1 中值定理

(1)罗尔定理

条件：① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导

③ $f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

(2)拉格朗日中值定理

条件：① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

注意：罗尔是拉格朗日的特例

(3)柯西中值定理

条件：① $f(x)$、$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② $f(x)$、$g(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

注意：拉格朗日是柯西的特例

(4)达布定理（导函数中间值定理）

条件：① $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导

②若 $f_+'(a)\neq f_-'(b)$

则对于 $\forall\mu$ 介于 $f_+'(a)$ 和 $f_-'(b)$ 之间，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\mu$

证明：用构造函数方法

假定 $f_-'(b)>f_+'(a)$，设 $\boxed{F(x)=f(x)-\mu x,x\in[a,b]}$，

不妨设 $F_+'(a)=f_+'(a)-\mu<0$，$F_-'(b)=f_-'(b)-\mu>0$

$F'(a_+)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$；$F'(a_-)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}$

在 $x=a$ 的某个右领域内 $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，即

$F(x)<F(a)$

在 $x=b$ 的某个左领域内 $\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}>0$，即

$F(x)<F(b)$

所以 $F(a)$ 和 $F(b)$ 都不是函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，

又因 $F(x)$ 一定可以取到最小值，其最小值必在 (a,b) 中取到，

设该最小值在 $x=\xi$ 点取到，那么可以得到 $F'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)=\mu$

2 变限积分求导公式

(1)不含参

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$$

(2)含参数

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t,x)dt$$

$$=\boxed{\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt}+f(\varphi(x),x)\varphi'(x)-f(\phi(x),x)\phi'(x)$$

3 一些解题思路（中值定理）

①看到*区间内连续的函数*，要马上想到有最大值和最小值

②灵活使用不等式。（通过最大最小值来实现）

③熟练掌握构造函数法

4 $\boxed{\text{构造函数}}$的构造方法

——将 $f(x)$ 替换为 y

i.把已知条件（要判断的式子）移到同一侧，即 $\boxed{h(y^{(n)},\ldots,y',y,x)=0}$

ii.该微分方程的齐次解 $\tilde{y}=q(x)$

iii. 该微分方程的特解 $y^*=t(x)$（如果有）

iv.设构造函数 $F(x)=\dfrac{y-y^*}{\tilde{y}}=\dfrac{f(x)-t(x)}{q(x)}$

几种构造函数的类型

$$\boxed{\begin{cases}xf'(x)+f(x)\Rightarrow & F(x)=xf(x)\\ xf'(x)-f(x)\Rightarrow & F(x)=\dfrac{1}{x}f(x)\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases}xf'(x)+kf(x)\Rightarrow & F(x)=x^kf(x)\\ xf'(x)-kf(x)\Rightarrow & F(x)=x^{-k}f(x)\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases}f'(x)+f(x)\Rightarrow & F(x)=e^xf(x)\\ f'(x)-f(x)\Rightarrow & F(x)=e^{-x}f(x)\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases}f'(x)+kf(x)\Rightarrow & F(x)=e^{kx}f(x)\\ f'(x)-kf(x)\Rightarrow & F(x)=e^{-kx}f(x)\end{cases}}$$

注意：如果要证明的对象**可以直接解出原函数**，那就不用这么麻烦了

5 麦克劳林

所谓的一阶麦克劳林展开公式是

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\boxed{\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2}$$

注意：展开到了二阶

6 n 阶导数系数——级数展开法

$x=0$ 处：

$f^{(n)}(0)\to f(x)=\sum\limits_{k=0}a_kx^k$ $\qquad f^{(n)}(0)=n!a_n$

$x=x_0$ 处：

$f^{(n)}(x_0)\to f(x)=\sum\limits_{k=0}b_k(x-x_0)^k$ $\qquad f^{(n)}(x_0)=n!b_n$