Tarea 2
Propedéutico Electrodinámica
2020-03-24

Nombre: ______________________________

Entregar el martes 2020-03-31.

Como no tenemos clases presenciales, entonces propongo problemas para desarrollar el temario.

1. Usando la ley de Gauss demuestra que el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ obedece la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{r})$

2. Demuestra el teorema de Gauss: Para *todo* (con un granito de sal) campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ y volumen V con frontera ∂V,
$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$
Notas:
   - La superficie ∂V es cerrada y orientable.
   - $d\boldsymbol{a}$ es el elemento de área, es un vector cuyo tamaño es el área de un pedacito de superficie y cuya dirección es el de la normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ a la superficie que sale del volumen. De forma equivalente, da_x es el área de la proyección del elemento de superficie sobre el plano yz, da_y corresponde a la proyección sobre el plano zx y da_z sobre el plano xy. El signo de da_x es el de $\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, el de da_y es el de $\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, y el de da_z es el de $\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$.

   Pistas:
   - Lo más fácil, aunque no lo más formal, es dividir el volumen V en prismas rectangulares *infinitesimales*. Argumenta por qué demostrar el teorema para un pequeño prisma implica que se cumple para un volumen finito de forma arbitraria.
   - Una demostración un poco más convincente es dividir al volumen en pequeñas pirámides triangulares y demostrarlo para una, caracterizada por un vértice y tres vectores que describan los lados que inciden en dicho vértice.
   - Otra demostración más consiste en dividir el volumen en regiones convexas, proyectarlas sobre el plano yz y cuadricular dicha proyección. Cada línea con y y z dadas intersecta a la superficie en dos puntos, digamos x_0 y x_1. Luego, $\Delta a_x F_x(x_1,y,z) + \Delta a_x F_x(x_0,y,z) = \Delta y\Delta z(F_x(x_1,y,z) - F_x(x_0,y,z)) = \Delta y\Delta z\int_{x_0}^{x_1} dx\,\partial F_x(x,y,z)/\partial x$ ($\Delta a_x = \pm\Delta y\Delta z$ es la componente x de un elemento de área en (x_1,y,z) y (x_0,y,z); nota los signos), entonces $\int_{\partial V} da_x F_x(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r\,(\partial/\partial x)F(\boldsymbol{r})$. Luego, repetir para las coordenadas y y z. Finalmente, si el volumen no es convexo, se pueden sumar los resultados para las distintas regiones que sí lo son.

3. Demuestra el teorema de Stokes: Para todo campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ y superficie orientable A con frontera ∂A,
$$\int_{\partial A} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_A d\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$
Notas:
   - $\nabla\times\boldsymbol{F}$ es el rotacional con componentes cartesianas $(\partial_y F_z - \partial_z F_y,\, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)$ y usé la notación para flojos $\partial_i \equiv \partial/\partial r_i$
   - Por ser orientable, se puede asignar una normal $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$ en todo punto $\boldsymbol{r}$ de la superficie A.
   - ∂A es una curva cerrada que recorre la frontera de la superficie A siguiendo una dirección consistente con la *regla de la mano derecha*, i.e. si la palma de la mano derecha toca dicha frontera y el pulgar apunta hacia la normal, los dedos de la mano apuntan en la dirección en que se recorre la curva.

- $d\boldsymbol{\ell}$ es el *elemento* de longitud a lo largo de la curva.
- $d\boldsymbol{a}$ es el elemento de área.

Pistas:

- La forma más sencilla, aunque menos formal y no del todo general, es demostrarlo para rectángulos *infinitesimales* alineados a los ejes cartesianos, por ejemplo, uno de lados Δx y Δy y con elemento de área $\Delta \boldsymbol{a} = \Delta x \Delta y \hat{\boldsymbol{z}}$. El problema es que no es fácil generalizar de rectángulos a superficies arbitrarias.
- Una con algo de talacha pero fácil también es demostrarlo para un triángulo *infinitesimal* caracterizado por un vértice $\boldsymbol{r}_0$ y dos lados pequeños $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Hay que demostrar que la integral de $\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{r}_0$ es igual a $\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}/2$, interpretar este resultado y argumentar que toda superficie se puede triangular.
- En 2D, el teorema de Stokes es idéntico al de Gauss, salvo por una rotación. Si describimos una superficie A (o una parte de la superficie) como un mapa $\boldsymbol{r}(u,v)$ de una región en el plano $u - v$, el teorema de Stokes en 3D se puede deducir del teorema de Stokes en 2D haciendo cambios de variable, usando regla de la cadena, calculando jacobianos, etc.

