3-7. Inner Product of Functions

지금까지는 기하적인(lengths, angles, distances) 벡터들의 내적에 대해서 살펴봤습니다.

이번 장에서는 또 다른 벡터의 한 종류인 함수들의 내적에 대해서 살펴봅니다.

지금까지 우리가 다뤄온 내적은, 유한한 개수의 원소를 가진 벡터에 대해 정의된 것이었습니다.

그러나 **벡터 $x \in \mathbb{R}^n$을 n개의 함수값을 가지는 함수로 생각할 수 있습니다.**

이러한 관점을 확장하면,

- 무한한 개수(countable infinite)의 원소를 가진 벡터
- 연속적인 값(countably infinite)을 가지는 함수

에 대해서도 내적이라는 개념을 일반화할 수 있습니다.

이 경우에 벡터 성분의 합 (3.5)는 적분으로 바뀌게 됩니다.

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{3.5}$$

두 함수 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 의 내적은 다음과 같이 정적분으로 정의됩니다.

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx \tag{3.37}$$

여기서 a, b 는 적분 구간의 하한과 상한으로, 유한한 실수입니다. ($a, b < \infty$)

이 함수 내적도 기존 벡터 내적처럼 Norm, orthogonality를 정의할 수 있습니다. 식 (3.37)의 값이 0이라면 두 함수 u, v 는 직교합니다.

위와 같은 함수 내적을 수학적으로 엄밀히 정의하려면

- 측도 (measure)
- 적분의 정의 등을 정확히 다뤄야 하며

이는 힐베르트 공간(Hilbert Space)의 개념으로 이러집니다.

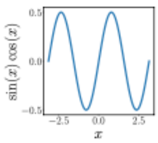
또한 유한 차원 벡터에서의 내적과 달리, 함수에 대핸 내적은 발산할 수 있기 때문에 real analysis, functional analysis의 복잡한 이론들이 필요하게 됩니다.

하지만 이 책에서는 그러한 내용을 다루지 않습니다.

예시 3.9 (Inner product of Functions)

Example 3.9 (Inner Product of Functions)
If we choose $u = \sin(x)$ and $v = \cos(x)$, the integrand $f(x) = u(x)v(x)$ of (3.37), is shown in Figure 3.8. We see that this function is odd, i.e., $f(-x) = -f(x)$. Therefore, the integral with limits $a = -\pi, b = \pi$ of this product evaluates to 0. Therefore, sin and cos are orthogonal functions.

Figure 3.8 $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.



함수 $u = sin(x), v = cos(x)$를 선택했을 때,

이때 식(3.37)의 적분 함수는 $f(x) = u(x)v(x) = sin(x)cos(x)$ 가 됩니다.

그림 3.8 을 보면 $f(x)$는 odd-function임을 알 수 있습니다. $f(-x) = -f(x)$

따라서 적분 구간을 $-\pi, \pi$로 설정하면, 정적분 값은 0이 됩니다.

Remark

다음의 함수들의 집합을 $\{1, cos(x), cos(2x), cos(3x), ...\}$
$-\pi$에서 π로 적분해보면, 위 함수들이 직교(orthogonal)하다는 것을 알 수 있습니다.
즉, 이 집합은 직교 함수 집합입니다.
해당 함수 집합은 구간 $[-\pi, \pi)$ 위에서 정의되는 even function(짝함수)이고 주기적인 함수들의 큰 부분공간을 span합니다.
어떤 함수를 이 부분공간 위에 투영(projection)시키는 것이 푸리에 급수(Fourier series)의 핵심 개념입니다.

보충

- https://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%99%80%ED%95%A8%EC%88%98%EC%99%80_%EC%A7%9D%ED%95%A8%EC%88%98

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/09/ch3-7.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222256670118