# 数学笔记

王凌枫

# 1 裂项技巧

$\dfrac{dx^2+ex+f}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 里，$\dfrac{k}{x-a}$ 中 $k=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{dx^2+ex+f}{(x-b)(x-c)}$

本质是等价无穷大

# 2 特殊级数求导结果

$$
\begin{array}{ccccc}
B_0\,\dfrac{1}{1-x} & B_1\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' & B_2\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'' & \cdots & \boxed{B_k\left(\dfrac{x^{\boxed{m}}}{1-x}\right)^{(k)}} \\
B_0\,\dfrac{0!}{(1-x)^1} & B_1\,\dfrac{1!}{(1-x)^2} & B_2\,\dfrac{2!}{(1-x)^3} & \cdots & \boxed{B_k\,\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}}
\end{array}
$$

其中 $0\le m\le k$

如：$\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,x^4}\left(\dfrac{x^4}{1-x}\right)=\dfrac{24}{(1-x)^5}$，$\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,x^4}\left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)=\dfrac{24}{(1-x)^5}$

---

$$
\begin{array}{ccccc}
B_0\,\dfrac{1}{1+x} & B_1\left(\dfrac{x}{1+x}\right)' & B_2\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)'' & \cdots & \boxed{B_k\left(\dfrac{x^m}{1+x}\right)^{(k)}} \\
B_0\,\dfrac{0!}{(1+x)^1} & B_1\,\dfrac{1!}{(1+x)^2} & B_2\,\dfrac{2!}{(1+x)^3} & \cdots & \boxed{B_k\,\dfrac{(-1)^{m+k}\,k!}{(1+x)^{k+1}}}
\end{array}
$$

其中 $0\le m\le k$

如：$\dfrac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}\,x^5}\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)=\dfrac{120}{(1+x)^5}$，$\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3}\left(\dfrac{x^3}{1+x}\right)=\dfrac{6}{(1+x)^4}$

# 3 泰勒展开求 n 阶导系数

$x=0$ 处：

$$f^{(n)}(0)\to f(x)=\sum_{k=0}a_kx^k \qquad\qquad f^{(n)}(0)=n!a_n$$

$x=x_0$ 处：

$$f^{(n)}(x_0)\to f(x)=\sum_{k=0}b_k(x-x_0)^k \qquad\qquad f^{(n)}(x_0)=n!b_n$$

# 4 数学归纳法

## 4.1 方法一

验证 $n=1$ 时命题正确；假设 $n=k$ 时命题成立；
验证 $n=k+1$ 时命题正确

## 4.2 方法二

验证 $n=1$ 时命题正确，假设 $n<k$ 时命题正确，
证明 $n=k$ 时命题正确

# 5 表格法计算多项式原函数展开

对于 $\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$， $g(x)$ 为 $\underline{\cos\dfrac{n\pi}{l}x}$ 或 $\underline{\sin\dfrac{n\pi}{l}x}$

| $(-1)^k$ | 1 | -1 | 1 | 反 | $(-1)^k$ | $(-1)^{k+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d^kP_n(x)/dx$ | $P_n(x)$ | $P_n'(x)$ | $P_n''(x)$ | 导 | $P_n^{(n)}(x)$ | 0 |
| $\underbrace{\int\cdots\int}_{k-1}g(x)d^{k-1}x$ | $g(x)$ | $\int g(x)dx$ | $\iint g(x)d^2x$ | 积 | $g^{-k}(x)$ | $g^{-(k+1)}(x)$ |

交叉相乘

## 1 性质

1.唯一性 $\lim_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow A$唯一

2.有界性 $\lim_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow |x_n| \leqslant M$

3.保号性$x_n \geqslant 0, \lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则$A \geqslant 0$

## 2 重要公式

① $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

② $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \Rightarrow \lim_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$

③ $\lim_{n\to 0^+}\sqrt[n]{n}=1$

等价无穷小:

当 $x\to 0$ 时,

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　　$\ln(1+x)\sim x$

$e^x-1\sim x$　　$\tan x \sim x+\frac{x^3}{3}$

$\sin x \sim x$

$\arcsin x \sim x$　　$\arctan x \sim x$

$a^x-1\sim \boxed{x\ln a}$

$(1+x)^a-1\sim \boxed{ax}$

## 3 泰勒展开

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

佩亚诺余项表达式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\text{其中}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\in(x_0,x))$$

几个重要泰勒展开式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+o(x^n)$$

$$\alpha^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=1+x\ln\alpha+\frac{\ln^2\alpha}{2}x^2+\cdots+\frac{\ln^n\alpha}{n!}x^n+o(x^n)$$

级数形式　　(记忆规律——减则无括号)

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n$$

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$$

$$e^x=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

## 4 求导公式

$$(C)'=0$$
$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$
$$(\sin x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$$
$$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

## 5 积分公式

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq -1)$$
$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$$
• $$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$
☆ $$\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\boxed{\frac{1}{2a}}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C_1=-\arccos x+C_2$$
• $$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$$
• $$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$-\int\frac{1}{\sin^2 x}d\cos x=-\int\frac{1}{1-\cos^2 x}d\cos x$$

$$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$$
$$\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$
$$\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$$

$$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$$
$$\int\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$$

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$$
$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

## 6 渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则称 $y=b$ 为曲线 $f(x)$ 的水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$,其中 $\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]\end{cases}$,则称 $y=ax+b$ 为斜渐近线

## 7 常用不等式

$$\sin x<x<\tan x,\qquad x\in(0,\frac{\pi}{2})$$
$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\qquad x\in(0,+\infty)$$

以下都针对函数 $z=f(x,y)$，函数在 $(x_0,y_0)$ 的某一领域内有定义

# 1 可导的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么这个极限就是 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的偏导，记为 $f_x'(x_0,y_0)$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

可以认为，偏导就是一元函数的导数，设函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即

$$f_x'(x_0,y_0)=\varphi'(x_0)=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

# 2 可微的定义

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

如果全增量可以被表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

其中 $A=A(x,y),B=B(x,y)$，则函数 $z=f(x,y)$ 的微分就是 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

---

证明

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\frac{\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]-\left[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y\right]}{\rho}=0$ 成立，则函数在点 $(x_0,y_0)$ 可微。

---

可微关系

【可导且导函数连续 $\Rightarrow$ 可微】【可微 $\not\Rightarrow$ 可导且导函数连续】【可导 $\Rightarrow$ 可导且原函数连续】

（充分条件）偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续 $\Rightarrow$（条件可以弱化为其一连续，另一存在即可）

（原条件）函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微 $\Rightarrow$

（必要条件）$\begin{cases}\text{偏导数}\frac{\partial z}{\partial x}\text{和}\frac{\partial z}{\partial y}\text{在点}(x_0,y_0)\text{必存在，且}dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\ \text{该点沿任一方向导数存在，且}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta\end{cases}$

# 3 方向导数定义

定义一单位向量 $\mathbf{e}$，它的方向和 $l$ 的方向一致，如果存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta t\cdot\cos\alpha,y_0+\Delta t\cdot\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\Delta t}$$

则称此极限为 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处沿方向 $l$ 的方向导数存在，记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$

---

# 4 举例

## 4.1 不可导，但存在方向导数

方向导数其实就是广义上的偏导，只不过偏导是对于放下与 $x$ 和 $y$ 相同的 $l$ 求取的方向导数，而广义上的方向导数可以是 $x$ 和 $y$ 的线性组合。这出现了一个问题就是，$|x+y|,\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处不可导，但是其任一方向导数存在，因为方向导数不受左右极限相同约束。

方向导数和偏导数都是一个标量。

## 4.2 可导但方向导数不存在

## 4.3 可导但不连续

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，偏导存在但不连续

## 4.4 可导但不可微

对于二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$，可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-x^2y\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$，$\therefore$该二元函数可导

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\left[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\right]-\left[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在（与接近轨迹有关）

## 4.5 导函数不连续却可微

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

x 导函数

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x'(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 后一项不存在，所以在 $(0,0)$ 处不可导。

但是可微，证明略

# 1 中值定理

**(1)罗尔定理**

条件： ① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上可导

③ $f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

**(2)拉格朗日中值定理**

条件： ① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上可导

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

注意：罗尔是拉格朗日的特例

**(3)柯西中值定理**

条件： ① $f(x)$、$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$、$g(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上可导

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

注意：拉格朗日是柯西的特例

**(4)达布定理（导函数中间值定理）**

条件： ① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导

②若 $f_+'(a)\neq f_-'(b)$

则对于 $\forall\mu$ 介于 $f_+'(a)$ 和 $f_-'(b)$ 之间，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\mu$

证明：用构造函数方法

假定 $f_-'(b)>f_+'(a)$，设 $\boxed{F(x)=f(x)-\mu x, x\in[a,b]}$，

不妨设 $F_+'(a)=f_+'(a)-\mu<0$，$F_-'(b)=f_-'(b)-\mu>0$

$F'(a_+)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$；$F'(a_-)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}$

在 $x=a$ 的某个右领域内 $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，即

$F(x)<F(a)$

在 $x=b$ 的某个左领域内 $\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0$，即

$F(x)<F(b)$

所以 $F(a)$ 和 $F(b)$ 都不是函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，

又因 $F(x)$ 一定可以取到最小值，其最小值必在 $(a,b)$ 中取到，

设该最小值在 $x=\xi$ 点取到，那么可以得到 $F'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)=\mu$

# 2 变限积分求导公式

**(1)不含参**

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt=f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)-f\left[\phi(x)\right]\cdot\phi'(x)$$

**(2)含参数**

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t,x)dt$$

$$=\boxed{\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt}+f\left(\varphi(x),x\right)\varphi'(x)-f\left(\phi(x),x\right)\phi'(x)$$

# 3 一些解题思路（中值定理）

①看到*区间内连续的函数*，要马上想到有最大值和最小值

②灵活使用不等式。（通过最大最小值来实现）

③熟练掌握构造函数法

# 4 构造函数的构造方法

——将 $f(x)$ 替换为 $y$

i.把已知条件（要判断的式子）移到同一侧，即

$\boxed{h(y^{(n)},\dots,y',y,x)=0}$

ii.该微分方程的齐次解 $\tilde{y}=q(x)$

iii. 该微分方程的特解 $y^*=t(x)$（如果有）

iv.设构造函数 $F(x)=\dfrac{y-y^*}{\tilde{y}}=\dfrac{f(x)-t(x)}{q(x)}$

几种构造函数的类型

$$\begin{cases}xf'(x)+f(x)\Rightarrow & F(x)=xf(x)\\ xf'(x)-f(x)\Rightarrow & F(x)=\dfrac{1}{x}f(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}xf'(x)+kf(x)\Rightarrow & F(x)=x^kf(x)\\ xf'(x)-kf(x)\Rightarrow & F(x)=x^{-k}f(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(x)+f(x)\Rightarrow & F(x)=e^xf(x)\\ f'(x)-f(x)\Rightarrow & F(x)=e^{-x}f(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(x)+kf(x)\Rightarrow & F(x)=e^{kx}f(x)\\ f'(x)-kf(x)\Rightarrow & F(x)=e^{-kx}f(x)\end{cases}$$

注意：如果要证明的对象**可以直接解出原函数**，那就不用这么麻烦了

# 5 麦克劳林

所谓的一阶麦克劳林展开公式是

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\boxed{\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2}$$

注意：展开到了二阶

# 6 n 阶导数系数——级数展开法

$x=0$ 处：

$f^{(n)}(0)\to f(x)=\sum\limits_{k=0}a_kx^k$ $\qquad f^{(n)}(0)=n!a_n$

$x=x_0$ 处：

$f^{(n)}(x_0)\to f(x)=\sum\limits_{k=0}b_k(x-x_0)^k$ $\qquad f^{(n)}(x_0)=n!b_n$

# 1 反常积分敛散性

*注意：一旦判定在积分区间内发散，则奇偶性规律失效*

通用办法是直接写出原函数或积分然后判定

这里补充其他无法积分的反常积分敛散性判定方法

**(1)定义域无穷反常积分**

形式：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$、$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$、$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

判断方法：若∃ k 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{Ax^k}=1$，

则 $Ax^k$ 是 $f(x)$ 的等价无穷大，

如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{+\infty} Ax^k dx$ 可积，$\boxed{\text{即 } k<-1}$

$\boxed{\text{那么原无穷积分可积}}$

注意：$k=-1$ 时，$\int_a^{+\infty} Ax^{-1}dx = A\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$ 是不可积分的极限形式

**(2)值域无界反常积分（瑕积分）**

形式：$\int_a^{a+1}\dfrac{1}{x-a}dx$、$\int_0^a \ln x dx$、$\int_a^{a+1}\dfrac{1}{x(x^2-a^2)\ln x}$

判断方法：若∃ k 使得 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{A(x-a)^k}=1$，

则 $A(x-a)^k$ 是 $f(x)$ 在 $x=a^+$ 处的等价无穷小

如果 $\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_a^{a+1} A(x-a)^k dx$ 可积，$\boxed{\text{即 } k>-1}$

$\boxed{\text{那么原瑕积分可积}}$

注意：对于 $\int_0^a Ax^k dx = A\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^a$，若 $k\le -1$ 则不可积

**(3)混合型**

混合型就是对积分区间内无界函数进行无穷积分

拆解成 **(1)**无界反常积分、**(2)**无穷反常积分判定敛散性

**(4)其他**

注意：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\sin x dx=0$ 但 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ 发散不存在.

