

(2) 写出求和公式 $S(x)$ 和【收敛域】 $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

求幂级数的和函数需要对 x 按区间分类讨论

5 傅里叶级数（【展开】）

(1) 辨识 $f(x)$【定义域】$([x_1,x_2])$【周期】

$2l=x_2-x_1$

(2) 写出傅里叶系数

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi}{l}nxdx$；　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi}{l}nxdx$

$a_0=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$，$a_n$ 和 b_n 是需要化简的，如果原函数是分段函数，则还需要分段积分

(3) 写出级数表达结果，及定义域

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$x\in([x_1,x_2])$

(4) 写出级数在原函数边界处的值

其傅里叶级数在 $x=x_0$ 处收敛于 y_0

<u>如果边界值和原函数边界值不同</u>

1 n 的多项式幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_kn^k)x^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_0x^n+B_1(x^{n+1})'+B_2(x^{n+2})''+\ldots+B_k(x^{n+k})^{(k)}\right]$$

$$=B_0\frac{1}{1-x}+B_1(\frac{x}{1-x})'+B_2(\frac{x^2}{1-x})''+\ldots+B_k(\frac{x^k}{1-x})^{(k)}$$

$$=B_0\frac{0!}{(1-x)^1}+B_1\frac{1!}{(1-x)^2}+B_2\frac{2!}{(1-x)^3}+\ldots+B_k\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

计算过程中也可以择机提取 x，简化过程

$$\sum_{n=1}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''$$

$$=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{4}{27}=\frac{22}{27}.$$

几个需要记忆后方便计算的求和公式：

以下求和公式需要小心收敛域边界值的失效，需要单独计算

n 的起始值是第一个非零项，做题目时候保证 n 在首项开始

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$,0 项没有意义

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,这个从 0 开始是因为 n=0 时项式不为 0

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$； $\to\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$,0 项为 0

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2!}{(1-x)^3}$$

拓展：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\to\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\to\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)=x\left(\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

2 多项式分母分式

多项分式比较麻烦，主要思想是**因式分解**，然后**拆分**。若分母为等比求和数列，则可以利用等比求和公式来化简。

例题：

【例】 求幂级数 $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

易求得收敛域为$[-1,1]$. 令 $S(x)=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$， $x\in[-1,1]$，

$x\in(-1,1)$ 时，

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n}\right)dt$$

$$=x^2\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n-2}\right)dt+\int_0^x\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)dt$$

$$=x^2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\arctan x-x$$

$$=x^2\arctan x+\arctan x-x,$$

由幂级数的分析性质(3) 的【注】,故 $S(x)=(1+x^2)\arctan x$， $x\in[-1,1]$.

方法二：分母因式分解，通过直接求导，然后积分

3 分母含阶乘

利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ （ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}=e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ ）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\cos x;\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

若分子同时也含有 n 的多项式，则通过对 n 的多项式的**阶乘分解**来化简式子。

例：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$，收敛半径为$\infty$， $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\left(\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)$$

阶层分解：

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

4 傅里叶级数系数计算

(1) **关键公式：** $\cos n\pi=\cos(-n\pi)=(-1)^n$；$\sin n\pi=0$

带 n 次多项式 $P_n(x)$ 的分部积分方法

$$\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$$

$$=P_n(x)\int g(x)dx-P_n'(x)\iint g(x)d^2x+P_n''(x)\iiint g(x)d^3x-\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kP_n^{(k)}(x)\cdot g^{-(k+1)}(x)\Big|_{x_2}^{x_1}$$

(2) **表格法计算多项式原函数展开**

对于 $\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$， $g(x)$ 为 $\cos\frac{n\pi}{l}x$ 或 $\sin\frac{n\pi}{l}x$

$(-1)^k$	1	-1	1	反	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
$d^kP_n(x)/dx$	$P_n(x)$	$P_n'(x)$	$P_n''(x)$	导	$P_n^{(n)}(x)$	0
$\underbrace{\int\ldots\int}_{k-1}g(x)d^{k-1}x$	$g(x)$	$\int g(x)dx$	$\iint g(x)d^2x$	积	$g^{-k}(x)$	$g^{-(k+1)}(x)$

交叉相乘

1-8 微分方程

1 一阶形式

(1)可分离变量 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

(2)齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$\to \boxed{u=\dfrac{y}{x}} \leftrightarrow \boxed{y=ux}$；$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$

得到 $\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$

(3)非齐次线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

齐次解 $y_0=C_1e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

常数变易：$u(x)=C_1$

$u(x)=\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C$

$y_0=u(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C\right)$

(4)伯努利微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$

令 $u=y^{1-n}$，即 $y^n=\dfrac{y}{u}$；$\because u'=(1-n)y^{-n}y'$

$\therefore y'=y^n\dfrac{u'}{(1-n)}$；原式为 $\dfrac{u}{y}y'+u\cdot P(x)=Q(x)$

即 $\cancel{\dfrac{u}{y}y^n}\boxed{\dfrac{u'}{(1-n)}+u\cdot P(x)=Q(x)}$

(5)全微分

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 且 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$

利用偏积分方式求解

2 降阶形式

(1)只含一个 $y^{(n)}=f(x)$

反复积分

(2)只含 x、y'，不显含 y $y''=f(x,y')$

$p=y' \Rightarrow y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dx}$

原式为 $\dfrac{dp}{dx}=f(x,p)$，求解此一阶微分方程

(3)只含 y、y'，不显含 x $y''=f(y,y')$

$p=y' \Rightarrow y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

原式为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$，继续求解此一阶微分方程

求解出 $p=y'=\dfrac{dy}{dx}=g(y)$，再求解出 $y=h(x)$

3 高阶形式

注意：善用叠加原理

(1)二阶常微分齐次方程 $y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$，解出 r

不相等实数 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
相等实数 $r_1=r_2=r$	$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$
虚数 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

(2)二阶常微分非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$

先解出齐次解，再利用算子法——（本质是拉普拉斯变换）

① $f(x)=Ae^{kx}$

$$\begin{cases} y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}Ae^{kx}\Big|_{D=k},(k^2+pk+q\neq 0) \\ y^*=\dfrac{x}{2D+p}Ae^{kx}\Big|_{D=k},(k^2+pk+q=0\,\&\,2k+p\neq 0) \\ y^*=\dfrac{x^2}{2}Ae^{kx},(k^2+pk+q=0\,\&\,2k+p=0) \end{cases}$$

② $f(x)=P_m(x)$型

特解形式为 $y^*=Q_m(x)$，这种就用待定系数法吧

③ $f(x)=A\cdot\cos\alpha x\,\|\,A\cdot\sin\alpha x$

$y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}\left[A\cdot\cos\alpha x\,\|\,A\cdot\sin\alpha x\right]\Big|_{D=i\alpha}$

$=\dfrac{A}{pD}\left[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x\right]=\dfrac{A}{p}\int\left[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x\right]dx,(q-\alpha^2=0)$

$=\dfrac{A(pD-t)}{p^2D^2-t^2}\left[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x\right]=-\dfrac{ApD-At}{p^2\alpha^2+t^2}\left[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x\right],(q-\alpha^2=t)$

④ $f(x)=P_m(x)e^{ax}$——拉普拉斯位移延时定理

定理：

$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right]=e^{-st_0}\int e^{-s(t-t_0)}f(t-t_0)dt=\boxed{e^{-st_0}F(s)}$

$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right]=\int e^{-st}e^{at}f(t)dt=\int e^{-(s-a)t}f(t)dt=\boxed{F(s-a)}$

