3-6. Orthogonal complement

지금까지 orthogonality(직교성)에 대해서 정의를 했습니다. 이제는 서로 직교하는 벡터 공간들을 살펴보겠습니다.

이 개념은 Ch10에서 linear dimensionality reduction(선형 차원 축소)를 기하하적인 관점에서 논의할 때 중요한 역할을 합니다.

D-차원 벡터 공간 V와 그 부분 공간 $U \subseteq V$가 M-차원이라고 가정해봅시다.

이때 U의 orthogonal complement $U^{\perp}$는 V 안의 $(D - M)$ 차원 부분공간이며, U의 모든 벡터에 직교하는 V의 벡터들로 구성되어있습니다.

또한 $U \cap U^{\perp} = \{0\}$이므로, V의 임의의 벡터 $x \in V$는 다음과 같이 유일하게 분해될 수 있습니다.

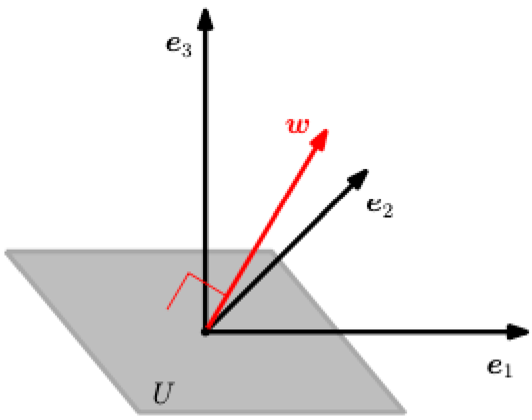
$$\boldsymbol{x} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \boldsymbol{b}_m + \sum_{j=1}^{D-M} \psi_j \boldsymbol{b}_j^{\perp}, \quad \lambda_m,\ \psi_j \in \mathbb{R},$$

여기서 $(b_1, \ldots, b_M)$은 U의 기저이고, $(b_1^{\perp}, \ldots, b_{D-M}^{\perp})$은 $U^{\perp}$의 기저입니다.

따라서 orthogonal complement은 3차원 벡터 공간에서 2차원 평면 U를 설명할 때도 사용할 수 있습니다.

예를 들어, 단위 벡터 w ($||w|| = 1$) 가 평면 U에 직교한다면, 이 벡터 w는 $U^{\perp}$의 기저 벡터가 됩니다.

Figure 3.7 A plane U in a three-dimensional vector space can be described by its normal vector, which spans its orthogonal complement $U^{\perp}$.



벡터 w에 직교하는 모든 벡터는 반드시 평면 U 위에 놓이며, 이 벡터 w를 U의 법선 벡터(normal vector)라고 부릅니다.

일반적으로, orthogonal complement은 n차원 벡터 공간 및 affine space 에서의 hyperplane(초평면)을 설명하는데 사용할 수 있습니다.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/09/ch3-6.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222256670118