# 2 级数积分求和 (极限形式)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{i}{n}}\int_0^1 f(x)dx$$

# 3 对数函数瑕积分证明

(1) $\int_0^a \ln x dx$ **可积分**

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}-2x^{\frac{1}{2}}=0$

由 $\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a=2\sqrt{a}$ 得 $\int_0^a \ln x dx$ 可积分

(2) $\int_0^a \ln^n x dx$ **可积**

证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^n x}{x^{-\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n=0$

(3) $\int_0^1 \ln^n x dx = (-1)^n n!$

证明：$t=-\ln x$，$x=e^{-t}$，$dx=-e^{-t}dt$

$=\int_0^1(-t)^n e^{-t}dt=(-1)^n\int_0^1 t^n e^{-t}dt$

$=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1}e^{-t}dt=(-1)^n\Gamma(n+1)$

$=(-1)^n n!$

# 4 求 0 到+∞指数积分

超纲：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha-1)=(\alpha-1)!$

$\Gamma(n)=(n-1)!$；

$\Gamma(1)=1$；$\Gamma(2)=1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\int_0^{+\infty} t^{\boxed{n-1}}e^{-t}dt=\Gamma(n)$$

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

# 1 二重极限

大部分二重极限都是趋向于奇点处。
这时一般用代换方法变为趋向于 0

### (1)存在判断

| 标准 | 不存在类: | 存在类: |
|---|---|---|
| 无穷小次 | 分子次数≤分母 | 分子次数>分母 |
| 连续性 | | 连续必存在 |

*注意: x和y相互独立，可以对其进行换元来判断次数*

### (2)不存在证明

证明: 方法一——不同路径逼近法:
$y=kx$; $y=-x$; $y=x^2$ ……
证明: 方法二——极坐标代换法

### (3)存在证明

证明: 方法一——夹逼方法
用绝对值不等式证明

---

证明: 方法二——极坐标代换法
$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
适用于 $f(x,y)$ 中出现了 $x$, $y$, $x^2$, $y^2$ 且自变量对称。
然后变换条件 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 变换为 $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

# 2 隐函数存在定理

对于 $F(x,y,z)=0$ 确定的 $z=z(x,y)$,
在某点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的领域内具有连续偏导
且 $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$
则在该领域内有 $z=z(x,y)$ 唯一确定。

| $f(x,y)$ 在…… | 结论 |
|---|---|
| $(x_0,y_0)$ 处偏导存在 | 该点处不一定连续<br>该点处不一定可微 |
| $(x_0,y_0)$ 存在连续偏导数 | 该点处必可微 |
| $(x_0,y_0)$ 处可微 | 【可微定义】分子是 $\rho$ 的高阶无穷小 |
| $(x_0,y_0)$ 处任意方向导数存在 | 该点处不一定可微 |

# 补充

## 1-8 线性常微分方程

对于此类线性常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

*#注意: 永远记住自己用的公式是左右都有分布的形式，否则会搞错符号! ! ! ! !*

可以写出当 $Q=0$ 时的齐次解 $y_0=C_1e^{-\int P(x)dx}$

然后写出 $Q=Q(x)$ 时的通解 $C_1=C_1(x)=u(x)$

$\Rightarrow y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ （常数变易法） $u(x)=C_1$

带入到原式，可以得到

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y$$

$$y'+P(x)y=Q(x)\Rightarrow y'+P(x)y=u'(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}\Rightarrow u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

因此，通解为

$$\begin{aligned} y &= u(x)e^{-\int P(x)dx} \\ &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx} \end{aligned}$$

# 1 基本-坐标变换

**(1)极坐标**

$$\iint_{round} f(x,y)dS=\int d\theta\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho$$

**(2)球坐标**

$$\iiint_{sphere} f(x,y,z)dV$$

$$=\int d\theta\int sin\varphi d\varphi\int f(rcos\theta sin\varphi,rsin\theta sin\varphi,rcos\varphi)r^2dr$$

**(3)柱坐标**

$$\iiint_{pillar} f(x,y,z)dV=\int d\theta\int\rho d\rho\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)dz$$

# 2 弧长线积分

**(1)参数法** $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta\\z=z(t)\end{cases}$

$$\int f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

空间曲线对应 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt$

**(2)直角坐标法**

$$\int f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x),z(x))\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx$$

其中 $a$ 为起点，$b$ 为终点

**(3)极坐标法(二维)**

$$\int f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)cos\theta,\rho(\theta)sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

# 3 坐标线积分（空间）

**(1)计算方法①——参数法**

$$\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$\int_\alpha^\beta\left[P(x,y,z)x'(t)+Q(x,y,z)y'(t)+R(x,y,z)z'(t)\right]dt$$

$x$，$y$，$z$ 由参数 $t$ 函数形式描述（没有回头线）

**补充——如何写出参数方程**

按给定$\boxed{\text{显函数}}$选择投影平面 $\begin{cases}x=x(y,z)\\y=y(x,z)\\z=z(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\square yOz\\\square xOz\\\square xOy\end{cases}$

①写出两个坐标，先投影到上述平面上，如平面 $xOy$

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\quad\alpha\le t\le\beta$$

②写出第三坐标，$z=z(t)$ $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}\begin{cases}dx=x_t'(t)dt\\dy=y_t'(t)dt\\dz=z_t'(t)dt\end{cases}$

**(2)计算方法②——格林公式、斯托克斯公式**

① $L$ 是 $D$ 的正向边界曲线（$D$ 始终在 $L$ 前行方向的左侧）

② $P$，$Q$ 必须在 $D$ 上处处有一阶连续偏导

*#注意：格林公式中间的运算符号是负号，当两者相等时，闭环积分恒等于零*

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

斯托克斯公式 $di\cdot dj$ 投影到 $dS$

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

利用斯托克斯计算后，会出现 $dydz$，$dxdz$，$dxdy$ 这样的坐标平方微分子，可以逆运用直接投影法，将对于平面的积分变为面微分 $dS$，如果空间曲线全部位于一个空间平面上，那么可以改写

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}dS$$

其中，$(\alpha,\beta,\gamma)$ 是该平面的单位法向量，

#注意：朝向为曲线右手螺旋方向

**(3)计算方法③——直接替换法（空间）**

若存在显函数 $z=z(x,y)$，则 $\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=$ $\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz(x,y)$，$P,Q,R$ 中的 $z$ 也替换消去一个维度。

**(4)计算方法④——等价四条件**

$\boxed{\text{单连通区域内成立}}$:

①线积分 $\int Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow$

② $C$ 为 $D$ 区域中任一光滑闭曲线 $\oint_C Pdx+Qdy=0$ $\Leftrightarrow$

③类似无旋流动条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)\in D$ $\Leftrightarrow$

④微分原函数 $\exists F(x,y)$ 使 $P(x,y)dx+Q(x,y)=dF(x,y)$

$\boxed{\text{复连通域}}$：路径无关条件（一个洞的情况下）

① $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

②在包含"洞"的区域内，至少存在一条闭曲线 $\Gamma$ 使得 $\int Pdx+Qdy=0$ 成立

| 解题思路 | |
|---|---|
| I 观察是否封闭 | II 积分函数是否路径无关 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 概要 | 封闭 | 路径有关 | 【格林公式】 |
| | | 路径无关 | 【原函数】或【分段积分】 |
| | 不封闭 | | 【补线】或【直接法】 |
| | | 路径有关 | 【补线】+【原函数】 |

## 1　二者联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$\iint_{\Sigma}\left[P\cos(\mathbf{n},\mathbf{yOz})+Q\cos(\mathbf{n},\mathbf{xOz})+R\cos(\mathbf{n},\mathbf{xOy})\right]dS$$

进一步联系：对于封闭曲面，$\mathbf{n}$ 为任意曲面外法线向量

$$\iint_{\Sigma闭}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$$

$$=\iint_{\Sigma闭}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\mathbf{n},\mathbf{yOz})+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\mathbf{n},\mathbf{xOz})+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(\mathbf{n},\mathbf{xOy})\right]dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dxdz+\frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV$$

## 2　对面积的面积分

**(1)形式**

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

**(2)计算方法①**

关注【对称奇偶性】√

**(3)计算方法②**

如果找不到关于坐标面对称的，但是存在一个类似的对称平面，那么可以

$$\iint f(x-x_0,y-y_0,z-z_0)dS=0\Rightarrow$$
$$\iint\left[f(x,y,z)-g(x,y,z)\right]dS\Rightarrow$$
$$\iint f(x,y,z)dS=\iint g(x,y,z)dS$$

**(4)计算方法③**

直接投影法

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

## 3　对坐标的面积分

**(1)形式**

$$\iint_{\Sigma} Pdzdy+Qdxdz+Rdxdy$$

**(2)计算方法①——直接法**

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=I_{yz}+I_{xz}+I_{xy}$$

$$\begin{cases} I_{yz}=\pm\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz\ ,\#x=x(y,z)\\ I_{xz}=\pm\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz\ ,\#y=y(x,z)\\ I_{xy}=\pm\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy\ ,\#z=z(x,y)\end{cases}$$

*注意：正负号由【曲面的法向量】和【对应坐标轴正方向】决定，夹角为锐角则为正！*

【过程详解】：

①消去第三坐标，利用投影法，将 **Sigma** 投影到各个微分平面上，（第三坐标—>第一第二坐标）

②化简，观察对称奇偶性，能消就消。（奇偶性要注意符号，有些曲面分正负两部分）

③计算，然后求和。

通过 $z=z(x,y)$ 画出积分曲面的草图

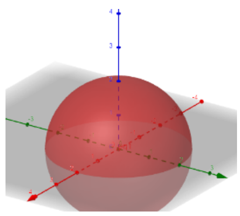
*注意：对称相消只存在于区域对称且关于对称坐标为奇函数*
*即：对称面自带关于第三坐标的奇特性。*

关系式可以关于面 $xy$、面 $xz$、面 $yz$ 对称，关键就是观察是否可以替换 $z$、$y$、$x$ 符号。如下

$$yOz\Rightarrow f(x,y,z),\forall x\to\pm x$$
$$zOx\Rightarrow f(x,y,z),\forall y\to\pm y$$
$$xOy\Rightarrow f(x,y,z),\forall z\to\pm z$$

例：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半部分上侧

$$\iint x^2dydz\xrightarrow{Oyz}0$$
$$\iint y^2dydz\xrightarrow{Oxz}\iint y^2dydz=0$$
$$\iint ydydz\xrightarrow[Oxz]{Oyz}\iint x^0ydydz=0$$



**(3)计算方法②——（封闭曲面）高斯**

对于封闭曲面，使用高斯方法(符号中的左式积分为封闭积分)

封闭曲线内存在函数奇点则不能使用高斯法

*注意：这里的 Σ 默认是外侧*

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

**(4)计算方法③**

补面，然后高斯

*注意：补面需要写出补充的面方程*

# 1 方向导数

计算公式：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\vec{\nabla} f \frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\vec{\nabla} f \cdot \vec{e}$$

#注意：方向导数是标量

# 2 梯度

函数 $f(x,y,z)$ 在空间坐标系（或平面坐标系）中，在 $P$ 点时方向导数取最大值对应的方向向量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，就是梯度

$$|\boldsymbol{A}(x,y,z)|=max\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\}=\left|\vec{\nabla} f\right|$$

梯度是向量

$$\boldsymbol{grad}\ f(x,y,z)=\vec{\nabla} f(x,y,z)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

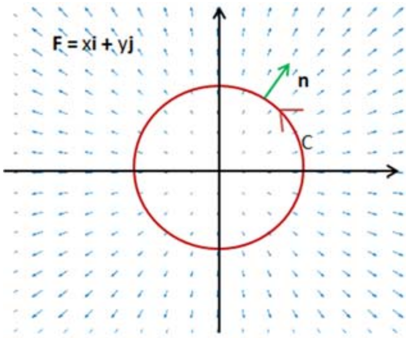
*注意：梯度处理的对象不是场，而是一个标量函数*

# 3 通量

## (1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【有向曲面一侧】的对 $\boldsymbol{u}$ 的面积分为通量




## (2)计算

$$\Phi=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

*注意：* 通量是标量！

# 4 环量

## (1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【封闭有向曲线 $l$】的沿一定方向对 $\boldsymbol{u}$ 的积分

#$l$ 围成的区域为 $D$

## (2)计算公式

$$\Gamma=\oint_{\partial D}\vec{u}\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial D}Pdx+Qdy+Rdz$$

*注意：* 环量为标量

# 5 散度

## (1)定义及条件

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

$P,Q,R$ 都有一阶连续偏导，各方向取导然后求和就是散度

## (2)计算公式

散度类似于向量点乘哈密顿算子

$$div\ \vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

*注意：* 散度是标量

# 6 旋度

## (1)计算公式

$$\boldsymbol{rot}\ \vec{\boldsymbol{u}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

*注意：* 旋度是向量

# 7 质心、转动惯量

## (1)质心内容

略

## (2)转动惯量

定义：

所谓转动惯量，就是 $f(x,y,z)$ 的密度乘以该点到转动轴的距离的平方的积分

公式

$$l: ax+by+cz+d=0$$

$$|D|^2=\left(\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2=\frac{(ax+by+cz+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

点到直线距离平方公式

| | | | |
|---|---|---|---|
| 通量 | $\Phi$ | $\int$ 向量场·面法向量 $\rightarrow$ | 标量 |
| 梯度 | $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ | 标量 $\rightarrow$ | 向量 |
| 环量 | $\oint_{\partial D}\vec{u}\cdot d\vec{r}$ | $\int$ 向量场·线切向量 $\rightarrow$ | 标量 |
| 旋度 | $\boldsymbol{rot}\ \vec{\boldsymbol{u}}$ | 向量交叉求导行列式 $\rightarrow$ | 向量 |
| 散度 | $\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$ | $\vec{\nabla}$ 向量场 $\rightarrow$ | 标量 |

# 1 求收敛域格式

1. 观察是否需要分类讨论，极限是否存在（不存在也有收敛的情况）

如果不存在，则需要使用夹逼定理。

2. 写计算通式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \_\_\_\_\_\_\_\_ < 1$$

3. 求取并写出【收敛半径 R】
4. 带入边界值，判断边界值是否可以被包含

当 x=左边界值时，原级数为……收敛/发散

当 x=右边界值时，原级数为……收敛/发散

5. 写出收敛域

所以收敛域为—— $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

#注意：收敛区间是开区间，而收敛域要考虑端点敛散性

# 2 级数求和

1. 化幂为函

☆把幂级数公式里面的 $a^n,(\frac{1}{a})^n$ 化为 $x^n$ .

