组合计数和生成函数

x义x

HZXJHS

YYYY/MM/DD

目录

引言

"生成函数"是组合对象在度量上的投影。

——李白天

引言

“生成函数”是组合对象在度量上的投影。

——李白天

~~我也不知道 EI 从哪里摘来的，所以就当是 EI 说的吧~~

引言

“生成函数”是组合对象在度量上的投影。

——李白天

~~我也不知道 EI 从哪里摘来的，所以就当是 EI 说的吧~~

生成函数是一种研究组合对象的有力工具。它可以把组合对象的“结构”表示为代数运算，从而大大有利于我们分析组合对象。

引言 · 目的

让读者了解组合计数基础。由于生成函数和组合计数的密切联系，我们会穿插地讲解生成函数有关知识。

引言 · 目的

让读者了解组合计数基础。由于生成函数和组合计数的密切联系，我们会穿插地讲解生成函数有关知识。

~~组合计数：从入门到神秘例题 1~~

引言 · 组合计数不全是生成函数

首先必须明确，生成函数虽然（如你将要看到的那样）很强大，但是它也有其局限性。最典型的局限性就是它在表达一些复杂结构的时候非常痛苦……~~比如降序排列之类的。~~

引言 · 组合计数不全是生成函数

首先必须明确，生成函数虽然（如你将要看到的那样）很强大，但是它也有其局限性。最典型的局限性就是它在表达一些复杂结构的时候非常痛苦……~~比如降序排列之类的。~~

举个例子，杨表是一个非常复杂的结构，但是它上面有不少相当精简的结论。用生成函数表达杨表……？别别别那会死人的

引言 · 组合计数不全是生成函数

首先必须明确，生成函数虽然（如你将要看到的那样）很强大，但是它也有其局限性。最典型的局限性就是它在表达一些复杂结构的时候非常痛苦……~~比如降序排列之类的。~~

举个例子，杨表是一个非常复杂的结构，但是它上面有不少相当精简的结论。用生成函数表达杨表……？别别别那会死人的

再比如 Cyanic 之前讲的《Combinatorial Proof》也是组合计数里的一个非常重要的方法。

引言 · 组合计数不全是生成函数

首先必须明确，生成函数虽然（如你将要看到的那样）很强大，但是它也有其局限性。最典型的局限性就是它在表达一些复杂结构的时候非常痛苦……~~比如降序排列之类的。~~

举个例子，杨表是一个非常复杂的结构，但是它上面有不少相当精简的结论。用生成函数表达杨表……？别别别那会死人的

再比如 Cyanic 之前讲的《Combinatorial Proof》也是组合计数里的一个非常重要的方法。

~~本课也许可以命名为 Non-Combinatorial Proof~~

引言 · 生成函数不能直接组合计数

如果你搞出了生成函数但不会处理它，那么生成函数一点用都没有。

引言 · 生成函数不能直接组合计数

如果你搞出了生成函数但不会处理它，那么生成函数一点用都没有。

你可能需要例如多项式科技，拉格朗日反演，~~整式递推~~之类的处理生成函数的工具。

定义：组合类和 OGF

我们先明确什么叫做组合类。

定义：组合类和 OGF

我们先明确什么叫做组合类。

一个组合类（combinatorial class）是一个可数集合 $\mathcal{A}$，以及一个**大小函数**（size function）$f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$。记 $f(x) = |x|$，或者，在某些需要指出组合类的场合下，$|x|_{\mathcal{A}}$。

定义：组合类和 OGF

我们先明确什么叫做组合类。

一个组合类（combinatorial class）是一个可数集合 $\mathcal{A}$，以及一个**大小函数**（size function）$f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$。记 $f(x) = |x|$，或者，在某些需要指出组合类的场合下，$|x|_{\mathcal{A}}$。

记对于自然数 n，$A_n = \left|\{x \in \mathcal{A}, |x| = n\}\right|$。称 A_n 是 $\mathcal{A}$ 的**计数序列**（counting sequence）。

定义：组合类和 OGF

一个计数序列的 **OGF**（ordinary generating function）是形式幂级数

$$A(z) = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i z^i$$

因而对于组合类 $\mathcal{A}$，它的 OGF 也是

$$\boxed{\sum_{x \in A} z^{|x|}}$$

我们记

$$[z^n]A = A_n$$

注意 OGF 的第二个形式，我们将会频繁地使用它。

定义：组合类和 OGF · example 1

假设我们要计数这样的小球序列的个数：长度为 n，每一位都可以是黑色或白色的小球。

定义：组合类和 OGF · example 1

假设我们要计数这样的小球序列的个数：长度为 n，每一位都可以是黑色或白色的小球。

那么我们可以研究这样一个等价类：由所有这样的小球序列组成的集合，大小函数定义为其长度。

$$\mathcal{A} = \{(), (\circ), (\bullet), (\circ, \circ), (\circ, \bullet), \ldots\}$$

定义：组合类和 OGF · example 1

假设我们要计数这样的小球序列的个数：长度为 n，每一位都可以是黑色或白色的小球。

那么我们可以研究这样一个等价类：由所有这样的小球序列组成的集合，大小函数定义为其长度。

$$\mathcal{A} = \{(), (\circ), (\bullet), (\circ, \circ), (\circ, \bullet), ...\}$$

我们显然有 $[z^n]A = 2^n$。

定义：组合类和 OGF · 什么是形式幂级数

你可以理解为普通的多项式，但是：

定义：组合类和 OGF · 什么是形式幂级数

你可以理解为普通的多项式，但是：

- 允许有无限项

定义：组合类和 OGF · 什么是形式幂级数

你可以理解为普通的多项式，但是：

- 允许有无限项
- 不必考虑收敛性

定义：组合类和 OGF · 什么是形式幂级数

你可以理解为普通的多项式，但是：

- 允许有无限项
- 不必考虑收敛性

事实上形式幂级数里的 z 不应该当成数来理解，它只是一个用来标记的符号。

定义：组合类和 OGF · 一些基础的组合类

记 $\mathcal{E}$ 是只由一个大小为 0 的元素构成的组合类。我们有 $E(z) = 1$。

定义：组合类和 OGF · 一些基础的组合类

记 $\mathcal{E}$ 是只由一个大小为 0 的元素构成的组合类。我们有 $E(z) = 1$。

记 $\mathcal{Z}$ 是只由一个大小为 1 的元素构成的组合类。我们有 $Z(z) = z$。

构造组合类

组合类都是由其他组合类**构造**出来的。一个构造是从一组组合类映射到一个组合类的函数。

构造组合类

组合类都是由其他组合类**构造**出来的。一个构造是从一组组合类映射到一个组合类的函数。

当我们说一个构造可以被直接翻译为生成函数运算，这意味着

$$\mathcal{A} = \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$A = \Psi(B_1, B_2, \dots)$$

