3-5. Orthonormal Basis

Section 2.6.1에서는 basis vector의 특징에 대해서 살펴봤습니다. n-차원의 벡터 공간에서 n개의 basis vector가 필요하다는 것을 살펴봤습니다.

즉, n개의 vector가 서로 선형 독립(linearly independent)입니다.

3.3장, 3.4장에서는 벡터의 길이와 두 벡터 사이의 각도에 대해서 살펴봤습니다.

이번 장에서는 basis vectors가 서로 직교하는 경우와 각 basis vector의 길이가 1인 경우에 대해 배웁니다.

서로 직교하고 길이가 1인 벡터를 Orthonormal basis (직교 정규 기저)라고 부릅니다.

정의 3.9 (Orthonormal basis)

n - 차원 벡터 공간 V 와 V의 basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$가있을 때,

$$\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle = 0 \quad \text{for } i \neq j \tag{3.33}$$
$$\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i \rangle = 1 \tag{3.34}$$

모든 $i, j = 1, \ldots, n$에서 위 조건이 성립할 때, 이 basis를 orthonormal basis(ONB)라고 합니다.

2.6.1 장에서는 가우스 소거법 (Gaussian elimination)을 사용하여 주어진 vector space에 basis vector를 찾을 수 있었습니다.

non-orthogonal(직교 X), unnormalizaed(정규화 X) 한 basis vector 집합 $\{\tilde{b_1}, \ldots, \tilde{b_n}\}$이 있다고 가정해봅니다.

이 벡터들을 하나의 행렬로 묶어 $\tilde{B} = [\tilde{b_1}, \ldots, \tilde{b_n}]$를 만든 뒤에,

첨가행렬(augmented matrix) $[\tilde{B}\tilde{B}^T|\tilde{B}]$ 에 대해 가우스 소거법을 적용합니다.

이 과정을 통해 orthonormal basis를 얻을 수 있습니다.

이러한 방식으로 orthonormal basis를 구성하는 절차를 Gram-Schmidt Process라고 합니다.

예시 3.8 (Orthonormal Basis)

Example 3.8 (Orthonormal Basis)
The canonical/standard basis for a Euclidean vector space $\mathbb{R}^n$ is an orthonormal basis, where the inner product is the dot product of vectors.
In $\mathbb{R}^2$, the vectors

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{3.35}$$

form an orthonormal basis since $\boldsymbol{b}_1^\top \boldsymbol{b}_2 = 0$ and $\|\boldsymbol{b}_1\| = 1 = \|\boldsymbol{b}_2\|$.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/09/ch3-5.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222193884222