方法一：**拉普拉斯变换法** 设 $\mathscr{L}\left[P_m(t)\right]=P_m^{[\mathscr{L}]}(s)$；

原式 $y''+py'+qy=f(x)=P_m(x)e^{ax}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left[e^{-ax}(y''+py'+qy)\right]=\mathscr{L}\left[P_m(x)\right]$

即 $Y=\dfrac{\mathscr{L}\left[P_m(x)\right]}{(s+a)^2+p(s+a)+q}$

化简、用拉普拉斯逆变换求解

方法二：**微分算子法**

$L(D)=\sum a_iD^{n-i}=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_n$

原式为

① $L(D)e^{\alpha x}=L(\alpha)e^{\alpha x}$
② $L(D)e^{ax}f(x)=e^{ax}L(D+a)f(x)$

$y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}e^{kx}P_m(x)$

$=e^{kx}\dfrac{1}{(D+k)^2+p(D+k)+q}P_m(x)$

然后利用积分原则对 $P_m(x)$ 进行后续运算。

1 性质

① $\left|A^T\right|=|A|$

② $|kA|=k^n|A|$

③ $|A||B|=|AB|$

④ $\left|A^*\right|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}$

⑤ $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$

⑥ 仅有的矩阵加法的地方

$$|k_1+k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=|k_1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+|k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|$$

所以一般来讲，$|nA+mB|\neq|nA|+|mB|$

⑦ 伴随矩阵由代数余子式组成

2 展开公式

A. $\boxed{\text{拉普拉斯展开式}}$

A，B 分别为 m 和 n 阶矩阵

$$\begin{vmatrix}A & * \\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|\ ;\quad \begin{vmatrix}* & A \\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$$

B. $\boxed{\text{范德蒙行列式}}$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

从最高项到最低项相减握手

C. 三阶行列式展开公式

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$$

这是交叉相乘相减的计算方法只适用于二阶和三阶，如果大于 3 阶，就只能用代数余子式计算方法

如：
$$\begin{vmatrix}a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}afkp-aflo-agjp+agln \\ +ahjo-ahkn-bekp+belo \\ +bgip-bglm-bhio+bhkm \\ +cejp-celn-cfip+cflm \\ +chin-chjm-dejo+dekn \\ +dfio-dfkm-dgin+dgjm\end{pmatrix}$$

3 数学归纳法

3.1 方法一

验证 $n=1$ 时命题正确；假设 $n=k$ 时命题成立；验证 $n=k+1$ 时命题正确

3.2 方法二

验证 $n=1$ 时命题正确，假设 $n<k$ 时命题正确，证明 $n=k$ 时命题正确

1 性质

$(AB)^T=B^TA^T$；$A^*=|A|A^{-1}$

$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；$(AB)^*=B^*A^*$

$$\begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T & C^T \\ B^T & D^T\end{bmatrix};\quad\begin{bmatrix}A & O \\ O & B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n & O \\ O & B^n\end{bmatrix}$$

条件性：A,B都可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

反对称	对称	正交
$A^T=-A$	$A^T=A$	$A^TA=AA^T=E$

2 矩阵求逆方法

A. 伴随

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

B. 初等变换法

$$(A\ \vdots\ I)\ \underline{\text{初等变换}}\ (I\ \vdots\ A^{-1})$$

C. 分块法（对角或副对角必须为零）

$$\begin{bmatrix}B & O \\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O \\ O & C^{-1}\end{bmatrix};\quad\begin{bmatrix}O & B \\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1} \\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$$

拓展：$\begin{bmatrix}B & O \\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O \\ O & C^n\end{bmatrix}$

3 求伴随

$$\begin{bmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{bmatrix}\ \text{伴随为}\ \begin{bmatrix}A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3}\end{bmatrix}$$

按顺序求出来之后要转置。

#二阶矩阵伴随矩阵

$$\begin{vmatrix}a & b \\ c & d\end{vmatrix}^*=\begin{vmatrix}d & -b \\ -c & a\end{vmatrix}$$

主对角互换，副对角变号

#二阶矩阵逆矩阵

$$\begin{vmatrix}a & b \\ c & d\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}d & -b \\ -c & a\end{vmatrix}\frac{1}{|A|}$$

$|A|=ad-bc$

4 初等矩阵变换

前行后列，

前面的初等矩阵上下平移行；后面的初等矩阵左右平移列

#矩阵的乘法运算用这种方法来计算最方便

5 秩

① $r(A,AB)=r(A)$；② $r\begin{pmatrix}A \\ BA\end{pmatrix}=r(A)$

因为 B 是一个变换矩阵，

①中实现了对 A 的（不一定为初等）列变换，而左侧又是列组合，所以秩不变。

②中实现了对 A 的（不一定为初等）行变换，而左侧又是行组合，所以秩不变。

1 多次幂

求 A^n

A. 行列成比例矩阵，即 rank（A）=1

找到规律 $A^2 = lA$ ，$l = \sum a_{ii}$

先观察矩阵，若矩阵可化为列向量与行向量相乘，即

$A = \alpha\beta^T$ ，则 $A^n = \alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T$

B. 可化为相似型（特征值）

$A = PBP^{-1}$ ，则 $A^n = PB^nP^{-1}$

C. 可提取数量矩阵

$A = kI + B$ 且 B 是一个不满秩的三角矩阵

$A^n = (kA + B)^n$

$= (kA)^n + C_n^1(kA)^{n-1}B + C_n^2(kA)^{n-2}B^2 + \ldots$

注意#若 B 为不满秩三角矩阵，且 $\mathrm{rank}(B) = r$ ，

则 $\mathrm{rank}(B^r) = 1$； $\mathrm{rank}(B^{r+1}) = 0$

D. 分块矩阵

E. 其他

找不到规律就先计算一下 A^2 ，然后看看有没有规律

2 求解矩阵

(1)

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的每一列都可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$

①如 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，可以先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再做矩阵乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 求出 $\boldsymbol{X}$；也可以用行变换直接求 $\boldsymbol{X}$

②如 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_3$，再用方程的解构造矩阵 $\boldsymbol{X}$

(2) $A = PBQ$ ，求 B

A	E	P
$P^{-1}A$	$P^{-1}E$	$P^{-1}P$
$P^{-1}A$	P^{-1}	E

同理

A	AQ^{-1}	AQ^{-1}
E	EQ^{-1}	Q^{-1}
Q	QQ^{-1}	E

3 秩的证明题

主要关系式：（正反都要会用！）

$r(A+B) \le r(A) + r(B)$； $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$；

$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$；

$\boxed{\text{条件性}}$的

$AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \le n$

$r(A) = n \Rightarrow r(AB) = r(B) = r(BA)$ 即：*初等变换秩不变*

(1)证明矩阵相乘后秩的大小与原矩阵的区别

$\boxed{\text{分块法}}$：（列分块，每一列用向量表示）

$$[\alpha_1, a_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s]$$

表明是线性表示，然后就可以得出与原矩阵的秩的大小

同理，也可以行分块

4 求逆

【评注】 (1) 由于代数余子式的计算量较大，当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数较高时一般不用 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 这一方法. 假如用这一方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，那么求出 $\boldsymbol{A}^*$ 后不要忘记要除以 $|\boldsymbol{A}|$，再有就是要小心正号与排序.

(2) 用初等行变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的常规步骤：

$(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{由上往下}} (\ \ ) \xrightarrow{\text{由下往上}} (\ \ ) \xrightarrow{\text{某行乘}k} (\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{A}^{-1})$.

二、n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件

(1) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$).

(2) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，或秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$，或 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量线性无关.

(3) 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(4) $\forall \boldsymbol{b}$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有唯一解.

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0.

