1 点估计

用样本 $X_1,X_2,\dots X_n$ 构造的估计量 $\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\dots X_n\right)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计。

(1) 无偏性

定义：设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\dots X_n\right)$ 是未知参数 θ 的无偏估计量

(2) 有效性

定义：设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，且 $D\hat{\theta}_1\le D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

(3) 一致性

定义：设 $\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\dots X_n\right)$ 是 θ 的估计量，如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\dots X_n\right)$ 为 θ 的一致估计量

(4) 常用公式

$EX_i=EX=\mu$； $DX_i=DX=\sigma^2$

$E\overline{X}=\frac{n}{n}\mu=\mu$； $D\overline{X}=\frac{n}{n^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$EX_i^2=\sigma^2+\mu^2$；

$E(X_i-\overline{X})=0$； $D(X_i\pm\overline{X})=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

$E(X_i-\overline{X})^2=\frac{n-1}{n}ES^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$E(g(X))=\sum_{i=0}^{+\infty}\boxed{g(X_i)}P\{X=X_i\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{g(x)}f(x)dx$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

2 矩估计

总体 X 的分布含有未知数 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$，由样本估计得到 k 阶矩估计量 $\alpha_l=E(X^l)=\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k),l=1,2,\dots,k$

可以得到各阶原点矩 $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$，

然后列方程组求解未知数 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$；

DX 的矩估计：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}S^2$

注意：样本二阶中心矩=样本二阶原点矩-样本一阶原点矩的平方

3 最大似然估计法

(1) 离散型似然函数

设 $P\{X=a_i\}=p(a_i,\theta)$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta) \qquad (1.1)$$

本质上 $L(\theta)$ 就是在参数 θ 下所有概率的乘积

(2) 连续型似然函数

设概率密度为 $f(x;\theta)$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \qquad (1.2)$$

似然函数的含义就是提取的当前样本的概率可由 θ 表示，假设提取的这一系列样本的概率为**最大值**，由此计算出 θ

①对 $\ln L(\theta)$ 求导② $L(\theta)$ 求导③驻点不是最大值，其他法

4 区间估计

(1) 置信区间

定义：总体 X 的分布规律存在一个未知数 θ；且对于给定的 α，如果两个统计量满足 $P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$，那么随机区间 (θ_1,θ_2) 为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

(2) 一个正态总体的置信区间表（见证明）

待估参数	其他参数	枢轴量 W	置信区间
μ	σ^2 已知√	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

5 假设检验

错误类型——

一类错误：弃真；$P\left\{\text{拒绝}H0\middle|H0\text{ 为真}\right\}=\alpha$

二类错误：纳伪；$P\left\{\text{接收}H0\middle|H0\text{ 为假}\right\}=\beta$

(1) 提出检验假设

H_0：样本与总体或样本与样本间的差异是由抽样误差引起的

H_1：样本与总体或样本与样本间存在本质差异

预先设定的检验水准为 α；当检验假设为真，但被错误地拒绝的概率（一类错误）

(2) 求取拒绝域

利用上述公式