1 重要公式及定义

特征向量：$A\alpha=\lambda\alpha,(\alpha$为非零列向量$)$

相似定义：A、B 是任意 n 阶矩阵

存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则 A 相似于 B

若 $A\sim\Lambda$，且 Λ 为对角阵，则称 Λ 是 A 的相似标准型。

其中，P 就是由特征值 λ_i 构成的 Λ 对应的特征向量矩阵

二次型矩阵定义：A 为对称矩阵 *遇到字母题目要注意*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$$

合同定义：A、B 是任意 n 阶矩阵，

存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，则 A 合同于 B。

二次标准型：Λ 为主对角矩阵 Λ

二次规范性：Λ 为元素只有 $-1,0,1$ 的主对角矩阵 Λ

2 重要性质

- $\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$ 特征值相加=主对角线之和
- $\prod\lambda_i=|A|$ 特征值相乘=行列式
- $Ax=0$ 基础解系是 $\lambda=0$ 对应的线性无关特征向量

若 $r(A)=r$，则 $\lambda=0$ 至少是 A 的 $n-r$ 重特征值。

定理 3：矩阵 A 的特征值为 λ，特征向量为 α

$\Rightarrow$ 矩阵 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$，特征向量为 α

$f(A)\to A^k$、$\sum a_iA_i^i$、$A+kE$（勿引入其他矩阵）

相似对角化判断条件

定理 1：A 有 n 个**互不相同**的特征值 $\Rightarrow$

n 阶矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

定理 2：A 的 r_i 重特征值 λ_i 对应**线性无关特征向量**为 r_i 个

$\Rightarrow$ n 阶矩阵 A 可对角化

实对称矩阵性质：

定理 4：实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交

定理 5：实对称矩阵必定可正交变换为**对角阵**，即

$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$，其中 Q 为正交阵，（单位化）

二次型矩阵的性质：$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$

定理 6：对于任意 n 阶实对称矩阵 A，必存在正交阵 Q，

$x=Qy$ 使 $x^TAx=y^TQ^TAQy=y^TQ^{-1}AQy=y^T\Lambda y$

定理 7：可逆线性变换不唯一，标准型也不唯一，但标准型的 p、q 由实对称矩阵 A 唯一确定。

正平方项的项数 p 为正惯性指数；**负平方项**的项数 q 为负惯性指数；$p+q=r$ 为秩；$p-q$ 为符号差。

若 $q=n$，则称 A 为正定矩阵

定理 8：若 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$ 正定，则 $a_{ii}>0$

正定矩阵判断条件

定理 9：$A\simeq E$ $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的全部特征值 $\lambda_i>0$

$\Leftrightarrow$ $A=D^TD$，D 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的全部顺序主子式大于零

若 A 和 B 相似，那么 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

正交矩阵的行列式为 1 或 -1

注意：非零特征根的数量不能判断矩阵的秩

3 解题的进阶方法

对于 A 矩阵，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵——相似化问题

① $|\lambda E-A|=0$ 计算所有 λ_i（求特征根）

②求特征向量

$$(\lambda_iE-A)x=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\ddots & * \\ 0 & \ddots\end{pmatrix}x=0$$

解得 $\alpha_j=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$

③ $P=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$

特别说明，这里不用规范化，规范化是求标准型的，不要搞混了！

4 求特征值和特征向量过程

(1) 写出 $|\lambda E - A| = 0$ 展开计算行列式

(2) 带入不同的 λ_i

带入到矩阵 $(\lambda_i E - A)$，求取 $(\lambda_i E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

当 $\lambda = \lambda_i$ 时，$(\lambda_i E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_i = ?$；

直接写解得 $\boldsymbol{\alpha}_j = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 按顺序列出求取的

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_s$ 化为矩阵形式。所以 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n]$

#注意：求取的特征向量不唯一，而是一个特征向量空间

$技巧：①计算三阶的 $|\lambda E - A| = 0$ 时，代入 r 重化简后得到 n-r 阶矩阵需求出 r 个线性无关的解

$技巧：②可以直接舍去一行（仅对于二、三阶）

5 求解 A^n 或 $A^n\beta$

5.1 矩阵相似化

(1) 计算特征向量矩阵

$|\lambda E - A| = 0$，求出 λ_i 及 $\boldsymbol{\alpha}_i$，得出特征向量矩阵 $\boldsymbol{P}$

(2) 幂级数展开，特征矩阵求逆

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} \Rightarrow \boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$；

(3) 得到 A^n 或 $A^n\beta$

注意：如特征向量矩阵不可逆，则按照之前矩阵章节计算特殊方阵的幂的方法求解

5.2 线性表出法（快速求解第二类）

(1) 计算特征向量矩阵（方法相同）

$|\lambda E - A| = 0$，求出 λ_i 及 $\boldsymbol{\alpha}_i$，得出特征向量矩阵 $\boldsymbol{P}$

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性表出 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Px} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}$

(3) 展开幂级数

$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{Px} = \boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{AP})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{P\Lambda})\boldsymbol{x} = \ldots = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{x}$

6 正交变换二次型（特征法）

(1) 表示出 $x^T Ax$ 并求解 A 的特征值和特征向量

这里的特征向量用 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 来表示

*注意：求解特征值时，根据主对角线和等于特征值之和来**验算***

注意：求解次要重根时可以预先正交化

(2) 重根 Schmidt 正交化、所有根规范化

这里的正交化用 $\boldsymbol{\beta}_i$ 来表示，规范化用 $\boldsymbol{\beta}_i^\circ$ 来表示

利用不同特征值对应的的特征向量正交来验算**所有**重根；

注意：不要忘记规范化，解出正交阵

(3) 写出对角阵（标准型）

答案规范：令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$，则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQy}$ $= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ **要写全**。***一定要验算！***

7 配方法变换二次型

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用 $\boldsymbol{C}_k^T \ldots \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{AC}_1\boldsymbol{C}_2 \ldots \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$

注意：这个步骤是草稿纸上的，试卷上要写出配方形式

每一个 $\boldsymbol{C}_i$ 都是一次初等变换矩阵，按高斯消元法化简。

答案规范：$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ldots\ldots = (a_{11}x_1 + \ldots)^2 + \ldots\ldots$ $= (\ldots)^2 + \ldots + (\ldots)^2$

令 $\begin{cases} y_1 = \ldots \\ \vdots \\ y_n = \end{cases}$（求逆得到），即 $\begin{cases} x_1 = \ldots a_{1k}y_k \ldots \\ \vdots \\ x_n = \ldots a_{nk}y_k \ldots \end{cases}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cy}$

注意，结果必须可逆，主对角元素不可为零（其实自己方法必定可逆）