1 重要定义

(1)线性无关定义

对于向量 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$，存在不全为零的数 $k_1,k_2,...,k_s$

使 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+...+k_s\boldsymbol{\alpha_s}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

(2)线性无关性质（每个都要会用来证明）

$\Leftrightarrow$ ①n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ ②齐次方程的 $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ ③秩 $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s})=s$

2 施密特正交化（正交规范化）

$$\beta_1=\alpha_1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}\\ \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}\\ \gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}\end{cases}$$

3 坐标变换公式

基底过渡关系：$[\boldsymbol{\beta_1}\quad \boldsymbol{\beta_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta_n}]=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad \boldsymbol{\alpha_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{C}$

$\mathbf{C}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 的过度矩阵

坐标变换公式：

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{x}$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{y}$。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}\boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}\end{matrix}\quad \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}}$$

#弄清楚 x 和 y 是哪个基底上的坐标

（C 在左侧对列坐标进行行变换）

4 证明线性无关

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关

4.1 定义法

(1)设 $k_1\boldsymbol{\beta_1}+k_2\boldsymbol{\beta_2}+...+k_n\boldsymbol{\beta_n}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{Bk}=\boldsymbol{0}$

然后化简，与已知条件 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关联立

若 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{k}$ 只有零解

(2)写出组合系数行列式

若行列式的值不为零，则只有零解

4.2 用秩

(1)写出 $[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{P}$

求出 P，并写出|P|

(2) $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n})=r(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n})$

从而线性无关（有关）

5 线性表达=解方程组

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 表达

(1)列出 $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}\,|\,\boldsymbol{\beta})$，作初等行变换

(2)将左侧化为三角矩阵，可根据右侧写出解

6 极大线性无关组

求极大线性无关组的时候只能对列向量们做初等行变换

化为阶梯形矩阵就可以了

7 解非齐次方程组

(1)方程组写为列向量矩阵形式 $\mathbf{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

(2)判断解的形式

无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 无法由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出

无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=r<n$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法**不唯一**

唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=n$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法**唯一**

注意：如果题目中的矩阵 $\mathrm{A}_{m\times n}$ 存在未知量，则要小心各个情况的可能性。

(3)求基础解系 ξ_i 和特解 $\boldsymbol{\eta}$

将增广矩阵 $r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，化为阶梯形矩阵

求出特解 $\boldsymbol{\eta}$

求出基础解系 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...,\boldsymbol{\xi_{n-r}}$（基础解系有 $n-r$ 个）

基础解系的寻找技巧

$n-r$ 个基础解系的末位 $n-r$ 个为 $n-r$ 阶单位矩阵，如

$$\begin{matrix}\xi_1=[d_{11},d_{12},...,d_{1r}, & 1 & 0 & ...0]^T\\ \xi_2=[d_{21},d_{22},...,d_{2r}, & 0 & 1 & ...0]^T\\ \vdots & & \ddots & \\ \xi_{n-r}=[.........,d_{n-rr}, & 0 & 0 & ...1]^T\end{matrix}$$

(3)求出唯一解

(4)写出结果表达式

通解为 $\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}+...+k_{n-r}\boldsymbol{\xi_{n-r}}$

注意：求具体解的时候一定要用行变换，但是方阵求是否有解的时候可以用求秩的方法来计算。

8 克拉默法则（特殊方阵）

对于非齐次线性方程 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满秩，则方程解**唯一**

$x_i=|\boldsymbol{A}_i|/|\boldsymbol{A}|,i=1,2,...,n.$，其中 $|\boldsymbol{A}_i|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列替换为右端常数项 $b_1,b_2,...,b_n$. 所构成的行列式。

##会用，知道就行了，一般别用，计算 $|\boldsymbol{A}_i|$ 要累死。

1 重要公式及定义

特征向量：$A\alpha=\lambda\alpha$，（α 为非零列向量）

相似定义：A、B 是任意 n 阶矩阵

存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则 A 相似于 B

若 $A\sim\Lambda$，且 Λ 为对角阵，则称 Λ 是 A 的相似标准型。

其中，P 就是由特征值 λ_i 构成的 Λ 对应的特征向量矩阵

二次型矩阵定义：A 为对称矩阵 *遇到字母题目要注意*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$$

合同定义：A、B 是任意 n 阶矩阵，

存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，则 A 合同于 B。

二次标准型：A 为主对角矩阵 Λ

二次规范性：A 为元素只有 $-1,0,1$ 的主对角矩阵 Λ

2 重要性质

- $\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$　　特征值相加=主对角线之和
- $\prod\lambda_i=|A|$　　特征值相乘=行列式
- $Ax=0$ 基础解系是 $\lambda=0$ 对应的线性无关特征向量

若 $r(A)=r$，则 $\lambda=0$ 至少是 A 的 $n-r$ 重特征值。

定理 3：矩阵 A 的特征值为 λ，特征向量为 α

$\Rightarrow$ 矩阵 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$，特征向量为 α

$f(A)\to A^k$、$\sum a_iA^i$、$A+kE$（勿引入其他矩阵）

相似对角化判断条件

定理 1：A 有 n 个互不相同的特征值 $\Rightarrow$

n 阶矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

定理 2：A 的 r_i 重特征值 λ_i 对应线性无关特征向量为 r_i 个

$\Rightarrow$ n 阶矩阵 A 可对角化

实对称矩阵性质：

定理 4：实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交

定理 5：实对称矩阵必定可正交变换为对角阵，即

$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$，其中 Q 为正交阵，（单位化）

二次型矩阵的性质：$f(x_1,x_2,...,x_n)=x^TAx$

定理 6：对于任意 n 阶实对称矩阵 A，必存在正交阵 Q，

$x=Qy$ 使 $x^TAx=y^TQ^TAQy=y^TQ^{-1}AQy=y^T\Lambda y$

定理 7：可逆线性变换不唯一，标准型也不唯一，但标准型的 p、q 由实对称矩阵 A 唯一确定。

正平方项的项数 p 为正惯性指数；**负平方项**的项数 q 为负惯性指数；$p+q=r$ 为秩；$p-q$ 为符号差。

若 $q=n$，则称 A 为正定矩阵

定理 8：若 $f(x_1,x_2,...,x_n)=x^TAx$ 正定，则 $a_{ii}>0$

正定矩阵判断条件

定理 9：$A\simeq E$ $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的全部特征值 $\lambda_i>0$

$\Leftrightarrow$ $A=D^TD$，D 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的全部顺序主子式大于零

求特征值和特征向量过程

(1)写出 $|\lambda E-A|=0$ 展开计算行列式

(2)带入不同的 λ_i

带入到矩阵 (λ_iE-A)，求取 $(\lambda_iE-A)x=0$

当 $\lambda=\lambda_i$ 时，$(\lambda_iE-A)x=0$，得 $\alpha_i=?$；

直接写解得 $\alpha_j=[x_1,x_2,...,x_n]^T$ 按顺序列出求取的

$\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 化为矩阵形式。所以 $P=[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]$

#注意：求取的特征向量不唯一，而是一个特征向量空间

\$技巧：①计算三阶的 $|\lambda E-A|=0$ 时，代入 r 重化简后得到 n-r 阶矩阵，需求出 r 个线性无关的解；

\$技巧：②可以直接舍去一行（仅对于二、三阶）

3 求解 A^n 或 $A^n\beta$

3.1 矩阵相似化

(1)计算特征向量矩阵

$|\lambda E-A|=0$，求出 λ_i 及 α_i，得出特征向量矩阵 P

(2)幂级数展开，特征矩阵求逆

$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}$；

(3)得到 A^n 或 $A^n\beta$

注意：如特征向量矩阵不可逆，则按照之前矩阵章节计算特殊方阵的幂的方法求解

3.2 线性表出法（快速求解第二类）

(1)计算特征向量矩阵（方法相同）

$|\lambda E-A|=0$，求出 λ_i 及 α_i，得出特征向量矩阵 P

(2) β 由 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 线性表出 $\beta=Px=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)x$