如果幂级数里面没有 $x$，那就创造一个，然后带入 $x=1$

2. 写出求和公式 $S(x)$，利用求和公式

$$\sum_{n=a}^{\infty} Cx^n = Cx^a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

3. 设法将所给的幂级数系数消去

| | |
|---|---|
| 有 $\frac{1}{n}$ 因子就 | 求导后积分 |
| 有 $n+1$ 因子就 | 积分后求导 |

# 3 敛散性判别法

1. 正项级数

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1?$

比较判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n \xrightarrow{\text{等价无穷小}} z_n$

然后通过判别 $z_n$ 的敛散性就可以推断 $u_n$ 的敛散性

2. 交错级数

莱布尼兹判别法：提取正项级数 $u_n$

①$u_{n+1}>u_n$ ②$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

注意：莱布尼兹判别法是充分条件，两个都满足就是收敛的，但是收敛不一定满足条件①。

同样也可以用**比较判别法**来等价无穷小

# 4 展开为幂级数

1. 确定是否为可展开的初等函数

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n;\quad e^x=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2. 计算并写出收敛区间
3. 变化形式，代入公式

$$f(x)-f(0)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{f'}(x)dx \quad \therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)+f(0)$$

#注意：如果需要求导，【全部一起求导】和【单个求导】有区别，关键是看求导运算是否耦合，如果耦合则推荐需要求导的求导，如果不耦合，全部一起求导。

例：$f_1(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$　　$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in(-1,1)$

$f_2(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$　　$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-1,1)$

第一个函数**耦合**，第二个函数**不耦合**

# 5 求幂级数的和函数

1. 求【收敛半径 R】
2. 写出求和公式 $S(x)$ 和【收敛域】 $x\in(\backslash[?,?]\backslash)$

求幂级数的和函数需要对 x 按区间分类讨论

# 6 傅里叶级数（【展开】）

1. 辨识 $f(x)$ 【定义域】 $([x_1,x_2])$ 【周期】 $2l=x_2-x_1$
2. 写出傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\cos\frac{\pi}{l}nxdx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\sin\frac{\pi}{l}nxdx$$

$a_0=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$ ，$a_n$ 和 $b_n$ 是需要化简的，如果原函数是分段函数，则还需要分段积分

| | |
|---|---|
| $\cos n\pi=(-1)^n$ | $\cos\frac{n\pi}{2}=0$ |
| $\sin n\pi x=0$ | $\sin\frac{n\pi}{2}=(-1)^{n-1}$ |

3. 写出级数表达结果，及定义域

$$f(x)=\boxed{\frac{a_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in([x_1,x_2])$$

4. 写出级数在原函数边界处的值

其傅里叶级数在 $x=x_0$ 处收敛于 $y_0$

如果边界值和原函数边界值不同就需要进一步判断

# 1 $n$ 的多项式幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_kn^k)x^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_0x^n+B_1(x^{n+1})'+B_2(x^{n+2})''+\ldots+B_k(x^{n+k})^{(k)}\right]$$

$$=B_0\frac{1}{1-x}+B_1(\frac{x}{1-x})'+B_2(\frac{x^2}{1-x})''+\ldots+B_k(\frac{x^k}{1-x})^{(k)}$$

$$=B_0\frac{0!}{(1-x)^1}+B_1\frac{1!}{(1-x)^2}+B_2\frac{2!}{(1-x)^3}+\ldots+B_k\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

计算过程中也可以择机提取 x，简化过程

## 几个需要记忆后方便计算的求和公式：

以下求和公式需要小心收敛域边界值的失效，需要单独计算

n 的起始值是第一个非零项，做题目时候保证 n 在首项开始

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$ ,0 项没有意义

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$ ,这个从 0 开始是因为 n=0 时项式不为 0

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2};\ \rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$ ,0 项为 0

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2!}{(1-x)^3}$$

拓展：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)=x\left(\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

# 2 多项式分母分式

多项分式比较麻烦，主要思想是**因式分解**，然后**拆分**。若分母为等比求和数列，则可以利用等比求和公式来化简。

方法二：分母因式分解，通过直接求导，然后积分

# 3 分母含阶乘

利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$ （$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\cos x;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

若分子同时也含有 n 的多项式，则通过对 n 的多项式的**阶乘分解**来化简式子。

例：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$，收敛半径为$\infty$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\left(\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)$$

阶层分解：

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

# 4 傅里叶级数系数计算

1. **关键公式：** $\cos n\pi=\cos(-n\pi)=(-1)^n$；$\sin n\pi=0$

带 n 次多项式 $P_n(x)$ 的分部积分方法

$$\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$$

$$=P_n(x)\int g(x)dx-P_n'(x)\iint g(x)d^2x+P_n''(x)\iiint g(x)d^3x-\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kP_n^{(k)}(x)\cdot g^{-(k+1)}(x)\Big|_{x_2}^{x_1}$$

## 1 一阶形式

**(1)可分离变量** $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

**(2)齐次方程** $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$\rightarrow \boxed{u=\dfrac{y}{x}} \leftrightarrow \boxed{y=ux}$； $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$

得到 $\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$

**(3)非齐次线性方程** $y'+P(x)y=Q(x)$

齐次解 $y_0=C_1e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

常数变易：$u(x)=C_1$

$u(x)=\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C$

$y_0=u(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C\right)$

**(4)伯努利微分方程** $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$

移项，$\dfrac{y'}{y^n}+\dfrac{P(x)}{y^{n-1}}=Q(x)$

令 $u=y^{1-n}$； $\because u'=(1-n)y^{-n}y'$

$\therefore y'=y^n\dfrac{u'}{(1-n)}$； 原式为 $\dfrac{u}{y}y'+u\cdot P(x)=Q(x)$

即 $\cancel{\dfrac{u}{y}y^n}\boxed{\dfrac{u'}{(1-n)}+u\cdot P(x)=Q(x)}$

**(5)全微分**

$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$ 且 $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}}$

利用偏积分方式求解

## 2 降阶形式

**(1)只含一个** $y^{(n)}=f(x)$

反复积分

**(2)只含 $x$、$y'$，不显含 $y$** $y''=f(x,y')$

$p=y' \Rightarrow y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dx}$

原式为 $\dfrac{dp}{dx}=f(x,p)$，求解此一阶微分方程

**(3)只含 $y$、$y'$，不显含 $x$** $y''=f(y,y')$

$p=y' \Rightarrow y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

原式为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$，继续求解此一阶微分方程

求解出 $p=y'=\dfrac{dy}{dx}=g(y)$，再求解出 $y=h(x)$

## 3 高阶形式

*注意：善用叠加原理*

**(1)二阶常微分齐次方程** $y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$，解出 $r$

| | |
|---|---|
| 不相等实数 $r_1,r_2$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| 相等实数 $r_1=r_2=r$ | $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$ |
| 虚数 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

**(2)二阶常微分非齐次方程** $y''+py'+qy=f(x)$

先解出齐次解，再利用算子法——（本质是拉普拉斯变换）

① $f(x)=Ae^{kx}$

若带入为零，则【分母求导】、【分子添 $x$】

$$\begin{cases} y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}Ae^{kx}\Big|_{\boxed{D=k}}, \\ y^*=\dfrac{x}{2D+p}Ae^{kx}\Big|_{D=k} \\ y^*=\dfrac{x^2}{2}Ae^{kx} \end{cases}$$

若分母为零，分母对 $D$ 求导

然后分子添加一个 $x$

以此类推

② $f(x)=P_m(x)$ 型微分算子法

特解形式为 $y^*=Q_m(x)$（最高次为 m 次）

$\boxed{\text{one}}.\ L(D)P_m(x)=\dfrac{1}{a-D}P_m(x)=\dfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{m}\left(\dfrac{D}{a}\right)^nP_m(x)$

$\boxed{\text{two}}.\ L(D)P_m(x)=\dfrac{1}{D}P_m(x)=\int P_m(x)dx$

③ $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$ 微分算子法

$L(D)=\sum a_iD^{n-i}=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_n$

原式为

$y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}e^{kx}P_m(x)$

① $L(D)e^{\alpha x}=L(\alpha)e^{\alpha x}$
② $L(D)e^{\alpha x}f(x)=e^{\alpha x}L(D+a)f(x)$

$=e^{kx}\dfrac{1}{(D+k)^2+p(D+k)+q}P_m(x)$

然后裂项

然后利用积分原则对 $P_m(x)$ 进行后续运算。

④ $f(x)=A\cdot\cos\alpha x \,\|\, A\cdot\sin\alpha x$ $Ae^{i\alpha x}$ 取实部|虚部

$y^*=\dfrac{1}{D^2+pD+q}[A\cdot\cos\alpha x \,\|\, A\cdot\sin\alpha x]\Big|_{\boxed{D=i\alpha}}$

$=\dfrac{A}{pD}[\cos\alpha x \,\|\, \sin\alpha x]=\dfrac{A}{p}\int[\cos\alpha x \,\|\, \sin\alpha x]dx\ ,(q-\alpha^2=0)$

$=\dfrac{A(pD-t)}{p^2D^2-t^2}[\cos\alpha x \,\|\, \sin\alpha x]=-\dfrac{ApD-At}{p^2\alpha^2+t^2}[\cos\alpha x \,\|\, \sin\alpha x]\ ,(q-\alpha^2=t)$

# 1 极限定义选择题反例笔记

## (1)数列收敛和有界问题

数列$\{x_n\}$收敛$\Rightarrow\{x_n\}$有界

收敛数列必有界。

$\{x_n\}$有界$\not\Rightarrow$数列$\{x_n\}$收敛

有界数列不一定收敛

反例：$x_n=(-1)^n$震荡不收敛，但是有界

## (2)极限存在和极限不存在的组合的存在问题

条件 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不∃，$\lim\limits_{x\to a}h(x)$不∃

①$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 可能∃

举例：当且仅当$f(x)\equiv 0$时∃$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=0$

结论：$0\cdot(x\to\infty)=0$；

$(x\to 0)\cdot(x\to\infty)$不确定？？？

$(x\to a\neq 0)\cdot(x\to\infty)$不存在

$1/0$不存在；　$1/(x\to 0)=\infty$

②$\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)]$ 可能∃

举例：$g(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$，$h(x)=\begin{cases}-1 & ,x>0\\ 1 & ,x<0\end{cases}$

则$\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)]=-1$（左右极限相等，就存在）

③$\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]$ 可能∃

举例：$g(x)=\dfrac{1}{x-a}$，$h(x)=\dfrac{-1}{x-a}$，$\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]=0$

结论：$\lim\limits_{x\to a}g(x)$不∃，$\lim\limits_{x\to a}h(x)$不∃，则

$\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]$、$\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)]$都不确定

## (3)空心邻域

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Rightarrow f(x)$在$x_0$的任意空心邻域内无界

根据极限定义表可以得到，此结论就是定义

$f(x)$在$x_0$的任意空心邻域内无界$\not\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

## (4)无穷小的阶次运算

条件：$f(x)$和$g(x)$分别是$x=a$的$n$、$m$阶无穷小

① $f(x)\cdot g(x)$是$n+m$阶无穷小　Yes!

②若$n>m$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是$n-m$阶无穷小　Yes!

③若$n\le m$，则$f(x)+g(x)$是$n$阶无穷小　No!

结论：如果$f(x)$和$g(x)$同阶次，且两者的$n$阶次系数互为相反数，则相加可能升阶为$n+1$阶无穷小

④ $f(x)$连续，则$\int_a^x f(x)dx$是$n+1$阶无穷小　Yes!

