以下都针对函数 $z=f\left(x,y\right)$，函数在$\left(x_0,y_0\right)$的某一领域内有定义

1 可导的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}$$

存在，那么这个极限就是 $f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处对 x 的偏导，记为 $f_x'\left(x_0,y_0\right)$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

可以认为，偏导就是一元函数的导数，设函数$\varphi\left(x\right)=f\left(x,y_0\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\varphi'\left(x_0\right)=\left.\frac{df\left(x,y_0\right)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

2 可微的定义

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)$$

如果全增量可以被表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

其中 $A=A\left(x,y\right),B=B\left(x,y\right)$，则函数 $z=f\left(x,y\right)$的微分就是$dz=A\Delta x+B\Delta y$

证明

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]-\left[f_x'\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0,y_0\right)\Delta y\right]}{\rho}=0$$ 成立，则函数在点$\left(x_0,y_0\right)$可微。

可微关系

【可导且导函数连续$\Rightarrow$ 可微】【可微 $\not\Rightarrow$ 可导且导函数连续】【可导$\Rightarrow$ 可导且原函数连续】

（充分条件）偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$\left(x_0,y_0\right)$ 处连续$\Rightarrow$（条件可以弱化为其一连续，另一存在即可）

（原条件）函数 $z=f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处可微$\Rightarrow$

（必要条件）$\begin{cases}\text{偏导数}\frac{\partial z}{\partial x}\text{和}\frac{\partial z}{\partial y}\text{在点}\left(x_0,y_0\right)\text{必存在，且}dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\ \text{该点沿任一方向导数存在，且}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}=f_x'\left(x_0,y_0\right)\cos\alpha+f_y'\left(x_0,y_0\right)\cos\beta\end{cases}$

3 方向导数定义

定义一单位向量$\mathbf{e}$，它的方向和l 的方向一致，如果存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f\left(x_0+\Delta t\cdot\cos\alpha,y_0+\Delta t\cdot\cos\beta\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta t}$$

则称此极限为 $z=f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处沿方向l的方向导数存在，记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}$

---

4 举例

4.1 不可导，但存在方向导数

方向导数其实就是广义上的偏导，只不过偏导是对于放下与 x 和 y 相同的 l 求取的方向导数，而广义上的方向导数可以是 x 和 y 的线性组合。这出现了一个问题就是，$|x+y|,\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处不可导，但是其任一方向导数存在，因为方向导数不受左右极限相同约束。

方向导数和偏导数都是一个标量。

4.2 可导但方向导数不存在

4.3 可导但不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$ ，偏导存在但不连续

4.4 可导但不可微

对于二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ ，可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-x^2y\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ，

同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ ，$\therefore$该二元函数可导

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\right]-\left[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$ 不存在（与接近轨迹有关）

4.5 导函数不连续却可微

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

x 导函数

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x'(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 后一项不存在，所以在 $(0,0)$ 处不可导。

但是可微，证明略