说人话就是它可以直接和生成函数运算对应……一个经典的例子是 exp 的组合意义。

构造组合类

组合类都是由其他组合类**构造**出来的。一个构造是从一组组合类映射到一个组合类的函数。

当我们说一个构造可以被直接翻译为生成函数运算，这意味着

$$\mathcal{A} = \Phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots)$$
$$\Downarrow$$
$$A = \Psi(B_1, B_2, \ldots)$$

说人话就是它可以直接和生成函数运算对应⋯⋯一个经典的例子是 exp 的组合意义。

我们下面研究的构造都可以直接翻译为生成函数运算。
~~不然今天我们就研究不了了~~

构造组合类 · 笛卡尔积

基础中的基础。

构造组合类 · 笛卡尔积

基础中的基础。

$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ 被称为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的**笛卡尔积**，其中 $\mathcal{A}$ 的是有序对的集合 $\{(\beta, \gamma) | \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}$，大小函数定义为 $|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}}$。

构造组合类 · 笛卡尔积

基础中的基础。

$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ 被称为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的**笛卡尔积**，其中 $\mathcal{A}$ 的是有序对的集合 $\{(\beta, \gamma) | \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}$，大小函数定义为 $|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}}$。

此时，

$$A_n = \sum_{i+j=n} B_i C_j$$

也就是普通卷积，从而有

$$\boxed{A(z) = B(z)C(z)}$$

构造组合类 · example 2

回顾 example 1。一个小球序列：

构造组合类 · example 2

回顾 example 1。一个小球序列:

- 可以为空

构造组合类 · example 2

回顾 example 1。一个小球序列：

- 可以为空
- 否则可以看成第一个球和剩下的序列组成的有序对

构造组合类 · example 2

回顾 example 1。一个小球序列：

- 可以为空
- 否则可以看成第一个球和剩下的序列组成的有序对

从而我们可以说
$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \{\circ, \bullet\} \times \mathcal{A}$$
有什么问题？

构造组合类 · example 2

回顾 example 1。一个小球序列：

- 可以为空
- 否则可以看成第一个球和剩下的序列组成的有序对

从而我们可以说

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \{\circ, \bullet\} \times \mathcal{A}$$

有什么问题？

加法？

构造组合类 · 不交并

$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing)$ 被称为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的**不交并**，其元素 α 的大小函数 $|\alpha|_{\mathcal{A}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathcal{B}} & (\alpha \in \mathcal{B}) \\ |\alpha|_{\mathcal{C}} & (\alpha \in \mathcal{C}) \end{cases}$。

构造组合类 · 不交并

$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing)$ 被称为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的**不交并**，其元素 α 的大小函数 $|\alpha|_{\mathcal{A}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathcal{B}} & (\alpha \in \mathcal{B}) \\ |\alpha|_{\mathcal{C}} & (\alpha \in \mathcal{C}) \end{cases}$。

此时，

$$A_n = B_n + C_n,$$

$$\boxed{A(z) = B(z) + C(z)}$$

构造组合类 · 不交并

$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing)$ 被称为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的**不交并**，其元素 α 的大小函数 $|\alpha|_{\mathcal{A}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathcal{B}} & (\alpha \in \mathcal{B}) \\ |\alpha|_{\mathcal{C}} & (\alpha \in \mathcal{C}) \end{cases}$。

此时，

$$A_n = B_n + C_n,$$

$$\boxed{A(z) = B(z) + C(z)}$$

平角裤平角裤！不支持多重集！

构造组合类 · 和

多重集是好东西，但是我们还是谨慎一点，绕开它吧。我们使用下面的定义：

构造组合类 · 和

多重集是好东西，但是我们还是谨慎一点，绕开它吧。我们使用下面的定义：

$$\mathcal{B} + \mathcal{C} := (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{E}_2 \times \mathcal{C})$$

其中 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 是两个不同的，仅由一个大小为 0 的对象构成的组合类。

我们有

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \Rightarrow A(z) = B(z) + C(z)}$$

构造组合类 · hint

我们指出，一个足够合理的生成函数的加法必须能对应组合类的和（线性），乘法必须能对应组合的笛卡尔积（积性）。否则它的性质就不太好，没有什么研究的必要。

从而观察笛卡尔积来构造合适的生成函数是一个常用的手段。

构造组合类

下面要来点刺激的新构造了

比游戏还刺激，来啦，来看就知道了啦

构造组合类 · Sequence 构造

若 $[z^0]\mathcal{B} = 0$，则我们定义

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) := \mathcal{E} + \mathcal{B} + \mathcal{B} \times \mathcal{B} + \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} + \ldots$$

是 $\mathcal{B}$ 的 Sequence 构造。换句话说，如果 $\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})$，则

$$\mathcal{A} = \{(\beta_1, \ldots, \beta_l) \mid l \geq 0, \beta \in \mathcal{B}\}$$