## (5)导函数有界性与原函数有界性关系

对于可导函数$f(x)$

结论：无穷区间上　无关系

举例：$f(x)=\sin x^2$有界但$f'(x)=2x\cos x^2$无界

举例：$f(x)=x$无界　但$f'(x)=1$有界

有界区间上　$f'(x)$有界，则$f(x)$有界

反之不亦然

证明：用拉格朗日中值定理的绝对值放缩

# 2 极限定义表

| 表达 | 对于∀ | ∃ | 当 | 有 |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ | $\varepsilon>0$ | $\delta>0$ | $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ | $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ | $\varepsilon>0$ | $X>0$ | $\lvert x\rvert>X$ | $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ | $M>0$ | $\delta>0$ | $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ | $\lvert f(x)\rvert>M$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ | $M>0$ | $X>0$ | $\lvert x\rvert>X$ | $\lvert f(x)\rvert>M$ |

其中：$0<|x-x_0|<\delta$ 是空心邻域的　表达

$|x|>X$ 是趋向无穷的　表达

$|f(x)|>M$ 是极限无穷大的结论

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 是极限确定值的结论

*注意：上述两个表达和两个结论的组合就是4种极限的定义。*

# 3 间断点定义：

| | | |
|---|---|---|
| 第一类 | 可去 | ①极限存在但$f(x_0)$无定义<br>②极限存在但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ |
| | 跳跃 | 左右极限存在，但左右极限不相等 |
| 第二类 | 无穷 | 左右极限至少一个不存在且$=\infty$ |
| | 震荡 | 左右极限至少一个不存在且为有界不定值 |

其中：1）极限存在指左右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

2）左右极限存在指$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=y_0^+$、$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=y_0^-$

*注意：左右极限都存在，　第一类*

*左右极限至少一个不存在　第二类*

# 4 可导性定义

*注意：一元函数可导⇔一元函数可微*

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左右导数相等，即在该点可导，即$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

# 5 导函数连续性定义

分段函数的导函数的连续性

根据$f(x)$定义对分段函数求导，

$f(x)=\begin{cases}f_1^*(x) & ,x\in[(a_0,a_1)]\\ f_2^*(x) & ,x\in[(a_1,a_2)]\end{cases}$，$f'(x)=\begin{cases}f_1^{*\prime}(x) & ,x\in(a_0,a_1)\\ f_2^{*\prime}(x) & ,x\in(a_1,a_2)\end{cases}$

如果$\lim\limits_{x\to a_1^-}f_1^{*\prime}(x)=\lim\limits_{x\to a_1^+}f_2^{*\prime}(x)$，且$=f'(a_1)$

则导函数在$x=a_1$处连续。

# 6 拐点定义

定义：拐点就是凹函数与凸函数的转变点，

对于可导函数　极值点与拐点必然不是同一个点

对于不可导函数　极值点与拐点可同时存在于不可导点。

拐点只存在于$f''(x)=0$的点或$f''(x)$不存在的点

且 去心邻域内该点两侧的符号相反

拐点是$f'(x)$单调性发生变化的点

拐点是$f''(x)$穿过$x$轴的点，（不连续的突变也可）

## 7 可导、连续、极限融会贯通

### (1)导数与导数极限存在互推关系

条件 $\begin{cases} ①f(x)在x=x_0的去心邻域内可导 \\ ②f(x)在x=x_0处连续 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ ∃且等于 $A$ $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ ∃且等于 $A$

*注意：去心邻域内可导，是去心邻域内连续，不代表 $x=x_0$ 处连续，上述条件已经最严格了。*

举例：$f(x)=\begin{cases} 0, & x=x_0 \\ 1, & x\neq x_0 \end{cases}$，去心邻域内可导，但不连续

$f'(x)=0,(x\neq x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=0$，但 $f'(x_0)$ 不存在

证明：由导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

洛必达=====得 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

*注意：连续性保证分式为 0/0 形式，可导用来保证使用洛必达*

*注意：（不能反推）*

函数在某点可导，不能保证其导函数在该点连续

*注意：也可作为函数不连续，但原函数存在的例子*

举例 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$f'(0)$ 存在（用定义），但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在

上述两条件下　　导数极限存在 $\Rightarrow$ 导数存在

但不管怎样　　导数存在 $\not\Rightarrow$ 导数极限存在

## 8 可积分、有原函数问题

定义：$[a,b]$ 内可积即 $[a,b]$ 内定积分存在

连续函数，一定存在**定积分和不定积分**

若有跳跃间断点，则原函数一定不存在

### (1)存在问题

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

①定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在（可积）

②原函数 $F(x)=\int_a^x f(x)dx+C$ 存在【原函数存在定理】

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有**有限**个间断点

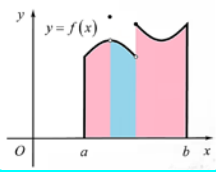
则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在（可积）

| 条件 1 | 条件 2 | 结论 |
|---|---|---|
| $[a,b]$ 上无界 | | $[a,b]$ 上不可积 |
| $[a,b]$ 上有界 | 有限个间断点 | $[a,b]$ 上可积 |
| | 无穷个间断点 | $[a,b]$ 上不确定可积 |
| $[a,b]$ 上连续 | | $[a,b]$ 上原函数存在 |
| | | $[a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$ |
| $[a,b]$ 上不连续 | 只有一类间断点 | $[a,b]$ 上可积 |
| | 含有跳跃间断点 | $[a,b]$ 上不存在原函数<br>$\int_a^x f(t)dt$ 跳跃处不可导 |
| | | $[a,b]$ 上不确定原函数 |
| | 只有震荡间断点 | $[a,b]$ 上不确定原函数<br>狄利克雷函数　不可积 |
| $(a,b)$ 上连续 | | $(a,b)$ 上不确定可积 |
| $[a,b]$ 有原函数 | | $[a,b]$ 上不确定可积 |

### (2)举例

有一类间断点，但可积

举例




$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续，但在 $[a,b]$ 上可能存在原函数

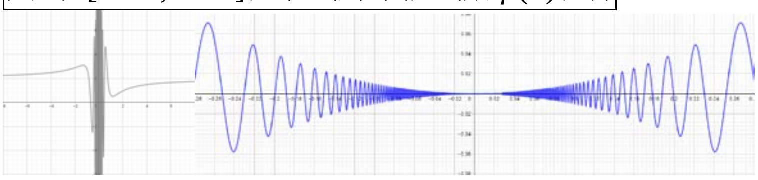
举例 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$x=0$ 上不连续，但存在原函数

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在原函数，但在 $[a,b]$ 上不一定可积

举例 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，存在 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

但是在 $[0-\delta,0+\delta]$ 处不可积，因为函数 $f(x)$ 无界



## 1 性质

$|A^T|=|A|$　　$|kA|=k^n|A|$　　$|A||B|=|AB|$

$|A^*|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}$　　$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

仅有的矩阵加法的地方

$|k_1+k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=|k_1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+|k_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|$

所以一般来讲，$|nA+mB|\neq|nA|+|mB|$

等价定义：同行同列同秩

有两个 $m\times n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$，满足 $B=PAQ$

（$P$ 是 $m\times m$ 阶可逆矩阵，$Q$ 是 $n\times n$ 阶可逆矩阵）

那么这两个矩阵之间是等价关系

伴随定义：

$$\{a_{\boxed{ij}}\}=A;\ \{A_{\boxed{ji}}\}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{\boxed{T}}=A^*$$

## 2 展开公式

A. 拉普拉斯展开式

A，B 分别为 m 和 n 阶矩阵

$$\begin{vmatrix}A & *\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|;\quad \begin{vmatrix}* & A\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$$

B. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

从最高项到最低项相减握手

C. 三阶行列式展开公式

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$$

这是交叉相乘相减的计算方法只适用于二阶和三阶，

如果大于 3 阶，就**只能用代数余子式**计算方法

## 1 性质

$(AB)^T=B^TA^T$；$A^*=|A|A^{-1}$

$|A^*|=|A|^{n-1}$；$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；$(AB)^*=B^*A^*$

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T & C^T\\ B^T & D^T\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n & O\\ O & B^n\end{bmatrix}$$

条件性：A,B都可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

| 反对称 | 对称 | 正交 |
|---|---|---|
| $A^T=-A$ | $A^T=A$ | $A^TA=AA^T=E$ |

## 2 矩阵求逆方法

A. 伴随法

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

B. 初等变换法

$$(A\ \vdots\ I)\xrightarrow{初等变换}(I\ \vdots\ A^{-1})$$

C. 分块法（对角或副对角必须为零）

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$$；主对角取逆

$$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$$；副对角互换取逆

拓展：$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}$

## 3 求伴随

按顺序求出来之后要转置。对于二阶有快速计算方法：

#二阶矩阵伴随矩阵

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}^*=\begin{vmatrix}d & -b\\ -c & a\end{vmatrix}$$

主对角互换，副对角变号

#二阶矩阵逆矩阵

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}d & -b\\ -c & a\end{vmatrix}\frac{1}{|A|}$$

$|A|=ad-bc$

## 4 初等矩阵变换

前行后列，

前面的初等矩阵上下平移行；后面的初等矩阵左右平移列

*#矩阵的乘法运算用这种方法来计算最方便*

## 5 秩

① $r(A,AB)=r(A)$；② $r\begin{pmatrix}A\\ BA\end{pmatrix}=r(A)$

因为 B 是一个变换矩阵，

①中实现了对 A 的（不一定为初等）列变换，而左侧又是列组合，所以秩不变。

②中实现了对 A 的（不一定为初等）行变换，而左侧又是行组合，所以秩不变。

# 1 多次幂

求 $A^n$

## A. 行列成比例矩阵，即 rank（A）=1

找到规律 $A^2 = lA$ ，$l = \sum a_{ii}$

先观察矩阵，若矩阵可化为列向量与行向量相乘，即

$A = \alpha\beta^T$ ，则 $A^n = \alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T$

## B. 可化为相似型（特征值）

$A = PBP^{-1}$ ，则 $A^n = PB^nP^{-1}$

## C. 可提取数量矩阵

$A = kI + B$ 且 $B$ 是一个不满秩的三角矩阵

$A^n = (kA + B)^n$

$= (kA)^n + C_n^1(kA)^{n-1}B + C_n^2(kA)^{n-2}B^2 + \dots$

注意#若 $B$ 为不满秩三角矩阵，且 $\mathrm{rank}(B) = r$ ，

则 $\mathrm{rank}(B^r) = 1$； $\mathrm{rank}(B^{r+1}) = 0$

## D. 分块矩阵

## E. 其他

找不到规律就先计算一下 $A^2$ ，然后看看有没有规律

# 2 求解矩阵

(1)

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的每一列都可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$

①如 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，可以先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再做矩阵乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 求出 $\boldsymbol{X}$；也可以用行变换直接求 $\boldsymbol{X}$

②如 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}_3$，再用方程的解构造矩阵 $\boldsymbol{X}$

(2) $A = PBQ$ ，求 B

$$\begin{array}{c|c:c:c|}
\downarrow & A & E & P \\ \hdashline
\downarrow & P^{-1}A & P^{-1}E & P^{-1}P \\
\downarrow & P^{-1}A & P^{-1} & E
\end{array}$$

同理

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\multicolumn{3}{c}{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow} \\
A & AQ^{-1} & AQ^{-1} \\ \hdashline
E & EQ^{-1} & Q^{-1} \\ \hdashline
Q & QQ^{-1} & E
\end{array}$$

# 3 秩的证明题

主要关系式：（正反都要会用！）

$r(A+B) \le r(A) + r(B)$；

$r(AB) \le \min(r(A), r(B))$； $|\boldsymbol{C}_{大大}| = |\boldsymbol{A}_{大小} \times \boldsymbol{B}_{小大}| = \boldsymbol{0}$

$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$；

条件性的

$AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \le n$

$r(A) = n \Rightarrow r(AB)=r(B)=r(BA)$ 即：*初等变换秩不变*

## (1)证明矩阵相乘后秩的大小与原矩阵的区别

分块法：（列分块，每一列用向量表示）

$$[\alpha_1, a_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s]$$

表明是线性表示，然后就可以得出与原矩阵的秩的大小

同理，也可以行分块

## (2)秩与伴随的关系

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n & , r(\boldsymbol{A}) = n \\ 1 & , r(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0 & , r(\boldsymbol{A}) \le n-2 \end{cases},$$

矩阵是满秩，伴随也满秩

矩阵缺一秩，伴随变一秩

矩阵秩过亏，伴随是零秩

注意：$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中的部分列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

# 2-2 向量、线性方程组

# 1 重要定义

**(1)线性无关定义**

对于向量 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}$，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\dots,k_s$

使 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\dots+k_s\boldsymbol{\alpha_s}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

**(2)线性无关性质（每个都要会用来证明）**

$\Leftrightarrow$ ① $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ ②齐次方程的 $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ ③秩 $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s})=s$

# 2 施密特正交化（正交规范化）

$$\beta_1=\alpha_1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}\\ \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}\\ \gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}\end{cases}$$

# 3 坐标变换公式

基底过渡关系：$[\boldsymbol{\alpha_1}\ \ \boldsymbol{\alpha_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\beta_1}\ \ \boldsymbol{\beta_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\beta_n}]$

$\mathbf{C}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$ 的过渡矩阵

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{x}$

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}\boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}\end{matrix}\quad \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}$$

#弄清楚 x 和 y 是哪个基底上的坐标

绝对坐标是 $[\boldsymbol{\alpha_1}\ \ \boldsymbol{\alpha_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\beta_1}\ \ \boldsymbol{\beta_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}$

