4-2. Eigenvalues and Eigenvectors

이제 행렬과 그에 대응되는 linear mapping 을 표현하는 새로운 방식을 배우게 됩니다.

2.7.1 절에서 다룬 바와 같이, 모든 linear mapping 은 주어진 ordered basis 에 대해 유일한 변환 행렬을 가집니다.

Linear mapping과 그에 대응하는 행렬을 **고유 분석(Eigen Analysis)** 관점에서 해석할 수 있게 됩니다.

Eigenvalue(고유값)은 특정한 벡터 집합(Eigenvectors)이 linear mapping에 의해 어떻게 변환되는지를 알려주는 중요한 정보가 됩니다.

정의 4.6

Definition 4.6. Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be a square matrix. Then $\lambda \in \mathbb{R}$ is an *eigenvalue* of $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ is the corresponding *eigenvector* of $\boldsymbol{A}$ if

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} . \tag{4.25}$$

We call (4.25) the *eigenvalue equation*.

- 정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$에 대해,

  $\lambda \in \mathbb{R}$가 A의 고유값, $x \in R^n \ \backslash\{0\}$가 이에 대응되는 고유벡터라 함은 다음 조건을 만족할 때입니다.

  $Ax = \lambda x.$ → 해당 식을 고유값 방정식이라고 부릅니다.

Remark

관례적으로 고유값들을 내림차순으로 정렬합니다. 이때 가장 큰 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 제 1 고유값, 제 1 고유벡터라고 부릅니다. 하지만 이 책에서는 명시적으로 언급되지 않는 한 , 고유값의 순서를 가정하지 않습니다.

다음 명제들은 서로 동치입니다.

- λ 는 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 고유값입니다.
- $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$인 벡터가 존재하여 $Ax = \lambda x$ 를 만족합니다.

- $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$

  즉, $A - \lambda I$가 full-rank가 아닙니다.

- $det(A - \lambda I_n) = 0$

  즉, 특성방정식을 만족하는 λ입니다.

정의 4.7 (Collinearity and Codirection, 공선성과 동방향성)

서로 같은 방향을 가르키는 두 벡터를 **codirected** 라고 합니다.

서로 같은 방향 또는 정반대 방향을 가르키는 두 벡터는 **collinear** 라고 합니다.

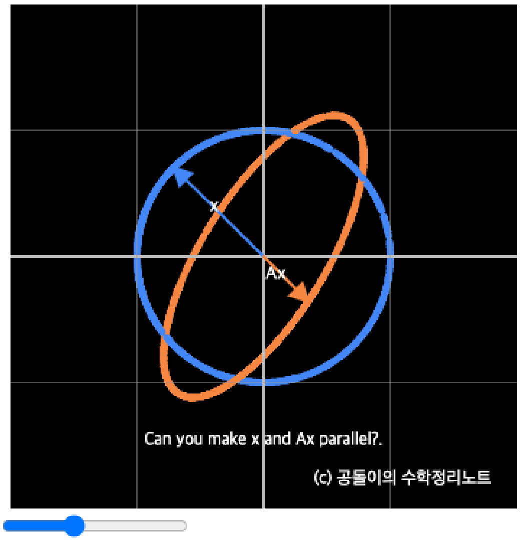
Remark (Non-uniqueness of eigenvectors, 고유벡터의 비유일성)

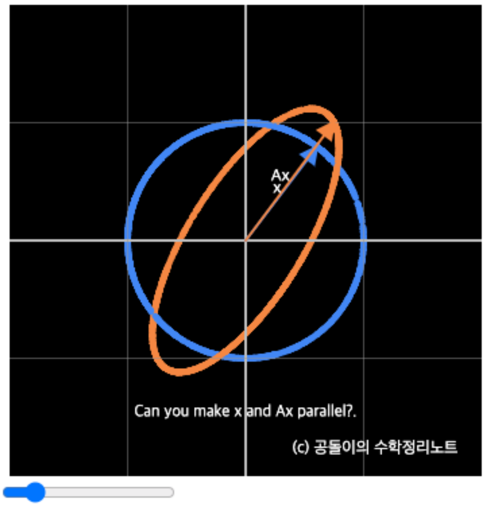
만약 x가 행렬 A의 고유값 λ에 대응되는 고유벡터라면, 임의의 실수 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 에 대해 cx, 역시 같은 고유값 λ에 대한 고유벡터가 됩니다.

$$A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = c\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(c\boldsymbol{x}) \,. \qquad (4.26)$$

즉, 벡터 x와 collinear인 모든 벡터는 같은 고유값을 가지는 고유벡터가 됩니다.