即一些 $\beta \in \mathcal{B}$ 构成的有序列表。

构造组合类 · Sequence 构造

我们有

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}}$$

构造组合类 · Sequence 构造

我们有

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}}$$

请注意你可以，或者说应当把 $\frac{1}{1-B(z)}$ 看成 $1 + B(z) + B^2(z) + B^3(z) + \ldots$ 的简写。

构造组合类 · Sequence 构造

我们有

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}}$$

请注意你可以，或者说应当把 $\frac{1}{1-B(z)}$ 看成 $1 + B(z) + B^2(z) + B^3(z) + \ldots$ 的简写。

但是它在代数运算下的行为和你平常见到的 $\frac{1}{1-x}$ 的确一样，比如说有 $\frac{1-B(z)}{1-B(z)} = 1$。

我们有

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}}$$

请注意你可以，或者说应当把 $\frac{1}{1-B(z)}$ 看成 $1 + B(z) + B^2(z) + B^3(z) + \ldots$ 的简写。

但是它在代数运算下的行为和你平常见到的 $\frac{1}{1-x}$ 的确一样，比如说有 $\frac{1-B(z)}{1-B(z)} = 1$。

不如说，因为它有这些性质所以我们才这么简写。

构造组合类 · final solution for example 1

我们现在可以说，$\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\{\circ, \bullet\})$。

构造组合类 · final solution for example 1

我们现在可以说，$\mathcal{A} = \text{SEQ}(\{\circ, \bullet\})$。

显然有 $\{\circ, \bullet\}$ 的 OGF 为 $2z$，从而

$$A(z) = \frac{1}{1 - 2z}$$

构造组合类 · 插入一点群论

如果你不知道什么是群和 Burnside 引理，
~~那么你可能就要掉线了~~可以看这里。

构造组合类 · 插入一点群论

如果你不知道什么是群和 Burnside 引理，
~~那么你可能就要掉线了~~可以看这里。

为了确保你真的理解了它，请切掉 SHOI2006 有色图。

首先定义**本质相同**是什么意思。

两个元素 β_1, β_2 在映射群列 $G_0, G_1, G_2, \ldots$ 下本质相同，如果 $|\beta_1| = |\beta_2|$，且存在映射 $g \in G_{|\beta|}$ 使得 $g(\beta_1) = \beta_2$。

构造组合类 · 插入一点群论

首先定义**本质相同**是什么意思。

两个元素 β_1, β_2 在映射群列 $G_0, G_1, G_2, \ldots$ 下本质相同，如果 $|\beta_1| = |\beta_2|$，且存在映射 $g \in G_{|\beta|}$ 使得 $g(\beta_1) = \beta_2$。

定义 $\mathcal{A}/G$ 是一个组合类：其中的元素 α 是一个组合对象的非空集合，α 中的元素互相等价，如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，则 α_1 和 α_2 中的元素两两不等价。我们把 α 称为**一个等价类**（equivalence class）。

首先定义**本质相同**是什么意思。

两个元素 β_1, β_2 在映射群列 $G_0, G_1, G_2, \ldots$ 下本质相同，如果 $|\beta_1| = |\beta_2|$，且存在映射 $g \in G_{|\beta|}$ 使得 $g(\beta_1) = \beta_2$。

定义 $\mathcal{A}/G$ 是一个组合类：其中的元素 α 是一个组合对象的非空集合，α 中的元素互相等价，如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，则 α_1 和 α_2 中的元素两两不等价。我们把 α 称为一个**等价类**（equivalence class）。

$|\alpha|_{\mathcal{A}/G}$ 等于任意 α 中元素的大小，显然它们都相等。不然不可能等价。

构造组合类 · example 3

我们定义 G_i 是任意 $1..i$ 的排列的置换构成的群。则考虑 example 1 中的 $\mathcal{A}$，$\mathcal{A}/G =$

$$
\begin{aligned}
&\{(),\\
&(\circ),(\bullet),\\
&(\circ,\circ),(\circ,\bullet),(\bullet,\bullet),\\
&(\circ,\circ,\circ),(\circ,\circ,\bullet),(\circ,\bullet,\bullet),(\bullet,\bullet,\bullet),\\
&...\}
\end{aligned}
$$

这里我们为了方便，从 α 中抽出一个代表元素来表示 α。比如最中间的那个 $(\circ,\bullet)$ 实际表示 $\{(\circ,\bullet),(\bullet,\circ)\}$。

构造组合类 · Cycle 构造

若 $[z^0]\mathcal{B} = 0$，则我们定义

$$\mathrm{CYC}(\mathcal{B}) := (\mathrm{SEQ}(\mathcal{B}) - \mathcal{E})/\mathrm{S}$$

其中 S 是所有循环移位（circular shift）构成的群。（就是旋转啦）

构造组合类 · Cycle 构造

若 $[z^0]\mathcal{B}=0$，则我们定义

$$\mathrm{CYC}(\mathcal{B}) := (\mathrm{SEQ}(\mathcal{B})-\mathcal{E})/\mathrm{S}$$

其中 S 是所有循环移位（circular shift）构成的群。（就是旋转啦）

根据 Burnside 引理我们容易得到

$$\boxed{\mathcal{A}=\mathrm{CYC}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}\log\frac{1}{1-B(z^k)}}$$

这里不给出证明。

构造组合类 · example 4

$\mathrm{CYC}(\{\circ, \bullet\})$ 就是所有的双色珠子串成的本质不同（可以旋转，不能翻转）的环构成的等价类。

构造组合类 · example 4

$\mathrm{CYC}(\{\circ, \bullet\})$ 就是所有的双色珠子串成的本质不同（可以旋转，不能翻转）的环构成的等价类。

不列举了，想必精通群论的您早就知道了

构造组合类 · Multiset 构造

若 $[z^0]\mathcal{B} = 0$，则我们定义

$$\mathrm{MSET}(\mathcal{B}) = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})/\mathrm{R}$$

其中 R 是任意置换构成的群。相当于生成一个 $\beta \in \mathcal{B}$ 组成的无序列表。

构造组合类 · Multiset 构造

若 $[z^0]\mathcal{B} = 0$，则我们定义

$$\mathrm{MSET}(\mathcal{B}) = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})/\mathrm{R}$$

