Tarea 7
Propedéutico Electrodinámica
2020-05-03

Nombre: ____

Entregar el viernes 2020-05-08.

1. Encuentra la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday.

   Pistas

   - Escribe $\mathcal{E} = -(1/c)(d/dt)\Phi_B$ en términos de integrales de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.
   - Usa el teorema de Stokes para llevarla a la forma de una integral de superficie cuyo valor es nulo.
   - Argumenta que esto sucede para cualquier superficie orientable, y por tanto, demuestra que el integrando es cero.

2. Considera un alambre recto que alimenta mediante una corriente I a un capacitor de placas paralelas formadas por discos metálicos de radio a separados una distancia d. Demuestra que de acuerdo a la Ley de Ampère la circulación de $\boldsymbol{B}$ alrededor de una trayectoria cerrada que rodea al alambre es

   (a) $\frac{4\pi}{c}I$ si interpretamos a $\mathcal{C}$ como la frontera de una superficie $\mathcal{S}_1$ que cruza al alambre.

   (b) 0 si interpretamos a la misma trayectoria $\mathcal{C}$ como la frontera de una superficie $\mathcal{S}_2$ que cruza por en medio de las placas del capacitor.

   Notas:

   - En realidad, la circulación de $\boldsymbol{B}$ no debería depender de la elección de la superficie $\mathcal{S}_n$, sólo de la frontera $\mathcal{C}$.
   - El problema se origina en que este sistema es *no estacionario* pues hay acumulación de carga.
   - La Ley de Ampére no puede ser correcta para sistemas no estacionarios.

3. Considera una esfera de radio $a(t)$ cargada uniformemente en todo su interior con una carga Q y que se expande con velocidad $v = da/dt$ =cte. Calcula $\nabla \times B(\boldsymbol{r}, t)$ en un punto $r < a(t)$ dentro de la esfera de acuerdo a la ley de Ampère.

   Pistas

   - Calcula la densidad de corriente eléctrica en el interior de la esfera.

   Notas:

   - De acuerdo a la ley de Ampère, en todo circuito sobre la superficie de una esfera con $r < a$ hay circulación magnética.
   - Eso implica que habría un campo $\boldsymbol{B}$ con componentes tangenciales.
   - Pero el problema es isotrópico,
   - y es imposible *peinar* a una esfera.
   - Por tanto, la Ley de Ampère debe estar mal.
   - De nuevo, este es un sistema no estacionario.

4. Usando la ecuación de continuidad demuestra que la ley de Ampère no puede ser correcta en sistemas no estacionarios.

   Pistas:

   - La versión diferencial de la Ley de Ampére es $\nabla \times \boldsymbol{B} = (4\pi/c)\boldsymbol{j}$.

- Toma la divergencia de ambos lados.
- Usa la ecuación de continuidad para llegar a $0 = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} = (4\pi/c)\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -(4\pi/c)(\partial/\partial t)\rho$.
- Esta ecuación se puede violar en sistemas no estacionarios.

5. Generaliza la Ley de Ampère para que valga en sistemas no estacionarios.

   Pistas:

   - Parte de la Ley de Gauss $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$.
   - Toma su derivada, $\nabla \cdot (\partial/\partial t)\boldsymbol{E} = 4\pi(\partial/\partial t)\rho$.
   - Usa la ley de continuidad para escribir $\nabla \cdot ((\partial/\partial t)\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{j}) = 0$.
   - Argumenta que el término entre paréntesis se puede escribir como rotacional de *algo*.
   - Usa la Ley de Ampère para identificar dicho algo en el caso estacionario es $c\boldsymbol{B}$.
   - Generaliza y concluye con la *Ley de Ampère-Maxwell*

   $$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.$$

   - El primer término de del lado derecho se conoce como *corriente de desplazamiento*.

6. Demuestra que la ley de Ampère-Maxwell resuelve los problemas encontrados en los problemas 2-4.

   Pistas:

   - Demuestra que la integral de la densidad de corriente en una sección del alambre del problema 2 es igual a la integral de la corriente de desplazamiento entre las placas de un capacitor.
   - Demuestra que la corriente de desplazamiento es igual y opuesta a la densidad de corriente eléctrica en el problema 3.
   - El 4 es trivial.