쉽게 말해, 어떤 벡터 x를 변환했을 때, 그 결과가 x와 평행(**collinear**)하다면, x는 **고유벡터(eigenvector)**이고, 그때의 **λ(스케일링 계수)**는 고유값입니다.





정리 4.8

$\lambda \in \mathbb{R}$가 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$의 고유값(eigenvalue)이 되는 필요충분조건은,

λ가 행렬 A의 특성다항식(Characteristic polynominal) $p_A(\lambda)$의 근(root)이 되는 것입니다.

$$\lambda \text{ 가 고유값 } \iff p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

해당 정리는 고유값을 찾는 문제를 다항식의 근을 찾는 문제로 바꿔주는 핵심적인 연결고리입니다.

정의 4.9

정사각행렬 A가 고유값 λ_i를 가질 때,

λ_i의 algebraic multiplicity(대수적 중복도) 란, 이 λ_i가 특성다항식에서 근(root)으로 몇 번 등장하는지를 나타내는 수를 말합니다.

정의 4.10 (Eigenspace and Eigenspectrum, 고유공간과 고유스펙트럼)

정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해, 고유값 λ에 대응되는 모든 고유벡터들의 집합은 $\mathbb{R}^n$의 부분공간을 이룹니다.

이를 A의 고유값 λ에 대한 **고유공간(EigenSpace)**이라 하고, E_λ 로 표기합니다.

또한, 행렬 A의 모든 고유값들의 집합을 **고유스펙트럼(Eigenspectrum)** 또는 간단히 스펙트럼(spectrum)이라고 부릅니다.

행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$의 고유값 λ에 대응하는 고유공간 E_λ는 선형 연립방정식 $(A - \lambda I)x = 0$의 해공간(solution space)입니다.

기하학적으로, 0이 아닌 고유값에 대응하는 고유벡터는 선형 변환에 의해 늘어나거나 줄어드는 방향을 나타냅니다.

이때 고유값 λ는 해당 방향으로 얼마나 늘어났는지 또는 줄어들었는지를 나타내는 비율(스케일링 계수)입니다.

만약 고유값이 음수라면, 벡터는 반대 방향으로 늘어나거나 줄어듭니다.

예시 4.4 (The Case of the Identity Matrix, 항등행렬의 경우)

항등행렬 $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 특성다항식은 $p_I(\lambda) = det(I - \lambda I) = (1 - \lambda)^n = 0$ 입니다.

이는 고유값 $\lambda = 1$ 하나만을 가지며, 그 중복도는 n 입니다.

또한, $Ix = \lambda x = 1 \cdot x$ 는 모든 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$에 대해 항상 성립합니다.

따라서, 항등행렬의 유일한 고유공간 E_1은 n차원 전체 공간을 생성하며 $\mathbb{R}^n$의 모든 표준 기저 벡터는 항등행렬 I의 고유 벡터입니다.

고유값과 고유벡터에 관한 유용한 성질들

- 행렬 A와 그 전치행렬 A^T는 같은 고유값을 가지지만, 고유벡터는 반드시 같지 않습니다.
- 고유공간 E_λ는 행렬 $A - \lambda I$의 Null space (영공간) 입니다.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.27a}$$

$$\iff (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x} \in \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}). \tag{4.27b}$$

- 닮은 행렬(similar matrices, 정의 2.22 참고)은 동일한 고유값을 갖습니다.

  따라서, linear mapping Φ의 고유값과 변환 행렬의 기저 선택에 관계없이 불변입니다.

  이로인해 고유값은 행렬식, 대각합(trace)과 함께 기저 변환에 영향을 받지 않는 linear mapping의 핵심적인 특성값으로 간주됩니다.
- 대칭 행렬(symmetric matrix) 이면서 양의 정부호(positive definite)인 행렬은 항상 양수의 실수 고유값을 가집니다.

