2.1 System of Linear Equations

연립일차선형방정식(System of Linear Equations)는 선형대수학의 중심이 되는 파트입니다. 많은 문제들은 연립선형방정식으로 표현, 공식 화 할 수 있고, 선형대수학은 이 문제를 풀 수 있는 방법을 제공합니다.

예시 2.1

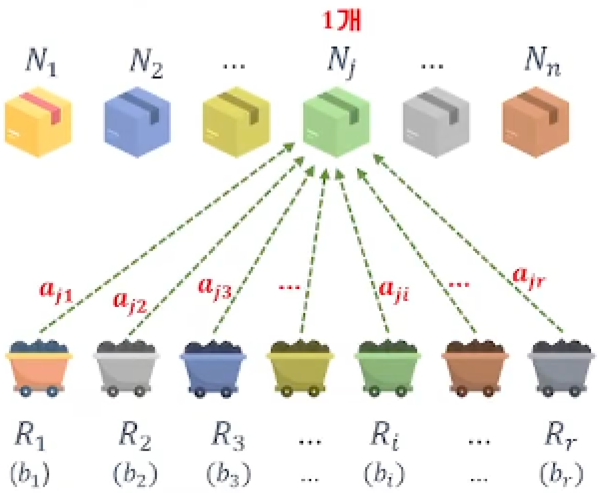

그림 2.1 연립선형방정식 예시1

- A 회사가 $N_1, ...N_n$ 제품을 생산
- 각 제품을 생산할 때 $R_1, ...R_m$ 의 리소스 필요
- 여기서 a_{ij} 는 N_j 라는 제품하나를 생산하기 위해서 필요한 리소스 R_i 하나를 표현합니다.

  $i = 1,\ \ldots\ and\ m\ and\ j = 1, \ldots n$
- 목적은 총 b_i 만큼의 R_i 리소스를 사용할 수 있을 때, 남는 자원없이 최대로 생산할 수 있는 수를 찾는 것입니다.

  $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$
- 따라서, 최적의 제품 계획 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 은 다음의 연립방정식을 만족해야합니다.

  $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

  $\ldots$

  $a_m 1x1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\ \ \rightarrow (2.3)$

- 해당 식(2.3)은 연립선형방정식의 일반적인 형태(general form)이고 $x_1, \ldots x_n$은 방정식에서 미지의 값입니다.
- 식 (2.3)을 만족하는 모든 n - 튜플 $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}^n$은 이 연립선형방정식의 해입니다.

예시 2.2

1. 해가 없는 경우

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
2. $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$
3. $2x_1 + \quad + 3x_3 = 1$

위 연립선형방정식은 해가 없습니다.

1번, 2번 식을 더한 결과는 3번 식과 모순이 있습니다.

2. 해가 하나인 경우

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
2. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
3. $\quad\quad x_2 + x_3 = 2$

(1, 1, 1)민 연립방정식의 해가 될 수 있음

3. 무수히 많은 경우

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
2. $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$
3. $2x_1 \quad\quad + 3x_3 = 5$

1번식 + 2번식 = 3번식이므로, 세 번째 방정식은 생략할 수 있습니다.(redundancy)

그리고 1번, 2번식으로 부터 $2x_1 = 5 - 3x_3,\ 2x_2 = 1 + x_3$을 얻을 수 있으며, $x_3 = a \in \mathbb{R}$이라고 정의한다면, 이 연립선형방정식의 해는 다음을 만족하는 triplet 이 됩니다.

$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a, a\right),\ a \in \mathbb{R}$

식이 적을 때는 가감법, 대입법을 통해 해결이 가능합니다. 하지만 무수히 많은 방정식과 미지수의 개수를 위 방법을 통해 푸는 것은 상식적으로 불가능합니다.

Chapter2.3 에서는 연립선형방정식을 푸는 다양한 방법 중 하나를 소개합니다.

또한 연립선형방정식을 더 체계적으로 접근하기 위해 계수 a_{ij}를 벡터로 표현하고, 이러한 벡터를 모아서 **행렬** 로 표현합니다.

$$
\begin{aligned}
&x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
&\rightleftharpoons \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://www.youtube.com/watch?v=fnupiXknMoQ&list=PLdEdazAwz5Q_n47tqf0QY94ASCmWqeGX1&index=6
- https://www.youtube.com/watch?v=tLwJmC1NMKA&list=PLDXd6V7UxqskqH5HYlXnP6sjLHfm_92-s&index=2
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/06/29/ch2-1.html