7. Demuestra que en el vacío el campo electromagnético cumple con la ecuación de onda.

   Pistas:

   - Escribe las dos ecuaciones para los rotacionales de los campos en ausencia de cargas y corrientes.
   - Toma el rotacional de una de éstas y sustituye la otra.
   - Usa la identidad $\nabla \times \nabla \times (\ldots) = \nabla\nabla \cdot (\ldots) - \nabla^2(\ldots)$.
   - Sustituye las ecuaciones para las divergencias.

8. Demuestra que la ecuación de onda tiene soluciones de la forma $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 F(x - ct)$ donde F es una función arbitraria de un solo argumento.

   Pista:

   - Sustituye en la ec. de onda.

   Notas:

   - Este tipo de solución se conoce como *ondas planas*, pues el campo es constante en los planos $x =$cte. Hay otros tipos de soluciones.
   - La onda se propaga sin deformarse en la dirección x con velocidad c.
   - Podemos rotar la solución a cualquier otra dirección, generalizando la solución a $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 F(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r} - ct)$.
   - Esta representa una onda plana que se mueve a velocidad c en la dirección del vector unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$.
   - Los planos de campo constante son ortogonales a $\hat{\boldsymbol{n}}$, de la forma $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r} =$cte.

- El principio de superposición nos permite sumar ondas viajando en distintas direcciones.
- Si la onda depende sinusoidalmente del tiempo y de la posición, como en $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ se le conoce como onda plana *monocromática.*
- ω es la frecuencia, $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{n}}$ es el vector de onda y $k = \omega/c$ el número de onda. El periodo es $T = 2\pi/\omega$ y la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/k$.

9. Demuestra que las ecuaciones de Maxwell en el vacío tienen solución en forma de ondas planas monocromáticas. Encuentra las relaciones entre el campo magnético y el campo eléctrico y la dirección de propagación.

   Pistas:

   - Conviene emplear una notación compleja y proponer ondas del tipo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ y $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$.
   - Sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell para los rotacionales obtenemos las siguientes ecuaciones algebráicas $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = (\omega/c)\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = -(\omega/c)\boldsymbol{E}$.
   - Luego, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son mutuamente perpendiculares y forman una triada ordenada derecha.
   - Tomando el producto de una de las ecuaciones previas por $\boldsymbol{k}$ y sustituyendo en la otra, y empleando la identidad del álgebra vectorial $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\times(\dots) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\cdot(\dots) - k^2(\dots)$ y usando el inciso previo, obtenemos la relación de dispersión $k^2 = (\omega/c)^2$.
   - Por tanto $|E| = |B|$.

   Notas:

   - La ecuación de onda se deriva de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, toda solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío satisfacen la ecuación de onda, pero no toda solución de la ecuación de onda satisface las ecuaciones de Maxwell.

10. Considera una onda electromagnética, plana, monocromática, propagándose en la dirección z, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$.

    (a) Demuestra que $\boldsymbol{E}_0 = E_0\hat{\boldsymbol{e}}$ donde el vector de *polarización* unitario $\hat{\boldsymbol{e}}$ yace en el plano xy.

    (b) Describe el movimiento de $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t)$ conforme transcurre el tiempo si $\hat{\boldsymbol{e}} = (1,0,0)$,

    (c) $\hat{\boldsymbol{e}} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ para un ángulo θ,

    (d) $\hat{\boldsymbol{e}} = (1, i, 0)/\sqrt{2}$,

    (e) $\hat{\boldsymbol{e}} = (1, -i, 0)/\sqrt{2}$.

    (f) $\hat{\boldsymbol{e}} = (a, bi, 0)/\sqrt{a^2+b^2}$,

    Pistas:

    - Expresa $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$, haz los productos y toma la parte real del resultado.

    Notas:

    - La polarización puede ser lineal en cualquier dirección, circular con cualquier helicidad o elíptica con cualquier dirección de giro, excentricidad y semieje mayor.

