高等数学公式背诵

王泠风

2024 年 10 月 04 日

1 基础公式

1.1 不等式

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad ||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \frac{1}{1+x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \qquad \ln(1+x) \leq x \leq e^x - 1$$

1.2 三角函数

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad \tan\frac{x}{2} = u$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

2 极限

2.1 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

2.2 泰勒公式极限应用 (x→0)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

3 一元函数微分学

3.1 反函数导数

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad x''_{yy} = \frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

3.2 常用求导公式

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3.3 中值定理

3.3.1 罗尔定理

$$f'(x) + kf(x) \Rightarrow f(x)e^{kx} \qquad [f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) \qquad [f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$$

3.3.2 泰勒公式

泰勒原式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

泰勒展开式

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ \ (-\infty < x < +\infty) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n && = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \ \ (-1 < x < 1) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n && = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \ \ (-1 < x < 1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} && = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \ \ (-1 < x \le 1)
\end{aligned}
$$

$$
(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \ \begin{cases} x \in (-1,1), & 当a \le -1, \\ x \in (-1,1], & 当 -1 < a < 0, \\ x \in [-1,1], & 当a > 0且a \notin \mathbb{N}_+, \\ x \in \mathbb{R}, & 当a \in \mathbb{N}_+. \end{cases}
$$

4 一元函数积分学

4.1 常用积分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ \ (a > 0)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \ \ (a > 0)$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C \ \ (|x| > |a|)$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \qquad \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

4.2 点火公式

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times 1, & n为大于1的奇数, \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & n为正偶数. \end{cases}
$$

积分 0 到 π 和 0 到 2π 根据被积函数在被积区间的正负性判断是否为 0。

5 多元函数微分学

6 多元函数积分学

7 常微分方程

7.1 一阶微分方程

7.1.1 变量可分离型

7.1.2 可化为变量可分离型

7.1.3 一阶线性微分方程

方程结构 $y' + p(x)y = q(x)$

通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx + C\right]$$

7.1.4 伯努利方程

方程结构为 $y' + p(x)y = q(x)y^n$，令 $z = y^{1-n}$ 可推导出的结构为 $z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ 即一个一阶线性微分方程，求 z 然后代换为 y。

7.2 二阶可降阶微分方程

7.2.1 y”=f(x,y’) 型 (方程中不显含未知函数 y)

令 $y' = p(x)$，$y'' = p'$，求 p 然后积分

7.2.2 y”=f(y,y’) 型 (方程中不显含自变量 x)

令 $y' = p$，$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p$，求 p 然后积分

7.3 高阶线性微分方程

7.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程

$r^2 + pr + q = 0$ 求 $\Delta = p^2 - 4q$

$\Delta > 0 \quad y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

$\Delta = 0 \quad y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$

$\Delta < 0 \quad y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

7.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

方程结构 $y''+py'+qy=f(x)$

$$当f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}，设y=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k，其中\begin{cases} e^{\alpha x}照抄, \\ Q_n(x)为\text{ x 的 n 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha不是特征根 \\ 1, & \alpha是单特征根 \\ 2, & \alpha是二重特征根 \end{cases} \end{cases}$$

$$当f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]，设y=e^{\alpha x}\left[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]x^k，$$

$$其中\begin{cases} e^{\alpha x}照抄, \\ l=max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)分别为\text{ x 的两个不同的 l 次多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\pm\beta i不是特征根, \\ 1, & \alpha\pm\beta i是特征根. \end{cases} \end{cases}$$

7.3.3 n 阶常系数齐次线性微分方程

7.3.4 欧拉方程

方程结构 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

固定解法

当 $x>0$ **时** 令 $x=e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

当 $x<0$ **时** 令 $x=-e^t$ 方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(-e^t)$$

即二阶常系数非齐次线性微分方程

8 无穷级数

8.1 常用级数

$$\text{P 级数} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p>1, & \text{收敛,} \\ p\le 1, & \text{发散.} \end{cases} \qquad \text{P 积分} \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases} p>1, & \text{收敛,} \\ p\le 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{广义 P 级数} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases} p>1, & \text{收敛,} \\ p\le 1, & \text{发散.} \end{cases} \qquad \text{广义 P 积分} \quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases} p>1, & \text{收敛,} \\ p\le 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

$$\text{等比级数} \quad \sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases} |q|<1, & \text{收敛,} \\ |q|\ge 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

8.2 两个特殊级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\ \ (-1\le x<1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ \ (-1<x<1)$$

9 微积分几何应用

9.1 形心公式

9.2 旋转曲面

9.3 空间曲线