(3)展开幂级数

$A^n\beta=A^nPx=A^{n-1}(AP)x=A^{n-1}(P\Lambda)x=...=P\Lambda^nx$

4 正交变换二次型（特征法）

(1)表示出 x^TAx 并求解 A 的特征值和特征向量

这里的特征向量用 α_i 来表示

*注意：求解特征值时，根据主对角线和等于特征值之和来**验算***

*注意：求解次要重根时可以预先**正交化***

(2)重根 Schmidt 正交化、所有根规范化

这里的正交化用 β_i 来表示，规范化用 β_i° 来表示

利用不同特征值对应的的特征向量正交来验算**所有**重根；

注意：不要忘记规范化，解出正交阵

(3)写出对角阵（标准型）

答案规范：令 $x=Qy$，则 $f(x_1,x_2,...,x_n)=\boxed{y^TQ^TAQy}$

$=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2$ **要写全**。 ***一定要验算！***

5 配方法变换二次型

对于矩阵 A，利用 $C_k^T...C_2^TC_1^TAC_1C_2...C_k=C^T\Lambda C$

注意：这个步骤是草稿纸上的，试卷上要写出配方形式

每一个 C_i 都是一次初等变换矩阵，按高斯消元法化简。

答案规范：$f(x_1,x_2,...,x_n)=......=(a_{11}x_1+...)^2+......$

$=(....)^2+...+(...)^2$

令 $\begin{cases}y_1=...\\ \vdots...\\ y_n=\end{cases}$（求逆得到），即 $\begin{cases}x_1=...a_{1k}y_k...\\ \vdots...\\ x_n=...a_{nk}y_k...\end{cases}$，$x=Cy$

注意，结果必须可逆，主对角元素不可为零
（其实自己方法必定可逆）

3-2 概率分布部分定理推导

1 泊松定理推导

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{n!}}{k!\boxed{(n-k)!}}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\xrightarrow{k\ll n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\boxed{n^k p^k}(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{(np)^k}{k!}(\boxed{1-p})^{n-k}$$

$$\xrightarrow{e^{-p}\sim 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-p)^i}{i!}\sim 1-p}\frac{(np)^k}{k!}(e^{-p})^{n-k}=\frac{(np)^k}{k!}(e^{-np}\boxed{e^{pk}})$$

$$\xrightarrow{kp\ll np}\frac{(np)^k}{k!}(e^{-np})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

2 指数无记忆性推导

0)$P\{X\le x\}=F(x)=1-e^{\lambda x},x>0$

1)$P\{X>t\}=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t},t>0$

2)$P\{X>t+s\mid X>s\}=\dfrac{P\{X>t+s\}}{P\{X>s\}}$

$=\dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\{X>t\},t,s>0$

你还能活多久和你活了多久没有关系

3-4 期望方差公式推导

3 二项分布期望方差

二项分布形式 $X\sim B(n,p)$；$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

(1)**期望公式：** $EX=\sum_{k=1}^n k\cdot P\{X=k\}$

$$=\sum_{k=1}^n k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^n k\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}p^kq^{n-k}$$

$$=\boxed{np}\sum_{k=1}^n\frac{\boxed{(n-1)}!}{(n-k)!\boxed{(k-1)}!}\boxed{p^{k-1}}q^{n-k}$$ 提取 n、p

$$=np\sum_{k=1}^n\boxed{C_{n-1}^{k-1}}p^{k-1}q^{n-k}=np\sum_{\boxed{k=0}}^{\boxed{n-1}}C_{n-1}^{\boxed{k}}p^{\boxed{k}}q^{n-\boxed{(k+1)}}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k p^k q^{n-k-1}\xrightarrow{t=n-1}np\sum_{k=0}^t C_t^k p^k q^{t-k}$$

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}}=np(p+q)^t=np$$

(2)**方差公式：** $DX=EX^2-(EX)^2$

方法一

$$=\left[\sum_{k=1}^n k^2C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\right]-(np)^2$$

$$=\sum_{k=1}^n k\cdot npC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}-(np)^2$$ 同上，提取 np

$$=np(\sum_{k=1}^n\boxed{(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}}+\sum_{k=1}^n\boxed{C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}})-(np)^2$$

$$=np(\sum_{k=0or1}^{n-1}\boxed{k\cdot C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}}+\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}})-(np)^2$$

$$=np(\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{k\cdot P\{X=k\}}+\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}})-(np)^2$$

$$=np(\boxed{EX_{n-1}}+\boxed{1})-(np)^2$$

$$=np[\boxed{(n-1)p}+\boxed{1}]-(np)^2=np(1-p)$$

方法二

设随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次实验成功\\0, & 第i次实验失败\end{cases}$，则 $X=\sum_{i=1}^n X_i$

则 $X_i\sim B(1,p)$，故 $D(X_i)=p(1-p)$（0-1分布）

对于独立的 $X_i,X_j(i\ne j)$，有

$$D(X)=\sum_{i=1}^n D(X_i)=np(1-p)$$

4 几何分布期望方差（级数）

几何分布：$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

(1)**期望公式** $EX=\sum_{k=1}^{\boxed{+\infty}}k\cdot p(1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=p\sum_{\boxed{k=1}}^{+\infty}(q^k)'=p\sum_{\boxed{k=0}}^{+\infty}(q^k)'$$

$$=p\left(\frac{1}{1-q}\right)'=p\frac{-1\cdot\frac{dq}{dp}}{(1-q)^2}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

(2)**方差公式**

$DX=EX^2-(EX)^2$

$$EX^2=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2q^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(q^k\right)'$$

$$=p\sum_{\boxed{k=0}}^{+\infty}\left((k+1)q^k-q^k\right)'=p\sum_{k=0,1}^{+\infty}\left(q^{k+1}\right)''-\sum_{k=0,1}^{+\infty}\left(q^k\right)'$$

$$=p\left[\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''-\left(\frac{q}{1-q}\right)'\right]=p\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)''-\left(\frac{1}{1-q}\right)'\right]$$

$$=p\left[\frac{2}{(1-p)^3}-\frac{1}{(1-p)^2}\right]=\frac{2-p}{p^2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

3-5 大数定理推导

1 切比雪夫不等式

离散型: $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}=\sum\limits_{|x_i-EX|\geq\varepsilon} p_i \ ,(p_i=P\{X=x_i\})$

因为这里的取值就是 $|x-EX|\geqslant\varepsilon$，所以:

$$\leq \sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon}\left(\frac{|x_i-E(X)|}{\varepsilon}\right)^2 p_i \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon}|x_i-E(X)|^2 p_i$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum|x_i-E(X)|^2 p_i=\frac{1}{\varepsilon^2}DX$$

连续型: $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}f(x)dx$

$$\leq\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}\left(\frac{|x-E(X)|}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx\ ,\quad \frac{|x-EX|}{\varepsilon}\geq 1$$

由于积分项都是正的，所以可以拓展积分范围来放大

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-E(X)|^2 f(x)dx=\frac{D(x)}{\varepsilon^2}$$

2 切比雪夫大数定律证明

$\{X_i\}$ 是①两两不相关的随机变量序列，所有② X_i 都有方差，且③方差有上限(存在常数 C，使得 $D(X_i)\leq C,(i=1,2,\dots)$)

$$则 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

$$或 \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$$

证明：有切比雪夫不等式 $P\{\boxed{|X-\mu|}\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，带入得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|\geq\varepsilon\right\}\xrightarrow{X=\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

$$P\left\{\frac{1}{n}|X-EX|\geq\varepsilon\right\}=P\left\{|X-EX|\geq\boxed{n\varepsilon}\right\}\leq\frac{DX}{\boxed{n\varepsilon}^2}$$

