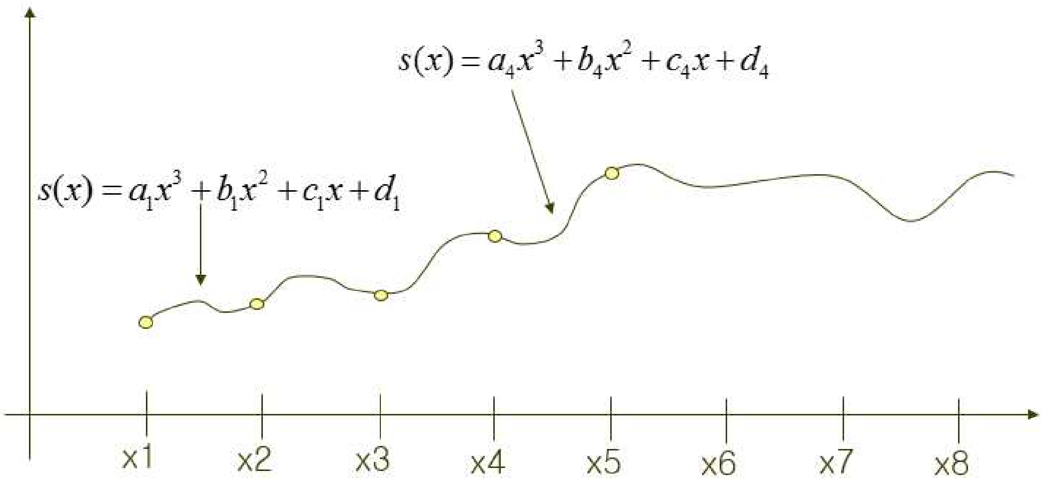
1. Spline 보간법이란?

주어진 점들 사이를 함수의 구간으로 정의하고 이 사이를 저차 다항식으로 연결하는 방법.

구간 연결 다항식 ~ 스플라인 함수



2. 장단점

- 일반적으로 완만하게 보간하지만 특정구역에서 급격히 변하는 경우도 있다.

- 국부적으로 급격히 변화하는 함수에 우수한 근사 값을 제공한다.

3. 조건

주어진 구간 [a, b]가 $a=x_1<x_2<....<x_n=b$ 와 같이 n-1개의 소구간 으로 이루어졌을 때 차수가 k인 spline함수 s(x)는

다음 조건을 만족해야한다.

- s(x)는 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 에서 k차 이하의 다항식으로 표현된다.

- s(x), s'(x), s''(x),...등의 도함수들은 구간 [a, b]에서 연속이어야 한다.

위 두 조건을 만족하는 최소의 차수는 3차로서, 모든 소구간에서 3차 다항식으로 표시되는 함수를 3차 spline함수라고 한다.

4. 3차 spline 함수, cubic spline

점 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ 로 주어지는 i번째 소 구간에 대한 3차식의 일반형은 다음과 같다.

$$s(x) = y = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad , \; where \;\; x_i < x < x_{i+1}$$

이제 목적은 i번째 a, b, c, d을 구하는 것이다.

점 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ 을 지나야 함으로

$$s(x_i) = y_i = a_i(x_i-x_i)^3 + b_i(x_i-x_i)^2 + c_i(x_i-x_i) + d_i = d_i$$
$$s(x_{i+1}) = y_{i+1} = a_i(x_{i+1}-x_i)^3 + b_i(x_{i+1}-x_i)^2 + c_i(x_{i+1}-x_i) + d_i$$

s(x)을 미분 해보면 아래와 같다.

$$s'(x) = y' = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i$$
$$s''(x) = y'' = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$$

점 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ 을 위 미분 식에 대입해보면

$$s''(x_i) = s''_i = 6a_i(x_i-x_i) + 2b_i = 2b_i$$
$$s''(x_{i+1}) = s''_{i+1} = 6a_i(x_{i+1}-x_i) + 2b_i$$

계수를 구해 보면, s'' 에 대하여 정리

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$s''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i$$

$$a_i = \frac{s''(x_{i+1}) - 2b_i}{6h_i} = \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{6h_i}$$

$$b_i = \frac{s''(x_i)}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2s''(x_i)h_i - s''(x_{i+1})h_i}{6}$$

$\because c_i$

$$d_i = y_i$$

$$y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i$$

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i - \frac{d_i}{h_i}, \quad d_i = y_i$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{6h_i} h_i^2 - \frac{s''(x_i)}{2} h_i$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{s''(x_{i+1})h_i - s''(x_i)h_i}{6} - \frac{3s''(x_i)h_i}{6}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{-s''(x_{i+1})h_i + s''(x_i)h_i}{6} + \frac{-3s''(x_i)h_i}{6}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{-s''(x_{i+1})h_i - 2s''(x_i)h_i}{6}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2s''(x_i)h_i - s''(x_{i+1})h_i}{6}$$

이렇게 계수를 구하고 원식 s(x)에 대입하여 풀면 끝 그러나 계수를 구하려면

$s''(x_i)$ 을 알아야한다.