$[\boldsymbol{\beta_1}\ \ \boldsymbol{\beta_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{\alpha_1}\ \ \boldsymbol{\alpha_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\alpha_n}]\boxed{\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}=[\boldsymbol{\alpha_1}\ \ \boldsymbol{\alpha_2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{\alpha_n}]\boxed{\boldsymbol{x}}$

# 4 证明线性无关

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关

## 4.1 定义法

**(1)设** $k_1\boldsymbol{\beta_1}+k_2\boldsymbol{\beta_2}+\dots+k_n\boldsymbol{\beta_n}=\boldsymbol{0}$ **即** $\boldsymbol{Bk}=\boldsymbol{0}$

然后化简，与已知条件 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关联立

若 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{k}$ 只有零解

**(2)写出组合系数行列式**

若行列式的值不为零，则只有零解

## 4.2 用秩

**(1)写出** $[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{P}$

求出 $\boldsymbol{P}$，并写出 $\det(\boldsymbol{P})$

(2) $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n})=r(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n})$

从而线性无关（有关）

# 5 线性表达=解方程组

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 表达

**(1)列出** $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}\,|\,\boldsymbol{\beta})$**，作初等行变换**

**(2)将左侧化为三角矩阵，可根据右侧写出解**

# 6 极大线性无关组

求极大线性无关组的时候只能对列向量们做初等行变换

化为阶梯形矩阵就可以了

# 7 解非齐次方程组

**(1)方程组写为列向量矩阵形式** $\mathbf{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

**(2)判断解的形式**

无解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 无法由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出

无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=r<n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法**不唯一**

唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法**唯一**

注意：如果题目中的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 存在未知量，则要小心各个情况的可能性。

注意：齐次线性方程组的基础解系有 $n-r$ 个，$n$ 是矩阵的列数

**(3)求基础解系 $\xi_i$ 和特解 $\boldsymbol{\eta}$**

注意：可以用子式判断最小阶数

将增广矩阵 $r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，化为阶梯形矩阵

求出特解 $\boldsymbol{\eta}$ ——特解只有一个或没有（无解）

求出基础解系 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\dots,\boldsymbol{\xi_{n-r}}$（基础解系有 $n-r$ 个）

### 基础解系的寻找技巧

$n-r$ 个基础解系的末位 $n-r$ 个为 $n-r$ 阶单位矩阵，如

$$\begin{aligned}\xi_1&=[d_{11},d_{12},\dots,d_{1r},\quad 1\quad 0\quad \dots 0]^T\\ \xi_2&=[d_{21},d_{22},\dots,d_{2r},\quad 0\quad 1\quad \dots 0]^T\\ &\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots\\ \xi_{n-r}&=[\dots\dots\dots,d_{n-rr},\quad 0\quad 0\quad \dots 1]^T\end{aligned}$$

**(3)求出唯一解**

**(4)写出结果表达式**

通解为 $\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}+\dots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi_{n-r}}$

注意：虽有无穷个解向量，但只有 $n-r+1$ 个线性无关解向量

注意：求具体解的时候一定要用行变换，但是方阵求是否有解的时候可以用求秩的方法来计算。

# 8 克拉默法则（特殊方阵）

对于非齐次线性方程 $\mathbf{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{A}$ **满秩**，则方程解**唯一**

$x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}, i=1,2,\dots,n.$，其中 $|\boldsymbol{A_i}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列替换为右端

常数项 $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}^T$. 所构成的行列式。

*##会用，知道就行了，一般别用，计算 $|\boldsymbol{A}_i|$ 要累死。*

# 9 同解问题

$\boldsymbol{A_1x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A_2x}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 行向量等价

本质就是两个矩阵方程可以**相互**线性表示

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 同解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2$ 行向量等价

**(1)后一个方程是前一个方程的子集**

后一个方程的解是前一个方程的解，

但前一个方程的解不是后一个方程的解

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{A}_1$ | 可由 $\boldsymbol{A}_2$ | 行向量表示 |
| $\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1$ | 可由 $\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2$ | 行向量表示 |

**(2)两个方程同解**

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\text{且}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{A}_2}\end{pmatrix}$$

即组合后降阶一半。

若前式能降阶一半而后式不能降阶一半，则前一个方程的解范围更小，被含于后一个方程的解集中。

注意：仅仅证明 $r(\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1)=r(\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2)$ 是不够的，如：

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解是空间中的一条直线 $r_1=2$ 或面 $r_1=1$

$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的解也是空间中的一条直线 $r_2=2$ 或面 $r_2=1$

但这两条直线不一定是同一直线

**必须要两者都能相互表示，才是同一个解。**

# 10 秩的不等式判断

**(1)准则**

①$r(\boldsymbol{B}_{m\times n})\le\min\{m,n\}$

②$r(\boldsymbol{BC})\le\min\{r(\boldsymbol{B}),r(\boldsymbol{C})\}$

③$r(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\le r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})$

**(2)其他常用性质**

①若 $\boldsymbol{P}$ ,$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$

②$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\le r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

③ $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$

## 1 重要公式及定义

特征向量：$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\alpha}$为非零列向量)

相似定义：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是任意$n$阶矩阵

存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$

若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，且$\boldsymbol{\Lambda}$为对角阵，则称$\boldsymbol{\Lambda}$是$\boldsymbol{A}$的相似标准型。

其中，$\boldsymbol{P}$就是由特征值$\lambda_i$构成的$\boldsymbol{\Lambda}$对应的特征向量矩阵

二次型矩阵定义：$\boldsymbol{A}$为对称矩阵 *遇到字母题目要注意*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$$

合同定义：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是任意$n$阶矩阵，

存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$。

二次标准型：$\boldsymbol{A}$为主对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$

二次规范性：$\boldsymbol{A}$为元素只有$-1,0,1$的主对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$

## 2 重要性质

- $\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$　　特征值相加=主对角线之和
- $\prod\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$　　特征值相乘=行列式
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$基础解系是$\lambda=0$对应的线性无关特征向量

若$r(\boldsymbol{A})=r$，则$\lambda=0$至少是$\boldsymbol{A}$的$n-r$重特征值。

定理3：矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda$，特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$

$\Rightarrow$ 矩阵$f(\boldsymbol{A})$的特征值为$f(\lambda)$，特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$

$f(\boldsymbol{A})\to\boldsymbol{A}^k$、$\sum a_i\boldsymbol{A}_i^i$、$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$（勿引入其他矩阵）

相似对角化判断条件

定理1：$\boldsymbol{A}$有$n$个**互不相同**的特征值$\Rightarrow$

$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量

定理2：$\boldsymbol{A}$的$r_i$重特征值$\lambda_i$对应**线性无关特征向量**为$r_i$个

$\Rightarrow$ $n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化

实对称矩阵性质：

定理4：实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交

定理5：实对称矩阵必定可正交变换为**对角阵**，即

$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中$\boldsymbol{Q}$为正交阵，（单位化）

二次型矩阵的性质：$f(x_1,x_2,...,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$

定理6：对于任意$n$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，必存在正交阵$\boldsymbol{Q}$，

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$使$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQy}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQy}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda y}$

定理7：可逆线性变换不唯一，标准型也不唯一，但标准型的$p$、$q$由实对称矩阵$\boldsymbol{A}$唯一确定。

**正平方项**的项数$p$为正惯性指数；**负平方项**的项数$q$为负惯性指数；$p+q=r$为秩；$p-q$为符号差。

若$q=n$，则称$\boldsymbol{A}$为正定矩阵

定理8：若$f(x_1,x_2,...,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$正定，则$a_{ii}>0$

正定矩阵判断条件

定理9：$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$正定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的全部特征值$\lambda_i>0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D}$可逆$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的全部顺序主子式大于零

若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，那么$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$

正交矩阵的行列式为$1$或$-1$

注意：非零特征根的数量不能判断矩阵的秩

## 3 解题的进阶方法

对于$\boldsymbol{A}$矩阵，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵——相似化问题

①$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$计算所有$\lambda_i$（求特征根）

②求特征向量

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\ddots & * \\ 0 & \ddots\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

解得$\boldsymbol{\alpha}_j=[x_1,x_2,...,x_n]^T$

③$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n]$

特别说明，这里不用规范化，规范化是求标准型的，不要搞混了！

## 4 求特征值和特征向量过程

(1)写出 $|\lambda E-A|=0$ 展开计算行列式

(2)带入不同的 $\lambda_i$

带入到矩阵 $(\lambda_i E-A)$，求取 $(\lambda_i E-A)x=0$

当 $\lambda=\lambda_i$ 时，$(\lambda_i E-A)x=0$，得 $\alpha_i=?$；

直接写解得 $\alpha_j=[x_1,x_2,...,x_n]^T$ 按顺序列出求取的

$\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 化为矩阵形式。所以 $P=[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]$

*#注意：求取的特征向量不唯一，而是一个特征向量空间*

*$技巧：①计算三阶的 $|\lambda E-A|=0$ 时，代入 r 重化简后得到 n-r 阶矩阵需求出 r 个线性无关的解*

*$技巧：②可以直接舍去一行（仅对于二、三阶）*

## 5 求解 $A^n$ 或 $A^n\beta$

### 5.1 矩阵相似化

(1)计算特征向量矩阵

$|\lambda E-A|=0$，求出 $\lambda_i$ 及 $\alpha_i$，得出特征向量矩阵 $P$

(2)幂级数展开，特征矩阵求逆

$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^n P^{-1}$；

(3)得到 $A^n$ 或 $A^n\beta$

*注意：如特征向量矩阵不可逆，则按照之前矩阵章节计算特殊方阵的幂的方法求解*

### 5.2 线性表出法（快速求解第二类）

(1)计算特征向量矩阵（方法相同）

$|\lambda E-A|=0$，求出 $\lambda_i$ 及 $\alpha_i$，得出特征向量矩阵 $P$

(2) $\beta$ 由 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 线性表出 $\beta=Px=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)x$

(3)展开幂级数

$A^n\beta=A^nPx=A^{n-1}(AP)x=A^{n-1}(P\Lambda)x=...=P\Lambda^n x$

## 6 正交变换二次型（特征法）

(1)表示出 $x^TAx$ 并求解 $A$ 的特征值和特征向量

这里的特征向量用 $\alpha_i$ 来表示

*注意：求解特征值时，根据主对角线和等于特征值之和来验算*

*注意：求解次要重根时可以预先正交化*

(2)重根 Schmidt 正交化、所有根规范化

这里的正交化用 $\beta_i$ 来表示，规范化用 $\beta_i^{\circ}$ 来表示

利用不同特征值对应的的特征向量正交来验算所有重根；

*注意：不要忘记规范化，解出正交阵*

(3)写出对角阵（标准型）

答案规范：令 $x=Qy$，则 $f(x_1,x_2,...,x_n)=y^TQ^TAQy$

$=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2$ 要写全。*一定要验算！*

## 7 配方法变换二次型

对于矩阵 $A$，利用 $C_k^T...C_2^TC_1^TAC_1C_2...C_k=C^TAC$

*注意：这个步骤是草稿纸上的，试卷上要写出配方形式*

每一个 $C_i$ 都是一次初等变换矩阵，按高斯消元法化简。

答案规范：$f(x_1,x_2,...,x_n)=......=(a_{11}x_1+...)^2+......$

$=(....)^2+...+(...)^2$

令 $\begin{cases}y_1=...\\ \vdots\\ y_n=\end{cases}$（求逆得到），即 $\begin{cases}x_1=...a_{1k}y_k...\\ \vdots\\ x_n=...a_{nk}y_k...\end{cases}$，$x=Cy$

*注意，结果必须可逆，主对角元素不可为零（其实自己方法必定可逆）*

# 1 基本运算及定义

*注意：若 P(A)=0，无法得出 A=∅；若 P(A)=1，无法得出 A=Ω*

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

*注意：遇到交集运算和并集运算互换的时候，必用对偶律*

分配律　$A\cap(B\cup C)=A(B\cup C)=\boxed{AB\cup AC}$

$A\cup(B\cap C)=A\cup BC=\boxed{(A\cup B)(A\cup C)}$

并型　$(A\cup B)(C\cup D)=AC\cup AD\cup BC\cup BD$

交型　$AB\cup CD=(A\cup C)(A\cup D)(B\cup C)(B\cup D)$

斥型：$A-B=A\overline{B}$，集合的"+"没定义，概率有

$A\overline{B}\cup B=A\cup B$

条件概率：在 A 事件发生的条件下发生 B 事件的条件概率

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}\Rightarrow P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

独立概率：若事件 $A$、$B$ 相互独立，则

$$\Diamond\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}\Rightarrow\begin{cases}①P(B|A)=P(B)\\②P(B|A)=P(B|\overline{A})\end{cases}$$

②——即 A 发生或不发生都不影响 B

# 2 重要公式

对于任何事件都有：

加法　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

减法　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

在 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$；$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ 条件下：

全概率　$P(A)=\sum_i\frac{P(AB_i)}{P(B_i)}P(B_i)=\boxed{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$

贝叶斯　$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i|A)P(A)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$

# 3 三大概率型

## (1) 古典型概率

实验结果为有限个样点本，且每个样点本的发生具有相等可能性，设事件 $A$ 由 $n_A$ 个样点本组成，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

## (2) 几何型概率

实验样本的样本空间是某一块区域，以 $L(\Omega)$ 表示其几何度量，$L(\Omega)$ 为有限，且实验结果出现在 $\Omega$ 中的可能性只与该区域几何度量成正比，事件 A 的样本点所表示的区域为 $\Omega_A$，这事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}$$

