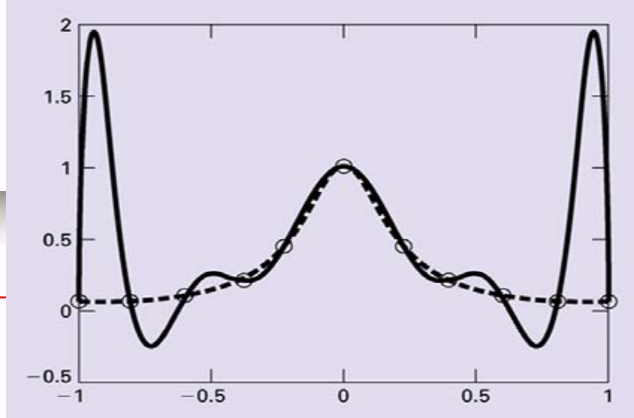
18장 스플라인과 소구간별 보간법

18.1 스플라인 보간법의 소개
18.2 선형 스플라인
18.3 2차 스플라인
18.4 3차 스플라인
18.5 MATLAB에서의 소구간별 보간법
18.6 다차원 보간법

18.1 스플라인 보간법의 소개



- 고차 다항식 보간법

  → 반올림오차와 진동현상으로 인해 틀린 결과를 초래한다.

  (data점 수의 증가 시 고차 다항식 도입의 문제점)

- 해결 방법: 데이터 점들의 부분집합에서 저차의 다항식을 소구간별로 적용하는 것

⇒ 이런 방법으로 연결되는 다항식을 "*스플라인 함수*"라고 부른다.

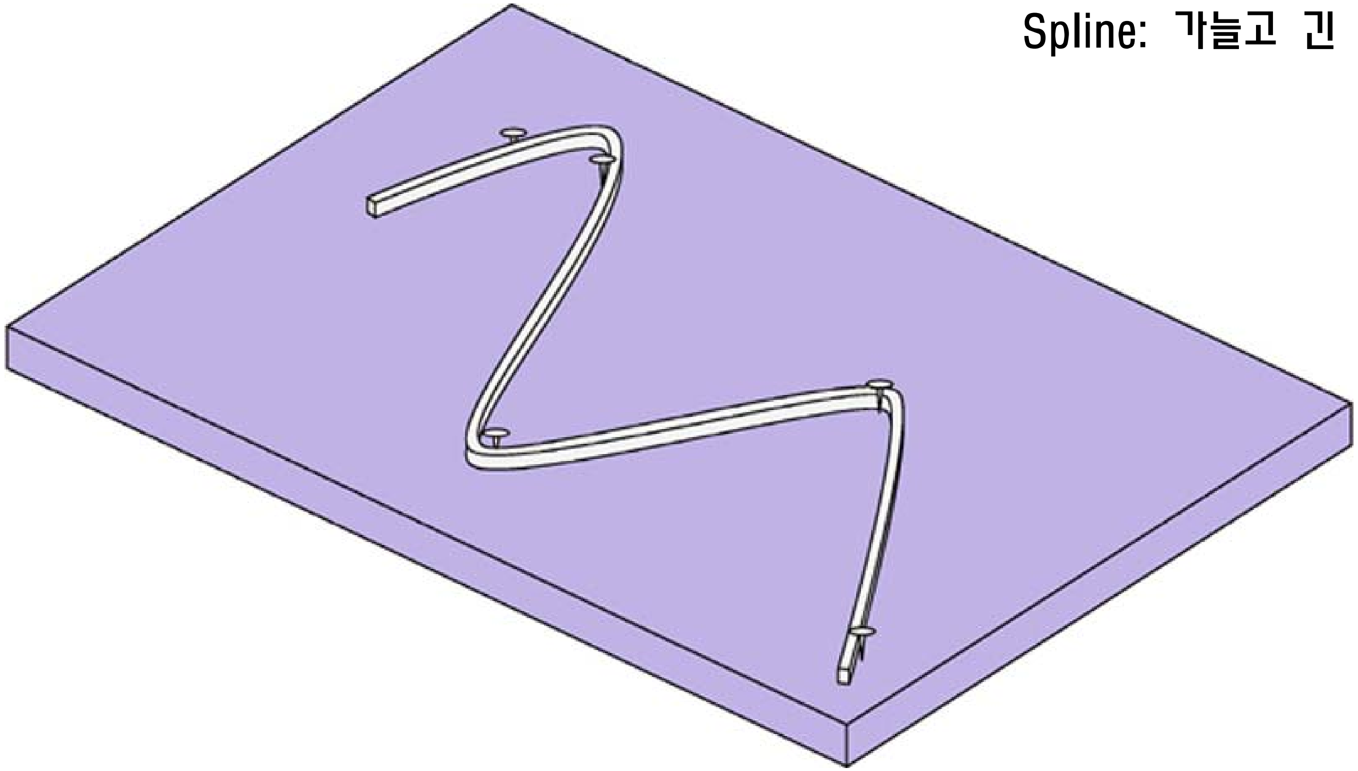
- *3차 스플라인*: 두 개의 데이터 점을 연결하는 곡선이 3차인 경우

