构造题选讲

周镇东

清华大学

August 9, 2021

构造题的常用技巧

归纳法!

构造题的常用技巧

归纳法！

猜结论与打表！

构造题的常用技巧

归纳法！

猜结论与打表！

我是喝喝粥，我一眼秒了，我感觉这题没啥技巧啊！

关于本课件

- 除非有特殊说明，题目难度与顺序没有关系
- 每题给大家的思考时间基本以最快秒题的人为准
- 做题时尽量侧重对题目的完全理解，不要猜完结论过了题就跑
- 课件前面部分会偏向于理论证明，后面会有你们喜欢的码题

热身题

有一个长度为 2^n 的纸条被均匀划分为 2^n 个单元格。将纸条横放，从左到右将第 i 个格子标记为 i。接下来我们将纸条对折 n 次，每次将纸条的右端点向上翻起对折贴合到左端点。问编号为 k 的格子最终在从下到上第几个位置。

打表

首先这种题我们先去想 n 位二进制数，然后把原问题看成 0 下标的问题。

然后打表。

打表

$n = 1$

1

0

打表

$n = 2$

01

10

11

00

打表

$n = 3$

001

110

101

010

011

100

111

000

打表

$n = 4$

屏幕太小打不下了

打表

相信聪明的你已经看出规律了！

正经做法也非常简单，不再赘述。

Boring Game

热身题 2

有一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，你想把它变成 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。

只有一种操作：选取一个 $1 < t < n$，把 (a_{t-1}, a_t, a_{t+1}) 变成 $(a_{t-1} + a_t, -a_t, a_t + a_{t+1})$。

你可以进行任意次操作，问是否可以将 a 变成 b。

不会没人没见过这题吧？

不会没人没见过这题吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

Boring Game

热身题 2

考虑序列的前缀和，这个操作其实就是交换两个前缀和！

The table

Codeforces 226D

有一个 $n \times m(n, m \leq 100)$ 的矩阵 $a(a_{ij} \leq 100)$，每次可以将一列取负或者将一行取负，求一个方案使得每行每列的和都非负。

The table

看见负的就翻转！

每次所有数的总和在变大！

一定可以结束！

覆盖

给定一个 n 个点的无重边有向图，任意两个节点间都有两条不同方向的有向边。

我们称一个边集 E 是好的，当且仅当可以把这 n 个点划分成两个集合 A 和 B，满足 E 为任意 A 中的点至任意 B 中的点的有向边构成的集合。

问至少需要几个好的集合，才能覆盖原图中所有的边。

覆盖

我们换个方向思考：用 m 个好的集合最多能覆盖多大的图？
答案：$\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$

覆盖

考虑对于每个点，记其特征集为这个点在这 m 个边集中位于 A 集一侧的那些构成的集合。所以问题被转化成从一个 m 元集中选出 $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ 个子集，使得这些集合互不包含。

只要选所有 $\lfloor m/2 \rfloor$ 元子集即可，可行性显然。

如何证明最优性？

覆盖

最优性

考虑一个把每一个 m 元集的子集看做一个节点，将每个点与其所有母集代表的节点连有向边。

最小链覆盖 $=$ 最长反链！

覆盖

最优性

由于最长反链至少长为 $\lfloor m/2 \rfloor$，所以我们只需要证明存在 $\lfloor m/2 \rfloor$ 条链的覆盖方案即可。

考虑归纳法！

奇偶分讨即可。

停车

有 n 个停车位，n 位司机各驾驶一辆汽车，依次来停车。第 i 个司机将自己的汽车开到他最喜欢的车位 a_i 前停车，如果该车位已经有汽车，则在该车位沿路走下去最近的一个空位停车，如果改车位以及其下面所有车位都停了汽车，则他将汽车开走，不再停车。

