1 基本-坐标变换

(1)极坐标

$$\iint_{round} f(x,y)dS=\int d\theta\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho$$

(2)球坐标

$$\iint f(x,y,z)dS=\int d\theta\int f(x,y,z)\cdot rd\varphi$$

$$\iiint_{sphere} f(x,y,z)dV=\int d\theta\int sin\varphi d\varphi\int f(x,y,z)\cdot r^2dr$$

(3)柱坐标

$$\iiint_{pillar} f(x,y,z)dV=\int d\theta\int\rho d\rho\int f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)dz$$

2 弧长线积分

(1)参数法 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta\\z=z(t)\end{cases}$

$$\int f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

空间曲线对应 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt$

(2)直角坐标法

$$\int f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x),z(x))\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx$$

其中 a 为起点， b 为终点

(3)极坐标法(二维)

$$\int f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)cos\theta,\rho(\theta)sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

3 坐标线积分（空间）

(1)计算方法①——参数法

$$\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$\int_\alpha^\beta\left[P(x,y,z)x'(t)+Q(x,y,z)y'(t)+R(x,y,z)z'(t)\right]dt$$

x， y， z 由参数 t 函数形式描述（没有回头线）

补充——如何写出参数方程

按给定显函数选择投影平面 $\begin{cases}x=x(y,z)\\y=y(x,z)\\z=z(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\square yOz\\\square xOz\\\square xOy\end{cases}$

①写出两个坐标，先投影到上述平面上，如平面 xOy

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\quad\alpha\le t\le\beta$$

②写出第三坐标， $z=z(t)$ $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}\begin{cases}dx=x_t'(t)dt\\dy=y_t'(t)dt\\dz=z_t'(t)dt\end{cases}$

(2)计算方法②——格林公式、斯托克斯公式

①L 是 D 的正向边界曲线（D 始终在 L 前行方向的左侧）

②P， Q 必须在 D 上处处有一阶连续偏导

#注意：格林公式中间的运算符号是负号，当两者相等时，闭环积分恒等于零

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

斯托克斯公式 $di\cdot dj$ 投影到 dS

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

利用斯托克斯计算后，会出现 $dydz$， $dxdz$， $dxdy$ 这样的坐标平方微分子，可以逆运用直接投影法，将对于平面的积分变为**面微分** dS， 如果空间曲线全部位于一个空间平面上，那么可以改写

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}dS$$

其中，(α,β,γ) 是该平面的单位法向量，

#注意：朝向为曲线右手螺旋方向

(3)计算方法③——直接替换法（空间）

若存在显函数 $z=z(x,y)$， 则 $\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=$

$\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz(x,y)$， P,Q,R 中的 z 也替换

消去一个维度。

(4)计算方法④——等价四条件

单连通区域内成立:

①线积分 $\int Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow$

②C 为 D 区域中任一光滑闭曲线 $\oint_C Pdx+Qdy=0$ $\Leftrightarrow$

③类似无旋流动条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)\in D$ $\Leftrightarrow$

④微分原函数 $\exists F(x,y)$ 使 $P(x,y)dx+Q(x,y)=dF(x,y)$

复连通域：路径无关条件（一个洞的情况下）

① $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

②在包含“洞”的区域内，至少存在一条闭曲线 Γ 使得

$\int Pdx+Qdy=0$ 成立

解题思路	
I 观察是否封闭	**II 积分函数是否路径无关**

概要	封闭	路径有关	【格林公式】
		路径	【原函数】或【分段积分】
	不封闭	无关	【补线】或【直接法】
		路径有关	【补线】+【原函数】

1 二者联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$\iint_{\Sigma} \left[Pcos(\mathbf{n}, \mathbf{yOz}) + Qcos(\mathbf{n}, \mathbf{xOz}) + Rcos(\mathbf{n}, \mathbf{xOy}) \right] dS$$

进一步联系：对于封闭曲面，$\mathbf{n}$ 为任意曲面外法线向量

$$\iint_{\Sigma闭} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$$

$$= \iint_{\Sigma闭} \left[\frac{\partial f}{\partial x} cos(\mathbf{n}, \mathbf{yOz}) + \frac{\partial f}{\partial y} cos(\mathbf{n}, \mathbf{xOz}) + \frac{\partial f}{\partial z} cos(\mathbf{n}, \mathbf{xOy}) \right] dS$$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial x} dydz + \frac{\partial f}{\partial y} dxdz + \frac{\partial f}{\partial z} dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dV$$

2 对面积的面积分

(1)形式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

(2)计算方法①

关注【对称奇偶性】√

(3)计算方法②

如果找不到关于坐标面对称的，但是存在一个类似的对称平面，那么可以

$$\iint f(x-x_0, y-y_0, z-z_0)dS = 0 \Rightarrow$$

$$\iint \left[f(x,y,z) - g(x,y,z) \right] dS \Rightarrow$$

$$\iint f(x,y,z)dS = \iint g(x,y,z)dS$$

(4)计算方法③

直接投影法

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

3 对坐标的面积分

(1)形式

$$\iint_{\Sigma} Pdzdy + Qdxdz + Rdxdy$$

(2)计算方法①——直接法

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy}$$

$$\begin{cases} I_{yz} = \pm \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz \text{ , } \# x = x(y,z) \\ I_{xz} = \pm \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz \text{ , } \# y = y(x,z) \\ I_{xy} = \pm \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy \text{ , } \# z = z(x,y) \end{cases}$$

