1 依概率收敛

- 对于数列$\{x_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,记为$x_n\xrightarrow{n\to+\infty}a$

- 对于随机变量序列$\{X_n\}$对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,n>N$时，

恒有$\begin{cases}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1\\P\{|X_n-a|\geq\varepsilon\}=0\end{cases}$,记为$X_n\xrightarrow{P}a$

2 大数定理

(1)切比雪夫不等式

EX 存在，DX 存在

如果一个随机变量的方差非常小的话，那么这个随机变量取到远离均值μ的概率也是非常小的

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\text{或}$$

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(2)切比雪夫大数定律

$\{X_i\}$是①两两不相关的随机变量序列，所有② X_i 都有方差，且③方差有上限(存在常数C，使得$D(X_i)\leq C,(i=1,2,\ldots)$)

$$\text{则}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

(3)辛钦大数定律

$\{X_i\}$是①独立 ②同分布随机变量序列，③期望相同 $EX_i=\mu$

$$\text{则}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\mu$$

大数定理	分布	期望 EX	方差 DX	用途
伯努利	二项分布	相同	相同	估算概率
辛钦	独立同分布	相同	相同	估算期望
切比雪夫	不相关	存在	存在,有限	估算期望

3 中心极限定理

(1)棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

服从二次分布的 $X_n\sim B(n,p)$ $(n=1,2,\ldots)$，对任意实数 x

$$\text{有}\ \lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{DX_n}}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

其中$EX_n=np$;$DX_n=np(1-p)$

即$X_n\sim N(np,np(1-p))$

(2)列维-林德伯格中心极限定理

独立同分布的数列$\{X_i\}$，$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$$\text{有}\ \lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

即$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

1 数理统计基本

(1)总体

数量指标 X 的全体称为总体。 X 的概率分布称为总体分布。

(2)简单随机样本

与总体 X 同分布且相互独立的 $X_1,X_2,\ldots X_n$。

对应的值$x_1,x_2,\ldots,x_n$称为样本值，也即总体 X 的 n 个独立观测值

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的分布函数为

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

$X_1,X_2,\ldots X_n$的概率分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

(3)统计量

样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

样本标准差：$S^2=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\ldots$

样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,k=1,2,\ldots$

(4)性质

①如果 EX 存在，

则$EX=E\overline{X}=\mu$

②如果 DX 存在，

则$D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$

则$ES^2=DX=\sigma^2$（见推导）

常常可以推得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=n!$$