## (3) *n* 重伯努利实验

实验结果只有两个结果 $A$ 和 $\overline{A}$，独立重复 n 次

$$P(A)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

# 4 古典概型解题

一般来讲，$P(A)=\frac{n_A}{n}$ 的计算中，$n$ 和 $n_A$ 都是在同一样本空间中的样本点数，如果一个概率同时可以用有序和无序来计算，常常无序要简单些；同时可用两种样本空间计算时，常常用较小的样本空间要简单些。

之后这里会有例题补充。

# 5 几何型概率

要会寻找几何关系（函数关系），多依靠画图解决。之后这里会有例题补充。

*注意：从 m 件产品中取出 n 件=不放回地一件一件取出共 n 件*

# 6 例题

**(1) N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件**

——可以看做一次一件不放回取。

令 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次取得次品\\0, & 第i次取得正品\end{cases}$，则无论放回或不放回均为 $\frac{M}{N}$

# 1 重要基本定义

随机变量:

样本空间 $\Omega$ 上的实数函数 $X=X(\omega),\omega\in\Omega$ 为随机变量

分布函数:

考试大纲定义为 $F(x)=P\{X\boxed{\le}x\}$, 即事件 $X\le x$ 的概率

*注意: 分布函数不一定连续*

分布函数性质:

- $F(x)$ 是单调非减函数; $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$
- $F(x)$ 必定右连续, 写 $X$ 取值时, 一定要写 $* < X \le **$
- $P\{x_1\boxed{<}X\boxed{\le}x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$ *注意: 符号不一致要补齐*
- $P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$ 重要定义, **推导**时候要用

*注意: 分布函数和概率密度函数, 做题时不要突然就混淆了*

连续性随机变量:

随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 可由非负可积函数 $f(x)$ 积分得到, 即

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

*注意: 连续的 **F(x)** 对应的 X 不一定是连续型随机变量。*

概率密度:

$$(1)\ f(x)\ge 0 \quad (2)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

$$(3)P\{x_1<X\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt$$

*注意: (1)(2)是 **f(x)** 作为概率密度函数的充要条件*

$(4)\ f(x)$ 连续点有 $F'(x)=f(x)$

# 2 常用分布

## (1) 0—1 分布

随机变量 $X$ 有分布律

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 1-p | p |

称 $X$ 服从参数为 p 的 0—1 分布, 或称 $X$ 具有 0—1 分布

## (2) 二项分布

$n$ 次伯努利实验中, 每次成功率为 $p$, 则 $n$ 次独立重复实验中成功的总次数 $X$ 服从二项分布

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

称 $X$ 服从参数为 n , p 的二次分布, 记为 $X\sim B(n,p)$

## (3) 几何分布

独立的重复一系列伯努利实验, 每次成功率为 $p$, 则在第 $k$ 次实验才**首次**成功的概率服从的分布

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$$

则称 $X$ 服从参数为 p 的几何分布, 或 $X$ 具有几何分布

## (4) 超几何分布

*次品抽取数分布*

在 $N$ 件产品中有 $N_0$ 件次品, 不放回地一次一次取共 n 件 (一次抽取 n 件), $X$ 为抽取到的次品数。

$$P\{X=k\}=\frac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$$

*注意: 分母为总共排列情况个数, 分子为次品排列情况个数×正品排列情况个数*

## (5) 泊松分布

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

称随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 记为 $X\sim P(\lambda)$

## (6) 均匀分布

连续性随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\boxed{\le}x\boxed{\le}b\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 记作 $X\sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\boxed{<}x\boxed{<}b\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 记作 $X\sim U(a,b)$

## (7) 指数分布

连续性随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$ 记作 $X\sim E(\lambda)$

## (8) 正态分布

随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{(\sqrt{2}\sigma)^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

其中 $\mu,\sigma$ 为常数, 且 $\sigma>0$, 则称 X 服从参数为 $\mu,\sigma$ 的正态分布, 记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

若 $\mu=0,\sigma^2=1$ 即 $X\sim N(0,1)$ 则称 X 服从标准正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

对应的标准正态分布函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-t^2}{2}}dt,-\infty<x<+\infty$$

# 3 性质

泊松定理: 二项分布~泊松分布 (见推导)

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}np=\lambda$, ($n\ge 100,p\le 0.1,np$ 不太大)

则 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(\approx)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

指数分布: 无记忆性 (见推导)

对于 $X\sim E(\lambda)$, 则有

$0)P\{X\le x\}=F(x)=1-e^{\lambda x},x>0$

$1)P\{X>t\}=e^{-\lambda t},t>0$

$2)P\{X>t+s\mid X>s\}=e^{-\lambda t},t,s>0$

正态分布: 标准化

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其分布函数为 $F(x)$, 则

$1)F(x)=\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\quad 2)\phi(-x)=1-\phi(x),\phi(0)=\frac{1}{2}$

$3)P\{a<X\le b\}=\phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

$4)f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, $\varphi(x)$ 是偶函数

$5)$ 若 $X\sim N(0,1)$, 有 $P\{|X|\le a\}=2\phi(a)-1$

# 4 随机变量函数分布

定义 $Y=g(X)$, 则 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

即 $F_Y(y)=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx\Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$

$g(x)\le y$ 存在无取值、取全部有效范围、取部分有效范围的情况, 划范围的技巧是将中断点带入函数。

# 1 基本定义

二维随机变量定义：

设 $X(\omega),Y(\omega)$ 是开以在样本空间 $\Omega$ 上的两个随机变量，那么称向量 $(X,Y)$ 为二维随机变量，或随机向量

二维随机变量分布：

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},-\infty<x\,\&\,y<+\infty$

边缘概率分布：

$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,y<+\infty\}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,x<+\infty\}$

离散：$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=Y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$

连续：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 即边缘概率密度

*注意：解题时，要注意把定义域写全，记得补充【，其他】*

二维随机变量的条件分布定义：

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}>0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}P\{X\le x\,|\,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$ 存在。

称为条件 $Y=y$ 下 $X$ 的条件分布，记作 $F_{X|Y}(x\,|\,y)$ 或 $P\{X\le x\,|\,Y=y\}$

离散：$P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$

连续：$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt\quad,f_Y(y)>0$

$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad,f_Y(y)>0$

独立性：

$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$ 即

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量 $X$，$Y$ 相互独立

离散：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

*注意：当 $X$，$Y$ 相互独立时，分布律中两行对应的概率成正比*

连续：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

# 2 性质

1) $0\le F(x,y)\le1\quad F(+\infty,+\infty)=1$

2) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$

# 3 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[N_1^2-2\rho N_1N_2+N_2^2\right]\right\}$$

其中，

$$N_1=\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1},N_2=\frac{(x-\mu_2)}{\sigma_2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2>0;\quad -1<\rho<1$

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)$

- $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)\Rightarrow\not\Leftarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- $X$ 与 $Y$ 相互独立 $\Leftrightarrow\rho=0$

# 4 随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 解题

离散型：略

离散×连续型：$X$ 离散、$Y$ 连续

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$

$=\sum_i P\{g(X,Y)\le z\,|\,X=x_i\}P\{X=x_i\}$

$=\sum_i p_i\cdot P\{g(\boxed{x_i},Y)\le z\,|\,\boxed{X=x_i}\}$

连续型：（对于 $Z=X+Y$）

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f(x,y)dy$$

两连续变量如果相互独立，上式可以化为

$$P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f_Y(y)dy$$

求导可得 $F_Z'(z)=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

连续型：一般情况

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$，$x$、$y$ 默认范围是 $\Omega$

(1) M=max(X,Y)及 N=min(X,Y)

设 $X,Y$ 是两个相互独立的随机变量，他们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则

$\boxed{F_{\max}(z)}=P\{X\le z,Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$

$\boxed{F_{\min}(z)}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$M=\frac{1}{2}\left(X+Y+|X-Y|\right)$；$N=\frac{1}{2}\left(X+Y-|X-Y|\right)$

$MN=XY$；$\quad M+N=X+Y$

# 5 直接合并的分布

## (1)泊松分布合并

设随机变量 $X_1,X_2,...,X_n$ 相互独立且服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布

则 $\boxed{X=X_1+X_2+...+X_n}$ 服从参数为 $n\lambda$ 的泊松分布

即 $X_i\sim P(\lambda)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$

拓展——

设 $X_1\sim P(\lambda_1)$、$X_2\sim P(\lambda_2)$，对于任意非负整数 $k$，

有 $P(X_1=k)=\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$、$P(X_2=k)=\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$

$P\{X_1+X_2=m\}=\dfrac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{m!}(\lambda_1+\lambda_2)^m$

即 $X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

## (2)正态分布合并

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$、

则 $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

# 1 数学期望

离散型：$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,3...$

$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 为随机变量 $X$ 的数学期望或均值

连续型：随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 为随机变量 $X$ 的数学期望或均值

基本性质：

$E(k)=k$；　$E(kX)=kE(X)$

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

如果 $X$、$Y$ 不相关，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

## 1.1 拓展数学期望

(1) 随机变量 $X$ 的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

离散型：$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$

连续型：$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

(2) 随机变量 $(X,Y)$ 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

离散型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$

连续型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\iint_D g(x,y)f(x,y)dxdy$

# 2 方差

定义：数学期望 $E\{[X-E(x)]^2\}$ 存在，则称之为 $X$ 的方差，记作 $D(X)$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=E\{[X-E(x)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 $X$ 的标准方差或均方差

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

基本性质：1) $D(k)=0$；　2) $D(\boxed{a}X+b)=\boxed{a^2}D(X)$

3) 若 $X$、$Y$ 不相关，则有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

# 3 常用期望、方差公式(对照 3-2)

(1) 0—1 分布

$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p)$

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$

$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p)$

(3) 几何分布 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

$E(X)=\dfrac{1}{p},\quad D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

(4) 超几何分布 $P\{X=k\}=\dfrac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$

$E(X)=n\dfrac{N_0}{N},\quad D(X)=n\dfrac{N_0(N-N_0)(N-n)}{N^2(N-1)}$

(5) 泊松分布 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$E(X)=\lambda,\quad D(X)=\lambda$

(6) 均匀分布 $X\sim U(a,b)$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2},\quad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

(7) 指数分布 $X\sim E(\lambda)$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda},\quad D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

(8) 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$

# 4 矩、协方差

## 4.1 矩：

(1) $k$ 阶原点矩 $E(X^k)$

(2) $k$ 阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^k\}$

(3) $k+l$ 阶混合矩 $E(X^kY^l)$

(4) $k+l$ 阶混合中心矩 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

## 4.2 协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

基本性质：

(1) $\mathrm{Cov}(\boxed{a}X,\boxed{b}Y)=\boxed{ab}\mathrm{Cov}(X,Y)$

(2) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

## 4.3 相关系数：

若 $D(X)D(Y)\neq 0$　$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

若 $D(X)D(Y)=0$，则 $\rho_{XY}=0$；若 $\rho_{XY}=0$，则 $X$、$Y$ 不相关

基本性质：

①$|\rho_{XY}|\le 1$ ②若 $|\rho_{XY}|=1$，则必有非零线性关系 $Y=aX+b$

*注意：二维正态分布随机变量(X,Y)的独立=不相关*

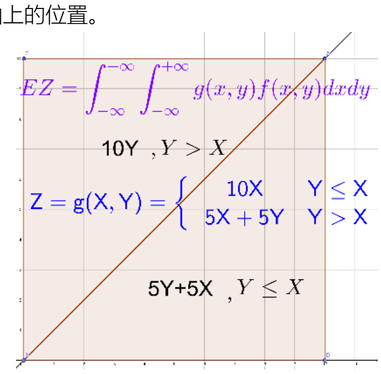
# 5 要点：

①求方差时尽量使用公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

②求 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望，直接在 $x$-$y$ 平面上权重积分就行

深入理解随机变量：

- $\boxed{X\text{ 随机变量}}$就是一段连续或离散的具有权值的数值分布——***密度不同的一维点集***。$X$ 本身只代表一维点在 $x$ 轴上的位置。
- $\boxed{EX}$就是这些点集的质心位置。
- $\boxed{\text{二维随机变量}(X,Y)}$可以理解为平面上的***密度不同的点云***，其密度函数就是 $f(x,y)$
- $\boxed{\text{一元随机函数 } Y=g(X)}$，则可以认为是一个映射函数，将 $x$ 轴上的点集通过函数扩充到 $x$-$y$ 平面，然后映射到 $y$ 轴上。
- $\boxed{EY=E[g(X)]}$就是映射转移后的点集质心位置。
- $\boxed{\text{二元随机函数 } Z=g(X,Y)}$同理，也是一个映射函数，通过两个坐标轴 $x$ 和 $y$ 轴，扩充到三维空间里，然后映射到 $z$ 轴上。



# 1　独立同分布的组合随机变量期望

## (1) 正态分布的独立同分布

设随机变量 $X$、$Y$ 独立同分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $EZ$，

$Z = \max(X,Y)$ —— $EZ = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}} + \mu$

方法一：标准化+$F(x)$-$f(x)$求导法+公式法

①写出标准化的正态分布 $X_1 = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，$Y_1 = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$

②改写 $Z = \max(X,Y) = \max(\sigma X + \mu, \sigma Y + \mu)$
$= \mu + \sigma\max(X_1, Y_1)$。

