3-3. Lengths and Distances

내적이 정의된 공간에서는 아래와 같이 **벡터의 길이(Norm)**를 정의할 수 있습니다.

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

내적과 norm은 모든 내적이 norm을 유도한다는 점에저 밀접하게 연관되어있습니다.

내적을 통해 벡터의 길이를 계산할 수 있지만, 모든 norm에 의해 유도되는 것은 아닙니다.

예를 들어, Manhattan norm은 내적없이 계산되는 norm입니다.

이번 장에서는 내적에 의해 정의되는 norm을 중심으로 기하하적 개념(lengths, distance, angles)에 대해서 알아봅니다.

Remark (코시-슈바르츠 부등식)

Remark (Cauchy-Schwarz Inequality). For an inner product vector space $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ the induced norm $\| \cdot \|$ satisfies the *Cauchy-Schwarz inequality*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| . \tag{3.17}$$

- 두 벡터의 내적은 각 벡터의 길이를 곱한 것보다 크지 않다.
- 추후 해당 내용이 나오겠지만, 직관적으로 다음과 같은 관계를 수학적으로 보장해줍니다.
    - 벡터 사이의 각도
    - 코사인 유사도
    - 정규화된 유사도 계산

예시 3.5 (Lengths of Vectors Using Inner Products)

Example 3.5 (Lengths of Vectors Using Inner Products)
In geometry, we are often interested in lengths of vectors. We can now use an inner product to compute them using (3.16). Let us take $\boldsymbol{x} = [1, 1]^\top \in \mathbb{R}^2$. If we use the dot product as the inner product, with (3.16) we obtain

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \tag{3.18}$$

as the length of $\boldsymbol{x}$. Let us now choose a different inner product:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^\top \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = x_1 y_1 - \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2 . \tag{3.19}$$

If we compute the norm of a vector, then this inner product returns smaller values than the dot product if x_1 and x_2 have the same sign (and $x_1 x_2 > 0$); otherwise, it returns greater values than the dot product. With this inner product, we obtain

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 1 - 1 + 1 = 1 \implies \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1} = 1 , \tag{3.20}$$

such that $\boldsymbol{x}$ is “shorter” with this inner product than with the dot product.

- 내적의 정의가 바뀌면 같은 벡터라도 길이(Norm)이 달라질 수 있다는 것을 보여주는 예시입니다.

정의 3.6 (Distance and Metric)

내적 공간 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 에서 거리는 다음과 같이 정의됩니다.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle} \tag{3.21}$$

내적으로 dot product를 사용하면, 거리(distance)는 Euclidean distance라고 부릅니다.

metric은 다음 mapping으로 정의됩니다.

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

Remark

벡터의 길이를 구할 때 내적이 꼭 필요한 것은 아닙니다. 마찬가지로 벡터 사이의 거리도 꼭 내적이 필요한 것은 아닙니다. Norm만 있어도 벡터의 거리를 정의할 수 있습니다.

- metric d 는 다음 세가지 조건을 만족해야합니다.

A metric d satisfies the following:

positive definite
1. d is *positive definite*, i.e., $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ and $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

symmetric
2. d is *symmetric*, i.e., $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

triangle inequality
3. *Triangle inequality:* $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

Remark (내적 vs 거리)

정의 3.3, 3.6에서 배우겠지만, 내적과 거리의 성질이 비슷해보이지만, 실제로는 정반대 방향으로 작용됩니다.

예를 들어 벡터 x, y가 매우 비슷하면

- 내적 $\langle x, y \rangle$ 는 커집니다.
- 거리 $d(x, y)$는 작아집니다.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/08/ch3-3.html