1 求收敛域格式

1. 观察是否需要分类讨论，极限是否存在（不存在也有收敛的情况）

如果不存在，则需要使用夹逼定理。

2. 写计算通式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \_\_\_\_\_\_\_\_ < 1$$

3. 求取并写出【收敛半径 R】
4. 带入边界值，判断边界值是否可以被包含

当 x=左边界值时，原级数为......收敛/发散

当 x=右边界值时，原级数为......收敛/发散

5. 写出收敛域

所以收敛域为—— $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

#注意：收敛区间是开区间，而收敛域要考虑端点敛散性

2 级数求和

1. 化幂为函

☆把幂级数公式里面的 $a^n, (\frac{1}{a})^n$ 化为 x^n .

如果幂级数里面没有 x，那就创造一个，然后带入 $x=1$

2. 写出求和公式 $S(x)$，利用求和公式

$$\sum_{n=a}^{\infty} Cx^n = Cx^a \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

3. 设法将所给的幂级数系数消去

有 $\frac{1}{n}$ 因子就	求导后积分
有 $n+1$ 因子就	积分后求导

3 敛散性判别法

1. 正项级数

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1?$

比较判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \xrightarrow{\text{等价无穷小}} z_n$

然后通过判别 z_n 的敛散性就可以推断 u_n 的敛散性

2. 交错级数

莱布尼兹判别法：提取正项级数 u_n

①$u_{n+1} > u_n$ ②$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

注意：莱布尼兹判别法是充分条件，两个都满足就是收敛的，但是收敛不一定满足条件①。

同样也可以用**比较判别法**来等价无穷小

4 展开为幂级数

1. 确定是否为可展开的初等函数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n; \quad e^x = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2. 计算并写出收敛区间
3. 变化形式，代入公式

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{f'}(x)dx \quad \therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) + f(0)$$

#注意：如果需要求导，【全部一起求导】和【单个求导】有区别，关键是看求导运算是否耦合，如果耦合则推荐<u>需要求导的求导</u>，如果不耦合，全部一起求导。

例：

$$f_1(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} \qquad f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in(-1,1)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-1,1)$$

第一个函数**耦合**，第二个函数**不耦合**

5 求幂级数的和函数

1. 求【收敛半径 R】
2. 写出求和公式 $S(x)$ 和【收敛域】 $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

求幂级数的和函数需要对 x 按区间分类讨论

6 傅里叶级数（【展开】）

1. 辨识 $f(x)$ 【定义域】 $([x_1, x_2])$ 【周期】 $2l = x_2 - x_1$
2. 写出傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos\frac{\pi}{l}nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\frac{\pi}{l}nx dx$$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$，$a_n$ 和 b_n 是需要化简的，如果原函数是分段函数，则还需要分段积分

$\cos n\pi = (-1)^n$	$\cos\frac{n\pi}{2} = 0$
$\sin n\pi x = 0$	$\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{n-1}$

3. 写出级数表达结果，及定义域

$$f(x) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad x\in([x_1, x_2])$$

4. 写出级数在原函数边界处的值

其傅里叶级数在 $x = x_0$ 处收敛于 y_0

<u>如果边界值和原函数边界值不同就需要进一步判断</u>

1　n 的多项式幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_kn^k)x^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_0x^n+B_1(x^{n+1})'+B_2(x^{n+2})''+\ldots+B_k(x^{n+k})^{(k)}\right]$$

$$=B_0\frac{1}{1-x}+B_1(\frac{x}{1-x})'+B_2(\frac{x^2}{1-x})''+\ldots+B_k(\frac{x^k}{1-x})^{(k)}$$

$$=B_0\frac{0!}{(1-x)^1}+B_1\frac{1!}{(1-x)^2}+B_2\frac{2!}{(1-x)^3}+\ldots+B_k\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

计算过程中也可以择机提取 x，简化过程

几个需要记忆后方便计算的求和公式：

以下求和公式需要小心收敛域边界值的失效，需要单独计算

n 的起始值是第一个非零项，做题目时候保证 n 在首项开始

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$,0 项没有意义

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,这个从 0 开始是因为 n=0 时项式不为 0

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$；$\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$,0 项为 0

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2!}{(1-x)^3}$

拓展：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)=x\left(\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

2　多项式分母分式

多项分式比较麻烦，主要思想是**因式分解**，然后**拆分**。若分母为等比求和数列，则可以利用等比求和公式来化简。

方法二：分母因式分解，通过直接求导，然后积分

3　分母含阶乘

利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$　（$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}=e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\cos x;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

若分子同时也含有 n 的多项式，则通过对 n 的多项式的**阶乘分解**来化简式子。

例：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$，收敛半径为∞，$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\left(\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)$$

阶层分解：

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

4　傅里叶级数系数计算

1. **关键公式：** $\cos n\pi=\cos(-n\pi)=(-1)^n$；$\sin n\pi=0$

带 n 次多项式 $P_n(x)$ 的分部积分方法

$$\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$$

$$=P_n(x)\int g(x)dx-P_n'(x)\iint g(x)d^2x+P_n''(x)\iiint g(x)d^3x-\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kP_n^{(k)}(x)\cdot g^{-(k+1)}(x)\Big|_{x_2}^{x_1}$$