问有多少个序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得每个停车位都不空。

停车

打表

容易打表发现答案是 $(n+1)^{n-1}$。

那么怎么证明呢？

停车

构造

我们尝试构造一种新的规则：

- 在原始的 n 个车位后面再加一个车位 $n+1$。
- 将 $n+1$ 的后继设为 1，即把停车场视为一个环。

容易发现，在这种规则下，只要 $n+1$ 车位没有停车就是合法解。

停车

构造

我们可以等价地把 a_i 的取值范围视为 $1 \cdots n+1$。

由于该问题循环对称，在最终情况下任意一个位置空着的情况数相同。

总情况数为 $(n+1)^n$，故答案为 $(n+1)^{n-1}$。

排列矩阵

给定正整数 n, m，求最小的正整数 k，使得存在 $n \times m$ 的正整数矩阵，满足：

- 每行都是连续 m 个连续正整数的排列
- 每列都是连续 n 个连续正整数的排列
- 所有数都不超过 k

排列矩阵

打表猜结论

答案是 $n + m - \gcd(n, m)$。

排列矩阵

存在性

若 $n=m$，构造一个 n 阶拉丁方即可。

若 $\gcd(n,m)=1$，则令 a_{ij} 为 $i+j-1$ 即可。

否则，设 $\gcd(n,m)=d$，则构造如下矩阵：

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_{m/d} \\ M_2 & M_3 & \cdots & M_{m/d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n/d} & M_{n/d+1} & \cdots & M_{(n+m)/d-1} \end{pmatrix}$$

其中 M_k 表示将一个 d 阶拉丁方的所有元素加上 $(k-1)d$ 得到的结果。

排列矩阵

最优性

那么问题来了！

凭什么这是最优的？

排列矩阵

最优性

那么问题来了！

凭什么这是最优的？

生成函数！

排列矩阵

最优性

稍微修改原问题，将 a_{ij} 的取值范围从正整数改成非负整数，便于后面叙述。

将矩阵中的元素 a_{ij} 替换成 $x^{a_{ij}}$。

考虑式子 $f(x) = \sum_{i,j} x^{a_{i,j}}$。设

$$g_i(x) = \sum_{0 \le k < i} x^k = \frac{x^i - 1}{x - 1}$$

对于每一行之和，都有因式 $g_m(x)$；对于每一列都有因式 $g_n(x)$。故 $\mathrm{lcm}(g_n(x), g_m(x)) | f(x)$。

排列矩阵

最优性

$$\begin{aligned}
\operatorname{lcm}(g_n(x), g_m(x)) &= \operatorname{lcm}\left(\frac{x^n-1}{x-1}, \frac{x^m-1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{x-1}\operatorname{lcm}(x^n-1, x^m-1) \\
&= \frac{1}{x-1}(x^n-1)(x^m-1)/\gcd(x^n-1, x^m-1)
\end{aligned}$$

只需求 $\gcd(x^n-1, x^m-1)$ 的最高次项。

排列矩阵

最优性

任意一个 k 次实系数多项式在复数范围内都有唯一的 $k+1$ 个解。所以任意一个实系数多项式都可以在复数范围内唯一地因式分解成一些一次多项式。所以求两个多项式的复系数最大公因式的一个办法是求公共根。

容易发现 x^n-1 和 x^m-1 的根分别是 n 个 n 阶单位根和 m 个 m 阶单位根。考虑同阶单位根是复平面单位圆上等距分布的点，则两式的公共根其实是 $\gcd(n,m)$ 个 $\gcd(n,m)$ 阶单位根。

所以 $\gcd(x^n-1,x^m-1)=x^{\gcd(n,m)}-1$。

排列矩阵

最优性

其实，直接辗转相减就好了。/doge

数字游戏

给定正整数 p, q。你需要在黑板上写出 n 个正整数，并不断执行如下操作：任取黑板上两个相同的数 a 与 a，擦掉这两个数，然后写上 $a+p$ 和 $a+q$。如果黑板上的 n 个数在某次操作之后互不相同了，那么你失败了。

问 n 最少是多少，并给出方案。

数字游戏

打表猜结论

答案是

$$\frac{p+q}{\gcd(p,q)}$$

数字游戏

存在性

对于给定的 p, q，设 $\gcd(p, q) = d$，则取可重集

$$\{d, 2d, \cdots, p\} + \{d, 2d, \cdots, q\}$$

即可。

那么问题来了，凭什么这是最优的？

数字游戏

最优性

还是生成函数!

