# 重要公式及定义

**特征向量：**

**相似定义：**、是任意 阶矩阵

存在可逆矩阵，使得，则相似于

若，且为对角阵，则称是的相似标准型。

其中，就是由特征值构成的对应的特征向量矩阵

**二次型矩阵定义：**为**对称矩阵** *遇到字母题目要注意*



**合同定义：**、是任意 阶矩阵，

存在可逆矩阵，使得，则合同于。

二次标准型：为主对角矩阵

二次规范性：为元素只有的主对角矩阵

# 重要性质

*  特征值相加=主对角线之和
*  特征值相乘=行列式
* 基础解系是对应的线性无关特征向量

若，则至少是的重特征值。

**定理3**：矩阵的特征值为，特征向量为

 矩阵的特征值为，特征向量为

、、（勿引入其他矩阵）

**相似对角化判断条件**

**定理1**：有个**互不相同**的特征值

阶矩阵可对角化有个线性无关的特征向量

**定理2**：的重特征值对应**线性无关特征向量**为个阶矩阵可对角化

**实对称矩阵性质：**

**定理4**：**实对称矩阵**不同特征值对应的特征向量必**正交**

**定理5**：**实对称矩阵必定**可正交变换为**对角阵**，即，其中为正交阵，（单位化）

**二次型矩阵的性质：** 

**定理6**：对于任意阶实对称矩阵，必存在**正交阵,**使

**定理7**：可逆线性变换不唯一，标准型也不唯一，但标准型的、由实对称矩阵唯一确定。

**正平方项**的项数为正惯性指数；**负平方项**的项数为负惯性指数；为秩；为符号差。

若，则称为正定矩阵

**定理8**：若正定，则

**正定矩阵判断条件**

**定理9**：正定的全部特征值，可逆的全部顺序主子式大于零

若和相似，那么

正交矩阵的行列式为或

注意：非零特征根的数量不能判断矩阵的秩

# 解题的进阶方法

对于矩阵，求可逆矩阵，使得为对角矩阵——相似化问题

① 计算所有（求特征根）

②求特征向量



解得

③

特别说明，这里不用规范化，规范化是求标准型的，不要搞混了！

# 求特征值和特征向量过程

#### 写出展开计算行列式

#### 带入不同的

带入到矩阵，求取

当=时，，得;

直接写解得 按顺序列出求取的 化为矩阵形式。所以

***#注意：求取的特征向量不唯一，而是一个特征向量空间***

***$技巧：①计算三阶的******时，代入r重化简后得到n-r阶矩阵***

***需求出r个线性无关的解;***

***$技巧：②可以直接舍去一行（仅对于二、三阶）***

# 求解或

## 矩阵相似化

#### 计算特征向量矩阵

，求出及，得出特征向量矩阵

#### 幂级数展开，特征矩阵求逆

；

#### 得到或

*注意：如特征向量矩阵不可逆，则按照之前矩阵章节计算特殊方阵的幂的方法求解*

## 线性表出法（快速求解第二类）

#### 计算特征向量矩阵（方法相同）

，求出及，得出特征向量矩阵

#### 由线性表出

#### 展开幂级数



# 正交变换二次型（特征法）

#### 表示出并求解的特征值和特征向量

这里的特征向量用来表示

*注意：求解特征值时，根据主对角线和等于特征值之和来****验算***

*注意：求解次要重根时可以预先****正交化***

#### 重根Schmidt正交化、所有根规范化

这里的正交化用来表示，规范化用来表示

利用不同特征值对应的的特征向量正交来验算**所有**重根；

*注意：不要忘记规范化，解出正交阵*

#### 写出对角阵（标准型）

答案规范：令，则

 要写全。***一定要验算 ！***

# 配方法变换二次型

对于矩阵，利用

*注意：这个步骤是草稿纸上的，试卷上要写出配方形式*

每一个都是**一次**初等变换矩阵，按高斯消元法化简。

答案规范：



令（求逆得到），即，

*注意，结果必须可逆，主对角元素不可为零（其实自己方法必定可逆）*