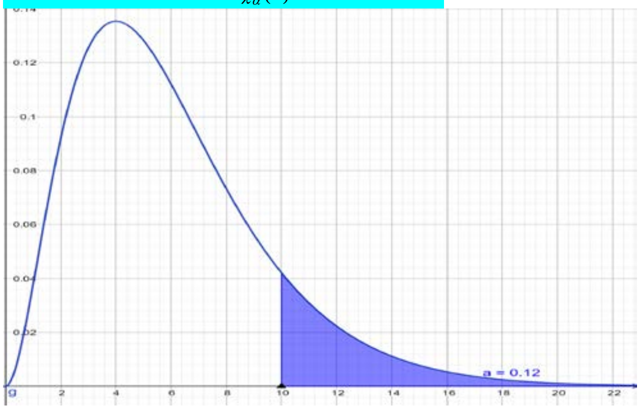
1 χ^2 分布

随机变量 $X_1, X_2, \dots X_n$ 相互独立且服从正态分布 $N(0,1)$，称随机变量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 $\boxed{n}$ 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$。

(1)上分位点

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$



(2)性质

①$E(\chi^2) = n$；$D(\chi^2) = 2n$

②若 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，两者相互独立，则

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

2 t 分布

设随机变量 X 和 Y 独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$

则称随机变量 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T \sim t(n)$

(1)上分位点

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

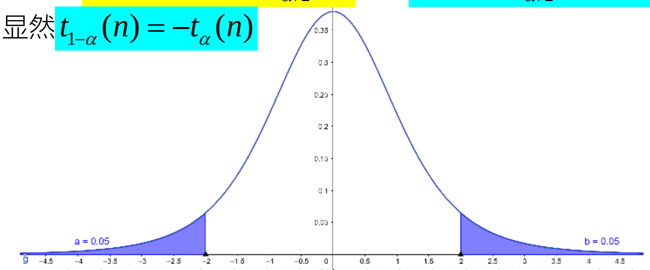
(2)性质

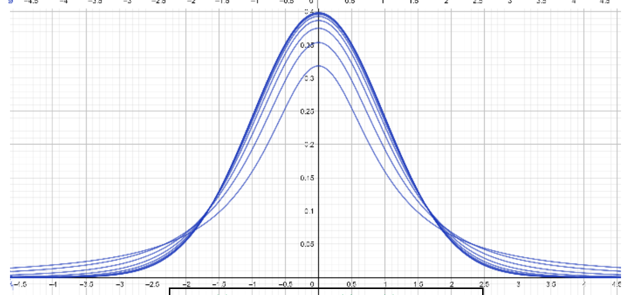
①是偶函数

②当 n 充分大时，$t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布

③具有双侧对称分位点 $t_{\alpha/2}(n)$，即 $P\{|T| > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$

显然 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$





里面的是 n=1，最外面的是 n=128

3 F 分布

设随机变量相互独立，$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，则称随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 $\boxed{(n_1, n_2)}$ 的 F 分布

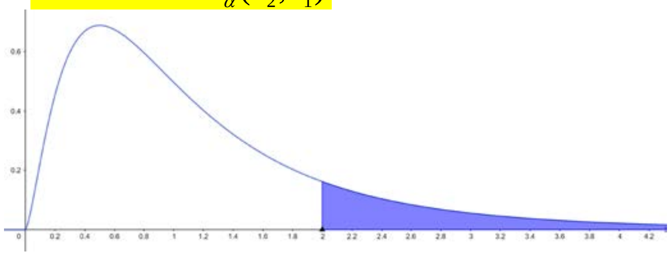
(1)上分位点

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

(2)性质

①$F \sim F(\boxed{n_1, n_2})$；$\dfrac{1}{F} \sim F(\boxed{n_2, n_1})$

②$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$ ③$P\{F \ge 1\} = P\{F \le 1\} = \dfrac{1}{2}$



4 正态总体抽样分布

①设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \dots X_n$ 是来自总体的样本

$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 是样本方差

②设总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$，$Y_1, Y_2, \dots Y_n$ 是来自总体的样本

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$X_1, X_2, \dots X_n$ 是来自总体的样本

(1)均值与方差

①$\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ （见证明）

②$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$，$U = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

（见证明）

(2)其他

①$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ （见证明）

②$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ （见证明）

③$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ （见证明）

④$F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ （见证明）

⑤如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，那么

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ （见证明）

⑥$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立(只针对正态分布)