数字游戏

最优性

把集合中的任何一个数 k 看做 x^k，则可以把原集合看做一个关于 x 的生成函数 $f(x)$。

则每一次将某两个数 a 替换成 $a+p, a+q$ 可以看做加上了 $\Delta = x^a(x^p + x^q - 2)$。由于能满足条件的全体集合是一个有限集合的位移，所以一定能找到一段连续的变换操作，使得在这段变换操作之前和之后的两种状态仅仅相差一个偏移量 t。则

$$x^t f(x) = f(x) + \sum \Delta = f(x) + (x^p + x^q - 2)g(x)$$

其中 $g(x)$ 为某个关于 x 的整系数多项式。

数字游戏

最优性

整理原式，得到

$$(x^p + x^q - 2)g(x) = (x^t - 1)f(x)$$

即

$$x^p + x^q - 2 | (x^t - 1)f(x)$$

$$\frac{x^p + x^q - 2}{\gcd(x^p + x^q - 2, x^t - 1)} | f(x)$$

又到了求 gcd 的时刻了！

数字游戏

最优性

仍然考虑求 $x^p + x^q - 2, x^t - 1$ 两式的公共根。

因为当 $x^t - 1$ 时，x 在复平面单位圆上，而复平面单位圆上的点 x 一定对任意 k 满足 $|x^k| \leq 1$，且仅在 $x^k = 1$ 时取等，又有 $2 = |x^p + x^q| \leq |x^p| + |x^q| \leq 1 + 1$，所以必然有 $x^p = x^q = 1$。

于是，两式公共根就是 $x^p = 1, x^q = 1, x^t = 1$ 的公共根。即 $\gcd(x^p + x^q - 2, x^t - 1) = \gcd(x^p - 1, x^q - 1, x^t - 1) = x^{\gcd(p,q,t)} - 1$。设 $\gcd(p, q, t) = d$，得

$$\sum_{i=0}^{\frac{q}{d}-1} x^{id} + \sum_{i=0}^{\frac{p}{d}-1} x^{id} | f(x)$$

将 $x = 1$ 代入上式，得 $\frac{p+q}{d} | f(1) = n$。由于 $d | \gcd(p, q)$，所以 $\frac{p+q}{\gcd(p,q)} | n$。故 $n \geq \frac{p+q}{\gcd(p,q)}$。

彩票

彩票上依次排列着 n 个空格，可以填上 $1, 2, \cdots, n$ 的任意排列。有一张特殊彩票上填了某一个排列。如果某一张彩票 A 与这张特殊彩票存在某一个位置中填的数相同，那么这张彩票 A 是中奖的。

问至少填写几张彩票才能保证一定有彩票中奖。

彩票

我会用 n 张彩票构造!

直接一个 n 阶拉丁方就好了!

彩票

下面有请喝喝粥同学上来大声喊出下面的话：

你好菜啊！这不就直接造一个 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 阶拉丁方就好了么？就这就这？

彩票

最优性

现在我们相当于要证明如果只填不超过 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个彩票，必然能够找到一个排列使得这个排列与之前填的彩票不构成中奖关系。

再进一步抽象，其实这就是判定二分图是否存在完美匹配！

彩票

最优性

Hall 定理!

- 当选择的点集大小 $\le \lfloor n/2 \rfloor$，显然。
- 当选择的点集大小 $> \lfloor n/2 \rfloor$，也显然。

线段分离

如果你前面掉线了，那么可以在这里重连

给定 n 条闭区间，保证这 n 条闭区间覆盖了整个闭区间 $[0, m]$。找出给定区间的一个子集，使得这个子集满足以下条件：

- 该子集中的区间两两不交
- 该子集区间总长度至少为 $m/2$

如果没有这样的子集，则输出 Meiyou。

线段分离

首先，如果某段区间有和没有都不影响其他区间覆盖整个大区间，那么我们可以删除这段区间，得到的子问题显然严格强于原问题。

于是我们得到了一些区间，将其左端点排序之后得到 $I_1, I_2, \cdots, I_t (t \leq n)$，满足：

- $\cup_{k=1}^{n} I_k = [0, m]$
- $\forall 1 \leq k \leq t-1$，$I_k$ 的左、右端点分别位于 I_{k+1} 的左、右端点左侧。
- $\forall 1 \leq k \leq t-2, I_k \cup I_{k+2} = \emptyset$