11. Demuestra que los campos electromagnéticos se pueden escribir en términos de un potencial escalar y un potencial vectorial como

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}.$$

    Pistas:

- Resuelve la ley de Gauss magnética escribiendo a $\boldsymbol{B}$ como un rotacional.
- Sustituyelo en la ley de inducción de Faraday.
- Demuestra que $\nabla \times ((\boldsymbol{E} + (1/c)(\partial/\partial t)\boldsymbol{A}) = 0$,
- y por tanto el término entre paréntesis se puede escribir como un gradiente

Notas:

- Estos potenciales no necesariamente coinciden con el potencial Coulombiano que apareció en electrostática ni con el potencial vectorial que apareció en magnetostática.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ es arbitraria.

12. Demuestra que un *cambio de norma* de la forma

$$\boldsymbol{A} \to \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda,$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda,$$

con $\Lambda(\boldsymbol{r}, t)$ un campo escalar arbitrario, deja invariante al campo electromagnético: $\boldsymbol{E} = \tilde{\boldsymbol{E}}$ y $\boldsymbol{B} = \tilde{\boldsymbol{E}}$.

13. Encuentra la ecuación que cumplen los potenciales ϕ y $\boldsymbol{A}$.

Pistas:

- Sustituye los campos del problema 11 en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (ley de Gauss y ley de Ampère-Maxwell).

14. Demuestra que ϕ y $\boldsymbol{A}$ cumplen ecuaciones de onda con fuentes ρ y $\boldsymbol{j}/c$ respectivamente, en la *norma de Lorentz*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0.$$

Pistas:

- Sustituye la norma en las ecuaciones del problema 13.

15. Calcula el potencial vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ en una región permeada por un campo magnético uniforme y constante $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ en la *norma de Landau* $A_x = 0$.

16. Demuestra que la circulación del potencial vectorial a lo largo de un circuito es igual al flujo magnético encerrado,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B},$$

para toda superficie orientable $\mathcal{S}$.

Pistas:

- Usa el teorema de Stokes.

17. Considera una bobina recta cilíndrica de longitud ℓ y radio $a \ll \ell$ con $N \gg 1$ espiras uniformemente enrolladas, en la que circula una corriente I. Calcula el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ que produce en todo el espacio.

Pistas:

- El campo $\boldsymbol{B}$ ya fue calculado en un problema anterior.
- Utiliza el problema 16.

18. Demuestra que el campo electromagnético cumple la ley (local) de conservación de la energía.

Pistas:

- La forma genérica de las leyes locales de conservación (todas las leyes de conservación, de acuerdo a la teoría de la relatividad) es

$$\frac{d}{dt}(\text{cantidad})_V + (\text{flujo})_{\partial V} = (\text{fuente})_V$$

  donde

$$(\text{cantidad})_V = \int_V d^3r\,\text{densidad},$$

$$(\text{flujo})_{\partial V} = \int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\cdot\text{densidad de flujo},$$

$$(\text{fuente})_V = \int_V d^3r\,\text{densidad de fuentes},$$

  V es un volumen cualquiera y ∂V su frontera.
- Usando el teorema de Gauss, se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{densidad} + \nabla\cdot\text{densidad de flujo} = \text{densidad de fuentes}.$$

- Para la energía, la densidad de fuentes (la energía que la materia da al campo por unidad de tiempo y por unidad de y volumen) es (-) el trabajo que el campo ejerce sobre la materia por unidad de tiempo por unidad de volumen.
- La densidad de energía se suele denotar por la letra u
- y la densidad de flujo de energía por la letra $\boldsymbol{S}$, conocida como el *vector de Poynting*.
- La fuerza por unidad de volumen es $f = \rho\boldsymbol{E} + (1/c)\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$.
- Luego, la potencia por unidad de volumen es $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$.
- El ejercicio consiste entonces en hallar expresiones para $\boldsymbol{S}$ y u en términos del campo electromagnético $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y que cumplan

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}.$$

- Puedes empezar por el lado derecho, sustituir $\boldsymbol{j}$ en términos de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ usando la ley de Ampère-Maxwell y llevar el resultado a la forma de arriba empleando identidades del cálculo vectorial.
- La densidad de energía resultante es

$$u = \frac{E^2+B^2}{8\pi}.$$

- El vector de Poynting resultante es

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}.$$

Notas:

- Nota que el resultado es consistente con la expresión tentativa hallada en tareas previas para la energía electrostática y magnetostática.
- La ley de conservación de la energía electromagnética se conoce como *teorema de Poynting*.