- 시각적으로 매끄럽게 처리

- 부분적으로 급격한 변화가 있는 구간에서 우수한 근사를 제공

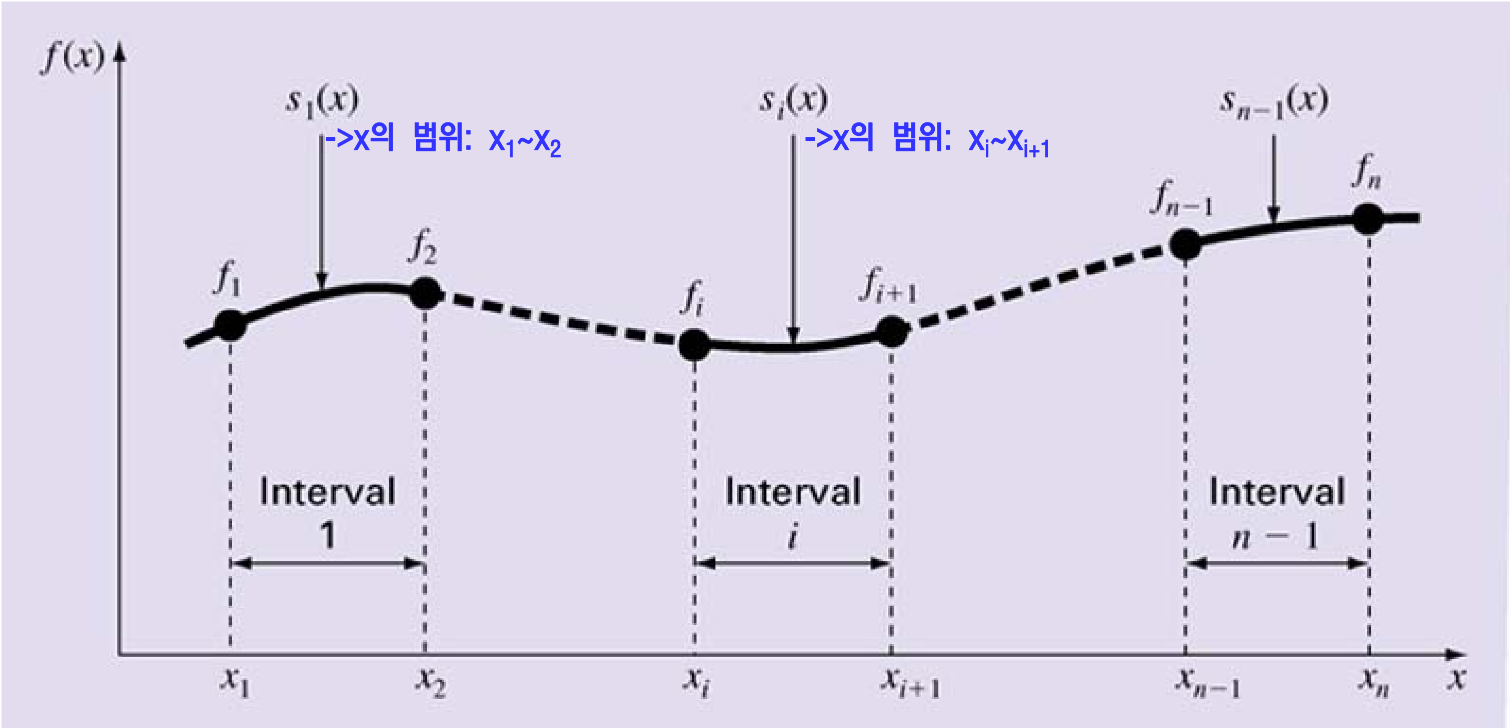
18.1 스플라인 보간법의 소개

Spline: 가늘고 긴 박판



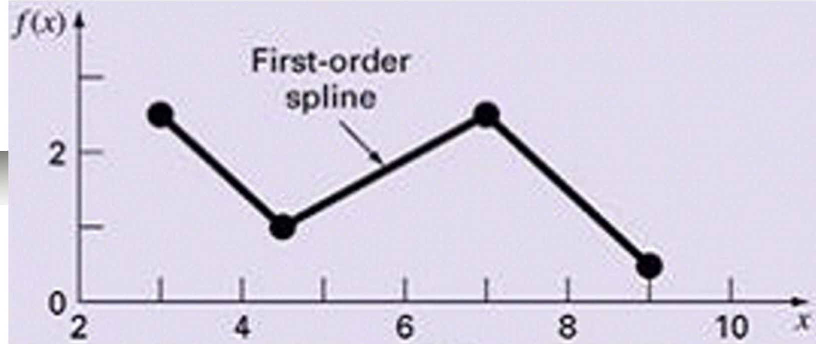
제도에서 일련의 점들을 통과하는 완만한 곡선을 그리기 위해 스플라인을 사용

18.2 선형 스플라인



f(x)
s1(x)
->x의 범위: x1~x2
si(x)
->x의 범위: xi~xi+1
sn−1(x)
f1
f2
fi
fi+1
fn−1
fn
Interval
1
Interval
i