其中 R 是任意置换构成的群。相当于生成一个 $\beta \in \mathcal{B}$ 组成的无序列表。

在无标号计数里非常重要，所以有诸如 Pólya Exp，欧拉变换等一众别称。

构造组合类 · Multiset 构造

比如，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 和
$(\beta_1, \beta_3, \beta_2), (\beta_2, \beta_1, \beta_3), (\beta_2, \beta_3, \beta_1), (\beta_3, \beta_1, \beta_2), (\beta_3, \beta_2, \beta_1)$ 等价。
这是整个 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 所属的等价类。

构造组合类 · Multiset 构造

比如，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 和 $(\beta_1, \beta_3, \beta_2), (\beta_2, \beta_1, \beta_3), (\beta_2, \beta_3, \beta_1), (\beta_3, \beta_1, \beta_2), (\beta_3, \beta_2, \beta_1)$ 等价。这是整个 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 所属的等价类。

再比如，$(\beta_1, \beta_1, \beta_2)$ 和 $(\beta_1, \beta_2, \beta_1), (\beta_2, \beta_1, \beta_1)$ 等价。这是整个 $(\beta_1, \beta_1, \beta_2)$ 所属的等价类。

比如，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 和
$(\beta_1, \beta_3, \beta_2), (\beta_2, \beta_1, \beta_3), (\beta_2, \beta_3, \beta_1), (\beta_3, \beta_1, \beta_2), (\beta_3, \beta_2, \beta_1)$ 等价。
这是整个 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 所属的等价类。

再比如，$(\beta_1, \beta_1, \beta_2)$ 和 $(\beta_1, \beta_2, \beta_1), (\beta_2, \beta_1, \beta_1)$ 等价。这是整个 $(\beta_1, \beta_1, \beta_2)$ 所属的等价类。

想必精通群论的您早就知道了

构造组合类 · Multiset 构造

有结论：

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{MSET}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-B_i} \\ \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B(z^i)}{i}\right) \end{cases}}$$

其中 $\exp(A)$ 应理解为 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$。

构造组合类 · Multiset 构造

有结论：

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{MSET}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-B_i} \\ \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{B(z^i)}{i}\right) \end{cases}}$$

其中 $\exp(A)$ 应理解为 $\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{A^i}{i!}$。

第一行从组合意义考虑显然：无序列表可以看成 sort 过的列表，而一个自然的排序是按大小为第一关键字，然后给相同大小的 β 分配 $1..B_i$ 的标号，作为第二关键字。

构造组合类 · Multiset 构造

有结论：

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{MSET}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-B_i} \\ \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{B(z^i)}{i}\right) \end{cases}}$$

其中 $\exp(A)$ 应理解为 $\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{A^i}{i!}$。

第一行从组合意义考虑显然：无序列表可以看成 sort 过的列表，而一个自然的排序是按大小为第一关键字，然后给相同大小的 β 分配 $1..B_i$ 的标号，作为第二关键字。

第二行？

首先枚举儿子数 i。考虑应用 burnside 引理，显然一个置换 f 的不动点只与其循环拆分（有序，显然循环间可以通过最前一个元素的位置分出顺序）$\{a_i\}$ 有关。具体来说是

$$\sum_i \frac{1}{i!} \sum_f \prod F(x^{a_i})$$

解释一下上式：循环内所有组的“染色”方案必须完全一样，选择大小均为 s 方案数就只有 $[x^s]F$，但是“占地”却是 $a_i s$，故有上式。事实上可以直接应用下面会讲到的 Pólya 定理。

构造组合类 · Multiset 构造 · 证明

思考有多少个循环能被循环拆分 $\{a_i\}$ 描述。首先决定每个标号属于哪个循环，然后循环内可以圆排列。

而这样搞会破坏循环原本的自然顺序（自然顺序即最前一个元素的位置）（一个拆分会被恰好计算循环数阶乘次），所以还要再除以循环数的阶乘。

$$\sum_i \frac{1}{i!} \sum_{l, \sum a_j = i} \frac{1}{l!} \binom{i}{a_1, a_2, \ldots a_l} \prod_{j=1}^{l} F(x^{a_i})(a_i - 1)!$$

$$\sum_i \sum_{l, \sum a_j = i} \frac{1}{l!} \prod_{j=1}^{l} \frac{F(x^{a_i})}{a_i}$$

我们发现现在后面这个部分可以写成 exp 的形式。设

$$G(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F(x^i)y}{i}$$

则我们得到

$$\sum_i [y^i]e^G$$

直接带入 $y=1$ 即可。我们得到

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{F(x^i)}{i}\right)$$

可喜可贺!

构造组合类 · example 6

分析无标号有根树的构造。注意允许递归调用自身。

构造组合类 · example 6

分析无标号有根树的构造。注意允许递归调用自身。

一棵树可以表示为根和其儿子列表（由于无标号，我们不能区分儿子的排列顺序，所以这个列表是一个无序列表）组成的有序对（根和儿子还是分清的，毕竟是有根树）。从而我们可以说

$$\boxed{\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times \mathrm{MSET}(\mathcal{T})}$$

Pólya 定理

重要的计数工具。

Pólya 定理

重要的计数工具。

但是 OIwiki 上的那个太逊了，我们将要加强它。

Pólya 定理

重要的计数工具。

但是 OIwiki 上的那个太逊了，我们将要加强它。

考虑广义的**染色**。考虑一个大小为 m 的有限集合 $\mathcal{M}$ 和一个置换群 G 作用在其上。不妨认为 $\mathcal{M} = \{1, 2, ..., m\}$。

令 $\mathcal{B}$ 是一个组合类，$\mathcal{M}$ 是一个有限集合，上有一个置换群 G。我们将要研究集合 $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}$，即所有 $\mathcal{M} \to \mathcal{B}$ 的映射，我们称这种映射为**染色**。

染色这个名字的来源是 $\mathcal{B}$ 是颜色集合的情形。想必精通群论的你早就知道了

Pólya 定理

重要的计数工具。

但是 OIwiki 上的那个太逊了，我们将要加强它。

考虑广义的**染色**。考虑一个大小为 m 的有限集合 $\mathcal{M}$ 和一个置换群 G 作用在其上。不妨认为 $\mathcal{M} = \{1, 2, ..., m\}$。

