1 一阶形式

(1)可分离变量 $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

(2)齐次方程 $\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\rightarrow \boxed{u=\frac{y}{x}} \leftrightarrow \boxed{y=ux}$；$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=f(u)$

得到$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$

(3)非齐次线性方程 $\boxed{y'+P(x)y=Q(x)}$

齐次解$y_0=C_1e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

常数变易：$u(x)=C_1$

$$u(x)=\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C$$

$$y_0=u(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\boxed{\int P(x)dx}}dx+C\right)$$

(4)伯努利微分方程 $\boxed{y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n}$

移项，$\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)}{y^{n-1}}=Q(x)$

令$u=y^{1-n}$；$\because u'=(1-n)y^{-n}y'$

$\therefore y'=y^n\frac{u'}{(1-n)}$；原式为$\frac{u}{y}y'+u\cdot P(x)=Q(x)$

即$\cancel{\frac{u}{y}y^n}\boxed{\frac{u'}{(1-n)}+u\cdot P(x)=Q(x)}$

(5)全微分

$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$且$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}}$

利用偏积分方式求解

2 降阶形式

(1)只含一个 $\boxed{y^{(n)}=f(x)}$

反复积分

(2)只含 x 、 y' ，不显含 y $\boxed{y''=f(x,y')}$

$p=y' \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$

原式为$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$，求解此一阶微分方程

(3)只含 y 、 y' ，不显含 x $\boxed{y''=f(y,y')}$

$p=y' \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

原式为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，继续求解此一阶微分方程

求解出$p=y'=\frac{dy}{dx}=g(y)$，再求解出$y=h(x)$

3 高阶形式

注意：善用叠加原理

(1)二阶常微分齐次方程 $y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$，解出r

不相等实数r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
相等实数$r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
虚数 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

(2)二阶常微分非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$

先解出齐次解，再利用算子法——（本质是拉普拉斯变换）

① $\boxed{f(x)=Ae^{kx}}$

若带入为零，则【分母求导】、【分子添 x 】

$$\begin{cases} y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}Ae^{kx}\Big|_{\boxed{D=k}}, \\ y^*=\frac{x}{2D+p}Ae^{kx}\Big|_{D=k} \\ y^*=\frac{x^2}{2}Ae^{kx} \end{cases}$$

若分母为零，分母对 D 求导

然后分子添加一个 x

以此类推

② $\boxed{f(x)=P_m(x)}$型微分算子法

特解形式为$y^*=Q_m(x)$（最高次为 m 次）

$\boxed{\text{one}}$. $L(D)P_m(x)=\frac{1}{a-D}P_m(x)=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{D}{a}\right)^nP_m(x)$

$\boxed{\text{two}}$. $L(D)P_m(x)=\frac{1}{D}P_m(x)=\int P_m(x)dx$

③ $\boxed{f(x)=P_m(x)e^{ax}}$微分算子法

$$L(D)=\sum a_iD^{n-i}=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_n$$

原式为

$$y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}e^{kx}P_m(x)$$

$$=e^{kx}\frac{1}{(D+k)^2+p(D+k)+q}P_m(x)$$

$\boxed{\begin{array}{c} ① L(D)e^{\alpha x}=L(\alpha)e^{\alpha x} \\ ② L(D)e^{ax}f(x)=e^{ax}L(D+a)f(x) \end{array}}$

然后裂项

然后利用积分原则对$P_m(x)$进行后续运算。

④ $\boxed{f(x)=A\cdot\cos\alpha x \,\|\, A\cdot\sin\alpha x}$ $\boxed{Ae^{i\alpha x}}$ 取实部|虚部

$$y^*=\frac{1}{D^2+pD+q}[A\cdot\cos\alpha x\,\|\,A\cdot\sin\alpha x]\Big|_{\boxed{D=i\alpha}}$$

$$=\frac{A}{pD}[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x]=\frac{A}{p}\int[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x]dx\ ,(q-\alpha^2=0)$$

$$=\frac{A(pD-t)}{p^2D^2-t^2}[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x]=-\frac{ApD-At}{p^2\alpha^2+t^2}[\cos\alpha x\,\|\,\sin\alpha x]\ ,(q-\alpha^2=t)$$