2-5 Linear Independence

벡터는 **덧셈**, **스칼라 곱**을 할 수 있는데, **closure 성질**에 의해 해당 연산의 결과는 **Vector Space** 안에서 찾을 수 있습니다.

그렇다면 하나의 벡터 $\vec{v}$ 를 계속 더하고, **λ(스칼라)**를 곱하는 과정을 반복하면 $\vec{v}$ **로 전체 Vector Space**를 만들어 낼 수 있을 것 같습니다. 이러한 벡터 집합을 **basis(기저)**라고 합니다. (basis는 ch.2.6.1에서 다룰 예정)

> 이번 장에서는 전체 **Vector space**를 **generate하는** 최소한의 벡터들을 찾는 데 집중할 것입니다.

용어 정리

- trival solution
  - 자명해
  - Linear system의 해가 0벡터일 때
- non-trival solution
  - 비자명해
  - 해가 0벡터 가 아닌 경우

선형 결합 (Linear Cmbinations)

Definition 2.11 (Linear Combination)**.** Consider a vector space V and a finite number of vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$. Then, every $\boldsymbol{v} \in V$ of the form

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \in V \tag{2.65}$$

with $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ is a *linear combination* of the vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

- 쉽게 말해 벡터 $\vec{v}$ 를 계속 더하고, **λ(스칼라)**를 곱하는 과정을 반복하는 것을 선형결합(Linear Combination) 이라고 부릅니다

자세하게 살펴보면,

- Vector space V
- 유한한 벡터 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in V$
- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda i x_i \in V$
형태를 만족하는 모든 $v \in V$를 벡터 $x_1, \cdots, x_k$의 **linear combination**이라고 합니다.

0-벡터는 항상 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 의 Linear combination(선형 결합)으로 표현할 수 있습니다.

$0 = \sum_{i=1} K0x_i, \quad 0x_i$ 이 항상 $True$

선형 독립 (Linear Independence, Linearly independence)

Definition 2.12 (Linear (In)dependence). Let us consider a vector space V with $k \in \mathbb{N}$ and $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$. If there is a non-trivial linear combination, such that $\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ with at least one $\lambda_i \neq 0$, the vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ are *linearly dependent*. If only the trivial solution exists, i.e., $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ the vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ are *linearly independent*.

> 쉽게 말해, 집합 $S = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$의 벡터들은
>
> $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_n v_n = \vec{0}$을 만족하는 계수들이
>
> $c_1 = 0, \ c_2 = 0, \ c_3 = 0, \ \cdots, \ c_n = 0$ 이외에는 존재하지 않을 때, 선형적으로 독립이라고 합니다.

→ 자명해(tival solution)만을 가진다 라고 표현할 수 있습니다.

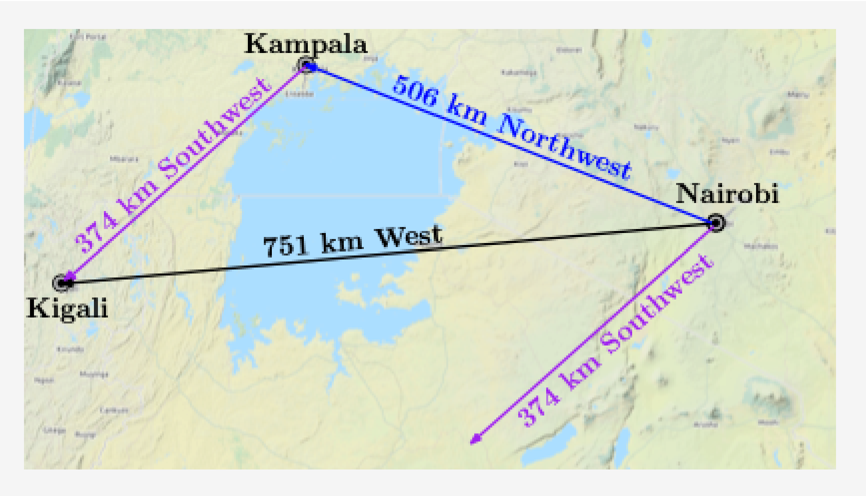
선형 종속 (Linear Dependence, Linearly dependece)

하지만 위 예시에서 계수 c_n 중 하나라도 0이 아닌 경우에는 선형 종속이라고 합니다.

즉, 어떤 벡터 하나가, 나머지 벡터들로 만들어 질 수 있다는 뜻입니다.

→ non-trival solution 입니다.

예시 1



- 위 그림에서는 3개의 vector를 보여줍니다.
  - $\vec{a}$, Kigali-Kampala(374km)
  - $\vec{b}$, Kampala-Nairobi(506km)
  - $\vec{c}$, Kigali-Nairobi(751km))
- $\vec{a}, \vec{b}$ 벡터는 각자 서로 다른 벡터를 표현할 수 없기 때문에 두 벡터는 선형 독립입니다.
- 하지만 $\vec{c}$는 다른 두 벡터의 선형 결합으로 표현할 수 있습니다.
- 따라서, 벡터 집합(3개의 벡터)은 선형 종속입니다.

선형 독립의 성질

- k개의 벡터들은 선형 독립이거나, 선형 종속 둘 중에 하나입니다.
- $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 벡터 중 하나가 0-벡터이면 선형 독립입니다.
- 벡터 집합 $\{x_1, \cdots, x_k : x_i \neq 0, i = 1, \cdots, l\}, k \geq 2$

  에서 어느 한 벡터를 이 벡터를 제외한 나머지 벡터들의 선형결합으로 표현할 수 있다면, 이 벡터 집합은 선형 독립입니다.

  만약, 한 벡터가 다른 벡터의 배수 $(x_i = \lambda x_j)$라면 벡터집합은 선형종속입니다.

- 가우스 소거법을 사용하여 벡터 집합이 선형 독립인지 확인 할 수 있습니다.

  모든 열이 pivot columns라면 모든 열 벡터들의 집합은 선형 독립

만약 적어도 하나의 non-pivot column이 존재한다면 열 벡터들으의 집합은 선형 종속입니다.

Example 2.14
Consider $\mathbb{R}^4$ with

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.67}$$

To check whether they are linearly dependent, we follow the general approach and solve

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.68}$$

for $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$. We write the vectors x_i, $i = 1, 2, 3$, as the columns of a matrix and apply elementary row operations until we identify the pivot columns:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.69}$$

Here, every column of the matrix is a pivot column. Therefore, there is no non-trivial solution, and we require $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ to solve the equation system. Hence, the vectors x_1, x_2, x_3 are linearly independent.

출처

- Mathmatics for Machine Learning (https://github.com/mml-book/mml-book.github.io)
- https://junstar92.github.io/mml-study-note/2022/07/03/ch2-5.html
- https://blog.naver.com/walk_along/222159204505
- https://www.youtube.com/watch?v=mOOI4-BfjGQ&list=PL_iJu012NOxdZDxoGsYidMf2_bERIQaP0&index=9
- https://www.youtube.com/watch?v=TEhZ8HwxULE&list=PLdEdazAwz5Q_n47tqf0QY94ASCmWqeGX1&index=26