设 $S_i = \{I_k | k \bmod 2 \equiv 0\}, (i = 0, 1)$，则 S_0, S_1 中必然有一个满足条件。

Divisible Subset

给定一个含 n 个整数的可重整数集。

找出一个非空子集，满足子集中的元素之和能被 n 整除。

无解输出 -1。

$n \leq 10^5$

Divisible Subset

加难版？减弱版？

找出一个非空区间，满足子集的元素之和能被 n 整除。

Divisible Subset

找出一个非空区间，满足子集的元素之和能被 n 整除。

前缀和做差！

$n+1$ 个前缀和，n 中不同的取值！

抽屉原理！必有解！

Divisible Subset

拓展？

如果是对 $n+1$ 取模，还一定有解吗？

A Problem Concerning LCS

给定一个长度为 n 的小写字符串 A，要求构造一个长度也是 n 的小写字符串 B，使得 A 和 B 的最长公共子序列最短。

$n \leq 10^6$

A Problem Concerning LCS

在座的各位有没有字符串大师？

欢迎上台表演您的各种字符串技巧！

A Problem Concerning LCS

不会字符串怎么办啊？

全部输出出现次数最少的字符串？

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

A Problem Concerning LCS

假设这个出现次数最少的字符 C 出现了 x 次，显然 $x \leq \frac{n}{26}$。

用全 C 串，LCS 长度为 x。如果存在串 b，其 LCS 小于 x，则所有字符出现次数均小于 x。这样总长度小于 n，矛盾。

通信

encoder 将读入 n 个 $[0, 255]$ 的整数。

encoder 将输出不超过 L 个 $[0, 255]$ 的整数。

encoder 的输出被打乱顺序后发送给 decoder。

decoder 需要按照原来的顺序还原出 encoder 读入的 n 个数。

你需要完成 encoder 和 decoder。

$n \leq 64, L \leq 5n$

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

都 2021 年了，不会有人不会做这道题吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

不会吧不会吧？

你怕不是 5 月份的 THUSC 白打了？

通信

考虑 encoder 读入的信息量，共有 256^n 种情况。

考虑 encoder 输出的信息量，其实就是 $[0, 255]$ 中每个数的出现次数，为 $\binom{L+255}{255}$。

随便数位 DP 一下，构造一个一一映射就好了。

黄魔法师

牛客 Wannfly 27E

给出 n, k，求一个长度为 n 的数组 a，满足有恰好 k 对数对 $(i, j)(1 \le i < j \le n)$ 满足 $a_i + a_j$ 为完全平方数。如果不存在，输出 -1。

$$1 \le n \le 10^5, 0 \le k \le 10^{10}$$

黄魔法师

找正整数 a, b, c, d，满足：

- $a + b, a + a, b + b, b + c$ 是完全平方数
- $a + c, a + d, b + d, c + d, d + d, c + c$ 不是完全平方数

例如 $a = 98, b = 2, c = 7, d = 1$。

Triple Flips

Codeforces 1071C

给定一个长度为 n 的 01 数列，限定你在 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 12$ 次操作内将所有的数字都变成 0。

操作定义为：选择三个数 $x, y, z(x < y < z, y - x = z - y)$，使得 a_x, a_y, a_z 翻转（0 变 1，1 变 0）

如果不能完成，那么输出 NO，否则输出 YES 并输出方案。

$n \leq 10^5$

Triple Flips

考虑对大范围使用归纳。即，假设我们有区间 $[L, R]$ 中还存在 1，那么我们不断的对区间的左右端进行小规模地微调，使得每次操作平均使得区间大小减小 3。当区间小到一定程度时，再针对性地使用策略。

