1 极限定义选择题反例笔记

(1) 数列收敛和有界问题

数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ 有界

收敛数列必有界。

$\{x_n\}$ 有界 $\not\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛

有界数列不一定收敛

反例：$x_n=(-1)^n$ 震荡不收敛，但是有界

(2) 极限存在和极限不存在的组合的存在问题

条件 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不∃，$\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 不∃

① $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ 可能∃

举例：当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时∃ $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$

结论：$0\cdot(x\to\infty)=0$；

$(x\to 0)\cdot(x\to\infty)$ 不确定？？？

$(x\to a\neq 0)\cdot(x\to\infty)$ 不存在

$1/0$ 不存在；　$1/(x\to 0)=\infty$

② $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\cdot h(x)\right]$ 可能∃

举例：$g(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$，$h(x)=\begin{cases}-1 & ,x>0\\ 1 & ,x<0\end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\cdot h(x)\right]=-1$（左右极限相等，就存在）

③ $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)+h(x)\right]$ 可能∃

举例：$g(x)=\dfrac{1}{x-a}$，$h(x)=\dfrac{-1}{x-a}$，$\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)+h(x)\right]=0$

结论：$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不∃，$\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 不∃，则

$\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)+h(x)\right]$、$\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\cdot h(x)\right]$ 都不确定

(3) 空心邻域

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域内无界

根据极限定义表可以得到，此结论就是定义

$f(x)$ 在 x_0 的任意空心邻域内无界 $\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

(4) 无穷小的阶次运算

条件：$f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $x=a$ 的 n、m 阶无穷小

① $f(x)\cdot g(x)$ 是 $n+m$ 阶无穷小　Yes!

②若 $n>m$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $n-m$ 阶无穷小　Yes!

③若 $n\le m$，则 $f(x)+g(x)$ 是 n 阶无穷小　No!

结论：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同阶次，且两者的 n 阶次系数互为相反数，则相加可能升阶为 $n+1$ 阶无穷小

④ $f(x)$ 连续，则 $\int_a^x f(x)dx$ 是 $n+1$ 阶无穷小　Yes!

(5) 导函数有界性与原函数有界性关系

对于可导函数 $f(x)$

结论：无穷区间上　无关系

举例：$f(x)=\sin x^2$ 有界但 $f'(x)=2x\cos x^2$ 无界

举例：$f(x)=x$ 无界　但 $f'(x)=1$ 有界

有界区间上　$f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 有界

反之不亦然

证明：用拉格朗日中值定理的绝对值放缩

2 极限定义表

表达	对于∀	∃	当	有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)\rvert>M$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	$M>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)\rvert>M$

其中：$0<|x-x_0|<\delta$ 是空心邻域的　表达

$|x|>X$ 是趋向无穷的　表达

$|f(x)|>M$ 是极限无穷大的结论

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 是极限确定值的结论

注意：上述两个表达和两个结论的组合就是 4 种极限的定义。

3 间断点定义：

第一类	可去	①极限存在但 $f(x_0)$ 无定义 ②极限存在但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$
	跳跃	左右极限存在，但左右极限不相等
第二类	无穷	左右极限至少一个不存在且 $=\infty$
	震荡	左右极限至少一个不存在且为有界不定值

其中：1）极限存在指左右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

2）左右极限存在指 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=y_0^+$、$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=y_0^-$

注意：左右极限都存在，　第一类

左右极限至少一个不存在　第二类

4 可导性定义

注意：一元函数可导 ⇔ 一元函数可微

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左右导数相等，即在该点可导，即 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

5 导函数连续性定义

分段函数的导函数的连续性

根据 $f(x)$ 定义对分段函数求导，

$$f(x)=\begin{cases}f_1^*(x) & ,x\in[(a_0,a_1)]\\ f_2^*(x) & ,x\in[(a_1,a_2)]\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}f_1^{*\prime}(x) & ,x\in(a_0,a_1)\\ f_2^{*\prime}(x) & ,x\in(a_1,a_2)\end{cases}$$

如果 $\lim\limits_{x\to a_1^-} f_1^{*\prime}(x)=\lim\limits_{x\to a_1^+} f_2^{*\prime}(x)$，且 $=f'(a_1)$

则导函数在 $x=a_1$ 处连续。

6 拐点定义

定义：拐点就是凹函数与凸函数的转变点，

对于可导函数　极值点与拐点必然不是同一个点

对于不可导函数　极值点与拐点可同时存在于不可导点。

拐点只存在于 $f''(x)=0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点

且 去心邻域内该点两侧的符号相反

拐点是 $f'(x)$ 单调性发生变化的点

拐点是 $f''(x)$ 穿过 x 轴的点，（不连续的突变也可）

7 可导、连续、极限融会贯通

(1) 导数与导数极限存在互推关系

条件 $\begin{cases} ①f(x)在x=x_0的去心邻域内可导 \\ ②f(x)在x=x_0处连续 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\ \exists$且等于$A$ $\Rightarrow$ $f'(x_0)\ \exists$且等于A

注意：去心邻域内可导，是去心邻域内连续，不代表$x=x_0$处连续，上述条件已经最严格了。

举例：$f(x)=\begin{cases} 0, & x=x_0 \\ 1, & x\neq x_0 \end{cases}$，去心邻域内可导，但不连续

$f'(x)=0,(x\neq x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=0$，但 $f'(x_0)$不存在

证明：由导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

洛必达=====得 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

注意：连续性保证分式为0/0形式，可导用来保证使用洛必达

注意：（不能反推）

函数在某点可导，不能保证其导函数在该点连续

注意：也可作为函数不连续，但原函数存在的例子

举例 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$f'(0)$存在（用定义），但$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$不存在

上述两条件下 导数极限存在$\Rightarrow$导数存在

但不管怎样 导数存在 $\not\Rightarrow$ 导数极限存在

8 可积分、有原函数问题

定义：$[a,b]$内可积即$[a,b]$内定积分存在

连续函数，一定存在**定积分**和**不定积分**

若有跳跃间断点，则原函数一定不存在

(1)存在问题

条件：$f(x)$在$[a,b]$上连续

①定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在（可积）

②原函数 $F(x)=\int_a^x f(x)dx+C$ 存在【原函数存在定理】

条件：$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点

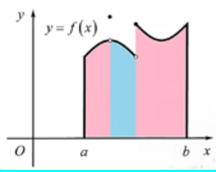
则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在（可积）

条件 1	条件 2	结论
$[a,b]$上无界		$[a,b]$上不可积
$[a,b]$上有界	有限个间断点	$[a,b]$上可积
	无穷个间断点	$[a,b]$上不确定可积
$[a,b]$上连续		$[a,b]$上原函数存在
		$[a,b]$上 $F'(x)=f(x)$
$[a,b]$上不连续	只有一类间断点	$[a,b]$上可积
	含有跳跃间断点	$[a,b]$上不存在原函数 $\int_a^x f(t)dt$ 跳跃处不可导
		$[a,b]$上不确定原函数
	只有震荡间断点	$[a,b]$上不确定原函数 狄利克雷函数 不可积
(a,b)上连续		(a,b)上不确定可积
$[a,b]$有原函数		$[a,b]$上不确定可积

(2)举例

有一类间断点，但可积

举例



$f(x)$在$[a,b]$上不连续，但在$[a,b]$上可能存在原函数

举例 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$x=0$上不连续，但存在原函数

$f(x)$在$[a,b]$存在原函数，但在$[a,b]$上不一定可积

举例 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，存在 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

但是在$[0-\delta,0+\delta]$处不可积，因为函数$f(x)$无界