$\therefore$ 当 $n\to+\infty$ 时，有 $\frac{DX}{n^2\varepsilon^2}=0$，

$$原式=1-\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

证毕。

3 棣莫弗-拉普拉斯定理证明

看看就行

$$C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$\simeq\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k}\cdot(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}\cdot\sqrt{2\pi k}\sqrt{2\pi(n-k)}}p^k q^{n-k}$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^k q^{n-k}$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\xrightarrow[p+q=1]{\frac{k}{n}\to p}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\ln\left(\left(\frac{np}{k}\right)^k\right)+\ln\left(\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(\frac{k}{np}\right)+(k-n)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(\frac{np+x\sqrt{npq}}{np}\right)+(k-n)\ln\left(\frac{n-np-x\sqrt{npq}}{nq}\right)\right\}$$

$$\xrightarrow{p+q=1}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+(k-n)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}$$

$$\xrightarrow[of\ \ln(x+1)]{Taylor}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)+(k-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\left(-np-x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)+\left(np+x\sqrt{npq}-n\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\left(-np-x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)-\left(nq-x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\left(-x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2q-x^2q+\cdots\right)+\left(x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2p-x^2p-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2q-\frac{1}{2}x^2p-\cdots\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2(p+q)-\cdots\right\}$$

$$\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}$$

3-5 数理统计基础

4 样本数字特性推导

① $EX=E\overline{X}=\mu$ 不用推导，我有脑子的

② $D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$ 推导: $D\overline{X}=D\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\sigma^2}{n}$

③ $ES^2=DX=\sigma^2$

推导: $ES^2=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-2\sum_{i=1}^{n}E(X_i\overline{X})+\sum_{i=1}^{n}E\overline{X}^2\right)$$

恒有① $EX_i=\mu$ ② $DX_i=\sigma^2$ ③ $EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2$

④ $E(X_i\overline{X})=\frac{1}{n}E\sum_{j=1}^{n}X_iX_j=\frac{1}{n}\left[E(X_i^2)+(n-1)EX_iEX_j\right],(i\neq j)$

$$=\frac{1}{n}\left[\sigma^2+\mu^2+(n-1)\mu^2\right]=\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)$$

⑤ $E\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(E\boxed{X_i\overline{X}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)=\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boxed{\sigma^2+\mu^2}-2\sum_{i=1}^{n}\boxed{\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)}+\sum_{i=1}^{n}\boxed{\frac{1}{n}(\sigma^2+n\mu^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(n\boxed{\sigma^2+\mu^2}-2\boxed{\sigma^2+n\mu^2}+\boxed{\sigma^2+n\mu^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2(\overline{X}\boxed{n\overline{X}}+n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}-\boxed{n\overline{X}^2}\right]$$

3-6 数理统计基本概念

1 抽样分布证明

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots X_n$ 是来自总体的样本

$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 是样本方差

(1) $S^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$ (1.1)

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$$

(2) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ (1.2)

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\mu\text{；}\quad D\overline{X}=D\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$\overline{X}$ 是 $X_1,X_2,\dots X_n$ 的线性组合，$\overline{X}$ 服从正态分布，即

$\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ 进而 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(3) $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (1.3)

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Rightarrow\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right]^2=\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2}-\boxed{n(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2}$$

☆左边 $\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(n)$，右边 $\sqrt{n}(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma})\sim N(0,1)$

即 $n(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$

左边—右边 $=\chi^2(n-1)$，证毕。

(4) $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ (1.4)

由（2）得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，由（3）得 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}\rightarrow\frac{X}{\sqrt{Y/k}},(Y\sim\chi^2(k),X\sim N(0,1))$$

$$=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\dfrac{S}{\sigma}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

证毕

(5) $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\sim\chi^2(n)$ (1.5)

$\dfrac{(X_i-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$，证毕

(6) $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ (1.6)

$\overline{X}\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1})$ 且 $\overline{Y}\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$ 得

$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$，于是

$$\frac{\left[\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)\text{ 证毕}$$

(7) $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ (1.7)

由（3）得 $\chi_1^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$，$\chi_2^2=\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$

$F=\dfrac{\chi^2(n_1)/n_1}{\chi^2(n_2)/n_2}\rightarrow$

$$\boxed{\frac{\chi_1^2/(n_1-1)}{\chi_2^2/(n_2-1)}}=\frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim\boxed{F(n_1-1,n_2-1)}\text{ 证毕}$$

(8) 如果 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

那么 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ (1.8)

其中，$S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，由（6）得

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

由（3）得 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 继而

$$\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\Big/(n_1+n_2-2)}}=\frac{\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{S_\omega^2}{\sigma^2}}}$$

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\sqrt{\dfrac{S_\omega^2}{\sigma^2}}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

证毕

3-7 正态总体的置信区间证明

1 正态总体的置信区间(置信水平为$\boxed{1-\alpha}$)

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，设样本 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 来自 X

补充分位点定义：

正态 N： $P\{X > z_\alpha\} = \alpha$

咖方 χ^2： $P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha$

T： $P\{T > t_\alpha(n)\} == \alpha$、$P\{|T| > t_{\boxed{\alpha/2}}(n)\} = \alpha$

学生 F： $P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

(1) 求 $\boxed{\mu}$，σ^2 $\boxed{\text{已知√}}$，求取 μ 的置信区间

由公式(1.2)可得，

$\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$；于是 $P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$；

展开得到：$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left\{-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu-\overline{X} < +z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

即 μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

(2) 求 $\boxed{\mu}$，σ^2 $\boxed{\text{未知?}}$，求取 μ 的置信区间

将 σ^2 换为无偏估计 S^2 由公式(1.4)可得

$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$；于是

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha；$$

展开得到

$$P\left\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即 μ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

(3) 求 $\boxed{\sigma^2}$，μ $\boxed{\text{未知?}}$，求取 σ^2 的置信区间

σ^2 的无偏估计是 S^2，由公式(1.3)可得

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；于是（$\chi^2$ 不对称）

$$P\left\{\chi_{\boxed{1-\alpha/2}}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\boxed{\alpha/2}}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

所以可得置信区间 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$

其他，略

1 基本运算及定义

注意：若 $P(A)=0$，无法得出 $A=\varnothing$；若 $P(A)=1$，无法得出 $A=\Omega$

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

注意：遇到交集运算和并集运算互换的时候，必用对偶律

分配律　$A\cap(B\cup C)=A(B\cup C)=\boxed{AB\cup AC}$

$A\cup(B\cap C)=A\cup BC=\boxed{(A\cup B)(A\cup C)}$

并型　$(A\cup B)(C\cup D)=AC\cup AD\cup BC\cup BD$

交型　$AB\cup CD=(A\cup C)(A\cup D)(B\cup C)(B\cup D)$

斥型：$A-B=A\overline{B}$，集合的"_+_"没定义，概率有

$A\overline{B}\cup B=A\cup B$

条件概率：在 A 事件发生的条件下发生 B 事件的条件概率

$$\boxed{P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}\Rightarrow P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$$

$\boxed{独立}$概率：若事件 A、B 相互独立，则

$$\Diamond\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}\Rightarrow\begin{cases}①P(B\mid A)=P(B)\\ ②P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})\end{cases}$$

②——即 A 发生或不发生都不影响 B

2 重要公式

对于任何事件都有：

加法　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

减法　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

在 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$；$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ 条件下：

