2-6 Basis and Rank

2.6.1 Generating Set and Basis

Generating Set (생성집합)

Vector space $V = (\mathbb{V}, +, \cdot)$과 벡터 집합 $\mathcal{A} = \{x_1, \cdots, x_k\} \subseteq \mathcal{V}$

만약 $\mathcal{V}$에 속하는 모든 벡터 $v \in \mathcal{V}$ $x_1, \cdots, x_k$의 선형결합으로 표현할 수 있을때, 벡터 집합 $\mathcal{A}$를 V의 **생성집합(Generating Set)**이라고 합니다.

벡터 집합 $\mathcal{A}$에 속하는 벡터들의 모든 선형 결합의 집합을 $\mathcal{A}$의 **span**이라고 합니다.

- span한다. → 표현할 수 있다 → 덧셈과 스칼라배

basis (기저)

$V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ 과 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ 인 벡터 공간

만약 $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ 이면서, V를 span하는 가장 작은 집합 $\tilde{\mathcal{A}}$가 존재하지 않는다면 V의 생성집합 $\mathcal{A}$는 **minimal**이라고 부릅니다.

V의 선형 독립인 모든 생성 집합은 minimal이며, 이를 V의 **basis (기저)** 라고 부릅니다.

Let $V = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ be a vector space and $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{B} \neq \emptyset$. Then, the following statements are equivalent:

- $\mathcal{B}$ is a basis of V.
- $\mathcal{B}$ is a minimal generating set.
- $\mathcal{B}$ is a maximal linearly independent set of vectors in V, i.e., adding any other vector to this set will make it linearly dependent.
- Every vector $\boldsymbol{x} \in V$ is a linear combination of vectors from $\mathcal{B}$, and every linear combination is unique, i.e., with

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{k} \psi_i \boldsymbol{b}_i \tag{2.77}$$

and $\lambda_i, \psi_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}_i \in \mathcal{B}$ it follows that $\lambda_i = \psi_i$, $i = 1, \ldots, k$.

- $\mathcal{B}$는 V의 basis
- $\mathcal{B}$는 minimal generating set
- $\mathcal{B}$는 V에 속한 선형 독립 벡터들의 maximal 집합

- 즉, 다른 벡터가 들어와 불필요한 중복이 생기게되면 선형 종속이 됩니다.

- (2.77)은 V는 임의의 벡터 v는 $\mathcal{B}$의 일차결합(선형결합)으로 표현할 수 있습니다.

예시

Example 2.16

- In $\mathbb{R}^3$, the *canonical/standard basis* is

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.78}$$

- Different bases in $\mathbb{R}^3$ are

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.2 \\ -1.3 \\ 3.5 \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.79}$$

- The set

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \tag{2.80}$$

is linearly independent, but not a generating set (and no basis) of $\mathbb{R}^4$: For instance, the vector $[1, 0, 0, 0]^\top$ cannot be obtained by a linear combination of elements in $\mathcal{A}$.

- conomical / standard basis → 표준 기저

집합 $\mathcal{A}$에 있는 열 벡터들은 선형 독립이지만, $\mathbb{R}^4$를 생성하지는 못합니다.

예를 들어, 벡터 $[1, 0, 0, 0]^T$은 $\mathcal{A}$의 요소들의 선형 결합으로 표현되지 않습니다.

Remark

모든 vector space V에는 basis $\mathcal{B}$이 있습니다.

앞서 본 예시처럼 하나의 벡터 공간에는 기저가 여러 가지 일 수 있고, 꼭 하나로 정해지는 것은 아닙니다.

하지만 어떤 기저를 선택하든 항상 그 안에 들어있는 벡터의 개수는 모두 동일합니다.

해당 책에서는 유한 차원(finite-dimensional) vector space 만 다룹니다.

이 경우 V의 차원(Dimension)은 V basis vector의 수가 되며, $\dim(V)$라고 씁니다.

만약 U 가 V의 subspace($U \subseteq V$)라면, $\dim(U) \leq \dim(V)$이며,

$U = V$ 일때, $\dim(U) = \dim(V)$ 입니다.

> $\dim(V) =$ **basis vector of** V (선형 독립한 최소 벡터 수, 기저 벡터 개수)

벡터 공간의 차원은 벡터 하나가 몇 개의 원소를 가지는지와는 관련이 없습니다.

즉, 벡터 하나가 2차원이어도 그 벡터 공간이 1차원일 수 있습니다.

$V = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- 이 벡터는 요소가 2개인 벡터 → $\mathbb{R}^2$ 안에 있는 벡터입니다.
- 하지만 이 벡터 하나로 생성되는 공간(span)은 직선(1차원)입니다.

  $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 와 같은 벡터만 포함되기 때문입니다.

다시말해, 벡터는 2차원 좌표계 안에 있지만 그 자체로 만드는 공간(span)은 단 하나의 방향(1차원, 직선)입니다.

Remark

subspace $U = \text{span}[x_1, \cdots, x_m] \subseteq \mathbb{R}^n$ 의 basis는 다음 3단계를 통해 찾을 수 있습니다.

1. spanning vectors를 행렬 A의 열로 둡니다.
2. A의 row-echelon form을 결정합니다.
3. pivot 열과 연관된 spanning vectors가 U의 basis 입니다.

