1 重要定义

(1)线性无关定义

对于向量 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$，存在不全为零的数 $k_1,k_2,...,k_s$

使 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+...+k_s\boldsymbol{\alpha_s}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

(2)线性无关性质（每个都要会用来证明）

$\Leftrightarrow$ ①n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ ②齐次方程的 $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ ③秩 $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s})=s$

2 施密特正交化（正交规范化）

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1 \qquad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\\ \gamma_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\\ \gamma_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\end{cases}$$

3 坐标变换公式

基底过渡关系：$[\boldsymbol{\alpha_1}\quad \boldsymbol{\alpha_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\beta_1}\quad \boldsymbol{\beta_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta_n}]$

C 称为由基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 的过度矩阵

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{x}$

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 上的坐标为 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}\boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\gamma}=[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}\end{matrix}\quad \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}$$

#弄清楚 x 和 y 是哪个基底上的坐标

绝对坐标是 $[\boldsymbol{\alpha_1}\quad \boldsymbol{\alpha_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\beta_1}\quad \boldsymbol{\beta_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}$

$[\boldsymbol{\beta_1}\quad \boldsymbol{\beta_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta_n}]\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad \boldsymbol{\alpha_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boxed{\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad \boldsymbol{\alpha_2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boxed{\boldsymbol{x}}$

4 证明线性无关

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关

4.1 定义法

(1)设 $k_1\boldsymbol{\beta_1}+k_2\boldsymbol{\beta_2}+...+k_n\boldsymbol{\beta_n}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{Bk}=\boldsymbol{0}$

然后化简，与已知条件 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关联立

若 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{k}$ 只有零解

(2)写出组合系数行列式

若行列式的值不为零，则只有零解

4.2 用秩

(1)写出 $[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{P}$

求出 $\boldsymbol{P}$，并写出 $\det(\boldsymbol{P})$

(2) $r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n})=r(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...,\boldsymbol{\beta_n})$

从而线性无关（有关）

5 线性表达=解方程组

已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}$ 表达

(1)列出 $(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_s}\mid\boldsymbol{\beta})$，作初等行变换

(2)将左侧化为三角矩阵，可根据右侧写出解

6 极大线性无关组

求极大线性无关组的时候只能对列向量们做初等行变换

化为阶梯形矩阵就可以了

7 解非齐次方程组

(1)方程组写为列向量矩阵形式 $\mathbf{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

(2)判断解的形式

无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 无法由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出

无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r<n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法不唯一

唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=n$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表出，表出法唯一

注意：如果题目中的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 存在未知量，则要小心各个情况的可能性。

注意：齐次线性方程组的基础解系有 $n-r$ 个，n 是矩阵的列数

(3)求基础解系 ξ_i 和特解 $\boldsymbol{\eta}$

注意：可以用子式判断最小阶数

将增广矩阵 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 进行初等行变换，化为阶梯形矩阵

求出特解 $\boldsymbol{\eta}$ ——特解只有一个或没有（无解）

求出基础解系 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...,\boldsymbol{\xi_{n-r}}$（基础解系有 $n-r$ 个）

基础解系的寻找技巧

$n-r$ 个基础解系的末位 $n-r$ 个为 $n-r$ 阶单位矩阵，如

$$\begin{aligned}\xi_1&=[d_{11},d_{12},...,d_{1r},\quad 1\quad 0\quad ...0]^T\\ \xi_2&=[d_{21},d_{22},...,d_{2r},\quad 0\quad 1\quad ...0]^T\\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots\\ \xi_{n-r}&=[..........,d_{n-rr},\quad 0\quad 0\quad ...1]^T\end{aligned}$$

(3)求出唯一解

(4)写出结果表达式

通解为 $\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}+...+k_{n-r}\boldsymbol{\xi_{n-r}}$

注意：虽有无穷个解向量，但只有 $n-r+1$ 个线性无关解向量

注意：求具体解的时候一定要用行变换，但是方阵求是否有解的时候可以用求秩的方法来计算。

8 克拉默法则（特殊方阵）

对于非齐次线性方程 $\mathbf{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{A}$ **满秩**，则方程解**唯一**

$x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}, i=1,2,\dots,n.$，其中 $|\boldsymbol{A_i}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列替换为右端常数项 $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}^T$. 所构成的行列式。

##会用，知道就行了，一般别用，计算 $|\boldsymbol{A}_i|$ 要累死。

9 同解问题

$\boldsymbol{A_1x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A_2x}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 行向量等价

本质就是两个矩阵方程可以**相互**线性表示

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 同解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2$ 行向量等价

(1)后一个方程是前一个方程的子集

后一个方程的解是前一个方程的解，

但前一个方程的解不是后一个方程的解

$\boldsymbol{A}_1$	可由 $\boldsymbol{A}_2$	行向量表示
$\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1$	可由 $\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2$	行向量表示

(2)两个方程同解

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{A}_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\text{且}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{A}_2}\end{pmatrix}$$

即组合后降阶一半。

若前式能降阶一半而后式不能降阶一半，则前一个方程的解范围更小，被含于后一个方程的解集中。

注意：仅仅证明 $r(\boldsymbol{A}_1\,|\,\boldsymbol{b}_1)=r(\boldsymbol{A}_2\,|\,\boldsymbol{b}_2)$ 是不够的，如：

$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的解是空间中的一条直线 $r_1=2$ 或面 $r_1=1$

$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的解也是空间中的一条直线 $r_2=2$ 或面 $r_2=1$

但这两条直线不一定是同一直线

必须要两者都能相互表示，才是同一个解。

10 秩的不等式判断

(1)准则

①$r(\boldsymbol{B}_{m\times n})\le\min\{m,n\}$

②$r(\boldsymbol{BC})\le\min\{r(\boldsymbol{B}),r(\boldsymbol{C})\}$

③$r(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\le r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})$

(2)其他常用性质

①若 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$

②$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\le r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

③$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$