예시 4.5 (Computing Eigenvalues, Eigenvectors, and Eigenspaces)

- 고유값, 고유벡터, 고유공간 계산 예시

Example 4.5 (Computing Eigenvalues, Eigenvectors, and Eigenspaces)
Let us find the eigenvalues and eigenvectors of the 2×2 matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \tag{4.28}$$

Step 1: Characteristic Polynomial. From our definition of the eigenvector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ and eigenvalue λ of $\boldsymbol{A}$, there will be a vector such that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, i.e., $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Since $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, this requires that the kernel (null space) of $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ contains more elements than just $\boldsymbol{0}$. This means that $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ is not invertible and therefore $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$. Hence, we need to compute the roots of the characteristic polynomial (4.22a) to find the eigenvalues.

Step 2: Eigenvalues. The characteristic polynomial is

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) && (4.29a) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && (4.29b) \\ &= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 . && (4.29c) \end{aligned}$$

We factorize the characteristic polynomial and obtain

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 = 10 - 7\lambda + \lambda^2 = (2-\lambda)(5-\lambda) \tag{4.30}$$

giving the roots $\lambda_1 = 2$ and $\lambda_2 = 5$.

Step 3: Eigenvectors and Eigenspaces. We find the eigenvectors that correspond to these eigenvalues by looking at vectors $\boldsymbol{x}$ such that

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} . \tag{4.31}$$

For $\lambda = 5$ we obtain

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 1 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} . \tag{4.32}$$

We solve this homogeneous system and obtain a solution space

$$E_5 = \operatorname{span}[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}] . \tag{4.33}$$

This eigenspace is one-dimensional as it possesses a single basis vector.

Analogously, we find the eigenvector for $\lambda = 2$ by solving the homogeneous system of equations

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 2 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} . \tag{4.34}$$

This means any vector $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, where $x_2 = -x_1$, such as $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, is an eigenvector with eigenvalue 2. The corresponding eigenspace is given as

$$E_2 = \text{span}[\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}]. \tag{4.35}$$

예시 4.5 에서의 두 고유공간 $E_5, \ E_2$는 각각 하나의 벡터에 의해 생성되므로 1차원입니다.

하지만 다른 경우에는 동일한 고유값이 여러 번 등장할 수 있으며 (정의 4.9 참고), 해당 고유 공간은 2차원 이상이 될 수 있습니다.

정의 4.11

정사각행렬 A의 고유값 λ_i에 대해, λ_i의 기하적 중복도(geometric multiplicity)란 해당 고유값에 대응하는 선형 독립인 고유벡터의 개수를 의미합니다.

즉, 이는 λ_i에 대응하는 고유공간의 차원입니다.

Remark

어떤 고유값이든 최소 하나의 고유벡터는 항상 존재하므로, 기하적 중복도는 최소 1 이상입니다.

하지만, 기하적 중복도는 대수적 중복도보다 클 수는 없으면, 같거나 작을 수만 있습니다.

예시 4.6

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

행렬 A는 고유값 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 를 두 번 가집니다.

따라서 이 고유값의 대수적 중복도는 2입니다.

하지만 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 단 하나만 존재합니다.

- $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

즉, 기하적 중복도는 1입니다.

Graphical Intuition in Two Dimensions (2차원에서의 시각적 직관)

행렬식, 고유벡터, 고유값에 대한 직관적인 이해를 위해 여러 가지 선형 변환에 대해서 시각적으로 살펴봅니다.

