高等数学知识点

王泠风

2024 年 10 月 04 日

1　基础公式

1.1　不等式

$$|a \pm b| \le |a| + |b| \qquad ||a| - |b|| \le |a - b| \qquad \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\sin x \le x \le \tan x \qquad \frac{1}{1+x} \le \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} \qquad \ln(1+x) \le x \le e^x - 1$$

1.2　三角函数

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad \tan\frac{x}{2} = u$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2　极限

2.1　两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

2.2 泰勒公式极限应用 (x→0)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

2.3 极限不存在

- 极限趋于无穷
- 只存在一个极限
- 左右极限不等
- 震荡不存在
- 函数无定义

2.4 求极限

极限转化为积分 (2017 年 16 题) 极限可能是积分的极限形式，转化为积分处理。

3 一元函数微分学

3.1 反函数导数

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad x''_{yy} = \frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

3.2 常用求导公式

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3.3 中值定理

3.3.1 罗尔定理

$$f'(x)+kf(x)\Rightarrow f(x)e^{kx} \qquad [f^2(x)]'=2f(x)f'(x) \qquad [f(x)f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$$

3.3.2 泰勒公式

泰勒原式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

泰勒展开式

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} && = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} && = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n && = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)\ \ (-1<x<1)\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n && = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)\ \ (-1<x<1)\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} && = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\ \ (-1<x\le 1)
\end{aligned}$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\ \ \begin{cases} x\in(-1,1), & 当a\le -1,\\ x\in(-1,1], & 当-1<a<0,\\ x\in[-1,1], & 当a>0且a\notin\mathbb{N}_+,\\ x\in\mathbb{R}, & 当a\in\mathbb{N}_+.\end{cases}$$

3.4 求导数

3.4.1 求高阶导数

归纳法

高阶求导公式

泰勒公式 (2017 年 9 题) 将 $f(x)$ 化为已知的泰勒展开式，再通过比较系数求出 $f^{(n)}(x_0)$。

4 一元函数积分学

4.1 常用积分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \ \ (|x|>|a|)$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \qquad \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

4.2 点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times 1, & n\text{为大于1的奇数}, \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}. \end{cases}$$

积分 0 到 π 和 0 到 2π 根据被积函数在被积区间的正负性判断是否为 0。

5 多元函数微分学

6 多元函数积分学

7 常微分方程

7.1 一阶微分方程

7.1.1 变量可分离型

7.1.2 可化为变量可分离型

7.1.3 一阶线性微分方程

方程结构 $y' + p(x)y = q(x)$

通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C\right]$$

7.1.4 伯努利方程

方程结构为 $y' + p(x)y = q(x)y^n$，令 $z = y^{1-n}$ 可推导出的结构为 $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ 即一个一阶线性微分方程，求 z 然后代换为 y。

7.2 二阶可降阶微分方程

7.2.1 y”=f(x,y’) 型 (方程中不显含未知函数 y)

令 $y' = p(x)$，$y'' = p'$，求 p 然后积分

7.2.2　y”=f(y,y’) 型 (方程中不显含自变量 x)

令 $y' = p$，$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$，求 p 然后积分

7.3　高阶线性微分方程

7.3.1　二阶常系数齐次线性微分方程

$r^2 + pr + q = 0$ 求 $\Delta = p^2 - 4q$

$\Delta > 0 \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0 \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$

$\Delta < 0 \quad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

7.3.2　二阶常系数非齐次线性微分方程

方程结构　$y'' + py' + qy = f(x)$

$$\text{当} f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}\text{，设} y = e^{\alpha x} Q_n(x) x^k\text{，其中} \begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ Q_n(x)\text{为 x 的 n 次多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha\text{不是特征根} \\ 1, & \alpha\text{是单特征根} \\ 2, & \alpha\text{是二重特征根} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{当} f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x\right]\text{，设} y = e^{\alpha x}\left[Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x\right] x^k\text{，}$$

$$\text{其中} \begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l = max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 的两个不同的 l 次多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i\text{不是特征根}, \\ 1, & \alpha \pm \beta i\text{是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

7.3.3　n 阶常系数齐次线性微分方程

7.3.4　欧拉方程

方程结构　$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$

固定解法

当 $x > 0$ 时　令 $x = e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

当 $x<0$ 时　令 $x=-e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(-e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

8　无穷极数

8.1　常用极数

P 极数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\le 1, & 发散.\end{cases}$　　P 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\le 1, & 发散.\end{cases}$

广义 P 极数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\le 1, & 发散.\end{cases}$　　广义 P 积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\le 1, & 发散.\end{cases}$

等比极数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}|q|<1, & 收敛,\\ |q|\ge 1, & 发散.\end{cases}$

8.2　两个特殊极数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\ \ (-1\le x<1)\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ \ (-1<x<1)$$

8.3　极数敛散性判别

8.3.1　正项极数

收敛原则

比较判别法

比较判别法极限形式

比值判别法

根值判别法

8.3.2　交错级数

莱布尼茨判别法

8.3.3　任意项级数

绝对收敛

条件收敛

8.4 幂级数

8.4.1 幂级数收敛域

阿贝尔定理

收敛域求法

8.4.2 幂级数求和函数

8.4.3 函数展开为幂级数

9 微积分几何应用

9.1 形心公式

9.2 旋转曲面

9.3 空间曲线

9.3.1 曲线积分

积分与路径无关

$$\text{积分与路径无关} \Rightarrow \begin{cases} Pdx + Qdy, & \text{是} f(x,y) \text{的全微分}, \\ \oint_L Pdx + Qdx = 0, & \text{即} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$