Triple Flips

我们称操作 (x, z) 表示翻转 $a_x, a_{(x+z)/2}, a_z$。对区间 $[L, R]$ 分情况讨论：

- 左侧 0 开头，直接 $L' = L + 1$；右侧 0 开头同理。
- 左侧 111 开头，执行 $(L, L + 2)$；右侧同理。
- 左侧 101 开头，执行 $(L, L + 4)$；右侧同理。
- 左侧 100 开头，执行 $(L, L + 6)$；右侧同理。
- 剩下一种情况，满足左右侧起都是 110。
  - 若 $L \equiv R \pmod 2$，执行 $(L, R), (L + 1, R - 1)$。
  - 若 $L \not\equiv R \pmod 2$，执行 $(L, R - 1), (L + 1, R)$。
- 当 $[L, R]$ 很小的时候，我们再进行亿些简单的分类讨论即可。

Triple Flips

这个做法看起来简单，但是实际写起来稍有不慎会非常容易出错。

那么问题来了，这么有力气去手造方案，咋不去用用电脑呢？

事实上，对于最终的小区间的情况，我们可以直接暴搜。对于给定左右侧前三个的情况，寻找高效方案，我们同样也可以直接暴搜。

甚至，我们可以更加暴力一点，暴搜结果告诉我们，直接每次对左侧前 6 位进行暴搜也可以得到解法。

新年的新航线

UOJ#496

给定一个正 n 边形及其三角剖分。若将每个顶点看做一个节点，每条边看做一条连接相应顶点的边，请选择一个边集，得到一个生成树，要求每个节点度数不为 2。

无解请输出 -1。

$n \leq 5 \times 10^5$

新年的新航线

考虑归纳法。

首先 $n = 3$ 一定无解，而我们可以归纳证明 $n \geq 4$ 一定有解。

一般来说，这种三角剖分图的归纳我们都会从最外层三角逐个剥落。由于我们要做的是归纳，所以我们会先尝试将最外层三角的外侧顶点剥落，并和其它两个点连一条边，显然这样做得到的问题很像一个子问题。

既然这个点要和其它两个点连其中一条边，但是我们又不知道该连哪一条，所以我们不妨在剥落该点后，在对应两点间的边上标记上这个点。

这样做，在原问题的基础上，每条边上可能有一个标记，就可以归纳了。

新年的新航线

考虑一个最外层点 x，与其相邻的两点分别为 a, b。接下来分讨：

- 若 $(x, a), (x, b)$ 均无标记，则删除点 x 后在 (a, b) 上标记 x 即可
- 若 $(x, a), (x, b)$ 均有标记，将两个标记对应的点都连向 x，并删除 x，在 (a, b) 上标记点 x
- 若 $(x, a), (x, b)$ 之一有标记，不妨设 (x, a) 有标记 y，则连接 $(x, a), (y, a)$，并删除 x 即可。