Example 2.17 (Determining a Basis)
For a vector subspace $U \subseteq \mathbb{R}^5$, spanned by the vectors

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5, \tag{2.81}$$

we are interested in finding out which vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_4$ are a basis for U. For this, we need to check whether $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_4$ are linearly independent. Therefore, we need to solve

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}, \tag{2.82}$$

which leads to a homogeneous system of equations with matrix

$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.83}$$

With the basic transformation rules for systems of linear equations, we obtain the row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

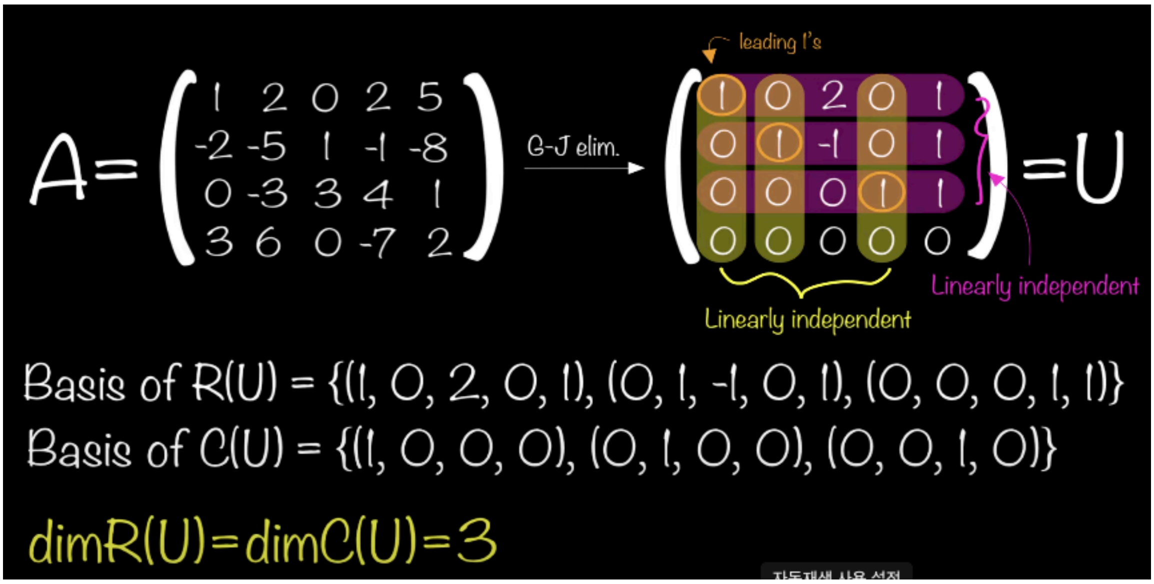
Rank

행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 에서 **선형 독립인 열의 개수는 선형 독립인 행의 개수와 같으며,**

이를 A의 **rank**라 하며 $\text{rk}(A)$로 표기합니다.

행렬의 Rank는 중요한 속성들을 가지고 있습니다.

- $\text{rk}(\text{A}) = \text{rk}(A^\top)$, (column rank는 row rank와 같습니다)



https://www.youtube.com/watch?v=xv2OAxtDvuc

- $(m \times n)$ 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$의 열은 $\dim(U) = \text{rk}(A)$인 subspace $U \subseteq \mathbb{R}^m$을 span합니다.

  이러한 subspace를 image 또는 range라 부릅니다.

  U의 basis는 A에 대해 가우스 소거법을 통해 찾을 수 있으며, pivot column과 동일합니다.

- $(m \times n)$ 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$의 행은 $\dim(W) = \text{rk}(A)$인 subspace $W \subseteq \mathbb{R}^n$을 span합니다.

  W의 basis 또한 위 속성과 동일합니다.

- 모든 $(n \times n)$ 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$에 대해 $\text{rk}(A) = n$ 일때만 A는 regular(invertible) 입니다.
  - 정방행렬 A, regular(invertible) → 역행렬 A^{-1} 존재
- 모든 $(m \times n)$ 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 이고 $all\ b \in \mathbb{R}^m$ 일 때, $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$ 이라면 선형연립방정식 $Ax = b$의 해를 구할 수 있습니다.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 에 대해, $Ax = b$에 대한 subspace의 해(solution)의 차원은 $n - \text{rk}(A)$ 입니다.

  해당 subspace를 **kernel** 또는 **null space**라고 부릅니다.

- 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$의 rank 가 같은 차원의 행렬 중에서 가질 수 있는 가장 큰 rank와 같을 때, 이 행렬을 **full-rank** 라고 부릅니다.

full rank matrix의 rank는 행의 개수와 열의 개수 중 더 작은 값, $\text{rk}(A) = min(m, n)$

만약 **full rank**가 아니라면 **rank deficient** 라고 합니다.

예시

Example 2.18 (Rank)

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
  $\boldsymbol{A}$ has two linearly independent rows/columns so that $\text{rk}(\boldsymbol{A}) = 2$.

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.
  We use Gaussian elimination to determine the rank:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.84}$$

  Here, we see that the number of linearly independent rows and columns is 2, such that $\text{rk}(\boldsymbol{A}) = 2$.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/04/ch2-6.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222161236624
- https://www.youtube.com/watch?v=HMST0Yc7EXE&list=PL_iJu012NOxdZDxoGsYidMf2_bERIQaP0&index=11
- https://www.youtube.com/watch?v=xv2OAxtDvuc