Interval
n − 1
x1
x2
xi
xi+1
xn−1
xn
x

18.2 선형 스플라인



- 1차 스플라인의 단점은 직선이므로, 절점에서 기울기가 급격히 변한다.

  ← 1차 도함수가 불연속

- 절점에서 매끄럽게 하기 위해 고차 스플라인이 요구된다. 1차로는 부족.

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

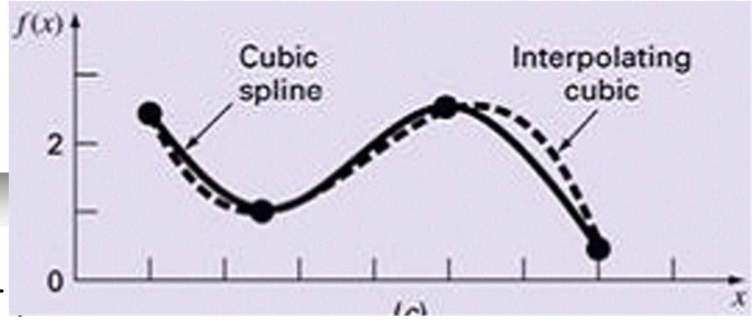
1차 스플라인을 한번 미분한
1차 도함수는 상수이므로
인접 구간 연결 점에서 기울기 상수가 다름 -> 불연속

18.3 2차 스플라인 (1/4)