当 $n = 4$ 时，随便构造一下就好了。

Ancient civilization

Codeforces 1045E

平面上有 n 个点，每个点都是黑点或白点。保证没有三点共线。

你需要在所有白点间以白点为端点连一些线段，使其被连成一棵生成树；同理把黑点集也连成一棵生成树。你需要保证任何两条不共端点的线段不相交。

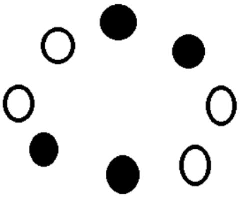
给出合法解，或者输出无解。

$n \leq 10^3$

Ancient civilization

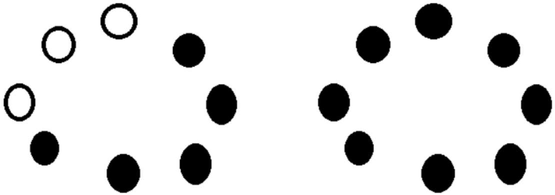
首先，我们对所有点建一个凸包。

如果凸包外边缘上有至少 4 段颜色交替，那么显然无解。



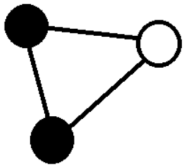
Ancient civilization

否则，有一段或者两段颜色：



Ancient civilization

我们先考虑一个简单情况——一个三角形：

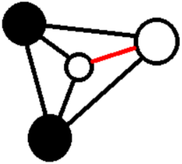


由于两个黑顶点和两个白顶点的情况是等价的，所以我们不妨设有两个黑顶点。

Ancient civilization

假设该三角形内无白点，则将其内部的黑点全部连到某一个黑色顶点。

否则，内部存在白点，连接两个白点，可以继续归纳求解：

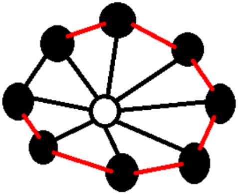


最终我们可以完全消除三角形内部的点。

Ancient civilization

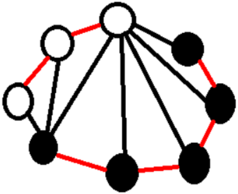
回到原问题，假设凸包上只有一种颜色，不妨设是黑色，则:

- 内部没有白点，则所有点同色，是个 trival case
- 内部有白点，那么可以如图所示，连接所有红边，然后将问题规约为上述三角形问题



Ancient civilization

如果凸包上有两段颜色，那么就类似地如图所示，连接所有红边，然后将问题规约为上述三角形问题。



于是剩下的问题就交给计算几何了！

矩阵变换

UOJ#41. 【清华集训 2014】

给出一个 n 行 m 列的矩阵 A, 保证满足以下性质:

- $m > n$。
- 矩阵中每个数都是 $[0, n]$ 中的自然数。
- 每行中，$[1, n]$ 中每个自然数都恰好出现一次。这意味着每行中 0 恰好出现 $m-n$ 次。
- 每列中，$[1, n]$ 中每个自然数至多出现一次。

现在我们要在每行中选取一个非零数，并把这个数之后的数赋值为这个数。我们希望保持上面的性质 4，即每列中，$[1, n]$ 中每个自然数仍然至多出现一次。

矩阵变换

先猜一个看上去很对的做法（别问我当时是怎么猜出来的，反正就是想写个乱搞，结果交上去发现是正解……）

做法：

初始每行选择第一个非零元素。然后不断进行如下调整，直到没有两行选择了相同的数：

任取选了相同数的两行，更新被选数较为靠前的那行，即取该行后一个非负整数。

矩阵变换

引理 1

如果这样调整最终能够顺利结束，那么必然得到一组合法解。

矩阵变换

引理 1

如果这样调整最终能够顺利结束，那么必然得到一组合法解。

Proof.

首先，任意两行互不相同，所以如果解不合法，假设第 i 行选择了第 p_i 个位置，那么只能够是存在某两行 i, j，满足 $p_i < p_j$，且第 j 行的处于区间 (p_i, p_j) 中的某个位置上的数 x 与第 i 行选择的数相同。

但是，由于第 j 行选择的 x 已经被调整掉了，所以一定存在另一行，选择了一个更靠后的 x，这与任意两行互不相同矛盾。

所以引理得证。

矩阵变换

引理 2

假设当前状态下，我们在所有行选择的元素构成的集合为 S；设若干次更新更新后的集合为 S'，那么一定有：$S \subseteq S'$。

矩阵变换

引理 2

假设当前状态下，我们在所有行选择的数构成的集合为 S；设若干次更新更新后的集合为 S'，那么一定有：$S \subseteq S'$。

Proof.

只有在某两行选择相同的数时会更新，那么这两行至少保留一行，所以原本处于集合中的元素不会消失。

矩阵变换

引理 3

以这样的方式，一定可以找到一组解。

矩阵变换

引理 3

以这样的方式，一定可以找到一组解。

Proof.

首先，只有当在更新某一行时没有下一个非负整数时才找不到解。

根据引理 2，我们知道如果找不到解，则必然有某个数从未出现在被选集合中。但是每个数在每一行出现一次，而我们不可能在不把这个元素更新掉的情况下把整一行更新空。

于是又得到矛盾，证明了结论。

矩阵变换

结合引理 1 和引理 3，我们一定可以找到一组合法解！

折线

IOI2019

给定二维平面上 n 个整点。

请找到至多 $t+1$ 个整点，设第 $i(0 \leq i \leq t)$ 个整点为 p_i，得到 t 条平行于坐标轴的线段，其中第 $i(1 \leq i \leq t)$ 条线段连接点 p_i 和 p_{i-1}，并且满足给定的 n 个点均在这些线段上。

