1 数学期望

离散型：$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,3\ldots$

$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望或均值

连续型：随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ 为随机变量 X 的数学期望或均值

基本性质：

$E(k)=k$； $E(kX)=kE(X)$

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

如果 X、Y 不相关，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

1.1 拓展数学期望

(1) 随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

离散型：$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$

连续型：$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

(2) 随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

离散型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$

连续型：$E(Z)=E[g(X,Y)]=\iint_D g(x,y)f(x,y)dxdy$

2 方差

定义：数学期望 $E\{[X-E(x)]^2\}$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 $D(X)$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=E\{[X-E(x)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准方差或均方差

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

基本性质：1) $D(k)=0$； 2) $D(\boxed{a}X+b)=\boxed{a^2}D(X)$

3) 若 X、Y 不相关，则有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

3 常用期望、方差公式(对照 3-2)

(1) 0—1 分布

$E(X)=p$, $D(X)=p(1-p)$

(2) 二项分布 $X\sim B(n,p)$

$E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$

(3) 几何分布 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

$E(X)=\frac{1}{p}$, $D(X)=\frac{1-p}{p^2}$

(4) 超几何分布 $P\{X=k\}=\frac{C_{N_0}^k C_{N-N_0}^{n-k}}{C_N^n}$

$E(X)=n\frac{N_0}{N}$, $D(X)=n\frac{N_0(N-N_0)(N-n)}{N^2(N-1)}$

(5) 泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$

(6) 均匀分布 $X\sim U(a,b)$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

(7) 指数分布 $X\sim E(\lambda)$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

(8) 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$

4 矩、协方差

4.1 矩：

(1) k 阶原点矩 $E(X^k)$

(2) k 阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^k\}$

(3) $k+l$ 阶混合矩 $E(X^kY^l)$

(4) $k+l$ 阶混合中心矩 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

4.2 协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

基本性质：

(1) $\mathrm{Cov}(\boxed{a}X,\boxed{b}Y)=\boxed{ab}\mathrm{Cov}(X,Y)$

(2) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

4.3 相关系数：

若 $D(X)D(Y)\neq 0$ $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

若 $D(X)D(Y)=0$,则 $\rho_{XY}=0$； 若 $\rho_{XY}=0$，则 X、Y 不相关

基本性质：

①$|\rho_{XY}|\leq 1$ ②若 $|\rho_{XY}|=1$,则必有非零线性关系 $Y=aX+b$

注意：二维正态分布随机变量(X,Y)的独立=不相关

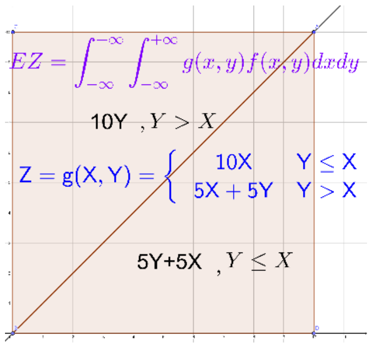
5 要点：

①求方差时尽量使用公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

②求 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望，直接在 x-y 平面上权重积分就行

深入理解随机变量：

- X 随机变量就是一段连续或离散的具有权值的数值分布——***密度不同的一维点集***。X 本身只代表一维点在 x 轴上的位置。
- EX 就是这些点集的质心位置。
- 二维随机变量(X,Y)可以理解为平面上的***密度不同的点云***，其密度函数就是 $f(x,y)$
- 一元随机函数 $Y=g(X)$，则可以认为是一个映射函数，将 x 轴上的点集通过函数扩充到 x-y 平面，然后映射到 y 轴上。
- $EY=E[g(X)]$ 就是映射转移后的点集质心位置。
- 二元随机函数 $Z=g(X,Y)$ 同理，也是一个映射函数，通过两个坐标轴 x 和 y 轴，扩充到三维空间里，然后映射到 z 轴上。



1 独立同分布的组合随机变量期望

(1)正态分布的独立同分布

设随机变量 X、Y 独立同分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 EZ，

$Z=\max(X,Y)$ —— $EZ=\dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}+\mu$

方法一：标准化+$F(x)$-$f(x)$求导法+公式法

①写出标准化的正态分布 $X_1=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，$Y_1=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$

②改写 $Z=\max(X,Y)=\max(\sigma X+\mu,\sigma Y+\mu)$

$=\mu+\sigma\max(X_1,Y_1)$。

③ $P\{Z_1\le z\}=P\{X_1\le z,Y_1\le z\}=\phi(z)^2$，

$f_{z1}(z)=2\phi(z)\varphi(z)$

④利用公式 $E(Z_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot 2\phi(z)\varphi(z)dz$ （展开 $\varphi(z)$）

方法二：**max** 分解法+公式法

① $\max(X,Y)=\dfrac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$；$\min(X,Y)=\dfrac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$

② $EZ=\dfrac{1}{2}(EX+EY+E(|X-Y|))$，$Z_1=X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$

③ $EZ_1=\int\cdots\cdots=\dfrac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$

方法三：公式法

$$EZ=\iint\limits_{\Omega}|x-y|f_X(x)f_Y(y)dxdy$$