- 2차 다항식
  - 실제적으로 크게 중요하지 않음
  - 고차 스플라인을 전개하는 일반적인 방법을 제시하는데 적합

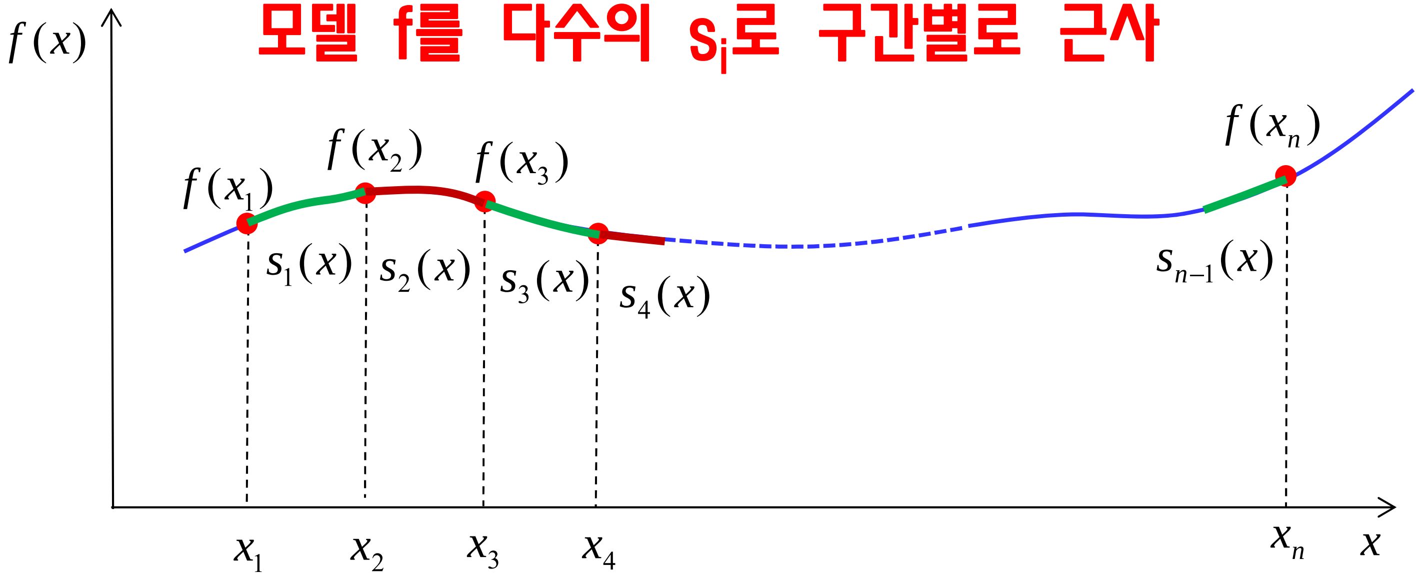
$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

18.4 3차 스플라인 (1/9)



- 가장 많이 사용되는 방법이다.
- 4차 이상의 고차 스플라인은 내재된 불안정성으로 사용되지 않는다.

18.4 3차 스플라인 (2/9)



$s_1(x):\ (x_1, f(x_1))$ 통과
$s_2(x):\ (x_2, f(x_2))$ 통과
$s_3(x):\ (x_3, f(x_3))$ 통과
....

$s_1(x)$의 끝 점 $=$ $s_2(x)$의 시작점
$s_2(x)$의 끝 점 $=$ $s_3(x)$의 시작점
$s_3(x)$의 끝 점 $=$ $s_4(x)$의 시작점
....

구간 끝에서의 $s_1'(x)$ = 구간 시작점의 $s_2'(x)$
구간 끝에서의 $s_2'(x)$ = 구간 시작점의 $s_3'(x)$
구간 끝에서의 $s_3(x)$ = 구간 시작점의 $s_4(x)$
....

①측정점(시작점) 통과 조건

②인접 스플라인 연결 조건

③부드럽게 연결 조건

18.4 3차 스플라인 (3/9)

① *연속조건:* 함수는 모든 점을 지나야 한다.

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad \longrightarrow \quad a_i = f_i$$

$$\therefore \quad s_i(x) = f_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad (18.12)$$

$s_i(x)$에서 x의 범위: x_i~x_{i+1}(구간 시작 점은 x_i이고 x에 이 점을 대입하면 f_i)

18.4 3차 스플라인 (4/9)

③ 내부 절점에서 1차 도함수는 같아야 한다.