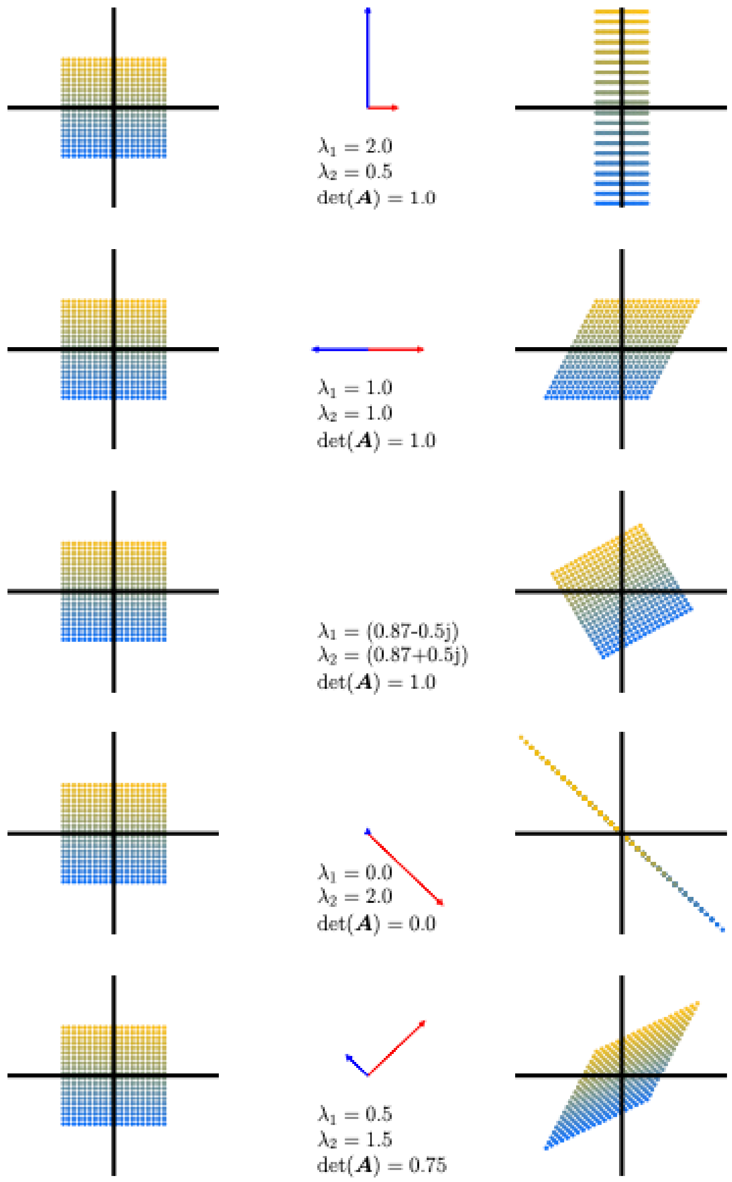


Figure 4.4 Determinants and eigenspaces. Overview of five linear mappings and their associated transformation matrices $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ projecting 400 color-coded points $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (left column) onto target points $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}$ (right column). The central column depicts the first eigenvector, stretched by its associated eigenvalue λ_1, and the second eigenvector stretched by its eigenvalue λ_2. Each row depicts the effect of one of five transformation matrices $\boldsymbol{A}_i$ with respect to the standard basis.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 수평 방향 기저 e_1은 그대로, 수직 방향 e_2는 2배로 늘어남
- 고유값 : $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$
- 고유벡터 : 표준 기저 e_1, e_2
- 행렬식 : 2 → 면적 2배로 증가

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 수평 방향으로 전단(shear)됨, 수직 방향의 점들이 수평으로 밀림
- 고유값: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (중복)
- 고유벡터: 하나뿐이며 고유공간은 1차원 (공선 벡터만 존재)
- 행렬식: 1 → 면적 보존

$$A_3 = \begin{bmatrix} cos(\frac{\pi}{6}) & sin(\frac{\pi}{6}) \\ -sin(\frac{\pi}{6}) & cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}$$

- 30도 반시계 방향 회전
- 고유값: 복소수 (실수 고유값 없음)
- 고유벡터: 실수 공간에는 존재하지 않음
- 행렬식: 1 → 회전은 항상 면적 보존

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 한 방향$(\lambda = 0)$으로는 축소되어 평면이 직선
- 고유값: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$
- 고유벡터: 축소 방향$(\lambda = 0)$과 확장 방향$(\lambda = 2)$ 존재
- 행렬식: 0 → 면적 0 → 정보 손실 발생

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

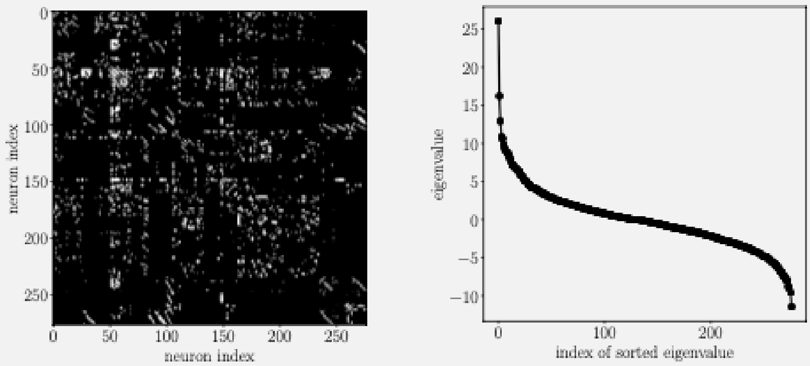
- 전단(shear)과 함께 한 방향은 늘어나고, 다른 방향은 줄어듦
- 고유값: $\lambda_1 = 0.5,\ \lambda_2 = 1.5$
- 고유벡터: 수직한 두 방향에 대해 각각 압축 및 확장
- 행렬식: 0.75 → 면적이 75%로 줄어듦

