

# 高等数学知识点

王泠风

2024 年 10 月 04 日

## 1 基础公式

### 1.1 不等式

$$\begin{aligned} |a \pm b| &\leq |a| + |b| & ||a| - |b|| &\leq |a - b| & \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ \sin x &\leq x \leq \tan x & \frac{1}{1+x} &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} & \ln(1+x) &\leq x \leq e^x - 1 \end{aligned}$$

### 1.2 三角函数

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} & \tan \frac{x}{2} &= u \\ \sin \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} & \sin x &= \frac{2u}{1 + u^2} \\ \cos \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} & \cos x &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \end{aligned}$$

## 2 极限

### 2.1 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## 2.2 泰勒公式极限应用 ( $x \rightarrow 0$ )

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

## 2.3 极限不存在

极限趋于无穷、只存在一个极限、左右极限不等、震荡不存在、函数无定义

## 2.4 求极限

极限转化为积分 (2017 年 16 题)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$  极限可能是积分的极限形式, 转化为积分处理。

# 3 一元函数微分学

## 3.1 反函数导数

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$x''_{yy} = \frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

## 3.2 常用求导公式

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

## 3.3 中值定理

涉及函数的中值定理 : 有界与最值定理、介值定理、平均值定理、零点定理

涉及导数的中值定理 : 费马定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒公式。

3.3.1 罗尔定理

$f'(x) + kf(x) \Rightarrow f(x)e^{kx}$        $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$        $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$

3.3.2 泰勒公式

泰勒原式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

泰勒展开式

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (-\infty < x < +\infty)$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (-\infty < x < +\infty)$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (-\infty < x < +\infty)$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad (-1 < x < 1)$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (-1 < x < 1)$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad (-1 < x \leq 1)$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \begin{cases} x \in (-1, 1), & \text{当 } a \leq -1, \\ x \in (-1, 1], & \text{当 } -1 < a < 0, \\ x \in [-1, 1], & \text{当 } a > 0 \text{ 且 } a \notin \mathbb{N}_+, \\ x \in \mathbb{R}, & \text{当 } a \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

3.4 求导数

3.4.1 求高阶导数

归纳法

高阶求导公式

泰勒公式 (2017 年 9 题) 将  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  化为已知的泰勒展开式，再通过比较系数求出  $f^{(n)}(x_0)$ 。

## 4 一元函数积分学

### 4.1 常用积分公式

$$\begin{aligned}\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\ \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| + C & \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\ \int \cot x dx &= \ln |\sin x| + C & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C \\ \int \sec x dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C \quad (|x| > |a|) \\ \int \csc x dx &= \ln |\csc x - \cot x| + C & \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \\ \int \tan^2 x dx &= \tan x - x + C & \int \cot^2 x dx &= -\cot x - x + C\end{aligned}$$

### 4.2 点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times 1, & n \text{ 为大于1的奇数,} \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数.} \end{cases}$$

积分 0 到  $\pi$  和 0 到  $2\pi$  根据被积函数在被积区间的正负性判断是否为 0。

## 5 多元函数微分学

### 5.1 链式求导法则

### 5.2 隐函数求导法则

隐函数求导法则 1 当  $F(x, y) = 0$  时  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$

隐函数求导法则 2 当  $F(x, y, z) = 0$  时  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

### 5.3 二元函数的极值

#### 5.3.1 无条件极值

$$\text{二元函数取极值的充分条件} \quad \text{记} \begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C, \end{cases} \quad \text{则} \Delta = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{极值} \begin{cases} A < 0 \Rightarrow \text{极大值} \\ A > 0 \Rightarrow \text{极小值} \end{cases} \\ < 0 \Rightarrow \text{非极值} \\ = 0 \Rightarrow \text{方法失效} \end{cases}$$

方法失效时通常不是极值，可利用极值定义通过举反例证明，常用反例为  $x = y$ 、 $x = -y$  和  $y = 0$ 。

#### 5.3.2 条件极值

求目标函数  $u = f(x, y, z)$  在条件  $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$  下的极值。

构造辅助函数  $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0, \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0, \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0, \\ F'_\mu = \psi(x, y, z) = 0; \end{cases}$$

解得  $x, y, z, \lambda, \mu$  的值, 代入  $f(x, y, z)$  即可。

## 6 多元函数积分学

### 6.1 普通对称性和轮换对称性

普通对称性需要观察函数特征, 轮换对称性一定成立, 但只有在区域  $D$  轮换对称后不变的情况下才有化简的作用。

### 6.2 二重积分

#### 6.2.1 直角坐标系

#### 6.2.2 极坐标系

#### 6.2.3 直角坐标系与极坐标系的转换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

### 6.3 三重积分

#### 6.3.1 球坐标系

$$\text{令} \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

## 7 常微分方程

### 7.1 一阶微分方程

#### 7.1.1 变量可分离型

#### 7.1.2 可化为变量可分离型

#### 7.1.3 一阶线性微分方程

方程结构  $y' + p(x)y = q(x)$

通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) dx + C \right]$$

### 7.1.4 伯努利方程

方程结构为  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ , 令  $z = y^{1-n}$  可推导出的结构为  $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$  即一个一阶线性微分方程, 求  $z$  然后代换为  $y$ 。

## 7.2 二阶可降阶微分方程

### 7.2.1 $y''=f(x,y')$ 型 (方程中不显含未知函数 $y$ )

令  $y' = p(x)$ ,  $y'' = p'$ , 求  $p$  然后积分

### 7.2.2 $y''=f(y,y')$ 型 (方程中不显含自变量 $x$ )

令  $y' = p$ ,  $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ , 求  $p$  然后积分