全概率　$P(A)=\sum_i\frac{P(AB_i)}{P(B_i)}P(B_i)=\boxed{\sum_i P(A\mid B_i)P(B_i)}$

贝叶斯　$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i\mid A)P(A)}{\sum_i P(A\mid B_i)P(B_i)}$

3 三大概率型

(1) 古典型概率

实验结果为有限个样点本，且每个样点本的发生具有相等可能性，设事件 A 由 n_A 个样点本组成，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

(2) 几何型概率

实验样本的样本空间是某一块区域，以 $L(\Omega)$ 表示其几何度量，$L(\Omega)$ 为有限，且实验结果出现在 Ω 中的可能性只与该区域几何度量成正比，事件 A 的样本点所表示的区域为 Ω_A，这事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}$$

(3) n 重伯努利实验

实验结果只有两个结果 A 和 $\overline{A}$，独立重复 n 次

$$P(A)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

4 古典概型解题

一般来讲，$P(A)=\frac{n_A}{n}$ 的计算中，n 和 n_A 都是在同一样本空间中的样本点数，如果一个概率同时可以用有序和无序来计算，常常$\boxed{无序}$要简单些；同时可用两种样本空间计算时，常常用$\boxed{较小的样本空间}$要简单些。

之后这里会有例题补充。

5 几何型概率

要会寻找几何关系（函数关系），多依靠画图解决。之后这里会有例题补充。

注意：从 m 件产品中取出 n 件=不放回地一件一件取出共 n 件

6 例题

(1) N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件

——可以看做一次一件不放回取。

令 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次取得次品\\ 0, & 第i次取得正品\end{cases}$，则无论放回或不放回均为 $\frac{M}{N}$

1 重要基本定义

随机变量:

样本空间 Ω 上的实数函数 $X = X(\omega), \omega \in \Omega$ 为随机变量

分布函数:

考试大纲定义为 $F(x) = P\{X \boxed{\le} x\}$，即事件 $X \le x$ 的概率

注意：分布函数不一定连续

分布函数性质:

- $F(x)$ 是单调非减函数；$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
- $F(x)$ 必定右连续，写 X 取值时，一定要写 $* < X \le **$
- $P\{x_1 \boxed{<} X \boxed{\le} x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ *注意：符号不一致要补齐*
- $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$ 重要定义，**推导**时候要用

注意：分布函数和概率密度函数，做题时不要突然就混淆了

连续性随机变量:

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可由非负可积函数 $f(x)$ 积分得到，即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

*注意：连续的 **F(x)** 对应的 X 不一定是连续型随机变量。*

概率密度:

$$(1) f(x) \ge 0 \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$(3) P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

*注意：(1)(2)是 **f(x)** 作为概率密度函数的充要条件*

$$(4) f(x) \text{连续点有} F'(x) = f(x)$$

2 常用分布

(1) 0—1 分布

随机变量 X 有分布律

X	0	1
P	1-p	p

称 X 服从参数为 p 的 0—1 分布，或称 X 具有 0—1 分布

(2) 二项分布

n 次伯努利实验中，每次成功率为 p，则 n 次独立重复实验中成功的总次数 X 服从二项分布

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

称 X 服从参数为 n，p 的二次分布，记为 $X \sim B(n,p)$

(3) 几何分布

独立的重复一系列伯努利实验，每次成功率为 p，则在第 k 次实验才**首次**成功的概率服从的分布

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$$

则称 X 服从参数为 p 的几何分布，或 X 具有几何分布

(4) 超几何分布

次品抽取数分布

在 N 件产品中有 N_0 件次品，不放回地一次一次取共 n 件（一次抽取 n 件），X 为抽取到的次品数。

$$P\{X = k\} = \frac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$$

注意：分母为总共排列情况个数，分子为次品排列情况个数×正品排列情况个数

(5) 泊松分布

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$

(6) 均匀分布

连续性随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \boxed{\le} x \boxed{\le} b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad \text{记作 } X \sim U[a,b]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \boxed{<} x \boxed{<} b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad \text{记作 } X \sim U(a,b)$$

(7) 指数分布

连续性随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad \text{记作 } X \sim E(\lambda)$$

(8) 正态分布

随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{(\sqrt{2}\sigma)^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 μ, σ 为常数，且 $\sigma > 0$，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布，记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

若 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 即 $X \sim N(0,1)$ 则称 X 服从标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

对应的标准正态分布函数为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, -\infty < x < +\infty$$

3 性质

泊松定理：二项分布~泊松分布（见推导）

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda$，（$n \ge 100, p \le 0.1, np$ 不太大）

则 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (\approx) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

指数分布：无记忆性（见推导）

对于 $X \sim E(\lambda)$，则有

$$0) P\{X \le x\} = F(x) = 1 - e^{\lambda x}, x > 0$$

$$1) P\{X > t\} = e^{-\lambda t}, t > 0$$

$$2) P\{X > t+s \mid X > s\} = e^{-\lambda t}, t, s > 0$$

正态分布：标准化

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则

$$1) F(x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad 2) \phi(-x) = 1 - \phi(x), \phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$3) P\{a < X \le b\} = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$4) f(x) \text{关于} x = \mu \text{对称，} \varphi(x) \text{是偶函数}$$

$$5) \text{若} X \sim N(0,1), \text{有} P\{|X| \le a\} = 2\phi(a) - 1$$

4 随机变量函数分布

定义 $Y = g(X)$，则 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$

即 $F_Y(y) = \int_{g(x)\le y} f_X(x)dx \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y)$

$g(x) \le y$ 存在无取值、取全部有效范围、取部分有效范围的情况，划范围的技巧是将中断点带入函数。

1 基本定义

二维随机变量定义：

设 $X(\omega),Y(\omega)$ 是开以在样本空间 Ω 上的两个随机变量，那么称向量 (X,Y) 为二维随机变量，或随机向量

二维随机变量分布：

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},-\infty<x\,\&\,y<+\infty$

边缘概率分布：

$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,y<+\infty\}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,x<+\infty\}$

离散：$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=Y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$

连续：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 即边缘概率密度

注意：解题时，要注意把定义域写全，记得补充【，其他】

二维随机变量的条件分布定义：

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}>0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}P\{X\le x\mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$ 存在。

称为条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布，记作 $F_{X|Y}(x\mid y)$ 或 $P\{X\le x\mid Y=y\}$

离散：$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$

连续：$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt$ ，$f_Y(y)>0$

$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ ，$f_Y(y)>0$

独立性：

$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$ 即

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量 X，Y 相互独立

离散：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

注意：当 X，Y 相互独立时，分布律中两行对应的概率成正比

连续：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

2 性质

1) $0\le F(x,y)\le1$　$F(+\infty,+\infty)=1$

2) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$

3 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[N_1^2-2\rho N_1N_2+N_2^2\right]\right\}$$

其中，

$$N_1=\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1},N_2=\frac{(x-\mu_2)}{\sigma_2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2>0;\quad -1<\rho<1$

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)$

- $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)\Rightarrow\not\Leftarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow\rho=0$

4 随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 解题

离散型：略

离散×连续型：X 离散、Y 连续

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$

$=\sum_i P\{g(X,Y)\le z\mid X=x_i\}P\{X=x_i\}$

$=\sum_i p_i\cdot P\{g(\boxed{x_i},Y)\le z\mid\boxed{X=x_i}\}$

连续型：（对于 $Z=X+Y$）

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f(x,y)dy$

两连续变量如果相互独立，上式可以化为

$P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f_Y(y)dy$

求导可得 $F_Z'(z)=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

连续型：一般情况

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$，$x$、$y$ 默认范围是 Ω

(1) M=max(X,Y)及 N=min(X,Y)

