1 求收敛域格式

(1) 观察是否需要分类讨论，极限是否存在（不存在也有收敛的情况）

如果不存在，则需要使用夹逼定理。

(2) 写计算通式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \_\_\_\_\_\_\_\_ < 1$$

(3) 求取并写出【收敛半径 R】

(4) 带入边界值，判断边界值是否可以被包含

当 x=左边界值时，原级数为……收敛/发散

当 x=右边界值时，原级数为……收敛/发散

(5) 写出收敛域

所以收敛域为—— $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

2 级数求和

(1) 化幂为函

☆把幂级数公式里面的 $a^n, (\frac{1}{a})^n$ 化为 x^n .

如果幂级数里面没有 x，那就创造一个，然后带入 $x=1$

(2) 写出求和公式 $S(x)$，利用求和公式

$$\sum_{n=a}^{\infty} Cx^n = Cx^a \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

(3) 设法将所给的幂级数系数消去

有 $\frac{1}{n}$ 因子就	求导后积分
有 $n+1$ 因子就	积分后求导

3 敛散性判别法

(1) 正项级数

比值判别法 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1?$

比较判别法 $\lim_{n\to\infty} u_n \xrightarrow{\text{等价无穷小}} z_n$

然后通过判别 z_n 的敛散性就可以推断 u_n 的敛散性

(2) 交错级数

莱布尼兹判别法：提取正项级数 u_n

① $u_{n+1} > u_n$　　② $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

注意：莱布尼兹判别法是充分条件，两个都满足就是收敛的，但是收敛不一定满足条件①。

同样也可以用**比较判别法**来等价无穷小

4 展开为幂级数

(1) 确定是否为可展开的初等函数

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$；　$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$；　$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$；　$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$；　$e^x = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

(2) 计算并写出收敛区间

(3) 变化形式，代入公式

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{f'}(x)dx \quad \therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) + f(0)$$

#注意：如果需要求导，【全部一起求导】和【单个求导】有区别，关键是看求导运算是否耦合，如果耦合则推荐需要求导的求导，如果不耦合，全部一起求导。

例：$f_1(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$　　$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in(-1,1)$

$f_2(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x$　　$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-1,1)$

第一个函数**耦合**，第二个函数**不耦合**

5 求幂级数的和函数

(1) 求【收敛半径 R】

(2) 写出求和公式 $S(x)$ 和【收敛域】 $x \in (\backslash[?,?]\backslash)$

求幂级数的和函数需要对 x 按区间分类讨论

6 傅里叶级数（【展开】）

(1) 辨识 $f(x)$【定义域】$([x_1, x_2])$【周期】

$2l = x_2 - x_1$

(2) 写出傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos\frac{\pi}{l}nxdx\text{；}\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\frac{\pi}{l}nxdx$$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$，$a_n$ 和 b_n 是需要化简的，如果原函数是分段函数，则还需要分段积分

$\cos n\pi = (-1)^n$	$\cos\frac{n\pi}{2} = 0$
$\sin n\pi x = 0$	$\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{n-1}$

(3) 写出级数表达结果，及定义域

$$f(x) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),\quad x \in ([x_1, x_2])$$

(4) 写出级数在原函数边界处的值

其傅里叶级数在 $x = x_0$ 处收敛于 y_0

如果边界值和原函数边界值不同就需要进一步判断

1-7 无穷级数解题例题

1 n 的多项式幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_kn^k)x^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_0x^n+B_1(x^{n+1})'+B_2(x^{n+2})''+\ldots+B_k(x^{n+k})^{(k)}\right]$$

$$=B_0\frac{1}{1-x}+B_1(\frac{x}{1-x})'+B_2(\frac{x^2}{1-x})''+\ldots+B_k(\frac{x^k}{1-x})^{(k)}$$

$$=B_0\frac{0!}{(1-x)^1}+B_1\frac{1!}{(1-x)^2}+B_2\frac{2!}{(1-x)^3}+\ldots+B_k\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

计算过程中也可以择机提取 x，简化过程

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''$$

$$=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{4}{27}=\frac{22}{27}.$$

几个需要记忆后方便计算的求和公式：

以下求和公式需要小心收敛域边界值的失效，需要单独计算

n 的起始值是第一个非零项，做题目时候保证 n 在首项开始

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$,0 项没有意义

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,这个从 0 开始是因为 n=0 时项式不为 0

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$; $\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$,0 项为 0

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2!}{(1-x)^3}$

拓展：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)=x\left(\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

2 多项式分母分式

多项分式比较麻烦，主要思想是**因式分解**，然后**拆分**。若分母为等比求和数列，则可以利用等比求和公式来化简。

例题：

求幂级数 $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

易求得收敛域为$[-1,1]$. 令 $S(x)=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $x\in[-1,1]$,

$x\in(-1,1)$ 时,

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n}\right)dt$$

$$=x^2\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n-2}\right)dt+\int_0^x\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)dt$$

$$=x^2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\arctan x-x$$

$$=x^2\arctan x+\arctan x-x,$$

由的分析性质(3) 的【注】,故 $S(x)=(1+x^2)\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

方法二：分母因式分解，通过直接求导，然后积分

3 分母含阶乘

利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ （$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}=e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ ）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\cos x;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

若分子同时也含有 n 的多项式，则通过对 n 的多项式的**阶乘分解**来化简式子。

例：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$，收敛半径为∞， $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\left(\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)$$

阶层分解：

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

4 傅里叶级数系数计算

(1) **关键公式：** $\cos n\pi=\cos(-n\pi)=(-1)^n$；$\sin n\pi=0$

带 n 次多项式 $P_n(x)$ 的分部积分方法

$$\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$$

$$=P_n(x)\int g(x)dx-P_n'(x)\iint g(x)d^2x+P_n''(x)\iiint g(x)d^3x-\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kP_n^{(k)}(x)\cdot g^{-(k+1)}(x)\Big|_{x_2}^{x_1}$$

(2) **表格法计算多项式原函数展开**

对于 $\int_{x_1}^{x_2}P_n(x)g(x)dx$， $g(x)$ 为 $\cos\frac{n\pi}{l}x$ 或 $\sin\frac{n\pi}{l}x$

$(-1)^k$	1	-1	1	反	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
$d^kP_n(x)/dx$	$P_n(x)$	$P_n'(x)$	$P_n''(x)$	导	$P_n^{(n)}(x)$	0
$\underbrace{\int\ldots\int}_{k-1}g(x)d^{k-1}x$	$g(x)$	$\int g(x)dx$	$\iint g(x)d^2x$	积	$g^{-k}(x)$	$g^{-(k+1)}(x)$

交叉相乘