1 重要基本定义

随机变量:

样本空间 Ω 上的实数函数 $X = X(\omega), \omega \in \Omega$ 为随机变量

分布函数:

考试大纲定义为 $F(x) = P\{X \boxed{\leq} x\}$，即事件 $X \leq x$ 的概率

注意：分布函数不一定连续

分布函数性质:

- $F(x)$ 是单调非减函数；$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
- $F(x)$ 必定右连续，写 X 取值时，一定要写 $\boxed{* < X \leq **}$
- $P\{x_1 \boxed{<} X \boxed{\leq} x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ *注意：符号不一致要补齐*
- $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$ 重要定义，**推导**时候要用

注意：分布函数和概率密度函数，做题时不要突然就混淆了

连续性随机变量:

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可由非负可积函数 $f(x)$ 积分得到，即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

*注意：连续的 **F(x)** 对应的 X 不一定是连续型随机变量。*

概率密度:

$$(1)\, f(x) \geq 0 \quad (2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$(3) P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

*注意：(1)(2)是 **f(x)** 作为概率密度函数的充要条件*

$(4)\, f(x)$ 连续点有 $F'(x) = f(x)$

2 常用分布

(1) 0—1 分布

随机变量 X 有分布律

X	0	1
P	1-p	p

称 X 服从参数为 p 的 0—1 分布，或称 X 具有 0—1 分布

(2) 二项分布

n 次伯努利实验中，每次成功率为 p，则 n 次独立重复实验中成功的总次数 X 服从二项分布

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

称 X 服从参数为 n，p 的二次分布，记为 $X \sim B(n, p)$

(3) 几何分布

独立的重复一系列伯努利实验，每次成功率为 p，则在第 k 次实验才**首次**成功的概率服从的分布

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$$

则称 X 服从参数为 p 的几何分布，或 X 具有几何分布

(4) 超几何分布

次品抽取数分布

在 N 件产品中有 N_0 件次品，不放回地一次一次取共 n 件（一次抽取 n 件），X 为抽取到的次品数。

$$P\{X = k\} = \frac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$$

注意：分母为总共排列情况个数，分子为次品排列情况个数×正品排列情况个数

(5) 泊松分布

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$

(6) 均匀分布

连续性随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \boxed{\leq} x \boxed{\leq} b \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

记作 $X \sim U[a,b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \boxed{<} x \boxed{<} b \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

记作 $X \sim U(a,b)$

(7) 指数分布

连续性随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

记作 $X \sim E(\lambda)$

(8) 正态分布

随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{(\sqrt{2}\sigma)^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 μ, σ 为常数，且 $\sigma > 0$，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布，记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

若 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 即 $X \sim N(0,1)$ 则称 X 服从标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

对应的标准正态分布函数为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, -\infty < x < +\infty$$

3 性质

泊松定理：二项分布~泊松分布（见推导）

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda$，（$n \geq 100, p \leq 0.1, np$ 不太大）

则 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (\approx) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

指数分布：无记忆性（见推导）

对于 $X \sim E(\lambda)$，则有

$0) P\{X \leq x\} = F(x) = 1 - e^{\lambda x}, x > 0$

$1) P\{X > t\} = e^{-\lambda t}, t > 0$

$2) P\{X > t + s \mid X > s\} = e^{-\lambda t}, t, s > 0$

正态分布：标准化

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则

$1) F(x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad 2) \phi(-x) = 1 - \phi(x), \phi(0) = \frac{1}{2}$

$3) P\{a < X \leq b\} = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

$4) f(x)$ 关于 $x = \mu$ 对称，$\varphi(x)$ 是偶函数

$5)$ 若 $X \sim N(0,1)$，有 $P\{|X| \leq a\} = 2\phi(a) - 1$

4 随机变量函数分布

定义 $Y = g(X)$，则 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$

即 $F_Y(y) = \int_{g(x)\leq y} f_X(x)dx \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y)$

$g(x) \leq y$ 存在无取值、取全部有效范围、取部分有效范围的情况，**划范围的技巧是将中断点带入函数**。