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，他们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则

$\boxed{F_{\max}(z)}=P\{X\le z,Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$

$\boxed{F_{\min}(z)}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

5 直接合并的分布

(1) 泊松分布合并

设随机变量 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立且服从参数为 λ 的泊松分布，

则 $\boxed{X=X_1+X_2+\dots+X_n}$ 服从参数为 $n\lambda$ 的泊松分布

即 $X_i\sim P(\lambda)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$

(2) 正态分布合并

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$、

则 $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

1 数学期望

离散型：$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,3\ldots$

$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望或均值

连续型：随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为随机变量 X 的数学期望或均值

基本性质：

$E(k)=k$； $E(kX)=kE(X)$

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

如果 X、Y 不相关，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

1.1 拓展数学期望

(1) 随机变量 *X* 的函数 *Y=g(X)* 的数学期望

离散型：$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)p_k$

连续型：$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

(2) 随机变量 *(X,Y)* 的函数 *Z=g(X,Y)* 的数学期望

离散型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$

连续型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\iint_D g(x,y)f(x,y)dxdy$

2 方差

定义：数学期望 $E\{[X-E(x)]^2\}$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 $D(X)$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=E\{[X-E(x)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准方差**或**均方差**

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

基本性质：1) $D(k)=0$； 2) $D(\boxed{a}X+b)=\boxed{a^2}D(X)$

3) 若 X、Y 不相关，则有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

3 常用期望、方差公式(对照 3-2)

(1) 0—1 分布

$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p)$

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$

$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p)$

(3) 几何分布 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

$E(X)=\frac{1}{p},\quad D(X)=\frac{1-p}{p^2}$

(4) 超几何分布 $P\{X=k\}=\frac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$

$E(X)=n\frac{N_0}{N},\quad D(X)=n\frac{N_0(N-N_0)(N-n)}{N^2(N-1)}$

(5) 泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$E(X)=\lambda,\quad D(X)=\lambda$

(6) 均匀分布 $X\sim U(a,b)$

$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

(7) 指数分布 $X\sim E(\lambda)$

$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

(8) 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$

4 矩、协方差

4.1 矩：

(1) k 阶原点矩 $E(X^k)$

(2) k 阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^k\}$

(3) $k+l$ 阶混合矩 $E(X^kY^l)$

(4) $k+l$ 阶混合中心矩 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

4.2 协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

基本性质：

(1) $\mathrm{Cov}(\boxed{a}X,\boxed{b}Y)=\boxed{ab}\mathrm{Cov}(X,Y)$

(2) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

4.3 相关系数：

若 $D(X)D(Y)\neq 0$ $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

若 $D(X)D(Y)=0$，则 $\rho_{XY}=0$； 若 $\rho_{XY}=0$，则 X、Y 不相关

基本性质：

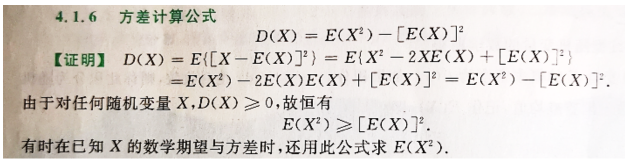
①$|\rho_{XY}|\leq 1$ ②若 $|\rho_{XY}|=1$，则必有非零线性关系 $Y=aX+b$

注意：二维正态分布随机变量(X,Y)的独立=不相关

5 要点：

①求方差时尽量使用公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

②求 *Z=g(X,Y)* 的数学期望，直接在 *x-y* 平面上权重积分就行



4.1.6 方差计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

【证明】 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$

$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2.$

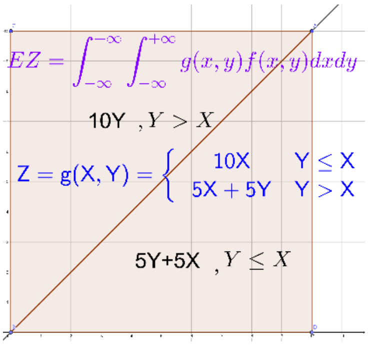
由于对任何随机变量 X，$D(X)\geqslant 0$，故恒有

$$E(X^2)\geqslant[E(X)]^2.$$

有时在已知 X 的数学期望与方差时，还用此公式求 $E(X^2)$.

深入理解随机变量：

- $\boxed{X\text{随机变量}}$就是一段连续或离散的具有权值的数值分布——***密度不同的一维点集***。X 本身只代表一维点在 x 轴上的位置。
- $\boxed{EX}$就是这些点集的质心位置。
- $\boxed{\text{二维随机变量}(X,Y)}$可以理解为平面上的***密度不同的点云***，其密度函数就是 *f(x,y)*
- $\boxed{\text{一元随机函数 } Y=g(X)}$，则可以认为是一个映射函数，将 x 轴上的点集通过函数扩充到 *x-y* 平面，然后映射到 y 轴上。
- $\boxed{EY=E[g(X)]}$就是映射转移后的点集质心位置。
- $\boxed{\text{二元随机函数 } Z=g(X,Y)}$同理，也是一个映射函数，通过两个坐标轴 x 和 y 轴，扩充到三维空间里，然后映射到 z 轴上。



1 独立同分布的组合随机变量期望

(1)正态分布的独立同分布

设随机变量 X、Y 独立同分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 EZ，

$Z=\max(X,Y)$ —— $EZ=\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}+\mu$

方法一：标准化+**F(x)-f(x)**求导法+公式法

①写出标准化的正态分布 $X_1=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，$Y_1=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$

②改写 $Z=\max(X,Y)=\max(\sigma X+\mu,\sigma Y+\mu)$

$=\mu+\sigma\max(X_1,Y_1)$。

③ $P\{Z_1\le z\}=P\{X_1\le z,Y_1\le z\}=\phi(z)^2$，

$f_{z1}(z)=2\phi(z)\varphi(z)$

④利用公式 $E(Z_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot 2\phi(z)\varphi(z)dz$ （展开 $\varphi(z)$）

方法二：**max** 分解法+公式法

① $\max(X,Y)=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$；$\min(X,Y)=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$

② $EZ=\frac{1}{2}(EX+EY+E(|X-Y|))$，$Z_1=X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$

③ $EZ_1=\int\cdots\cdots=\dfrac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

方法三：公式法

$$EZ=\iint\limits_{\Omega}|x-y|f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

1 依概率收敛

- 对于数列$\{x_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,记为$x_n\xrightarrow{n\to+\infty}a$

- 对于随机变量序列$\{X_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$\begin{cases}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1\\P\{|X_n-a|\geq\varepsilon\}=0\end{cases}$,记为$X_n\xrightarrow{P}a$

2 大数定理

(1)切比雪夫不等式

EX存在，DX存在

如果一个随机变量的方差非常小的话，那么这个随机变量取到远离均值μ的概率也是非常小的

$$P\{\|X-\mu\|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\text{或}$$

$$P\{\|X-\mu\|<\varepsilon\}\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(2)切比雪夫大数定律

$\{X_i\}$是①两两不相关的随机变量序列, 所有② X_i都有方差，且③方差有上限(存在常数C, 使得$D(X_i)\leq C,(i=1,2,\ldots)$)

$$\text{则}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

(3)辛钦大数定律

$\{X_i\}$是①独立 ②同分布随机变量序列, ③期望相同$EX_i=\mu$

$$\text{则}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\mu$$

大数定理	分布	期望 EX	方差 DX	用途
伯努利	二项分布	相同	相同	估算概率
辛钦	独立同分布	相同	相同	估算期望
切比雪夫	不相关	存在	存在,有限	估算期望

