2.8 Affine Spaces

- 원점을 뺀 Space에 대해 살펴봅니다.
- 즉, space는 더 이상 vector subspace가 아닙니다.
- 더 나아가 affine space 간의 mapping의 성질에 대해 살펴봅니다. (해당 성질은 linear mapping과 유사합니다.)

2.8.1 Affine Subspace

정의 2.25 (Affine Subspace)

- V가 vector space이고, $x_0 \in V$ 그리고 $U \subseteq V$ 라고합니다.

$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{x}_0 + U := \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in V | \exists \boldsymbol{u} \in U : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}\} \subseteq V \end{aligned}$$

- 다음의 subset L을 V의 **affine space** 또는 **linear manifold** 라고 부릅니다.
- U는 **direction** 또는 **direction space**
- x_0은 **support point**
- Ch 12에서는 이 subspace를 *hyperplane*이라고 칭합니다.
- 만약 $x_0 \notin U$ 이면, affine subspace에 0이 포함되지 않습니다.

  따라서, affine subspace는 linear subspace가 아니며 V의 subspace가 아닙니다.

- $\mathbb{R}^3$에서 affine subspace의 예시로는 점, 선, 면이 있습니다. 원점 통과하지 않고, 통과할 필요도 없습니다.

Remark (두개의 Affine subspace 고려 $L,\ \tilde{L}$)

- 벡터 공간 $VVL = x_0 + U,\ \tilde{L} = \tilde{x_0} + \tilde{U}$ 를 생각해볼 때, $L \subseteq \tilde{L}$이 성립하기 위한 필요충분조건은 다음과 같습니다.
  - $U \subseteq \tilde{U}$
  - $x_0 - \tilde{x_0} \in \tilde{U}$

- 아핀 부분공간은 보통 파라미터로 표현됩니다.

  V 의 k-차원 아핀 공간 $L = x_0 + U$를 생각해볼때, 만약 $(b_1, \cdots, b_k)$가 U의 ordered basis라면,

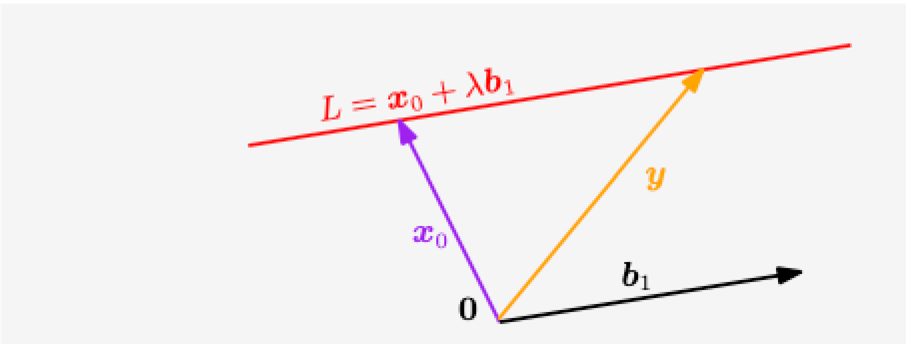
  L의 모든 원소 $x \in L$은 다음과 같이 유일하게 표현될 수 있습니다.

  - $x = x_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$
  - 여기서 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 입니다.

- 위 표현식을 L의 매개변수(parametric) 방정식이라고 합니다.
- $b_1, \cdots, b_k$는 방향 벡터이고, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$는 매개변수(parameter) 입니다.

예시 2.26 (Affine Subspace)

Figure 2.13 Lines are affine subspaces. Vectors $\boldsymbol{y}$ on a line $\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{b}_1$ lie in an affine subspace L with support point $\boldsymbol{x}_0$ and direction $\boldsymbol{b}_1$.



2.8.2 Affine Mappings

Vector Spaces간의 Linear Mapping과 비슷하게 두 개의 affine spaces 사이에도 mapping을 정의할 수 있습니다.

정의 2.26 (Affine Mapping)

- 두 개의 벡터 공간 V, W linear mapping $\Phi : V \to W$, $a \in W$에 대하여
  - $\phi : V \to W$
  - $x \mapsto a + \Phi(x)$

  을 $V \to W$ affine mapping이라고 합니다.

- vector a를 ϕ의 변환 벡터라고 합니다.

Linear Mapping과 비슷한 성질은 다음과 같습니다.

- 모든 affine mapping $\phi : V \rightarrow W$은 Linear Mapping $\Phi : V \rightarrow W$와 translation $\tau : W \rightarrow W$의 합성함수이며 $\phi = \tau \circ \Phi$ 를 만족합니다.
- Affine Mapping $\phi : V \rightarrow W$ 와 $\phi^{'} : W \rightarrow X$ 의 합성인 $\phi^{'} \circ \phi$ 또한 affine mapping이 됩니다.
- 만약 ϕ 가 bijective라면, Affine Mapping은 기하적인 구조에서 invariant, dinesion, 평행성 등을 보존합니다.

출처

- https://blog.naver.com/walk_along/222177694877
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/06/ch2-8.html