2-1 行列式、矩阵

1　性质

$|A^T|=|A|$　　$|kA|=k^n|A|$　　$|A||B|=|AB|$

$|A^*|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}$　　$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

仅有的矩阵加法的地方

$|k_1+k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=|k_1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+|k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|$

所以一般来讲，$|nA+mB|\neq|nA|+|mB|$

等价定义：同行同列同秩

有两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$

（$\boldsymbol{P}$ 是 $m\times m$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 是 $n\times n$ 阶可逆矩阵）

那么这两个矩阵之间是等价关系

伴随定义：

$$\{a_{\boxed{ij}}\}=\boldsymbol{A}；\{A_{\boxed{ji}}\}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{\boxed{T}}=\boldsymbol{A}^*$$

2　展开公式

A. 拉普拉斯展开式

A，B 分别为 m 和 n 阶矩阵

$$\begin{vmatrix}A & * \\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|；\begin{vmatrix}* & A \\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$$

B. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

从最高项到最低项相减握手

C. 三阶行列式展开公式

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$$

这是交叉相乘相减的计算方法只适用于二阶和三阶，

如果大于 3 阶，就只能用代数余子式计算方法

1　性质

$(AB)^T=B^TA^T$；　$A^*=|A|A^{-1}$

$|A^*|=|A|^{n-1}$；　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；　$(AB)^*=B^*A^*$

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T & C^T\\ B^T & D^T\end{bmatrix}；\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n & O\\ O & B^n\end{bmatrix}$$

条件性：A,B都可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

反对称	对称	正交
$A^T=-A$	$A^T=A$	$A^TA=AA^T=E$

2　矩阵求逆方法

A. 伴随法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

B. 初等变换法

$$(A\ \vdots\ I)\xrightarrow{\text{初等变换}}(I\ \vdots\ A^{-1})$$

C. 分块法（对角或副对角必须为零）

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$$；主对角取逆

$$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$$；副对角互换取逆

拓展：

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}$$

3　求伴随

按顺序求出来之后要转置。对于二阶有快速计算方法：

#二阶矩阵伴随矩阵	#二阶矩阵逆矩阵
$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}^*=\begin{vmatrix}d & -b\\ -c & a\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}d & -b\\ -c & a\end{vmatrix}\dfrac{1}{\lvert A\rvert}$
主对角互换，副对角变号	$\lvert A\rvert=ad-bc$

4　初等矩阵变换

前行后列，

<u>前面</u>的初等矩阵上下平移<u>行</u>；<u>后面</u>的初等矩阵左右平移<u>列</u>

#矩阵的乘法运算用这种方法来计算最方便

5　秩

① $r(A,AB)=r(A)$；② $r\begin{pmatrix}A\\ BA\end{pmatrix}=r(A)$

因为 B 是一个变换矩阵，

①中实现了对 A 的（不一定为初等）列变换，而左侧又是列组合，所以秩不变。

②中实现了对 A 的（不一定为初等）行变换，而左侧又是行组合，所以秩不变。

1 多次幂

求 A^n

A. 行列成比例矩阵，即 rank（A）=1

找到规律 $A^2 = lA$ ，$l = \sum a_{ii}$

先观察矩阵，若矩阵可化为列向量与行向量相乘，即

$A = \alpha\beta^T$ ，则 $A^n = \alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T$

B. 可化为相似型（特征值）

$A = PBP^{-1}$ ，则 $A^n = PB^nP^{-1}$

C. 可提取数量矩阵

$A = kI + B$ 且 B 是一个不满秩的三角矩阵

$A^n = (kA + B)^n$

$= (kA)^n + C_n^1(kA)^{n-1}B + C_n^2(kA)^{n-2}B^2 + \ldots$

注意#若 B 为不满秩三角矩阵，且 $\mathrm{rank}(B) = r$ ，

则 $\mathrm{rank}(B^r) = 1$； $\mathrm{rank}(B^{r+1}) = 0$

D. 分块矩阵

E. 其他

找不到规律就先计算一下 A^2 ，然后看看有没有规律

2 求解矩阵

(1)

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的每一列都可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$

①如 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，可以先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再做矩阵乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 求出 $\boldsymbol{X}$；也可以用行变换直接求 $\boldsymbol{X}$

②如 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_3$，再用方程的解构造矩阵 $\boldsymbol{X}$

(2) $A = PBQ$ ，求 B

↓	A	E	P
↓	$P^{-1}A$	$P^{-1}E$	$P^{-1}P$
↓	$P^{-1}A$	P^{-1}	E

同理

→→→→→→→→→

A	AQ^{-1}	AQ^{-1}
E	EQ^{-1}	Q^{-1}
Q	QQ^{-1}	E

3 秩的证明题

主要关系式：（正反都要会用！）

$r(A+B) \le r(A) + r(B)$；

$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$； $\left|\boldsymbol{C}_{大大}\right| = \left|\boldsymbol{A}_{大小} \times \boldsymbol{B}_{小大}\right| = \boldsymbol{0}$

$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$；

条件性的

$AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \le n$

$r(A) = n \Rightarrow r(AB) = r(B) = r(BA)$ 即：*初等变换秩不变*

(1)证明矩阵相乘后秩的大小与原矩阵的区别

分块法：（列分块，每一列用向量表示）

$$[\alpha_1, a_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s]$$

表明是线性表示，然后就可以得出与原矩阵的秩的大小

同理，也可以行分块

(2)秩与伴随的关系

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n & , r(\boldsymbol{A}) = n \\ 1 & , r(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0 & , r(\boldsymbol{A}) \le n-2 \end{cases},$$

矩阵是满秩，伴随也满秩

矩阵缺一秩，伴随变一秩

矩阵秩过亏，伴随是零秩

注意：$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中的部分列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系