3-4. Angles and Orthogonality

내적(Inner Product)는 벡터의 길이, 두 벡터 간 거리 등 정의할 수 있었습니다.

또한 벡터 사이의 각도 w 도 내적으로 정의할 수 있습니다.

Cauchy-Schwarz (코시-슈바르츠) 부등식을 활용하여 두 벡터 x, y 사이의 각도 w 를 정의할 수 있습니다.

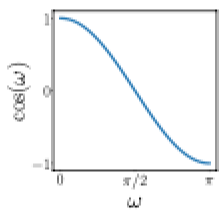
$x \neq 0,\ y \neq 0$으로 가정하면,

$$-1 \leqslant \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \leqslant 1\,.$$

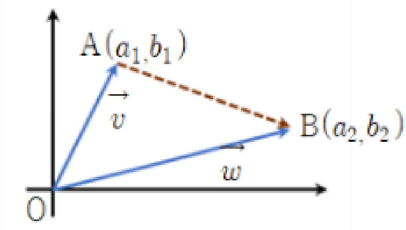
두 벡터 간의 유일한 각도 $w \in [0, \pi]$, 이 각도는 다음과 같습니다.

$$\cos\omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\,.$$

Figure 3.4 When restricted to $[0, \pi]$ then $f(\omega) = \cos(\omega)$ returns a unique number in the interval $[-1, 1]$.



보충 (코사인 유사도)



위와 같은 벡터가 있다고 가정할 때 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$로 이루어진 삼각형이 만들어집니다. 그러면 코사인 법칙에 의해

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OB} \cdot \cos(\angle AOB)$$

가 성립합니다. 여기서 좌변을 살펴보면

$$\overline{AB}^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)$$
$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 < v, w >$$

우변에서 $\angle AOB = \omega$라 할 때

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OB} \cdot \cos(\angle AOB) = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\omega$$

따라서 $\cos\omega = \frac{< v, w >}{\|v\| \cdot \|w\|}$가 성립합니다.

각도는 두 벡터 간 방향이 얼마나 유사한지 알려줍니다.

예를 들어 x 와 $y = 4x$의 각도는 0이며 이는 두 벡터의 방향이 같음을 의미합니다.

위 식을 대입해보면 x, y 사이의 각도 w는 다음과 같이 정의됩니다.

- $cos(w) = \frac{\langle x,y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$ → dot product → $cos(w) = \frac{x^T y}{||x|| \cdot ||y||}$

$y = 4x$를 대입했을 때 다음과 같은 결과를 얻을 수 있습니다.

$$\cos(\omega) = \frac{4\|x\|^2}{\|x\| \cdot 4\|x\|} = \frac{4\|x\|^2}{4\|x\|^2} = 1$$

만약 $y = -4x$ 일 경우에는 다음과 같은 결과를 얻게됩니다.

$$\cos(\omega) = \frac{x^\top(-4x)}{\|x\| \cdot \|4x\|} = -1 \Rightarrow \omega = 180^\circ$$

예시 3.6 (Angle between Vectors)

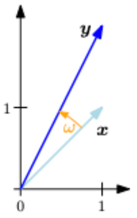
내적(dot product)을 활용하여 두 벡터 사이의 각을 계산할 수 있습니다.

Example 3.6 (Angle between Vectors)
Let us compute the angle between $\boldsymbol{x} = [1, 1]^\top \in \mathbb{R}^2$ and $\boldsymbol{y} = [1, 2]^\top \in \mathbb{R}^2$; see Figure 3.5, where we use the dot product as the inner product. Then we get

$$\cos\omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}} = \frac{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \tag{3.26}$$

and the angle between the two vectors is $\arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}) \approx 0.32\,\mathrm{rad}$, which corresponds to about $18°$.

Figure 3.5 The angle ω between two vectors $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ is computed using the inner product.



이 방법(내적)을 통해 벡터가 직교하는지 도출할 수 있습니다.

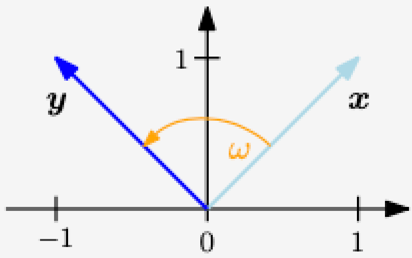
정의 3.7 (Orthogonality)

- $\langle x, y \rangle = 0$ 이라면, 두 벡터 x, y 는 직교(orthogonal)한다고 하고 $x \perp y$ 로 표현합니다.
- $||x|| = 1 = ||y||$(unit vector)라면 x, y 는 **orthonormal(정규 직교)**한다고 합니다.

해당 정의를 통해 0-벡터는 벡터 공간의 모든 벡터에 직교한다는 것을 알 수 있습니다.

예시 3.7 (Orthogonal Vectors)

Example 3.7 (Orthogonal Vectors)



Consider two vectors $\boldsymbol{x} = [1, 1]^\top, \boldsymbol{y} = [-1, 1]^\top \in \mathbb{R}^2$; see Figure 3.6. We are interested in determining the angle ω between them using two different inner products. Using the dot product as the inner product yields an angle ω between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ of 90°, such that $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. However, if we choose the inner product

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^\top \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{3.27}$$

we get that the angle ω between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ is given by

$$\cos \omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|} = -\frac{1}{3} \implies \omega \approx 1.91 \,\mathrm{rad} \approx 109.5^\circ\,, \tag{3.28}$$

and $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ are not orthogonal. Therefore, vectors that are orthogonal with respect to one inner product do not have to be orthogonal with respect to a different inner product.

두 벡터 x, y 의 각도 w 는 어떤 내적을 사용함에 따라 각도가 달라집니다.

즉, 한 내적에 대해서 직교한다고 해서 다른 내적에서 직교하는 것은 아닙니다.

정의 3.8 (Orthogonal Matrix, 직교행렬)

square matrix(정사각 행렬) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이 **직교 행렬**이라는 것은 열벡터들이 서로 직교하며 정규화되어 있음을 의미합니다.

이때 다음과 같은 조건을 만족합니다.

- $AA^T = I = A^T A$ (즉, $A^-1 = A^T$)

직교 행렬의 성질은 길이와 각도를 보존합니다.

- 어떤 벡터 x에 대해 Ax로 변환하더라도 벡터의 길이는 변하지 않습니다.

$$\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = (\boldsymbol{Ax})^\top(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

- 벡터 x, y를 모두 A로 변환해도, 이 둘사이의 각도는 그대로입니다. (내적 값이 변하지 않기 때문)

$$\cos\omega = \frac{(\boldsymbol{Ax})^\top(\boldsymbol{Ay})}{\|\boldsymbol{Ax}\|\,\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Ay}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Axy}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Ay}}} = \frac{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\,, \qquad (3.32)$$

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/08/ch3-4.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222193884222