4. Demuestra los teoremas *generalizados* de Gauss y de Stokes:
   (a) $\int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\, f(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r\, \nabla f(\boldsymbol{r})$,
   (b) $\int_{\partial V} d\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r\, \nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,
   (c) $\int_{\partial A} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_A (d\boldsymbol{a} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,
   (d) $\int_{\partial A} d\boldsymbol{\ell} f(\boldsymbol{r}) = \int_A (d\boldsymbol{a} \times \nabla) f(\boldsymbol{r})$,
   (e) $\int_{\partial A} d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_A (d\boldsymbol{a} \times \nabla) \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,

   donde V es un volumen, ∂V su frontera, A una superficie orientable, ∂A su frontera, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ un campo vectorial, $f(\boldsymbol{r})$ un campo escalar, $\boldsymbol{dell}$ un elemento de longitud y $d\boldsymbol{a}$ un elemento de superficie.

   Notas:

   - Se pueden resumir los resultados anteriores como $\int_{\partial V} d\boldsymbol{a} \ldots = \int_V d^3r \nabla \ldots$ y $\int_{\partial A} d\boldsymbol{\ell} \ldots = \int_A (d\boldsymbol{a} \times \nabla) \ldots$.

5. Considera un sistema con carga distribuida *continuamente* de acuerdo a una densidad $\rho(\boldsymbol{r})$.
   (a) Demuestra que su energía se puede escribir como
   $$U = \frac{1}{2} \int_V d^3r\, \rho(\boldsymbol{r}) \phi(\boldsymbol{r}).$$
   (b) ¿De dónde viene el factor de $1/2$?
   (c) Usando la ley de Poisson e *integrando por partes* demuestra que también podemos escribir
   $$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r\, |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2.$$
   (d) ¿Qué suposiciones hiciste sobre ρ, ϕ y/o $\boldsymbol{E}$ en la superficie ∂V. ¿Qué volumen V se debe/puede escoger?

   Notas:

   - Usaremos con frecuencia integrales por partes en que usamos el teorema de Gauss o de Stokes para mover operadores diferenciales de un lado a otro. Por ejemplo, $\int_V d^3r\, f(\boldsymbol{r}) \nabla g(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r\, [\nabla(f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})) - (\nabla f(\boldsymbol{r}))g(\boldsymbol{r})] = \int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\, f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r}) - \int_V d^3r\, (\nabla f(\boldsymbol{r}))g(\boldsymbol{r})$. En ocasiones podemos eliminar la integral de superficie.

- Podemos identificar $u(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2/8\pi$ como una densidad de energía.

6. Considera un capacitor de placas paralelas, formado por dos placas planas metálicas de lados a y b separadas una distancia $d \ll a, b$ en las que se depositan cargas $\pm Q$.
   (a) Calcula el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio usando la ley de Gauss.
   (b) Calcula la energía electrostática del sistema.
   (c) Calcula el cambio de la energía del sistema si una de las placas se aleja de la otra una distancia pequeña δd.
   (d) Calcula la fuerza sobre dicha placa comparando el cambio de energía con el trabajo realizado.
   (e) Calcula la fuerza coulombiana sobre una de las placas.
   (f) Discute los últimos dos resultados.

7. Demuestra las identidades
   (a) $\nabla(f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})) = (\nabla f(\boldsymbol{r}))g(\boldsymbol{r})) + f(\boldsymbol{r})\nabla g(\boldsymbol{r})$,
   (b) $\nabla \cdot (f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})) = (\nabla f(\boldsymbol{r})) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + f(\boldsymbol{r})\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,
   (c) $\nabla \times (f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})) = (\nabla f(\boldsymbol{r})) \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + f(\boldsymbol{r})\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,
   (d) $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}))$
   (e) $\nabla \times (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})) = [\boldsymbol{F}\nabla \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})] - [\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})]$,

   donde $f(\boldsymbol{r})$ y $g(\boldsymbol{r})$ son campos escalares y $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ y $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ son campos vectoriales.

   Pistas:

   - Una forma talachuda pero certera es calcular las componentes usando notación de índices y la convención de Einstein. Así, por ejemplo, el lado derecho del inciso e sería $\epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}F_lG_m$ donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita (1 para permutaciones pares de $123 = xyz$, -1 para impares, 0 en otros casos). Entonces, cada derivada se aplica a un simple producto. Se pueden entonces usar identidades como $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{ij}^{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, donde δ_{ij}^{lm} es la delta de cuatro índices y δ_{ij} es la delta de Kronecker.
   - Una forma formal, ingeniosa pero poco ortodoxa, es separar ∇ en dos símbolos, ∇_F que actúe sobre $\boldsymbol{F}$, sin importar si quedad a la derecha o a la izquierda, y ∇_G que actúe sólo sobre $\boldsymbol{G}$. Entonces, podemos tratar a ∇_F y ∇_G como si fueran vectores ordinarios, olvidando que son operadores. Luego reordenamos los términos de manera que ∇_F quede a la izquierda de $\boldsymbol{F}$ y ∇_G quede a la izquierda de $\boldsymbol{G}$. Finalmente, eliminamos los subíndices F y G por ser innecesarios.
   - Siempre puede uno recurrir a calcular cada componente del lado derecho y del lado izquierdo de las ecuaciones anteriores y verificar que se cumplen.