3 中心极限定理

(1)棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

服从二次分布的$X_n\sim B(n,p)$ $(n=1,2,\ldots)$，对任意实数x

$$\text{有}\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{DX_n}}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

其中$EX_n=np$; $DX_n=np(1-p)$

即$X_n\sim N(np,np(1-p))$

(2)列维-林德伯格中心极限定理

独立同分布的数列$\{X_i\}$，$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$$\text{有}\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

即$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

1 数理统计基本

(1)总体

数量指标X的全体称为总体。 X的概率分布称为总体分布。

(2)简单随机样本

与总体X同分布且相互独立的$X_1,X_2,\ldots X_n$。

对应的值$x_1,x_2,\ldots,x_n$称为样本值，也即总体X的n个独立观测值

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的分布函数为

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

(3)统计量

样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\boxed{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本标准差：$S^2=\sqrt{\boxed{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本k阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\ldots$

样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,k=1,2,\ldots$

(4)性质

①如果EX存在，

则$EX=E\overline{X}=\mu$

②如果DX存在，

则$D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$

则$ES^2=DX=\sigma^2$（见推导）

常常可以推得：

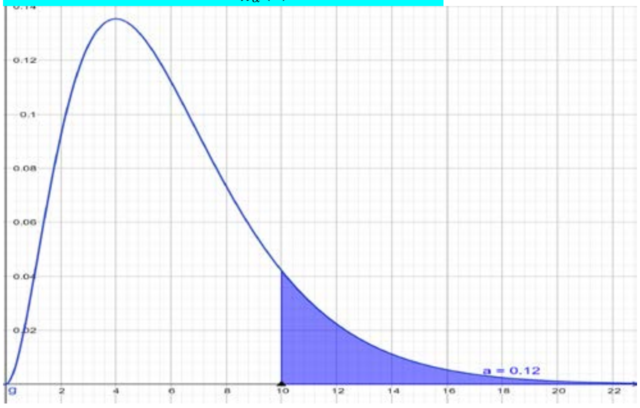
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=n!$$

1 χ^2 分布

随机变量 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 相互独立且服从正态分布 $N(0,1)$，称随机变量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 $\boxed{n}$ 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$。

(1) 上分位点

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$



(2) 性质

①$E(\chi^2) = n$；$D(\chi^2) = 2n$

②若 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，两者相互独立，则

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

2 t 分布

设随机变量 X 和 Y 独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$

则称随机变量 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作

$T \sim t(n)$

(1) 上分位点

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

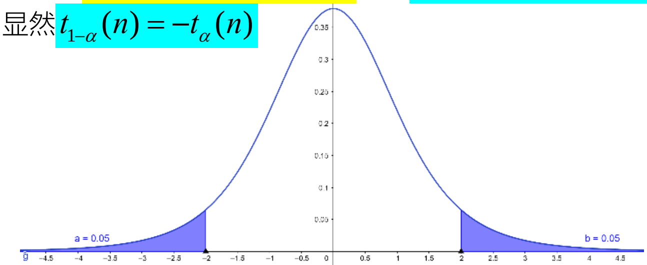
(2) 性质

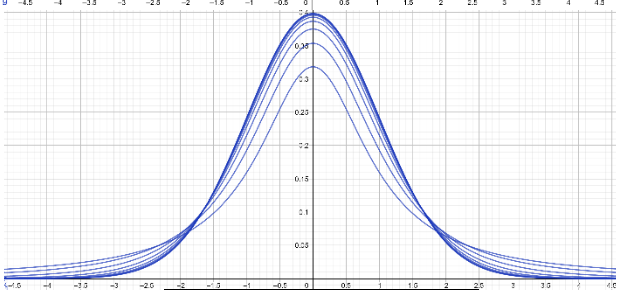
①是**偶函数**

②当 n 充分大时，$t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布

③具有双侧对称分位点 $t_{\alpha/2}(n)$，即 $P\{|T| > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$

显然 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$





里面的是 n=1，最外面的是 n=128

3 F 分布

设随机变量相互独立，$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，则称随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 $\boxed{(n_1, n_2)}$ 的 F 分布

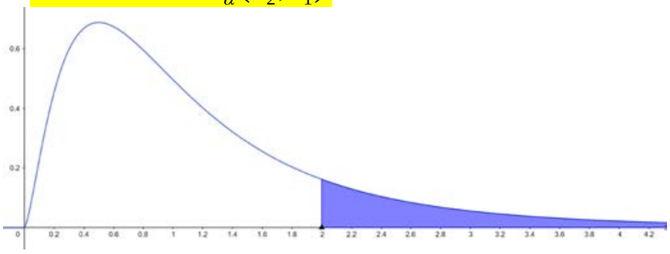
(1) 上分位点

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

(2) 性质

①$F \sim F(\boxed{n_1, n_2})$；$\dfrac{1}{F} \sim F(\boxed{n_2, n_1})$

②$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$



4 正态总体抽样分布

①设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots X_n$ 是来自总体的样本

$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 是样本方差

②设总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ 是来自总体的样本

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$X_1, X_2, \ldots X_n$ 是来自总体的样本

(1) 均值与方差

①$\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ （见证明）

②$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$，$U = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

（见证明）

(2) 其他

①$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ （见证明）

②$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ （见证明）

③$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ （见证明）

④$F = \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ （见证明）

⑤如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，那么

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ （见证明）

3-7 参数估计

1 点估计

用样本 $X_1,X_2,\dots X_n$ 构造的估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots X_n)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计。

(1) 无偏性

定义：设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots X_n)$ 是未知参数 θ 的无偏估计量

(2) 有效性

定义：设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，且 $D\hat{\theta}_1\le D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

(3) 一致性

定义：设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots X_n)$ 是 θ 的估计量，如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots X_n)$ 为 θ 的一致估计量

(4) 常用公式

$EX_i=EX=\mu$；$DX_i=DX=\sigma^2$

$E\overline{X}=\frac{n}{n}\mu=\mu$；$D\overline{X}=\frac{n}{n^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$EX_i^2=\sigma^2+\mu^2$；

$E(X_i-\overline{X})=0$；$D(X_i\pm\overline{X})=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

$E(X_i-\overline{X})^2=\frac{n-1}{n}ES^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$$E(g(X))=\sum_{i=0}^{+\infty}\boxed{g(X_i)}P\{X=X_i\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{g(x)}f(x)dx$$

$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)}$

$\boxed{D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)}$

2 矩估计

总体 X 的分布含有未知数 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$，由样本估计得到 k 阶矩估计量 $\alpha_l=E(X^l)=\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k),l=1,2,\dots,k$

可以得到各阶原点矩 $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$，

然后列方程组求解未知数 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$；

3 最大似然估计法

(1) 离散型似然函数

设 $P\{X=a_i\}=p(a_i,\theta)$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta) \tag{1.1}$$

本质上 $L(\theta)$ 就是在参数 θ 下所有概率的乘积

(2) 连续型似然函数

设概率密度为 $f(x;\theta)$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \tag{1.2}$$

似然函数的含义就是提取的当前样本的概率可由 θ 表示，假设提取的这一系列样本的概率为最大值，由此计算出 θ

①对 $\ln L(\theta)$ 求导②$L(\theta)$ 求导③驻点不是最大值，其他法

4 区间估计

(1) 置信区间

定义：总体 X 的分布规律存在一个未知数 θ；且对于给定的 α，如果两个统计量满足 $P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$，那么随机区间 (θ_1,θ_2) 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

(2) 一个正态总体的置信区间表（见证明）

待估参数	其他参数	枢轴量 W	置信区间
μ	σ^2 已知√	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$