令 $\mathcal{B}$ 是一个组合类，$\mathcal{M}$ 是一个有限集合，上有一个置换群 G。我们将要研究集合 $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}$，即所有 $\mathcal{M} \to \mathcal{B}$ 的映射，我们称这种映射为**染色**。

染色这个名字的来源是 $\mathcal{B}$ 是颜色集合的情形。想必精通群论的你早就知道了

之前说的有序列表其实就是染色。

Pólya 定理

两个染色 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ 被认为**本质相同**，如果存在映射 $g \in G, \phi_1 \circ g = \phi_2$。从而我们研究的对象可以称为 $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G$。

Pólya 定理

两个**染色** $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ 被认为**本质相同**，如果存在映射 $g \in G, \phi_1 \circ g = \phi_2$。从而我们研究的对象可以称为 $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G$。

$\mathcal{B}$ 中的每一个元素 β 都可以有权重 $w(\beta)$。一个映射 ϕ 的权重 $w(\phi) := \prod_{k \in \mathcal{M}} w(\phi(k))$，显然同一个等价类中的映射权重都一样，不然不会等价，称为这个等价类的权重。

Pólya 定理

两个**染色** $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}^{\mathcal{M}}$ 被认为**本质相同**，如果存在映射 $g \in G, \phi_1 \circ g = \phi_2$。从而我们研究的对象可以称为 $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G$。

$\mathcal{B}$ 中的每一个元素 β 都可以有权重 $w(\beta)$。一个映射 ϕ 的权重 $w(\phi) := \prod_{k \in \mathcal{M}} w(\phi(k))$，显然同一个等价类中的映射权重都一样，不然不会等价，称为这个等价类的权重。

注意这个权值可以是一些奇怪的东西，比如一个幂级数。

Pólya 定理

Pólya 定理的内容如下：

Pólya 定理

Pólya 定理的内容如下：

$$\sum_{\phi\in(\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G)} w(\phi) = Z\left(G; \sum_{\beta\in\mathcal{B}} w(\beta), \ldots, \sum_{\beta\in\mathcal{B}} w^m(\beta)\right)$$

其中

$$Z(G; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x_1^{j_1(g)} x_2^{j_2(g)} \ldots x_m^{j_m(g)}$$

其中 $j_1(g)$ 表示 g 中大小为 1 的循环个数。

Pólya 定理 · 特殊情形 1

如果取 $w(\beta) = z^{|\beta|}$，我们还有

$$\sum_{\phi \in (\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G)} z^{|\phi|} = Z\left(G; B(z), \ldots, B(z^m)\right)$$

Pólya 定理 · 特殊情形 1

如果取 $w(\beta) = z^{|\beta|}$，我们还有

$$\sum_{\phi \in (\mathcal{B}^{\mathcal{M}}/G)} z^{|\phi|} = Z\left(G; B(z), \ldots, B(z^m)\right)$$

很自然，带进去就完事了。

Pólya 定理 · 特殊情形 2

如果取 G 为任意置换的集合 R，我们还有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\phi \in (\mathcal{B}^{[1..i]}/\mathrm{R}_i)} w(\phi) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{\beta \in \mathcal{B}} w^i(\beta)}{i} \right)$$

Pólya 定理 · 特殊情形 2

如果取 G 为任意置换的集合 R，我们还有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\phi \in (\mathcal{B}^{[1..i]}/\mathrm{R}_i)} w(\phi) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{\beta \in \mathcal{B}} w^i(\beta)}{i} \right)$$

证明可参考之前 MSET 的部分，容易扩展到此处。

Pólya 定理 · 特殊情形 2

如果取 G 为任意置换的集合 R，我们还有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\phi \in (\mathcal{B}^{[1..i]}/\mathrm{R}_i)} w(\phi) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{\beta \in \mathcal{B}} w^i(\beta)}{i}\right)$$

证明可参考之前 MSET 的部分，容易扩展到此处。

顺带一提 MSET 构造同时是上面的两个特殊情形（

例题和习题

好了，你已经掌握数数的基本方法了，让我们来做一些题目练习一下吧!

ZJOI2018 树

心 肺 停 止

简要题意：rand 出 k 棵有标号有根，大小为 n 的树，问 rand 出来的有根树全部同构的概率。

也就是求每个无标号有根树作为有标号有根树的等价类的大小的 k 次方和。

ZJOI2018 树 · 解

设树 t 作为等价类时的大小为 $siz(t)$，表述的时候我们说这棵无标号树描述了多少棵有标号树。

ZJOI2018 树 · 解

设树 t 作为等价类时的大小为 $siz(t)$，表述的时候我们说这棵无标号树描述了多少棵有标号树。

首先考虑两个等价类的笛卡尔积（我们当然要先引入笛卡尔积再引入 MSET 构造），记为 $*$。

ZJOI2018 树 · 解

设树 t 作为等价类时的大小为 $siz(t)$，表述的时候我们说这棵无标号树描述了多少棵有标号树。

首先考虑两个等价类的笛卡尔积（我们当然要先引入笛卡尔积再引入 MSET 构造），记为 $*$。我们有

$$|t_1 * t_2| = |t_1| + |t_2|$$

$$siz(t_1 * t_2) = siz(t_1)siz(t_2)\binom{|t_1| + |t_2|}{|t_1|, |t_2|}$$

ZJOI2018 树 · 解

设树 t 作为等价类时的大小为 $siz(t)$，表述的时候我们说这棵无标号树描述了多少棵有标号树。

首先考虑两个等价类的笛卡尔积（我们当然要先引入笛卡尔积再引入 MSET 构造），记为 $*$。我们有

$$|t_1 * t_2| = |t_1| + |t_2|$$
$$siz(t_1 * t_2) = siz(t_1)siz(t_2)\binom{|t_1| + |t_2|}{|t_1|, |t_2|}$$

这提示我们搞出一个这样一个生成函数：

记 $T(\mathcal{A}; z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} siz^k(\alpha)\frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!^k}$。

ZJOI2018 树 · 解

分析一下它的性质。

ZJOI2018 树 · 解

分析一下它的性质。

- 线性是自然的：

$$T(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = T(\mathcal{A}) + T(\mathcal{B})$$

