1 基本定义

二维随机变量定义：

设 $X(\omega),Y(\omega)$ 是开以在样本空间 Ω 上的两个随机变量，那么称向量 (X,Y) 为二维随机变量，或随机向量

二维随机变量分布：

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},-\infty<x\ \&\ y<+\infty$

边缘概率分布：

$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,y<+\infty\}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,x<+\infty\}$

离散：$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=Y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$

连续：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 即边缘概率密度

注意：解题时，要注意把定义域写全，记得补充【，其他】

二维随机变量的条件分布定义：

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}>0$

$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\le x\mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$ 存在。

称为条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布，记作 $F_{X|Y}(x\mid y)$ 或 $P\{X\le x\mid Y=y\}$

离散：$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$

连续：$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt\quad ,f_Y(y)>0$

$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad ,f_Y(y)>0$

独立性：

$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$ 即

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量 X，Y 相互独立

离散：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

注意：当 X，Y 相互独立时，分布律中两行对应的概率成正比

连续：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

2 性质

1) $0\le F(x,y)\le1\quad F(+\infty,+\infty)=1$

2) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$

3 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[N_1^2-2\rho N_1N_2+N_2^2\right]\right\}$$

其中，

$$N_1=\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1},N_2=\frac{(x-\mu_2)}{\sigma_2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2>0;\quad -1<\rho<1$

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)$

- $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1,\sigma_2;\rho)\Rightarrow\not\Leftarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow\ \rho=0$

4 随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 解题

离散型：略

离散×连续型：X 离散、Y 连续

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$

$=\sum_i P\{g(X,Y)\le z\mid X=x_i\}P\{X=x_i\}$

$=\sum_i p_i\cdot P\{g(\boxed{x_i},Y)\le z\mid \boxed{X=x_i}\}$

连续型：（对于 $Z=X+Y$）

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f(x,y)dy$$

两连续变量如果相互独立，上式可以化为

$$P\{Z\le z\}=\iint_{x+y\le z}f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\boxed{z-x}}f_Y(y)dy$$

求导可得 $F_Z'(z)=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

连续型：一般情况

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$，$x$、$y$ 默认范围是 Ω

(1) M=max(X,Y)及 N=min(X,Y)

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，他们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则

$\boxed{F_{\max}(z)}=P\{X\le z,Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$

$\boxed{F_{\min}(z)}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$M=\frac{1}{2}\left(X+Y+|X-Y|\right)$；$N=\frac{1}{2}\left(X+Y-|X-Y|\right)$

$MN=XY$；$\quad M+N=X+Y$

5 直接合并的分布

(1)泊松分布合并

设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立且服从参数为 λ 的泊松分布

则 $\boxed{X=X_1+X_2+\ldots+X_n}$ 服从参数为 $n\lambda$ 的泊松分布

即 $X_i\sim P(\lambda)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$

拓展——

设 $X_1\sim P(\lambda_1)$、$X_2\sim P(\lambda_2)$，对于任意非负整数 k，

有 $P(X_1=k)=\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$、$P(X_2=k)=\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$

$P\{X_1+X_2=m\}=\dfrac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{m!}(\lambda_1+\lambda_2)^m$

即 $X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

(2)正态分布合并

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$、

则 $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$