## 7.3 高阶线性微分方程

### 7.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程

方程结构  $y'' + py' + qy = 0$

$r^2 + pr + q = 0$  求  $\Delta = p^2 - 4q$

$\Delta > 0$   $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$   $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$

$\Delta < 0$   $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

### 7.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

方程结构  $y'' + py' + qy = f(x)$

当  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ , 设  $y = e^{\alpha x} Q_n(x)x^k$ , 其中

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{照抄,} \\ Q_n(x) \text{为 } x \text{ 的 } n \text{ 次多项式,} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \text{不是特征根} \\ 1, & \alpha \text{是单特征根} \\ 2, & \alpha \text{是二重特征根} \end{cases} \end{cases}$$

当  $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$ , 设  $y = e^{\alpha x} [Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x] x^k$ ,

其中

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{照抄,} \\ l = \max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x) \text{分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次多项式,} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i \text{不是特征根,} \\ 1, & \alpha \pm \beta i \text{是特征根.} \end{cases} \end{cases}$$

### 7.3.3 $n$ 阶常系数齐次线性微分方程

### 7.3.4 欧拉方程

方程结构  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$

固定解法

当  $x > 0$  时 令  $x = e^t$  方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

当  $x < 0$  时 令  $x = -e^t$  方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

## 8 无穷级数

### 8.1 级数敛散性判别

#### 8.1.1 正项级数

收敛原则、比较判别法、比较判别法极限形式、比值判别法、根值判别法

#### 8.1.2 交错级数

莱布尼茨判别法

#### 8.1.3 任意项级数

绝对收敛

条件收敛

#### 8.1.4 常用抽象数项级数敛散性 (p220)

#### 8.1.5 常用极数的敛散性

$$\text{P 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{P 积分 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{广义 P 级数 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{广义 P 积分 } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{等比级数 } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} |q| < 1, & \text{收敛,} \\ |q| \geq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

## 8.2 幂级数

### 8.2.1 幂级数收敛域

阿贝尔定理

收敛域求法

## 8.2.2 幂级数求和函数

两个特殊的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

## 8.2.3 函数展开为幂级数

## 8.3 傅里叶级数 (p233)

# 9 微积分几何应用

## 9.1 一元函数微分学

### 9.1.1 曲率半径

曲率公式

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

曲率半径公式

$$R = \frac{1}{k}$$

## 9.2 一元函数积分学

### 9.2.1 平面曲线弧长

直角坐标方程  $s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ .

参数方程  $s = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ .

极坐标方程  $s = \int_a^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$ .

### 9.2.2 旋转曲面的表面积

曲线  $y = y(x)$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转曲面表面积为  $S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

## 9.3 多元函数的微分学

### 9.3.1 旋转曲面

定义： 曲线  $\Gamma$  绕一条定直线旋转一周所形成的曲面。

曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕直线  $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  旋转一周所形成的曲面，求法如下：

构建方程组，方程组包括三部分，分别是：曲线公式、垂直、等距

垂直： 在直线上取一点为  $M_0$ ，在曲线上取一点为  $M_1$ ，在  $M_1$  的纬圆 (即  $M_1$  绕直线形成的圆) 上取一点为  $P$ ，则  $M_1P$  与直线垂直。

等距：  $M_0M_1$  与  $M_0P$  等距。

解方程组保留  $x, y, z$  即可得旋转曲面方程。



### 9.3.2 空间曲线 (p265)

### 9.3.3 空间曲面 (p265)

### 9.3.4 方向导数和梯度

方向导数  $\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{u}'_x(P_0) \cos \alpha + \mathbf{u}'_y(P_0) \cos \beta + \mathbf{u}'_z(P_0) \cos \gamma$

梯度  $\text{grad} u|_{P_0} = (\mathbf{u}'_x(P_0), \mathbf{u}'_y(P_0), \mathbf{u}'_z(P_0))$

注： 梯度是一个向量，他的方向与是最大方向导数的方向，他的模是方向导数的最大值。

### 9.3.5 散度与旋度

散度  $\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

旋度  $\text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

## 9.4 多元函数积分学

### 9.4.1 第一型曲线积分

投影根本规则  $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

### 9.4.2 第一型曲面积分

投影根本规则  $dS = \sqrt{(dxdy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2}$

### 9.4.3 形心公式 (p282)

### 9.4.4 转动惯量 (p283)

### 9.4.5 引力 (p283)

### 9.4.6 第二型曲线积分 (平面)

格林公式 设平面有界闭区域  $D$  由分段光滑的曲线  $L$  围成，函数  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  在  $D$  上连续可偏导， $L$  取正向，则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

注：  $L$  取正向，即当一个人沿着  $L$  这个方向前进时，他的左手始终在  $L$  所围成的区域  $D$  内。

积分与路径无关  $\Rightarrow \begin{cases} Pdx + Qdy, & \text{是 } f(x, y) \text{ 的全微分,} \\ \oint_L Pdx + Qdy = 0, & \text{即 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$

### 9.4.7 第二型曲面积分

基本公式

$$\frac{dydz}{\cos \alpha} = \frac{dzdx}{\cos \beta} = \frac{dxdy}{\cos \gamma} \quad \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy$$

**高斯公式** 设空间有界闭区域  $\Omega$  由分片光滑的闭曲面  $\Sigma$  围成,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有一阶连续偏导数,  $\Sigma$  取外侧, 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

#### 9.4.8 第二型曲线积分 (空间)

**斯托克斯公式** 设  $\Omega$  为空间某区域,  $\Sigma$  为  $\Omega$  内的分片光滑有向曲面片,  $\Gamma$  为逐段光滑的  $\Omega$  的边界, 它的方向与  $\Sigma$  的法向量成右手系, 函数  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$