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \quad (18.14)$$

내부 절점 (i + 1)에 대해

$$\boxed{b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2} = \boxed{b_{i+1}} \quad (18.15)$$

앞 구간 끝점에서의 기울기 뒤 구간 시작점에서의 기울기

④ 내부 절점에서 2차 도함수도 같아야 한다.

$$s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \quad (18.16)$$

내부 절점 (i + 1)에 대해 $c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}$

$$\rightarrow \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad (18.18)$$

➔ 이상의 수식들에서 c변수를 제외한 모든 다른 변수를 제거함

18.4 3차 스플라인 (5/9)

식 (18.18)을 식 (18.13)에 대입하면

$$f_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) = f_{i+1} \qquad (18.19)$$

$$\rightarrow \quad b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \qquad (18.21)$$

식 (18.21)의 지수에서 1을 빼면

$$b_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \qquad (18.22)$$

식 (18.18)을 식(18.15)에 대입하면

$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1})$ 이 식의 지수에서 1을 빼면

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \qquad (18.23)$$

식 (18.21)과 (18.22)를 식 (18.23)에 대입하면

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 3\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (18.24)$$

18.4 3차 스플라인 (6/9)

유한제차분 $f[x_i, x_j] = \dfrac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$ 을 정의하면, 식 (18.24)는

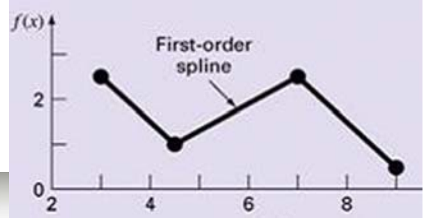
$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}]) \tag{18.25}$$

$$\boxed{h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])}$$

위 식을 풀어서 적어보면

$$\begin{cases} h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]), & \Leftarrow i = 2 \\ h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3 c_4 = 3(f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]), & \Leftarrow i = 3 \\ \cdots \\ h_{n-3} c_{n-3} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})c_{n-2} + h_{n-2} c_{n-1} = 3(f[x_{n-1}, x_{n-2}] - f[x_{n-2}, x_{n-3}]), & \Leftarrow i = n-2 \end{cases}$$

예제 18.3 (자연 3차 스플라인) (1/2)



Q. 예제 18.1의 4점을 3차 스플라인으로 접합하고,
x = 5에서의 함수값을 추정하라.

풀이)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ 3(f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3,	$f_1 = 2.5$
4.5,	$f_2 = 1.0$
7,	$f_3 = 2.5$
9,	$f_4 = 0.5$

$$h_1 = 4.5 - 3.0 = 1.5$$
$$h_2 = 7.0 - 4.5 = 2.5$$
$$h_3 = 9.0 - 7.0 = 2.0$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1.0 - 2.5}{1.5} = -1,$$
$$f[x_3, x_2] = \frac{2.5 - 1.0}{2.5} = 0.6, \quad \ldots$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1.5 & 8 & 2.5 & \\ & 2.5 & 9 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4.8 \\ -4.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad c_2 = 0.839543726$$
$$c_3 = -0.766539924 \qquad c_4 = 0$$

예제 18.3 (자연 3차 스플라인) (2/2)

식 (18.21)과 (18.18)에 의해,

$$b_1 = -1.419771863 \qquad d_1 = 0.839543726$$

$$b_2 = -0.160456274 \qquad d_2 = -0.214144487$$

$$b_3 = 0.022053232 \qquad d_3 = 0.127756654$$

$$s_1(x) = \underbrace{2.5}_{a_1=f_1} - \underbrace{1.419771863}_{b_1}(x-3) + \underbrace{0.839543726}_{d_1}(x-3)^3$$

$$s_2(x) = \underbrace{1.0}_{a_2=f_2} - \underbrace{0.160456274}_{b_2}(x-4.5) + \underbrace{0.839543726}_{c_2}(x-4.5)^2$$