$s_i(x) = y_i = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$ 는 $[x_i, x_{i+1}]$

구간을 담당한다.

즉, 앞 구간의 끝과 다음 구간의 시작은 값이 당연히 같으며 미분치 또한 같아야한다.

수식으로 써보면 $s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i) = d_i$ 이며

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) = c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{2\ s''(x_i)h_i - s''(x_{i+1})h_i}{6}$$

이다.

$$s'_{i-1}(x_i) = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

위 식에 ai-1, bi-1, ci-1을 대입하면

$$s'_{i-1}(x_i) = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

$$= 3\frac{s''_i(x_i) - s''_{i-1}(x_{i-1})}{6h_{i-1}}h_{i-1}^2 + 2\frac{s''_{i-1}(x_{i-1})}{2}h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2s''_{i-1}(x_{i-1})h_i}{}$$

$$= \frac{s''_i(x_i) - s''_{i-1}(x_{i-1})}{2}h_{i-1} + s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1}}{}$$

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) = c_i$$

$$\frac{s''_i(x_i) - s''_{i-1}(x_{i-1})}{2}h_{i-1} + s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} -}{6}$$

$$6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = 3s''_i(x_i)h_{i-1} - 3s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} + 6s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-}$$

$$= 3s''_i(x_i)h_{i-1} - 3s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} + 6s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} - 2s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} - s$$

$$= 2s''_i(x_i)h_{i-1} + s''_{i-1}(x_{i-1})h_{i-1} + 2s''_i(x_i)h_i - s''_{i+1}(x_{i+1})h_i$$

$$= h_{i-1}s''_{i-1}(x_{i-1}) + 2(h_{i-1} + h_i)s''_i(x_i) + h_i s''_{i+1}(x_{i+1})$$

$$\therefore 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = h_{i-1}s''_{i-1}(x_{i-1}) + 2(h_{i-1} + h_i)s''_i(x_i) + h_i s''_{i+}$$

위 수식을 보면 3개의 구간 i-1, i, i+1에 대한 수식으로 3개의 곡선 함수 si-1 , si, si+1이 합쳐져 있다.

직관적으로 풀어보자면 두 구간 평균 기울기의 차 -> 곡률은 2차 미분과 같아야 한다.

i = 2,...., n-1을 대입하면 s = s''로 간략하게 씀

$$h_1 s_1 + (2h_1 + 2h_2)s_2 + h_2 s_3 = 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right)$$

$$h_2 s_2 + (2h_2 + 2h_3)s_3 + h_3 s_4 = 6\left(\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$h_{n-2} s_{n-2} + (2h_{n-2} + 2h_{n-1})s_{n-1} + h_{n-1} s_n = 6\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right)$$

행렬식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & h_3 & 2(h_3+h_4) & & \\ & & & & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \dfrac{y_4 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

위 식을 풀면 s1,....,sn 까지 구할 수 있다. 그런데 구해진 s1과 sn은 사용 안하고 따로 구하는 것 같다.

s1과 sn을 설정하는 방법은 3가지가 있다고 한다.

1. s1 = sn = 0 : 곡률이 0인 경우는 직선, 그러니까 구간 이전 / 이후에 연결되는 성분을 직선으로 본 경우

->h1과 hn-1을 없는 셈 치고 s를 계산

2. s1 = s2 , sn = sn-1 : 곡률이 같은 경우는 ax^2 -> 2a 이차 곡선이다. 3차 이상부터 곡률이 달라짐, ax^3 의 곡률은 6ax

계수 a = 0 이 된다.

h1s1 + 2(h1+h2)s2 + h2s3 = (3h1+2h2)s2 + h2s3 , 첫 번째 마지막 열 지움.

3. 외삽법: s1은 s2와 s3을 sn은 sn-1과 sn-2을 사용하여 직선을 연장하여 새로운 점을 구하는 것 같은데 정확히 모르겠음.

5. Example

s1과 sn을 설정하는 법에 따른 오차 비교

조건의 비교 : 어떤 조건일 때 오차가 감소할까?

x	0	1	2	3	4
y	-8	-7	0	19	56

$x = 2.3$ 일 때

✓조건 1 : $s_1 = s_n = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow s_1 = 0, s_2 = 6.4285, s_3 = 10.2857,$
$s_4 = 24.4285, s_5 = 0$

$\Rightarrow s(2.3) = 3.9765$

$\Rightarrow E = 0.1905$

✓조건 2 : $s_1 = s_2 , s_n = s_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow s_1 = 4.8, s_2 = 4.8, s_3 = 12,$
$s_4 = 19.2, s_5 = 19.2$

$\Rightarrow s(2.3) = 4.1124$

$\Rightarrow E = 0.0546$

위에서 s1 = s2, sn = sn-1일때 5 가 행렬안에 있는이유는 s1과 s2가 합쳐지고 sn-1과 sn이 합쳐져서이다!