高等数学公式背诵

王泠风

2024 年 10 月 04 日

1 极限

1.1 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

1.2 泰勒公式极限应用(x→0)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad (1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$$

2 常用求导公式

$$(\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x \qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3 常用积分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \ \ (|x|>|a|)$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \qquad \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

4 反函数导数

5 中值定理

5.1 泰勒公式

5.1.1 泰勒原式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

5.1.2 泰勒展开式

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} && = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n && = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \ \ (-1 < x < 1) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n && = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \ \ (-1 < x < 1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} && = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \ \ (-1 < x \le 1)
\end{aligned}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \begin{cases} x \in (-1,1), & \text{当} a \leq -1, \\ x \in (-1,1], & \text{当} -1 < a < 0, \\ x \in [-1,1], & \text{当} a > 0 \text{且} a \notin \mathbb{N}_+, \\ x \in \mathbb{R}, & \text{当} a \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

6 罗尔定理

7 微分方程

8 欧拉方程

9 常用极数

10 曲率半径

11 形心公式

12 旋转曲面

13 空间曲线