ZJOI2018 树 · 解

分析一下它的性质。

- 线性是自然的：

$$T(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = T(\mathcal{A}) + T(\mathcal{B})$$

- 积性（要证一下）：

$$T(\mathcal{A}*\mathcal{B}) = T(\mathcal{A})T(\mathcal{B})$$

ZJOI2018 树 · 解

那么我们分析一棵树的构造。我们容易得到

$$\mathcal{T}^{\square} = \mathsf{MSET}(\mathcal{T})$$

注意此处去掉根的操作比较特殊，可以验证它并不是 $\times \mathcal{Z}$。这里记为 $^{\square}$。

ZJOI2018 树 · 解

那么我们分析一棵树的构造。我们容易得到

$$\mathcal{T}^{\square} = \mathsf{MSET}(\mathcal{T})$$

注意此处去掉根的操作比较特殊，可以验证它并不是 $\times\mathcal{Z}$。这里记为 $^{\square}$。

注意我们分析的是 $\mathcal{T}$ 的结构，这和我们使用什么生成函数**无关**，我们只是知道某些结构和某些生成函数有直接对应罢了。**不要把构造和生成函数混为一谈**。所以我们直接把我们的魔改 GF 带进去。

ZJOI2018 树 · 解

$$\begin{aligned}
T(\mathcal{T}^{\square}) &= T(\mathrm{MSET}(\mathcal{T})) \\
&= T\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{t\in\mathcal{T}}t^{i}\right)\right) && (\text{Pólya 定理}) \\
&= T\left(\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{ij}}{i^{j}j!}\right) && (\text{拆开 exp}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^{ij}(t)}{i^{j}j!} && (T\ \text{的线性，积性}) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\exp(T^{i}(t)/i) && (\text{恢复 exp})
\end{aligned}$$

总而言之就是把 T 塞进 exp 里……

ZJOI2018 树 · 解

$$
\begin{aligned}
T(\mathcal{T}^{\square}) &= T(\mathrm{MSET}(\mathcal{T})) \\
&= T\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{t\in\mathcal{T}}t^{i}\right)\right) && \text{(Pólya 定理)} \\
&= T\left(\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{ij}}{i^{j}j!}\right) && \text{(拆开 exp)} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^{ij}(t)}{i^{j}j!} && \text{(}T\text{ 的线性，积性)} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\exp(T^{i}(t)/i) && \text{(恢复 exp)}
\end{aligned}
$$

总而言之就是把 T 塞进 exp 里……

现在出现了一个问题。我们没法处理 $T^{i}(t)$。

ZJOI2018 树 · 解

可以想到的是修改 T 的定义为

$$T(\mathcal{A}; z, u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \frac{1}{1 - u^{\frac{siz(\alpha)}{|\alpha|!}}}$$

可以想到的是修改 T 的定义为

$$T(\mathcal{A}; z, u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \frac{1}{1 - u \frac{siz(\alpha)}{|\alpha|!}}$$

T 的乘法定义为 $[u^k](T_1 T_2) = [u^k] T_1 [u^k] T_2$，即 z 一维卷积，u 一维点乘。它仍然保有之前的线性，积性。于是有

$$\boxed{[u^k] T^i(t; z) = siz^{ik}(t) \frac{z^{i|t|}}{|t|!^{ik}} = [u^{ik}] T(t; z^i)}$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
[u^k]T(\mathcal{T}^{\square};z) &= \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{t\in\mathcal{T}}\exp([u^{ik}]T(t;z^i)/i)\\
&= \prod_{i=1}^{\infty}[u^{ik}]\exp(T(\mathcal{T};z^i)/i) \qquad (T\ \text{的线性，也是刚才操作的目的})\\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{[u^{ik}]T(\mathcal{T};z^i)}{i}\right)
\end{aligned}
$$

ZJOI2018 树 · 结语

这个东西就很好处理了，因为和今天主题关系不大我们直接 skip。

ZJOI2018 树 · 结语

这个东西就很好处理了，因为和今天主题关系不大我们直接skip。

可以发现刚刚的过程大部分都只是无脑化式子，如果你熟练的话可以直接跳过，可见这个做法的优越性。

ZJOI2018 树 · 结语

这个东西就很好处理了，因为和今天主题关系不大我们直接 skip。

可以发现刚刚的过程大部分都只是无脑化式子，如果你熟练的话可以直接跳过，可见这个做法的优越性。

有兴趣的同学可以去看看其他题解有多阴间。

无标号荒漠计数

心 肺 停 止

简要题意：求 n 个节点的无标号荒漠的数量。无标号荒漠是无标号无根**边**仙人掌（所有边至多在一个环上）构成的森林。

荒漠的问题直接 MSET 一下即可。也存在一个方法实现从无根到有根的转化~~但是在仙人掌上可能极为毒瘤~~。我们直接考虑无标号有根仙人掌就好了。

分类讨论根的儿子和根的关系：以一条边相连，或者同时在一个环上。在同一个环上时，由于根是固定的，所以置换只有两种：恒等和翻转。应用 Pólya 定理

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \mathcal{Z} \times \mathrm{MSET}\left(\mathcal{C} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{C}^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta\mathcal{C}^2)^i \times (1+\mathcal{C})\right) \\ &= \mathcal{Z} \times \mathrm{MSET}\left(\frac{\mathcal{C}}{2(1-\mathcal{C})} + \frac{\mathcal{C}+\Delta\mathcal{C}^2}{2(1-\Delta\mathcal{C}^2)}\right)\end{aligned}$$

其中 $\Delta\mathcal{C}^2 = \sum_{t\in\mathcal{C}} t^2$。

习题集 1：有标号计数 · 定义

一个大小为 n 的对象被称作**标号的**，如果它的每一个节点（这里我们认为一个对象是一个图，如果我们需要的话，可以任意扩展这个定义）都附带一个互不相同的正整数标号，恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

习题集 1：有标号计数 · 定义

一个大小为 n 的对象被称作**标号的**，如果它的每一个节点（这里我们认为一个对象是一个图，如果我们需要的话，可以任意扩展这个定义）都附带一个互不相同的正整数标号，恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

