高等数学知识点

王泠风

2024 年 10 月 04 日

1 基础公式

1.1 不等式

$$|a \pm b| \le |a| + |b| \qquad ||a| - |b|| \le |a - b| \qquad \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\sin x \le x \le \tan x \qquad \frac{1}{1+x} \le \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} \qquad \ln(1+x) \le x \le e^x - 1$$

1.2 三角函数

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad \tan\frac{x}{2} = u$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2 极限

2.1 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

2.2 泰勒公式极限应用 (x→0)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

2.3 极限不存在

- 极限趋于无穷
- 只存在一个极限
- 左右极限不等
- 震荡不存在
- 函数无定义

2.4 求极限

极限转化为积分 (2017 年 16 题) 极限可能是积分的极限形式，转化为积分处理。

3 一元函数微分学

3.1 反函数导数

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad x''_{yy} = \frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

3.2 常用求导公式

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3.3 中值定理

涉及函数的中值定理 ：有界与最值定理、介值定理、平均值定理、零点定理

涉及导数的中值定理 ：费马定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒公式。

3.3.1 罗尔定理

$$f'(x)+kf(x)\Rightarrow f(x)e^{kx} \qquad [f^2(x)]'=2f(x)f'(x) \qquad [f(x)f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$$

3.3.2 泰勒公式

泰勒原式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

泰勒展开式

$$\begin{aligned}
e^x&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} && =1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\sin x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && =x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\cos x&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} && =1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\ \ (-\infty<x<+\infty)\\
\frac{1}{1-x}&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n && =1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)\ \ (-1<x<1)\\
\frac{1}{1+x}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n && =1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)\ \ (-1<x<1)\\
\ln(1+x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} && =x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\ \ (-1<x\le 1)
\end{aligned}$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\quad\begin{cases}x\in(-1,1), & 当a\le -1,\\ x\in(-1,1], & 当-1<a<0,\\ x\in[-1,1], & 当a>0且a\notin\mathbb{N}_+,\\ x\in\mathbb{R}, & 当a\in\mathbb{N}_+.\end{cases}$$

3.4 求导数

3.4.1 求高阶导数

归纳法

高阶求导公式

泰勒公式 (2017 年 9 题) 将 $f(x)$ 化为已知的泰勒展开式，再通过比较系数求出 $f^{(n)}(x_0)$。

4 一元函数积分学

4.1 常用积分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a>0)$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \ \ (|x|>|a|)$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \qquad \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

4.2 点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times 1, & n\text{为大于1的奇数}, \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}. \end{cases}$$

积分 0 到 π 和 0 到 2π 根据被积函数在被积区间的正负性判断是否为 0。

5 多元函数微分学

5.1 链式求导法则

5.2 隐函数求导法则

隐函数求导法则 1 当 $F(x,y)=0$ 时 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

隐函数求导法则 2 当 $F(x,y,z)=0$ 时 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

5.3 二元函数的极值

5.3.1 无条件极值

二元函数取极值的充分条件 记 $\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0) = A, \\ f''_{xy}(x_0,y_0) = B, \\ f''_{yy}(x_0,y_0) = C, \end{cases}$ 则 $\Delta = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{极值} \begin{cases} A < 0 \Rightarrow & \text{极大值} \\ A > 0 \Rightarrow & \text{极小值} \end{cases} \\ < 0 \Rightarrow \text{非极值} \\ = 0 \Rightarrow \text{方法失效} \end{cases}$

方法失效时通常不是极值，可利用极值定义通过举反例证明，常用反例为 $x=y$、$x=-y$ 和 $y=0$。

5.3.2 条件极值

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极值。

构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

令 $\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0,\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0;\end{cases}$

解得 x,y,z,λ,μ 的值，代入 $f(x,y,z)$ 即可。

6 多元函数积分学

6.1 普通对称性和轮换对称性

普通对称性需要观察函数特征，轮换对称性一定成立，但只有在区域 D 轮换对称后不变的情况下才有化简的作用。

6.2 二重积分

6.2.1 直角坐标系

6.2.2 极坐标系

6.2.3 直角坐标系与极坐标系的转换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

6.3 三重积分

6.3.1 球坐标系

令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

7 常微分方程

7.1 一阶微分方程

7.1.1 变量可分离型

7.1.2 可化为变量可分离型

7.1.3 一阶线性微分方程

方程结构　$y'+p(x)y=q(x)$

通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx + C\right]$$

7.1.4 伯努利方程

方程结构为 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，令 $z=y^{1-n}$ 可推导出的结构为 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 即一个一阶线性微分方程，求 z 然后代换为 y。

7.2 二阶可降阶微分方程

7.2.1 y”=f(x,y’) 型 (方程中不显含未知函数 y)