예시 4.7 (Eigenspectrum of a Biological Neural Network)

해당 예시는 신경망 구조를 행렬로 표현하고, 고유값을 통해 전체 네트워크의 구조적 특성을 파악할 수 있음을 보여줍니다.

Example 4.7 (Eigenspectrum of a Biological Neural Network)

Figure 4.5 Caenorhabditis elegans neural network (Kaiser and Hilgetag, 2006).(a) Symmetrized connectivity matrix; (b) Eigenspectrum.



(a) Connectivity matrix. (b) Eigenspectrum.

Methods to analyze and learn from network data are an essential component of machine learning methods. The key to understanding networks is the connectivity between network nodes, especially if two nodes are connected to each other or not. In data science applications, it is often useful to study the matrix that captures this connectivity data.

We build a connectivity/adjacency matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{277\times 277}$ of the complete neural network of the worm *C.Elegans*. Each row/column represents one of the 277 neurons of this worm's brain. The connectivity matrix $\boldsymbol{A}$ has a value of $a_{ij} = 1$ if neuron i talks to neuron j through a synapse, and $a_{ij} = 0$ otherwise. The connectivity matrix is not symmetric, which implies that eigenvalues may not be real valued. Therefore, we compute a symmetrized version of the connectivity matrix as $\boldsymbol{A}_{sym} := \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top$. This new matrix $\boldsymbol{A}_{sym}$ is shown in Figure 4.5(a) and has a nonzero value a_{ij} if and only if two neurons are connected (white pixels), irrespective of the direction of the connection. In Figure 4.5(b), we show the corresponding eigenspectrum of $\boldsymbol{A}_{sym}$. The horizontal axis shows the index of the eigenvalues, sorted in descending order. The vertical axis shows the corresponding eigenvalue. The S-like shape of this eigenspectrum is typical for many biological neural networks. The underlying mechanism responsible for this is an area of active neuroscience research.

정리 4.12

행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$이 서로 다른 n개의 고유값 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 을 가지면, 그에 대응하는 고유벡터들 $x_1, \ldots, x_n$은 선형 독립입니다.

즉, 이러한 고유벡터들은 $\mathbb{R}^n$의 기저를 형성합니다.

정의 4.13 (Defective Matrix)

정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$이 선형 독립인 고유 벡터를 n개 미만으로 가질 경우, 그 행렬을 defective(결함이 있다)라고 합니다.

- non-defective 행렬은 고유값이 중복될 수는 있지만, 고유벡터들이 $\mathbb{R}^n$을 생성하는 기저를 형성해야 합니다.
- defective 행렬에서는 고유 공간의 차원 (=기하적 중복도)의 총합이 n보다 작습니다.

특히, 어떤 고유값 λ_i에 대해서 대수적 중복도 $m > 1$, 기하적 중복도 $< m$ 인 경우가 반드시 존재합니다.

Remark

defective 행렬은 절대로 n개의 서로 다른 고유값을 가질 수 없습니다.

정리 4.12에 따라 고유값이 서로 다르면 고유 벡터가 선형 독립이기 때문입니다.

정리 4.14

임의의 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$에 대해, 다음과 같이 정의된 행렬

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} . \tag{4.36}$$

는 항상 대칭(symmetric) 이며, 양의 준정부호(positive semidefinite) 행렬이 됩니다.

Remark

만약 $rk(A) = n$ 이면 (full-rank), $S := A^T A$ 는 대칭(symmetric), 양의 정부호(positive definite) 합니다.

해당 정리 4.14가 왜 성립하는지 이해하는 것은 대칭 행렬 활용에 있어 통찰을 줍니다.