注意：正负号由【曲面的法向量】和【对应坐标轴正方向】决定，夹角为锐角则为正！

【过程详解】：

①消去第三坐标，利用投影法，将 **Sigma** 投影到各个微分平面上，（第三坐标—>第一第二坐标）

②化简，观察对称奇偶性，能消就消。（奇偶性要注意符号，有些曲面分正负两部分）

③计算，然后求和。

通过 $z = z(x,y)$ 画出积分曲面的草图

注意：对称相消只存在于区域对称且关于对称坐标为奇函数

即：对称面自带关于第三坐标的奇特性。

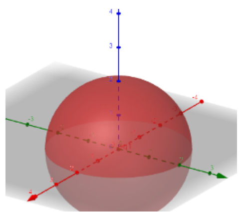
关系式可以关于面 xy、面 xz、面 yz 对称，关键就是观察是否可以替换 z、y、x 符号。如下

$$yOz \Rightarrow f(\dot{x}, y, z), \forall x \to \pm x$$

$$zOx \Rightarrow f(x, \dot{y}, z), \forall y \to \pm y$$

$$xOy \Rightarrow f(x, y, \dot{z}), \forall z \to \pm z$$

例：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上半部分上侧



$$\iint x^2 dydz \xrightarrow{Oyz} 0$$

$$\iint y^2 dydz \xrightarrow{Oxz} \iint y^2 dydz = 0$$

$$\iint ydydz \xrightarrow[Oxz]{Oyz} \iint x^0 ydydz = 0$$

(3)计算方法②——（封闭曲面）高斯

对于封闭曲面，使用高斯方法(符号中的左式积分为封闭积分)

封闭曲线内存在函数奇点则不能使用高斯法

注意：这里的 Σ 默认是外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

(4)计算方法③

补面，然后高斯

注意：补面需要写出补充的面方程

1-6-3 场论

1 方向导数

计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\vec{\nabla} f \frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\vec{\nabla} f \cdot \vec{e}$$

#注意：方向导数是标量

2 梯度

函数 $f(x,y,z)$ 在空间坐标系（或平面坐标系）中，在 P 点时方向导数取最大值对应的方向向量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，就是梯度

$$|\boldsymbol{A}(x,y,z)|=max\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\}=\left|\vec{\nabla} f\right|$$

梯度是向量

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{grad}\, f(x,y,z)=\vec{\nabla} f(x,y,z)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

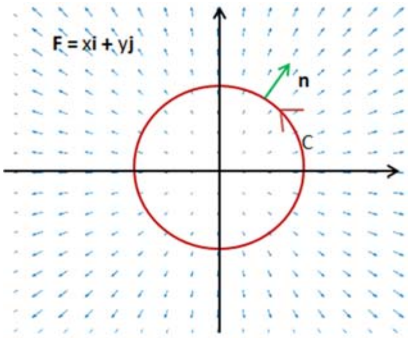
注意：梯度处理的对象不是场，而是一个标量函数

3 通量

(1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【有向曲面一侧】的对 $\boldsymbol{u}$ 的面积分为通量



(2)计算

$$\Phi=\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

注意: 通量是标量!

4 环量

(1)定义

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

场中某一【封闭有向曲线 l】的沿一定方向对 $\boldsymbol{u}$ 的积分

#l 围成的区域为 D

(2)计算公式

$$\Gamma=\oint_{\partial D}\vec{u}\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial D} Pdx+Qdy+Rdz$$

注意: 环量为标量

5 散度

(1)定义及条件

向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

P,Q,R 都有一阶连续偏导，各方向取导然后求和就是散度

(2)计算公式

散度类似于向量点乘哈密顿算子

$$div\,\vec{\mathbf{u}}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{u}}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

注意: 散度是标量

6 旋度

(1)计算公式

$$\boldsymbol{rot}\,\vec{\mathbf{u}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

注意: 旋度是向量

7 质心、转动惯量

(1)质心内容

略

(2)转动惯量

定义:

所谓转动惯量，就是 $f(x,y,z)$ 的密度乘以该点到转动轴的距离的平方的积分

公式

$$l: ax+by+cz+d=0$$

$$|D|^2=\left(\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2=\frac{(ax+by+cz+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

点到直线距离平方公式

通量	Φ	$\int$ 向量场·面法向量 $\to$	标量
梯度	$\vec{\nabla} f(x,y,z)$	标量 $\to$	向量
环量	$\oint_{\partial D}\vec{u}\cdot d\vec{r}$	$\int$ 向量场·线切向量 $\to$	标量
旋度	$\boldsymbol{rot}\,\vec{\mathbf{u}}$	向量交叉求导行列式 $\to$	向量
散度	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{u}}$	$\vec{\nabla}$ 向量场 $\to$	标量