一个对象被称为**弱标号**的，如果它几乎是标号的，但是其标号不必恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

习题集 1：有标号计数 · 定义

一个大小为 n 的对象被称作**标号的**，如果它的每一个节点（这里我们认为一个对象是一个图，如果我们需要的话，可以任意扩展这个定义）都附带一个互不相同的正整数标号，恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

一个对象被称为**弱标号的**，如果它几乎是标号的，但是其标号不必恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

一个组合类被称作**标号的**，如果它的元素都是标号的对象。

习题集 1：有标号计数 · 定义

一个大小为 n 的对象被称作**标号的**，如果它的每一个节点（这里我们认为一个对象是一个图，如果我们需要的话，可以任意扩展这个定义）都附带一个互不相同的正整数标号，恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

一个对象被称为**弱标号的**，如果它几乎是标号的，但是其标号不必恰好是 $[1..n]$ 的一个排列。

一个组合类被称作**标号的**，如果它的元素都是标号的对象。

我们可以把一个弱标号的对象排成强标号。比如有一个 α，它的标号是 $\langle 233, 998244353, 1\rangle$，那么 α 的标号就会被重标号成 $\langle 2, 3, 1\rangle$。这个被重标号的 α 记作 $\rho(\alpha)$。其实就是离散化。

习题集 1：有标号计数 · 定义

一个计数序列 A_n 的 **EGF**（Exponential GF）是形式幂级数

$$A(z) = \sum_{i \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!}$$

因而对于组合类 $\mathcal{A}$，它的 EGF 也是

$$\sum_{x \in \mathcal{A}} \frac{z^{|x|}}{|x|!}$$

我们记

$$A_n = n![z^n]A(z)$$

$\mathcal{E}, \mathcal{Z}$ 的定义如之前一样。接下来的 GF 默认为 EGF。

习题集 1：有标号计数 · 大纲

定义两个组合类的**标号积**为

$$\beta \star \gamma := \{(\beta', \gamma') | (\beta', \gamma') \text{是强标号的}, \rho(\beta') = \beta, \rho(\gamma') = \gamma\}$$

其大小定义为 $|\beta| + |\gamma|$。

习题集 1：有标号计数 · 大纲

定义两个组合类的**标号积**为

$$\beta \star \gamma := \{(\beta', \gamma') | (\beta', \gamma')\text{是强标号的}, \rho(\beta') = \beta, \rho(\gamma') = \gamma\}$$

其大小定义为 $|\beta| + |\gamma|$。

两个组合类的**标号积**定义为

$$\mathcal{B} \star \mathcal{C} := \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}} \beta \star \gamma$$

显然此处 $\beta \star \gamma$ 两两不交。

习题集 1：有标号计数 · 大纲

定义两个组合类的标号积为

$$\beta \star \gamma := \{(\beta', \gamma') | (\beta', \gamma') \text{是强标号的}, \rho(\beta') = \beta, \rho(\gamma') = \gamma\}$$

其大小定义为 $|\beta| + |\gamma|$。

两个组合类的标号积定义为

$$\mathcal{B} \star \mathcal{C} := \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}} \beta \star \gamma$$

显然此处 $\beta \star \gamma$ 两两不交。

- **证明：EGF 是（在标号积下）积性的。**

习题集 1：有标号计数 · 大纲

- **定义有标号 Sequence 构造，它应该和 $\dfrac{1}{1 - B(z)}$ 对应。指出它的组合意义。**

习题集 1：有标号计数 · 大纲

- 定义有标号 Sequence 构造，它应该和 $\dfrac{1}{1-B(z)}$ 对应。指出它的组合意义。

- 定义 Set 构造，它应该和 exp 对应。指出它的组合意义。

习题集 1：有标号计数 · 大纲

- 定义有标号 Sequence 构造，它应该和 $\dfrac{1}{1-B(z)}$ 对应。指出它的组合意义。

- 定义 Set 构造，它应该和 exp 对应。指出它的组合意义。

- 定义 Pointing 构造，它应该和求导再乘以 z 对应。指出它的组合意义。指出 OGF 的求导再乘以 z 为何不在无标号计数中有类似的组合意义。

习题集 1：有标号计数 · 大纲

- 定义有标号 Sequence 构造，它应该和 $\dfrac{1}{1-B(z)}$ 对应。指出它的组合意义。

- 定义 Set 构造，它应该和 exp 对应。指出它的组合意义。

- 定义 Pointing 构造，它应该和求导再乘以 z 对应。指出它的组合意义。指出 OGF 的求导再乘以 z 为何不在无标号计数中有类似的组合意义。

- 定义 Subsitution 构造，它应该和复合对应。指出它的组合意义。指出 OGF 的复合为何不在无标号计数中有类似的组合意义。指出为什么 $B \circ C$ 中的 B 也是 EGF。指出当从 $\mathcal{C}$ 中挑选了两个相同的的对象时为何此式仍能解释。

习题集 1：有标号计数 · 题单

传 世 经 典

小朋友和二叉树

大朋友和多叉树
hint：需要拉格朗日反演。

有标号荒漠计数

有标号边双连通图计数

有标号点双连通图计数

习题集 1：有标号计数 · 题单

传 世 经 典

小朋友和二叉树

大朋友和多叉树
hint：需要拉格朗日反演。

有标号荒漠计数

有标号边双连通图计数

有标号点双连通图计数

~~口胡一下就好了，后三题我也没写过（~~

习题集 2：集合幂级数 · 定义

我们定义一种新的组合类，其元素的大小函数是 $[1..n]$ 的一个子集，当然也可看成一个 $[0, 2^n)$ 的一个二进制数。

习题集 2：集合幂级数 · 定义

我们定义一种新的组合类，其元素的大小函数是 $[1..n]$ 的一个子集，当然也可看成一个 $[0, 2^n)$ 的一个二进制数。

考虑子集卷积的普通做法，我们定义一个组合类的**集合占位幂级数**为

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(z^{|\alpha|} x^{||\alpha||} + \sum_{i=||\alpha||+1}^{\infty} f_i x^i \right)$$