- 대칭성(symmetric)이란 $S = S^T$ 일 때를 의미합니다.
- 식(4.36)을 대입하면 다음과 같이 유도됩니다.

  $S = A^T A = A^T (A^T)^T = (A^T A)^T = S^T$

  즉, S 는 항상 대칭입니다.

또한 양의 정부호(positive semidefinite) 조건은 모든 벡터 x에 대해 다음이 성립하는 것을 의미합니다.

$x^TSx \geq 0$

이를 식(4.36)을 이용해 전개하면

$x^TSx = x^TA^TAx = (Ax)^T(Ax) = ||Ax||^2 \geq 0$

즉, Ax의 내적은 항상 제곱합이므로, 0이상입니다.

정리 4.15 (Spectral Theorem)

행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 가 대칭(symmetric)이면, 그에 대응되는 벡터 공간 V에는 A의 고유벡터들로 이루어진 정규 직교 기저(ONB)가 존재하며, 모든 고유값은 실수입니다.

해당 정리를 통해 다음과 같은 결론이 도출됩니다.

- 대칭 행렬 A는 고유값 분해(eigen decomposition)가 가능합니다.
- 모든 고유값은 실수이고, A는 다음과 같은 형태로 표현될 수 있습니다.

  $A = PDP^T$

  - P: A의 정규 직교 고유벡터들을 열벡터로 가지는 직교 행렬
  - D : A의 고유값들이 대각에 놓인 대각 행렬

예시 4.8

Example 4.8
Consider the matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

The characteristic polynomial of $\boldsymbol{A}$ is

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-7)\,, \tag{4.38}$$

so that we obtain the eigenvalues $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 7$, where λ_1 is a repeated eigenvalue. Following our standard procedure for computing eigenvectors, we obtain the eigenspaces

$$E_1 = \text{span}[\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_2}], \quad E_7 = \text{span}[\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_3}]\,. \tag{4.39}$$

We see that $\boldsymbol{x}_3$ is orthogonal to both $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$. However, since $\boldsymbol{x}_1^\top \boldsymbol{x}_2 = 1 \neq 0$, they are not orthogonal. The spectral theorem (Theorem 4.15) states that there exists an orthogonal basis, but the one we have is not orthogonal. However, we can construct one.

To construct such a basis, we exploit the fact that $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ are eigenvectors associated with the same eigenvalue λ. Therefore, for any $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ it holds that

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1\alpha + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\beta = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2)\,, \tag{4.40}$$

i.e., any linear combination of $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ is also an eigenvector of $\boldsymbol{A}$ associated with λ. The Gram-Schmidt algorithm (Section 3.8.3) is a method for iteratively constructing an orthogonal/orthonormal basis from a set of basis vectors using such linear combinations. Therefore, even if $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ are not orthogonal, we can apply the Gram-Schmidt algorithm and find eigenvectors associated with $\lambda_1 = 1$ that are orthogonal to each other (and to $\boldsymbol{x}_3$). In our example, we will obtain

$$\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}\,, \tag{4.41}$$

which are orthogonal to each other, orthogonal to $\boldsymbol{x}_3$, and eigenvectors of $\boldsymbol{A}$ associated with $\lambda_1 = 1$.

- 행렬 A

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 2\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

- 행렬 A의 특성 다항식

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-7)\,, \tag{4.38}$$

- 고유값
  - $\lambda_1 = 1$ (중복도2)
  - $\lambda_2 = 7$ (중복도1)
- 고유벡터 및 고유공간

$$E_1 = \text{span}[\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_2}], \quad E_7 = \text{span}[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}_3}]. \tag{4.39}$$

  - x_1, x_2는 서로 직교 X
  - x_3는 x_1, x_2 모두에 직교
- Spectral 정리에 따른 결론
  - 행렬 A는 대칭 행렬이므로, 직교 고유 벡터들로 이루어진 기저를 가질 수 있습니다.
  - 따라서 Gram-Schmidt 알고리즘을 통해 x_1, x_2를 직교화 할 수 있습니다.
- 직교화 결과 (Orthonormal basis for E_1)

$$\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

  - 해당 벡터들은 서로 직교하고 x_3 와도 직교합니다.