③ $P\{Z_1 \le z\} = P\{X_1 \le z, Y_1 \le z\} = \phi(z)^2$，
$f_{z1}(z) = 2\phi(z)\varphi(z)$

④利用公式 $E(Z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot 2\phi(z)\varphi(z)dz$ （展开 $\varphi(z)$）

方法二：max 分解法+公式法

① $\max(X,Y) = \frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$； $\min(X,Y) = \frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$

② $EZ = \frac{1}{2}(EX+EY+E(|X-Y|))$， $Z_1 = X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$

③ $EZ_1 = \int \ldots\ldots = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

方法三：公式法

$$EZ = \iint_{\Omega} |x-y|\, f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

# 1 依概率收敛

- 对于数列$\{x_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,记为$x_n\xrightarrow{n\to+\infty}a$

- 对于随机变量序列$\{X_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$\begin{cases}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1\\P\{|X_n-a|\ge\varepsilon\}=0\end{cases}$,记为$X_n\xrightarrow{P}a$

# 2 大数定理

## (1)切比雪夫不等式

$EX$存在，$DX$存在

如果一个随机变量的方差非常小的话，那么这个随机变量取到远离均值$\mu$的概率也是非常小的

$$P\{\boxed{|X-\mu|}\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\text{ 或}$$

$$P\{\boxed{|X-\mu|}<\varepsilon\}\ge1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

## (2)切比雪夫大数定律

$\{X_i\}$是①两两不相关的随机变量序列,所有② $X_i$都有方差，且③方差有上限(存在常数$C$，使得$D(X_i)\le C,(i=1,2,\ldots)$)

$$\text{则}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

## (3)辛钦大数定律

$\{X_i\}$是①独立 ②同分布随机变量序列, ③期望相同$EX_i=\mu$

$$\text{则}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\mu$$

| 大数定理 | 分布 | 期望 $EX$ | 方差 $DX$ | 用途 |
|---|---|---|---|---|
| 伯努利 | 二项分布 | 相同 | 相同 | 估算概率 |
| 辛钦 | 独立同分布 | 相同 | 相同 | 估算期望 |
| 切比雪夫 | 不相关 | 存在 | 存在,有限 | 估算期望 |
| | | | | |

# 3 中心极限定理

## (1)棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

服从二次分布的$X_n\sim B(n,p)$ $(n=1,2,\ldots)$，对任意实数$x$

$$\text{有}\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{DX_n}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

其中$EX_n=np$;$DX_n=np(1-p)$

即$X_n\sim N(np,np(1-p))$

## (2)列维-林德伯格中心极限定理

独立同分布的数列$\{X_i\}$，$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$$\text{有}\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\Phi(x)$$

即$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

# 1 数理统计基本

## (1)总体

数量指标$X$的全体称为总体。$X$的概率分布称为总体分布。

## (2)简单随机样本

与总体$X$同分布且相互独立的$X_1,X_2,\ldots X_n$。

对应的值$x_1,x_2,\ldots,x_n$称为样本值，也即总体$X$的$n$个独立观测值

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的分布函数为

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

## (3)统计量

样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\boxed{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本标准差：$S^2=\sqrt{\boxed{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\ldots$

样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,k=1,2,\ldots$

## (4)性质

①如果$EX$存在，

$$\text{则}EX=E\overline{X}=\mu$$

②如果$DX$存在，

$$\text{则}D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$$

则$ES^2=DX=\sigma^2$（见推导）

常常可以推得：

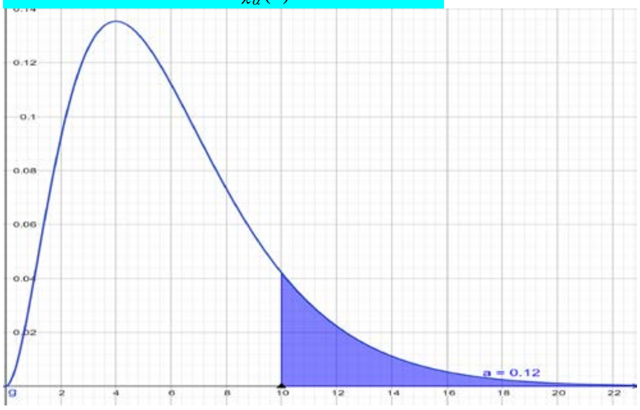
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=n!$$

## 1 $\chi^2$ 分布

随机变量 $X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立且服从正态分布 $N(0,1)$，称随机变量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$ 服从自由度为 $\boxed{n}$ 的 $\chi^2$ 分布，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$。

**(1)上分位点**

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$




**(2)性质**

①$E(\chi^2)=n$；$D(\chi^2)=2n$

②若 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，两者相互独立，则

$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$$

## 2 $t$ 分布

设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$

则称随机变量 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 $n$ 的 $t$ 分布，记作 $T\sim t(n)$

**(1)上分位点**

$$P\{T>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

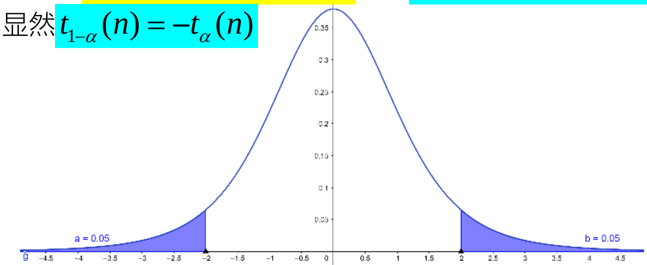
**(2)性质**

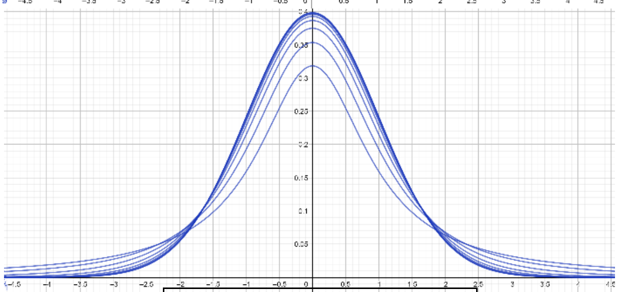
①是偶函数

②当 n 充分大时，$t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布

③具有双侧对称分位点 $t_{\alpha/2}(n)$，即 $P\{|T|>t_{\alpha/2}(n)\}=\alpha$

显然 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$



里面的是 $n$=1，最外面的是 $n$=128

## 3 $F$ 分布

设随机变量相互独立，$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则称随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 $\boxed{(n_1,n_2)}$ 的 $F$ 分布

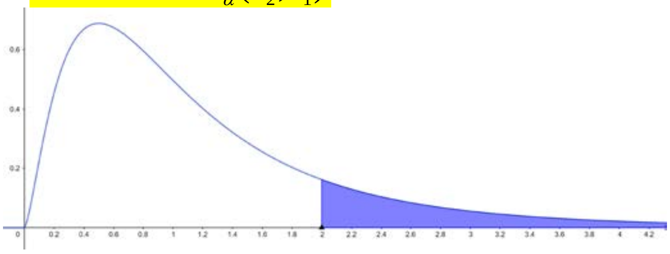
**(1)上分位点**

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

**(2)性质**

①$F\sim F(\boxed{n_1,n_2})$；$\dfrac{1}{F}\sim F(\boxed{n_2,n_1})$

②$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$ ③$P\{F\ge 1\}=P\{F\le 1\}=\dfrac{1}{2}$



## 4 正态总体抽样分布

①设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是来自总体的样本

$\overline{X}$ 为样本均值，$S^2$ 是样本方差

②设总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$，$Y_1,Y_2,\ldots Y_n$ 是来自总体的样本

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是来自总体的样本

**(1)均值与方差**

①$\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （见证明）

②$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$，$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

（见证明）

**(2)其他**

①$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ （见证明）

②$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （见证明）

③$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$ （见证明）

④$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ （见证明）

⑤如果 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，那么

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ （见证明）

⑥$\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立(只针对正态分布)

# 1 点估计

用样本 $X_1, X_2, \dots X_n$ 构造的估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots X_n)$ 来估计未知参数 $\theta$ 称为点估计。

### (1)无偏性

定义：设 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots X_n)$ 是未知参数 $\theta$ 的无偏估计量

### (2)有效性

定义：设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 $\theta$ 的无偏估计量，且 $D\hat{\theta}_1 \le D\hat{\theta}_2$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

### (3)一致性

定义：设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots X_n)$ 是 $\theta$ 的估计量，如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 $\theta$，则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots X_n)$ 为 $\theta$ 的一致估计量

### (4)常用公式

$EX_i = EX = \mu$；$DX_i = DX = \sigma^2$

$E\overline{X} = \frac{n}{n}\mu = \mu$；$D\overline{X} = \frac{n}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$EX_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$；

$E(X_i - \overline{X}) = 0$；$D(X_i \pm \overline{X}) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$

$E(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}ES^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$E(g(X)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \boxed{g(X_i)} P\{X = X_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{g(x)} f(x)dx$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

# 2 矩估计

总体 $X$ 的分布含有未知数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$，由样本估计得到 $k$ 阶矩估计量 $\alpha_l = E(X^l) = \alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), l = 1, 2, \dots, k$

可以得到各阶原点矩 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$，

然后列方程组求解未知数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$；

$DX$ 的矩估计：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n-1}{n}S^2$

注意：样本二阶中心矩=样本二阶原点矩-样本一阶原点矩的平方

# 3 最大似然估计法

### (1)离散型似然函数

设 $P\{X = a_i\} = p(a_i, \theta)$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta) \tag{1.1}$$

本质上 $L(\theta)$ 就是在参数 $\theta$ 下所有概率的乘积

### (2)连续型似然函数

设概率密度为 $f(x;\theta)$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \tag{1.2}$$

似然函数的含义就是提取的当前样本的概率可由 $\theta$ 表示，假设提取的这一系列样本的概率为**最大值**，由此计算出 $\theta$

①对 $\ln L(\theta)$ 求导②$L(\theta)$ 求导③驻点不是最大值，其他法

# 4 区间估计

### (1)置信区间

定义：总体 $X$ 的分布规律存在一个未知数 $\theta$；且对于给定的 $\alpha$，如果两个统计量满足 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$，那么随机区间 $(\theta_1, \theta_2)$ 为参数 $\theta$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

### (2)一个正态总体的置信区间表（见证明）

| 待估参数 | 其他参数 | 枢轴量 $W$ | 置信区间 |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\sigma^2$ 已知√ | $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ | $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$ |
| $\mu$ | $\sigma^2$ 未知 | $T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ | $\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 未知 | $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ | $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$ |

# 5 假设检验

错误类型——

$\boxed{\text{一类错误}}$：弃真；$P\{\text{拒绝}H0 | H0\text{ 为真}\} = \alpha$

$\boxed{\text{二类错误}}$：纳伪；$P\{\text{接收}H0 | H0\text{ 为假}\} = \beta$

### (1)提出检验假设

$H_0$：样本与总体或样本与样本间的差异是由抽样误差引起的

$H_1$：样本与总体或样本与样本间存在本质差异

预先设定的检验水准为 $\alpha$；当检验假设为真，但被错误地拒绝的概率（一类错误）

### (2)求取拒绝域

利用上述公式

3-2 概率分布部分定理推导

# 1 泊松定理推导

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{n!}}{k!\boxed{(n-k)!}}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\xrightarrow{k\ll n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\boxed{n^kp^k}(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{(np)^k}{k!}(\boxed{1-p})^{n-k}$$

$$\xrightarrow{e^{-p}\sim 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-p)^i}{i!}\sim 1-p}\frac{(np)^k}{k!}(e^{-p})^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!}(e^{-np}\boxed{e^{pk}})$$

$$\xrightarrow{kp\ll np}\frac{(np)^k}{k!}(e^{-np}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

# 2 指数无记忆性推导

0)$P\{X\le x\}=F(x)=1-e^{\lambda x}, x>0$

1)$P\{X>t\}=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}, t>0$

2)$P\{X>t+s|X>s\}=\frac{P\{X>t+s\}}{P\{X>s\}}$

$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\{X>t\}, t,s>0$

你还能活多久和你活了多久没有关系

3-3 多维随机变量

# 3 泊松分布合并

$X_1\sim P(\lambda_1)$、$X_2\sim P(\lambda_2)$

$P\{X_1+X_2=m\}=\sum_k P\{X_1=k\}P\{X_2=m-k\}$

$=\sum_k e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_k\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^m\lambda_2^{-k}}{(m-k)!}$

$=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_2^m}{m!}\boxed{\sum_{k=1}^m\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{\lambda_1^k}{\lambda_2^k}}$

$=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_2^m}{m!}\boxed{\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m}$(二项式)$=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{m!}(\lambda_2+\lambda_1)^m$

3-4 期望方差公式推导

# 4 二项分布期望方差

二项分布形式 $X\sim B(n,p)$；$P\{X=k\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$

(1)**期望公式**：$EX=\sum_{k=1}^n k\cdot P\{X=k\}$

$=\sum_{k=1}^n k\cdot C_n^kp^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}p^kq^{n-k}$

$=\boxed{np}\sum_{k=1}^n\frac{\boxed{(n-1)}!}{(n-k)!\boxed{(k-1)}!}\boxed{p^{k-1}}q^{n-k}$ 提取 $n$、$p$