其中 $||\alpha||$ 表示集合 $|\alpha|$ 的大小。f 是无意义的占位信息。

习题集 2：集合幂级数 · 定义

我们定义一种新的组合类，其元素的大小函数是 $[1..n]$ 的一个子集，当然也可看成一个 $[0, 2^n)$ 的一个二进制数。

考虑子集卷积的普通做法，我们定义一个组合类的**集合占位幂级数**为

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(z^{|\alpha|} x^{||\alpha||} + \sum_{i=||\alpha||+1}^{\infty} f_i x^i \right)$$

其中 $||\alpha||$ 表示集合 $|\alpha|$ 的大小。f 是无意义的占位信息。容易验证集合占位幂级数的或卷积

$$[z^s](\sigma \times \tau) = \sum_{p \cup q = s} [z^p]\sigma \times [z^q]\tau$$

是**子集卷积**。或卷积就比较好考虑了，FWT 即可。

习题集 2：集合幂级数 · 大纲

- 定义两个组合类的“笛卡尔积”，它应该和其集合占位幂级数的乘积对应。

习题集 2：集合幂级数 · 大纲

- 定义两个组合类的“笛卡尔积”，它应该和其集合占位幂级数的乘积对应。

- 定义 composition 构造，它应该和其集合占位幂级数的 exp 对应。exp 中出现的乘法均定义为或卷积。指出 composition 构造的组合意义。

hint：实现的时候，由于 FWT 的优秀性质，我们可以把原幂级数 FWT 然后对每一位 exp 再 FWT 回去。

习题集 2：集合幂级数 · 大纲

- 定义两个组合类的“笛卡尔积”，它应该和其集合占位幂级数的乘积对应。

- 定义 composition 构造，它应该和其集合占位幂级数的 exp 对应。exp 中出现的乘法均定义为或卷积。指出 composition 构造的组合意义。
hint：实现的时候，由于 FWT 的优秀性质，我们可以把原幂级数 FWT 然后对每一位 exp 再 FWT 回去。

- 定义 decomposition 构造，它应该和其集合占位幂级数的 ln 对应。指出 decomposition 构造的组合意义。

习题集 2：集合幂级数 · 大纲

- 定义两个组合类的“笛卡尔积”，它应该和其集合占位幂级数的乘积对应。

- 定义 composition 构造，它应该和其集合占位幂级数的 exp 对应。exp 中出现的乘法均定义为或卷积。指出 composition 构造的组合意义。
hint：实现的时候，由于 FWT 的优秀性质，我们可以把原幂级数 FWT 然后对每一位 exp 再 FWT 回去。

- 定义 decomposition 构造，它应该和其集合占位幂级数的 ln 对应。指出 decomposition 构造的组合意义。

- 定义 modified box 构造
$\Box_i \mathcal{A} := \{\alpha | \alpha \in \mathcal{A}, i \in |\alpha|\}, |\alpha|_{\Box_i \mathcal{A}} := |\alpha|_{\mathcal{A}} / \{i\}$。**指出它的组合意义。**

习题集 2：集合幂级数 · 题单

欧拉生成子图

点双连通生成子图

hint：一点一点筛掉割点，$O(2^n n^3)$ 能过。

边双连通生成子图

hint：边双连通图是一种特殊的点双连通图。

Tutte 多项式

生成仙人掌

结语

其实就是从头给大家介绍了生成函数。不过介绍的角度可能大家不太熟悉。我们叫这个方法为符号化方法。

结语

其实就是从头给大家介绍了生成函数。不过介绍的角度可能大家不太熟悉。我们叫这个方法为符号化方法。

虽然例题看起来很鬼畜，但在这个新的符号化体系的视角下它们的确是比较基本的。

~~EI：我的题提交数怎么翻了一倍~~

结语

其实就是从头给大家介绍了生成函数。不过介绍的角度可能大家不太熟悉。我们叫这个方法为符号化方法。

虽然例题看起来很鬼畜，但在这个新的符号化体系的视角下它们的确是比较基本的。

~~EI：我的题提交数怎么翻了一倍~~

~~EI：这个 IP 段怎么这么多恶意提交啊，叫 LOJ 管理封了~~

结语

其实就是从头给大家介绍了生成函数。不过介绍的角度可能大家不太熟悉。我们叫这个方法为符号化方法。

虽然例题看起来很鬼畜，但在这个新的符号化体系的视角下它们的确是比较基本的。

~~EI：我的题提交数怎么翻了一倍~~

~~EI：这个 IP 段怎么这么多恶意提交啊，叫 LOJ 管理封了~~

理论上任何生成函数题都可以拿符号化方法分析，除非你搞出一个比它还 nb 的方法⋯⋯

结语

其实就是从头给大家介绍了生成函数。不过介绍的角度可能大家不太熟悉。我们叫这个方法为符号化方法。

虽然例题看起来很鬼畜，但在这个新的符号化体系的视角下它们的确是比较基本的。

~~EI：我的题提交数怎么翻了一倍~~

~~EI：这个 IP 段怎么这么多恶意提交啊，叫 LOJ 管理封了~~

理论上任何生成函数题都可以拿符号化方法分析，除非你搞出一个比它还 nb 的方法……

如果还希望更多资料的话可以看看这本书。（另一个下载链接）

感谢

把自己的博客拿出来炒了一遍冷饭……丢人了丢人了

感谢

把自己的博客拿出来炒了一遍冷饭……丢人了丢人了

~~感谢学军中学提供的交流机会和平台~~

感谢

把自己的博客拿出来炒了一遍冷饭⋯⋯丢人了丢人了

~~感谢学军中学提供的交流机会和平台~~

~~感谢 zb 和 wjh 的宽容审核~~

感谢

把自己的博客拿出来炒了一遍冷饭……丢人了丢人了

~~感谢学军中学提供的交流机会和平台~~

~~感谢 zb 和 wjh 的宽容审核~~

希望大家看了这个之后可以爱上数数，吊打 x义x!