8. Utiliza la ley de Gauss y el hecho de que el campo es conservativo para demostrar que
   (a) La componente del campo eléctrico tangencial a una superficie cualquiera es continua, $\boldsymbol{E}_{\|}(1) = \boldsymbol{E}_{\|}(2)$, o $\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_{\|}(2) - \boldsymbol{E}_{\|}(1)) = 0$, donde los números 2 y 1 denotan puntos contiguos de uno y otro lado de la superficie y $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector normal a la superficie.
   (b) La componente del campo eléctrico perpendicular a una superficie es contínua en ausencia de carga superficial, $E_{\perp}(1) = E_{\perp}(2)$ o $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{E}(2) - \boldsymbol{E}(1)) = 0$.
   (c) En presencia de una carga superficial σ, hay una discontinuidad del campo $4\pi\sigma$, i.e. $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{E}(2) - \boldsymbol{E}(1)) = 4\pi\sigma$ donde el vector normal va del lado 1 al lado 2 de la superficie.
   (d) El potencial es continuo $\phi(2) = \phi(1)$ (en ausencia de una distribución singular de dipolos).

   Pista:

   - Usa pequeños cilindros gaussianos con tapas paralelas a la superficie, una de cada lado, y pequeños rectángulos con dos lados normales a la superficie y dos a lo largo de la superficie, uno a cada lado. Usa los teoremas de Stokes y de Gauss.

- Otra alternative, poco usual pero bastante inmediata, consiste en, sin pérdida de generalidad, colocar el plano xy tangente al punto de la superficie que nos interesa e integrar $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ y $\nabla \times \boldsymbol{E}$ respecto a z desde $z = 0 - \epsilon$ hasta $z = 0 + \epsilon$, y tomar el límite $\epsilon \to 0$.

9. (a) Argumenta que en el interior de un conductor el campo electrostático es nulo.
   (b) Demuestra que, por tanto, la densidad de carga es nula en el interior del conductor.
   (c) Justo afuera del conductor el campo es perpendicular a la superficie, $\boldsymbol{E}_{\parallel} = 0$.
   (d) El conductor es equipotencial.
   (e) Muestra que el campo perpendicular justo afuera es $E_{\perp} = 4\pi\sigma$, con σ la densidad de carga superficial.

10. Demuestra que dada una densidad de carga $\rho(\boldsymbol{r})$ dentro de un volumen V y el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ en la frontera ∂V de dicho volumen, el potencial es único en todo el volumen V.

    Pistas:

    - El potencial obedece la ecuación de Poisson.
    - Suponiendo que hubiera dos soluciones $\phi_1(\boldsymbol{r})$ y $\phi_2(\boldsymbol{r})$ de la ec. de Poisson, su diferencia $\Phi(\boldsymbol{r}) \equiv \phi_2(\boldsymbol{r}) - \phi_1(\boldsymbol{r})$ obedecería la ecuación de Laplace y valdría cero en la superficie ∂V.
    - Define $\boldsymbol{F} = -\nabla\Phi$.
    - Demuestra que $\int_V d^3r\, F^2 = 0$ integrando por partes y usando las condiciones de frontera y la ecuación de Laplace.
    - Concluye que $\boldsymbol{F} = 0$, por tanto Φ es constante.
    - Demuestra que la constante es cero.

    Nota: La misma demostración se puede aplicar al caso en que conocemos $E_{\perp}$, concluyendo en dicho caso que ϕ es única hasta una constante aditiva, pero $\boldsymbol{E}$ sería único.

11. Se coloca una carga q sobre el eje z en el vacío a una distancia d arriba de una superficie metálica plana *aterrizada* (i.e., con potencial $\phi(r) = 0$) que descanza en el plano xy.
    (a) Demuestra que el potencial en la región $z > 0$ es el mismo que el potencial coulombiano que produce la carga q más el que produce una carga ficticia $-q$ colocada en el eje z a una distancia d abajo de la superficie.
    (b) ¿Cuánto vale el potencial en la región $z < 0$?
    (c) ¿Cuánto vale la carga $\sigma(x, y)$ superficial inducida en la superficie del metal?

12. Se coloca una carga q en el eje z a una distancia d arriba del origen y se coloca una esfera metálica aterrizada de radio $a < d$ centrada en el origen.
    (a) Demuestra que el potencial en la región $r > a$ es el mismo que el potencial coulombiano que produce la carga q más el que produce una carga ficticia $q' = -qa/d$ colocada en el eje z a una distancia $d' = a^2/d$ arriba del origen.
    (b) ¿Cuánto vale el potencial en la región $r < a$?