要求 $t \leq n+3$。

注意，这题是一道提交答案题。

折线

$t \leq 2n$

原题最低部分分为 $t \leq 2n$。

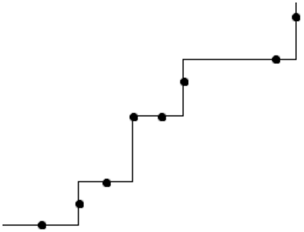
直接做，随便做！

折线

偏序

假设给定的点满足偏序性质，即对于所有 $i < j$，满足 $x_i \le x_j, y_i \le y_j$，或对于所有 $i < j$，满足 $x_i \le x_j, y_i \ge y_j$，考虑使用 $n + C$ (C 是常数) 条线段覆盖这些点。

方法形如：



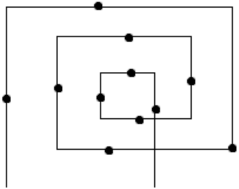
那么我们只需要把点集分成 K 个偏序，就可以在 $n + O(KC)$ 步内覆盖所有点。

折线

螺旋线

主要思想：考虑从外层到里层逐层覆盖所有点。

我们来画个图看看一条螺旋线可以在 $n+C$ 段内覆盖怎样的点集：

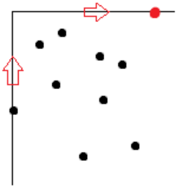


感受一下这种做法在随机数据中可能还挺强的。（没测过，随口乱说的）

折线

螺旋线 + 偏序

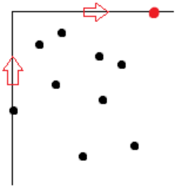
考虑螺旋线在遇到什么情况会出事情:



当螺旋线逆时针环绕到红点时，我们发现找不到下一个点了。

折线

螺旋线 + 偏序



结论 1：此时红点一定在所有点的右上角。

首先，根据螺旋线主要思想，此时红点一定是最上方的点。其次，在红点右下方找不到点，所以红点在右上角。

我们考虑用栈维护螺旋线上的点，一但出现类似上述情况，就将栈顶弹出。

折线

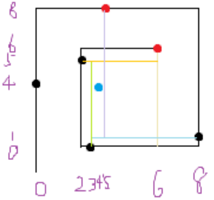
螺旋线 + 偏序

结论 2：所有被弹出的点可以划分成两个偏序集，一个是从左下到右上的偏序集，一个是从左上到右下的偏序集。

我们考虑结论 1，我们发现被弹出的点有四类：剩余点集左上、左下、右上、右下的点。我们把“左上”、“右下”这两类分到一个偏序集，剩下的划分到另一个偏序集中即可。

不失一般性，我们来证明对于“右上”点，不可能有一个在它之后被插入该偏序集的点与它矛盾。

然后我们找到了一个反例：



对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

对不起，它能过！

折线

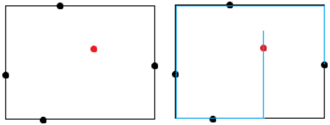
正确做法

考虑每次找一个最外侧的四边都有点的矩形，如果找不到，就一定存在一个角上的点，我们不断将其加入偏序集，直到点集为空或者找到一个满足条件的矩形。

于是我们找到了一些逐个嵌套的矩形（每条边上有一个点）和两个偏序集。考虑构造螺旋线。

我们发现，对于一个矩形，我们可以通过调整螺旋起点和方向使得可以以任何一个方向到达矩形内部的任何一个点。

例如我们要向上到达矩形中的红点，则可以相应构造：



就完事了！!1

总结

做了这么多构造题，你觉得开始提到的三种技巧，哪些最比较常用呢？

总结

做了这么多构造题，你觉得开始提到的三种技巧，哪些最比较常用呢？

归纳法！

猜结论与打表！

总结

做了这么多构造题，你觉得开始提到的三种技巧，哪种最能解题呢？

总结

做了这么多构造题，你觉得开始提到的三种技巧，哪种最能解题呢？

我是喝喝粥，我一眼秒了，我感觉这题没啥技巧啊！

谢谢大家

祝大家身体健康

gl & hf