$$\Rightarrow \qquad - \underbrace{0.214144487}_{d_2}(x-4.5)^3$$

$$s_3(x) = 2.5 + 0.022053232(x-7.0) - 0.766539924(x-7.0)^2$$

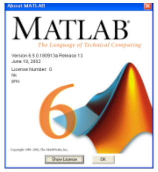
$$+ 0.127756654(x-7.0)^3$$

$$\Rightarrow \quad s_2(x) = 1.0 - 0.160456274(5-4.5) + 0.839543726(5-4.5)^2 - 0.214144487(5-4.5)^3$$

$$= 1.102889734$$

<u>그림 18.4 (c) 참조</u>

18.5 MATLAB에서의 소구간별 보간법 (1/2)



MATLAB 함수: spline

```
yy = spline(x, y, xx)
```

x 와 y = 보간하고자 하는 data 값을 포함하는 벡터
yy: xx 벡터로 주어지는 점에서 계산되는 스플라인 결과를 포함하는 벡터

예제 18.4 (MATLAB 에서의 스플라인) (1/3)

Q. Runge 함수는 다항식으로 잘 접합이 안 되는 함수로 알려져 있다.

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

MATLAB을 사용하여 구간 [-1, 1]에서 이 함수로부터 구한 9개의 등간격 데이터 점을 접합시켜라.

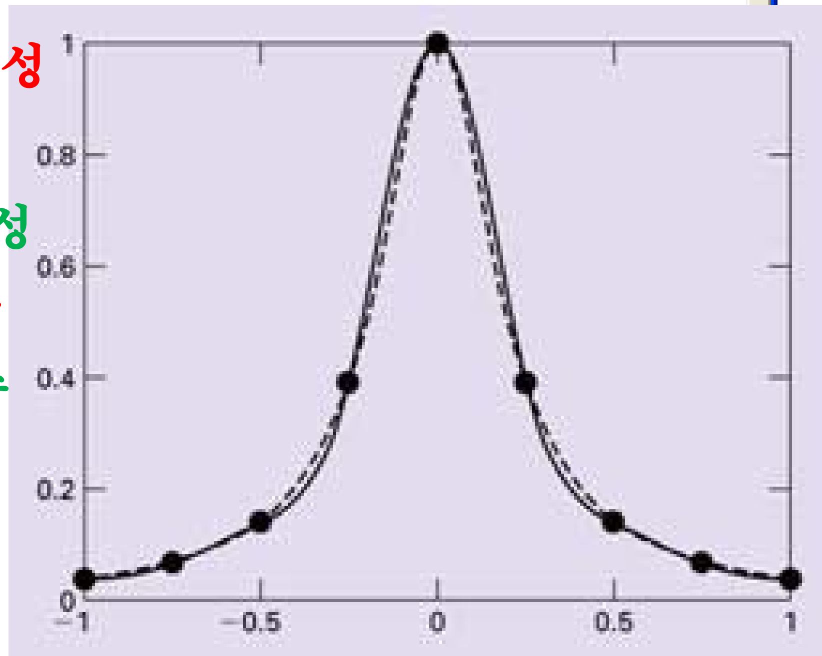
예제 18.4 (MATLAB 에서의 스플라인) (2/3)

Untitled

File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help

(a)

```
>> x = linspace(-1,1,9);  # 9점 x 생성
>> y = 1./(1+25*x.^2); # 9점 y 계산
>> xx = linspace(-1,1); # test점 생성
>> yy = spline(x,y,xx); #spline보간
>> yr = 1./(1+25*xx.^2); #real 함수
>> plot(x,y,'o',xx,yy,xx,yr,'--')
```



Runge 함수(점선)와 MATLAB 으로 생성한
비절점 스플라인 접합(실선)의 비교

Ready

18.6 다차원 보간(1/3)

1차원 문제에 대한 보간법은 다차원으로 확장할 수 있다.