정리 4.16 (고유값과 행렬식의 관계)

정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 행렬식은 그 행렬의 모든 고유값의 곱(product)와 같습니다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{4.42}$$

여기서 $\lambda_i \in \mathbb{C}$는 A의 고유값들입니다. (복소수 일 수도 있습니다.)

정리 4.17

정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 대각합은 그 행렬의 모든 고유값의 합과 같습니다.

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,, \tag{4.43}$$

여기서 $\lambda_i \in \mathbb{C}$는 A의 (중복될 수 있는)고유값들입니다.

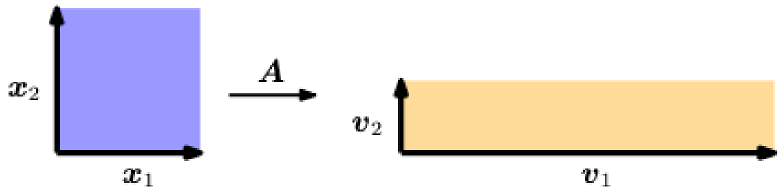


Figure 4.6 Geometric interpretation of eigenvalues. The eigenvectors of $\boldsymbol{A}$ get stretched by the corresponding eigenvalues. The area of the unit square changes by $|\lambda_1\lambda_2|$, the perimeter changes by a factor of $\frac{1}{2}(|\lambda_1| + |\lambda_2|)$.

고유 벡터 x_1, x_2가 서로 독립, 정규직교 기저(ONB) 이라고 가정합니다. 이 벡터들은 서로 직각이고 길이가 1입니다. 따라서 이들을 형성하는 단위 정사각형의 면적은 1입니다.

선형변환 A의 적용하면, 고유벡터는 고유값 λ_1, λ_2에 의해 스케일링됩니다.

결과적으로 새로운 벡터 v_1, v_2는 서로 직교한 직사각형을 이루며, 이 직사각형의 면적은 $|\lambda_1\lambda_2|$ 가 됩니다.

이는 행렬 A의 행렬식과 일치합니다.

둘레는 $2(|\lambda_1| + |\lambda_2|)$가 됩니다. 따라서, 고유값들의 절대값의 합은 선형변환 A가 단위 정사각형의 둘레를 얼마나 변화시키는지 나타냅니다.

예시 4.9 (Google's PageRank – Webpages as Eigenvectors)

PageRank 알고리즘은 웹 페이지의 중요도를 **고유값 문제**로 모델링합니다.

웹 페이지들을 **그래프로 표현**하고, 연결 구조를 기반으로 **전이 행렬 AAA** 를 구성합니다.

사용자의 웹 탐색 행동은 A를 통해 모델링되며, 반복적으로 $x, Ax, A^2x, \ldots$ 계산하면 어떤 벡터 x^*로 **수렴**합니다.

이 **수렴 벡터** x^* 는 $Ax^* = x^*$ 를 만족하므로, **고유값 1에 대응하는 고유벡터**입니다.

x^*는 정규화 후 각 웹페이지의 **중요도(확률)** 로 해석됩니다.

즉, **Google은 고유벡터를 활용하여 페이지의 순위를 결정**합니다.

보충 (요약)

✅ 1. 고유값과 특성 다항식 (Characteristic Polynomial)

- 어떤 정사각행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 고유값은 **특성 다항식의 해**입니다.
- 특성 다항식:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

- $p_A(\lambda) = 0$ 을 만족하는 λ 들이 고유값입니다.

✅ 2. 행렬식 (Determinant)과 고유값의 관계

- 행렬의 **행렬식은 모든 고유값의 곱**입니다:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- 따라서, 하나의 고유값이 0이면 $\det(A) = 0$이 되어 행렬은 **가역(invertible) 하지 않게** 됩니다.

✅ 3. 트레이스 (Trace)와 고유값의 관계

- 행렬의 **트레이스는 모든 고유값의 합**입니다:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- 이는 대각합이 고유값의 합이라는 점에서 특성 다항식의 계수와도 연결됩니다.

✅ 4. 기저와 무관한 특성 (Basis-Invariant Quantities)

- 고유값, 행렬식, 트레이스는 모두 **기저 변환에 영향을 받지 않는 값**들입니다.
  즉, 행렬 A를 다른 기저에서 표현하더라도, 이 값들은 변하지 않습니다.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/13/ch4-2.html
- https://angeloyeo.github.io/2019/07/17/eigen_vector.html