令 $y'=p(x)$，$y''=p'$，求 p 然后积分

7.2.2 y”=f(y,y’) 型 (方程中不显含自变量 x)

令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$，求 p 然后积分

7.3 高阶线性微分方程

7.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程

$r^2+pr+q=0$ 求 $\Delta=p^2-4q$

$\Delta>0 \quad y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

$\Delta=0 \quad y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

$\Delta<0 \quad y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

方程结构 $\quad y''+py'+qy=f(x)$

$$\text{当}f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\text{，设}y=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k\text{，其中}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ Q_n(x)\text{为 x 的 n 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\text{不是特征根} \\ 1, & \alpha\text{是单特征根} \\ 2, & \alpha\text{是二重特征根} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{当}f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]\text{，设}y=e^{\alpha x}\left[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]x^k,$$

$$\text{其中}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l=max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 的两个不同的 l 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\pm\beta i\text{不是特征根}, \\ 1, & \alpha\pm\beta i\text{是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

7.3.3 n 阶常系数齐次线性微分方程

7.3.4 欧拉方程

方程结构 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

固定解法

当 $x>0$ 时 令 $x=e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

当 $x<0$ 时 令 $x=-e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(-e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

8 无穷极数

8.1 极数敛散性判别

8.1.1 正项极数

收敛原则、比较判别法、比较判别法极限形式、比值判别法、根值判别法

8.1.2 交错级数

莱布尼茨判别法

8.1.3 任意项级数

绝对收敛

条件收敛

8.1.4 常用抽象数项极数敛散性 (p220)

8.1.5 常用极数的敛散性

$$\text{P 极数}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1, & \text{收敛,}\\ p\le 1, & \text{发散.}\end{cases}\qquad \text{P 积分}\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1, & \text{收敛,}\\ p\le 1, & \text{发散.}\end{cases}$$

$$\text{广义 P 极数}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases}p>1, & \text{收敛,}\\ p\le 1, & \text{发散.}\end{cases}\qquad \text{广义 P 积分}\quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}p>1, & \text{收敛,}\\ p\le 1, & \text{发散.}\end{cases}$$

$$\text{等比极数}\quad \sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}|q|<1, & \text{收敛,}\\ |q|\ge 1, & \text{发散.}\end{cases}$$

8.2 幂级数

8.2.1 幂级数收敛域

阿贝尔定理

收敛域求法

8.2.2 幂级数求和函数

两个特殊的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\ \ (-1\le x<1)\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ \ (-1<x<1)$$

8.2.3 函数展开为幂级数

8.3 傅里叶级数 (p233)

9 微积分几何应用

9.1 一元函数微分学

9.1.1 曲率半径

曲率公式

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

曲率半径公式

$$R=\frac{1}{k}$$

9.2 一元函数积分学

9.2.1 平面曲线弧长

直角坐标方程 $s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.$

参数方程 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.$

极坐标方程 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta.$

9.3 多元函数的微分学

9.3.1 旋转曲面

定义： 曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面。

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 旋转一周所形成的曲面，求法如下：

构建方程组，方程组包括三部分，分别是：曲线公式、垂直、等距

垂直： 在直线上取一点为 M_0，在曲线上取一点为 M_1，在 M_1 的纬圆 (即 M_1 绕直线形成的圆) 上取一点为 P，则 M_1P 与直线垂直。

等距：　M_0M_1 与 M_0P 等距。

解方程组保留 x,y,z 即可得旋转曲面方程。

9.3.2 空间曲线 (p265)

9.3.3 空间曲面

9.3.4 方向导数和梯度

方向导数　$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{u}'_x(P_0)\cos\alpha + \mathbf{u}'_y(P_0)\cos\beta + \mathbf{u}'_z(P_0)\cos\gamma$

梯度　$\mathbf{grad}u\,|_{P_0} = \left(\mathbf{u}'_x(P_0), \mathbf{u}'_y(P_0), \mathbf{u}'_z(P_0)\right)$

注：　梯度是一个向量，他的方向与是最大方向导数的方向，他的模是方向导数的最大值。

9.3.5 散度与旋度

散度　$div\mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

旋度　$\mathbf{rotA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

9.4 多元函数积分学

9.4.1 第一型曲线积分

9.4.2 第一型曲面积分

9.4.3 形心公式 (p282)

9.4.4 转动惯量

9.4.5 引力 (p283)

9.4.6 第二型曲线积分 (平面)

格林公式

积分与路径无关　$\Rightarrow \begin{cases} Pdx + Qdy, & \text{是}f(x,y)\text{的全微分}, \\ \oint_L Pdx + Qdx = 0, & \text{即}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$

9.4.7 第二型曲面积分

高斯公式

9.4.8 第二型曲线积分 (空间)

斯托克斯公式

9.4.9 曲线积分