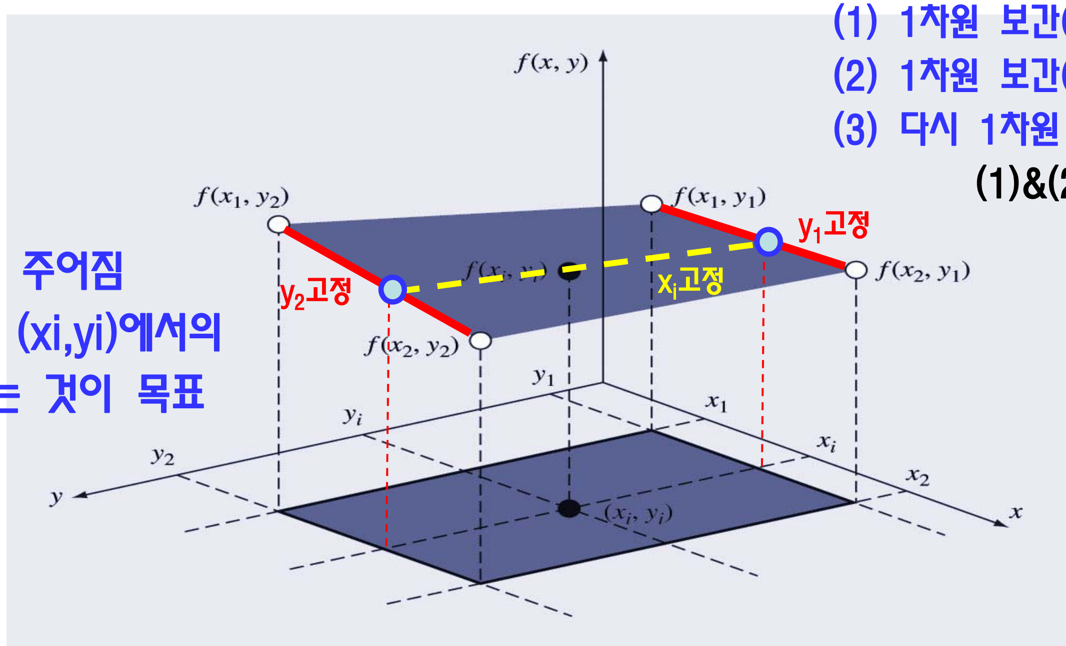
■ 이중선형보간법

- 2차원 보간법은 두 변수의 함수인 $z=f(x_i,y_i)$의 중간값을 결정하는 방법을 다룬다.

목표: (xi, yi) 보간 값을 얻는 것

(1) 1차원 보간(y1 고정) -> f(xi, y1)을 얻음
(2) 1차원 보간(y2 고정) -> f(xi, y2)을 얻음
(3) 다시 1차원 보간(xi 고정) ->
(1)&(2)결과 이용하여 f(xi,yi)을 계산.

4개의 data점이 주어짐
→ 보간을 통해 (xi,yi)에서의 z값을 구하는 것이 목표



전략: 2차원 보간을 분해해서 1차원 보간을 3번 한다.

18.6 다차원 보간(2/3)

- 식 (18.29)와 (18.30)을 식 (18.31)에 대입하면 다음과 같은 단일 방정식을 구할 수 있다

$$f(x_i, y_i) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1)$$

$$+ \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)$$

식 18.32

예제 18.6 이중선형보간

Q. 직사각형 모양의 가열된 평판의 표면 위의 온도 측정.

T(2,1)=60	T(9,1)=57.5
T(2,6)=55	T(9,6)=70

이중선형 보간법을 이용하여 x_i=5.25, y_i=4.8에서의 온도를 예측하라.

풀이) 위 값을 식 (18.32)에 대입하면 다음과 같다.

$$f(5.25,4.8)=\frac{5.25-9}{2-9}\frac{4.8-6}{1-6}60+\frac{5.25-2}{9-2}\frac{4.8-6}{1-6}57.5$$
$$+\frac{5.25-9}{2-9}\frac{4.8-1}{6-1}55+\frac{5.25-2}{9-2}\frac{4.8-1}{6-1}70=61.2143$$