$=np\sum_{k=1}^n\boxed{C_{n-1}^{k-1}}p^{k-1}q^{n-k} = np\sum_{\boxed{k=0}}^{\boxed{n-1}}C_{n-1}^{\boxed{k}}p^{\boxed{k}}q^{n-\boxed{(k+1)}}$

$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^kp^kq^{n-k-1}\xrightarrow{t=n-1}np\sum_{k=0}^tC_t^kp^kq^{t-k}$

$\boxed{(a+b)^n=\sum_{i=0}^nC_n^ia^ib^{n-i}}=np(p+q)^t=np$

(2)**方差公式**：$DX=EX^2-(EX)^2$

方法一

$=\left[\sum_{k=1}^n k^2C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\right]-(np)^2$

$=\sum_{k=1}^n k\cdot npC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}-(np)^2$ 同上，提取 $np$

$=np(\sum_{k=1}^n\boxed{(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}}+\sum_{k=1}^n\boxed{C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}})-(np)^2$

$=np(\sum_{k=0or1}^{n-1}\boxed{k\cdot C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}}+\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}})-(np)^2$

$=np(\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{k\cdot P\{X=k\}}+\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{C_{n-1}^kp^kq^{n-1-k}})-(np)^2$

$=np(\boxed{EX_{n-1}}+\boxed{1})-(np)^2$

$=np[\boxed{(n-1)p}+\boxed{1}]-(np)^2=np(1-p)$

方法二

设随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次实验成功\\0, & 第i次实验失败\end{cases}$，则 $X=\sum_{i=1}^nX_i$

则 $X_i\sim B(1,p)$，故 $D(X_i)=p(1-p)$（0-1 分布）

对于独立的 $X_i,X_j(i\ne j)$，有

$$D(X)=\sum_{i=1}^nD(X_i)=np(1-p)$$

# 5 几何分布期望方差（级数）

几何分布：$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

(1)**期望公式** $EX=\sum_{k=1}^{\boxed{+\infty}}k\cdot p(1-p)^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=p\sum_{\boxed{k=1}}^{+\infty}(q^k)'=p\sum_{\boxed{k=0}}^{+\infty}(q^k)'$

$=p\left(\frac{1}{1-q}\right)'=p\frac{-1\cdot\frac{dq}{dp}}{(1-q)^2}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac1p$

(2)**方差公式**

$DX=EX^2-(EX)^2$

$EX^2=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2q^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(q^k\right)'$

$=p\sum_{\boxed{k=0}}^{+\infty}\left((k+1)q^k-q^k\right)'=p\sum_{k=0,1}^{+\infty}\left(q^{k+1}\right)''-\sum_{k=0,1}^{+\infty}\left(q^k\right)'$

$=p\left[\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''-\left(\frac{q}{1-q}\right)'\right]=p\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)''-\left(\frac{1}{1-q}\right)'\right]$

$=p\left[\frac{2}{(1-p)^3}-\frac{1}{(1-p)^2}\right]=\frac{2-p}{p^2}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$

3-5 大数定理推导

# 1 切比雪夫不等式

离散型: $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}=\sum_{|x_i-EX|\ge\varepsilon} p_i\ ,(p_i=P\{X=x_i\})$

因为这里的取值就是$|x-EX|\ge\varepsilon$，所以:

$$\le \sum_{|x_i-EX|\ge\varepsilon}\left(\frac{|x_i-E(X)|}{\varepsilon}\right)^2 p_i \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{|x_i-EX|\ge\varepsilon}|x_i-E(X)|^2 p_i$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum|x_i-E(X)|^2p_i=\frac{1}{\varepsilon^2}DX$$

连续型: $P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}=\int_{|x-EX|\ge\varepsilon}f(x)dx$

$$\le\int_{|x-EX|\ge\varepsilon}\left(\frac{|x-E(X)|}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx,\quad \frac{|x-EX|}{\varepsilon}\ge1$$

由于积分项都是正的，所以可以拓展积分范围来放大

$$\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-E(X)|^2f(x)dx=\frac{D(x)}{\varepsilon^2}$$

# 2 切比雪夫大数定律证明

$\{X_i\}$是①两两不相关的随机变量序列,所有② $X_i$都有方差，且③方差有上限(存在常数$C$,使得 $D(X_i)\le C,(i=1,2,\ldots)$)

则 $\frac1n\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \frac1n\sum_{i=1}^n EX_i$

或 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac1n\sum_{i=1}^n X_i-\frac1n\sum_{i=1}^n EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$

证明：有切比雪夫不等式 $P\{\boxed{|X-\mu|}\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，带入得

$$P\left\{\left|\frac1n\sum_{i=1}^n X_i-\frac1n\sum_{i=1}^n EX_i\right|\ge\varepsilon\right\}\xrightarrow{X=\sum_{i=1}X_i}$$

$$P\left\{\frac1n|X-EX|\ge\varepsilon\right\}=P\{|X-EX|\ge\boxed{n\varepsilon}\}\le\frac{DX}{\boxed{n\varepsilon}^2}$$

$\therefore$ 当 $n\to+\infty$时，有 $\frac{DX}{n^2\varepsilon^2}=0$，

原式$=1-\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac1n\sum_{i=1}^n X_i-\frac1n\sum_{i=1}^n EX_i\right|\ge\varepsilon\right\}=0$

证毕。

# 3 棣莫弗-拉普拉斯定理证明

看看就行

$$C_n^kp^kq^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

$$\simeq\frac{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^ke^{-k}\cdot(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}\cdot\sqrt{2\pi k}\sqrt{2\pi(n-k)}}p^kq^{n-k}$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^kq^{n-k}$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\xrightarrow[p+q=1]{\frac kn\to p}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\ln\left(\left(\frac{np}{k}\right)^k\right)+\ln\left(\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(\frac{k}{np}\right)+(k-n)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(\frac{np+x\sqrt{npq}}{np}\right)+(k-n)\ln\left(\frac{n-np-x\sqrt{npq}}{nq}\right)\right\}$$

$$\xrightarrow{p+q=1}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+(k-n)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{of}\ \ln(x+1)]{\text{Taylor}}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-k\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)+(k-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{(-np-x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)+(np+x\sqrt{npq}-n)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{(-np-x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+\cdots\right)-(nq-x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2p}{2nq}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{\left(-x\sqrt{npq}+\frac12x^2q-x^2q+\cdots\right)+\left(x\sqrt{npq}+\frac12x^2p-x^2p-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac12x^2q-\frac12x^2p-\cdots\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac12x^2(p+q)-\cdots\right\}$$

$$\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac12x^2\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}$$

3-5 数理统计基础

# 4 样本数字特征推导

① $EX=E\bar X=\mu$ 不用推导，我有脑子的

② $D\bar X=\frac{\sigma^2}{n}$ 推导: $D\bar X=D\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^nDX_i=\frac{\sigma^2}{n}$

③ $ES^2=DX=\sigma^2$

推导: $ES^2=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2\right)$，其中 $\bar X=\frac1n\sum_{i=1}^nX_i$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^n(X_i^2-2X_i\bar X+\bar X^2)\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-2\bar X\sum_{i=1}^n X_i+n\bar X^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n EX_i^2-2\sum_{i=1}^n E(X_i\bar X)+\sum_{i=1}^n E\bar X^2\right)$$

恒有① $EX_i=\mu$ ② $DX_i=\sigma^2$ ③ $EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2$

④ $E(X_i\bar X)=\frac1nE\sum_{j=1}^nX_iX_j=\frac1n[E(X_i^2)+(n-1)EX_iEX_j],(i\ne j)$

$=\frac1n[\sigma^2+\mu^2+(n-1)\mu^2]=\frac1n(\sigma^2+n\mu^2)$

⑤ $E\bar X^2=\frac1n\sum_{i=1}^n(E\boxed{X_i\bar X})=\frac1n\sum_{i=1}^n\frac1n(\sigma^2+n\mu^2)=\frac1n(\sigma^2+n\mu^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n\boxed{\sigma^2+\mu^2}-2\sum_{i=1}^n\boxed{\frac1n(\sigma^2+n\mu^2)}+\sum_{i=1}^n\boxed{\frac1n(\sigma^2+n\mu^2)}\right)$$

$$=\frac1{n-1}\left(n\boxed{\sigma^2+\mu^2}-2\boxed{\sigma^2+n\mu^2}+\boxed{\sigma^2+n\mu^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-2(\bar X\boxed{n\bar X}+n\bar X^2\right)$$

$$=\frac1{n-1}E\left[\boxed{\sum_{i=1}^n X_i^2}-\boxed{n\bar X^2}\right]$$

3-6 数理统计基本概念

# 1 抽样分布证明

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots X_n$ 是来自总体的样本

$\overline{X}$ 为样本均值，$S^2$ 是样本方差

(1) $S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-n\overline{X}^2\right)$ (1.1)

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^n X_i+\sum_{i=1}^n \overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-n\overline{X}^2\right)$$

(2) $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ (1.2)

$E\overline{X}=E\left(\frac1n\sum_{i=1}^n X_i\right)=\mu$；$D\overline{X}=D\left(\sum_{i=1}^n\frac{X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$\overline{X}$ 是 $X_1,X_2,\dots X_n$ 的线性组合，$\overline{X}$ 服从正态分布，即

$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 进而 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)$

(3) $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (1.3)

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline X)^2\Rightarrow \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}=\sum_{i=1}^n\frac{(X_i-\overline X)^2}{\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left[(X_i-\mu)-(\overline X-\mu)\right]^2=\boxed{\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}-\boxed{n\left(\frac{\overline X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

☆左边 $\sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(n)$，右边 $\sqrt n(\frac{\overline X-\mu}{\sigma})\sim N(0,1)$

即 $n(\frac{\overline X-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$

左边—右边 = $\chi^2(n-1)$，证毕。

(4) $T=\frac{\overline X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$ (1.4)

由（2）得 $\frac{\overline X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)$，由（3）得 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$\frac{\overline X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\Big/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}\rightarrow\frac{\underline{X}}{\sqrt{\underline{Y}/k}},(\underline{Y}\sim\chi^2(k),\underline{X}\sim N(0,1))$$

$$=\frac{\frac{\overline X-\mu}{\sigma/\sqrt n}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\frac{\overline X-\mu}{\sigma/\sqrt n}}{\frac{S}{\sigma}}=\frac{\overline X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$$

证毕

(5) $\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2\sim\chi^2(n)$ (1.5)

$\frac{(X_i-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$，证毕

(6) $U=\frac{(\overline X-\overline Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ (1.6)

$\overline X\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1})$ 且 $\overline Y\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2})$ 得

$\overline X-\overline Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$，于是

$$\frac{\left[\left(\overline X-\overline Y\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$ 证毕

(7) $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ (1.7)

由（3）得 $\chi_1^2=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$，$\chi_2^2=\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$

$$F=\frac{\chi^2(n_1)/n_1}{\chi^2(n_2)/n_2}\rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\chi_1^2/(n_1-1)}{\chi_2^2/(n_2-1)}}=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim\boxed{F(n_1-1,n_2-1)}$$ 证毕

(8) 如果 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

那么 $T=\frac{\overline X-\overline Y-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac1{n_1}+\frac1{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ (1.8)

其中，$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，由（6）得

$$\frac{(\overline X-\overline Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

由（3）得 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 继而

$$\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{\frac{(\overline X-\overline Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\Big/(n_1+n_2-2)}}=\frac{\frac{(\overline X-\overline Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{S_\omega^2}{\sigma^2}}}$$

$$\frac{(\overline X-\overline Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\sqrt{\frac{S_\omega^2}{\sigma^2}}}=\frac{\overline X-\overline Y-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac1{n_1}+\frac1{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

证毕

3-7 正态总体的置信区间证明

# 1　正态总体的置信区间(置信水平为$\boxed{1-\alpha}$)

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，设样本 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 来自 $X$

补充分位点定义：

正态 $N$： $P\{X > z_\alpha\} = \alpha$

咖方 $\chi^2$： $P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$

$T$： $P\{T > t_\alpha(n)\} == \alpha$ 、 $P\{|T| > t_{\boxed{\alpha/2}}(n)\} = \alpha$

学生 $F$： $P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$

**(1) 求 $\boxed{\mu}$， $\sigma^2$ $\boxed{\text{已知√}}$，求取 $\mu$ 的置信区间**

由公式(1.2)可得，

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$；于是 $P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$；

展开得到： $P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left\{-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \overline{X} < +z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

即 $\mu$ 的置信区间为 $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

**(2) 求 $\boxed{\mu}$， $\sigma^2$ $\boxed{\text{未知?}}$，求取 $\mu$ 的置信区间**

将 $\sigma^2$ 换为无偏估计 $S^2$ 由公式(1.4)可得

$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$；于是

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha \text{；}$$

展开得到

$$P\left\{\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即 $\mu$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

**(3) 求 $\boxed{\sigma^2}$， $\mu$ $\boxed{\text{未知?}}$，求取 $\sigma^2$ 的置信区间**

$\sigma^2$ 的无偏估计是 $S^2$，由公式(1.3)可得

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；于是（$\chi^2$ 不对称）

$$P\left\{\chi^2_{\boxed{1-\alpha/2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\boxed{\alpha/2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

所以可得置信区间 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

# 其他，略