19. Un resistor con resistencia R consta de un cilindro de longitud ℓ y radio a relleno de un material con conductividad σ. En el resistor fluye una corriente I. Calcula el flujo de energía electromagnética alrededor del resistor y compárala con la energía disipada en su interior.

    Pistas:

    - A través del resistor hay una caida de potencial V.
    - Luego, en su superficie hay un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ paralelo al eje del resistor.

- Alrededor de la corriente I circula un campo magnético $\boldsymbol{B}$.
- Calcula $\boldsymbol{S}$ e intégralo sobre las paredes del resistor.

Notas:

- La energía que disipa el resistor es proporcionada por el campo electromagnético,
- pero no llega al resistor a través de los conectores, sino viajando por el espacio vacío en dirección perpendicular a la corriente, a través de las paredes.

20. Un capacitor está formado por dos discos metálicos de radio a separados una distancia $d \ll a$. Se conectan ambos discos por un resistor de resistencia R en forma de alambre recto que conecta los centros de ambos discos. Al tiempo $t = 0$ se colocan cargas $\pm Q_0$ en los discos y se deja que el sistema se descargue a través del resistor. Verifica la forma integral de ley de conservación de energía en todo cilindro de radio $r < a$ coaxial con el capacitor.

    Pistas:

    - Calcula la energía almacenada en un cilindro coaxial de radio r integrando la densidad de energía.
    - Calcula la potencia disipada por el resistor en el eje.
    - Calcula el cambio en la energía almacenada conforme transcurre el tiempo.
    - Calcula el flujo de energía en las paredes del cilindro.
    - Verifica el balance entre los términos anteriores.

21. Demuestra que el campo electromagnético cumple con la Ley de Conservación del Ímpetu.

    Pistas:

    - Análogamente al teorema de Poynting, la ley de conservación del ímpetu se puede escribir como

    $$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g} + \nabla \cdot (-\boldsymbol{T}) = -\boldsymbol{f},$$

      donde $\boldsymbol{g}$ es la densidad de ímpetu electromagnético, $-\boldsymbol{T}$ es el flujo de ímpetu electromagnético y $-\boldsymbol{f}$ es la fuente de ímpetu para el campo, por unidad de tiempo y de volumen.
    - $\boldsymbol{f}$ es entonces el ímpetu que el campo le proporciona a la materia por unidad de tiempo por unidad de volumen, es decir, la densidad de fuerza $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + (1/c)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$.
    - Como el ímpetu es un vector, su flujo tiene dos direcciones (la dirección del ímpetu y la dirección en que fluye). Más precisamente, $-\boldsymbol{T}$ es un tensor de rango dos (una matriz) cuyas componentes son $-T_{ij}$ =flujo de la componente i del ímpetu que atraviesa una superficie normal a la dirección j por unidad de área y unidad de tiempo.
    - En una situación estacionaria, $\boldsymbol{T}$ nos da la fuerza electromagnética sobre un sistema,

    $$\boldsymbol{F}_V = \int_v d^3r\, f = \int da_j T_{ij}.$$

    - $\boldsymbol{T}$ se conoce como el *tensor de esfuerzos* electromagnético.
    - Se puede empezar eliminando ρ y $\boldsymbol{j}$ de la expresión para $-\boldsymbol{f}$ usando la ley de Gauss y la ley de Ampère Maxwell y llevarla a la forma de ley de conservación empleando identidades del cálculo vectorial y las otras dos ecuaciones de Maxwell.
    - El resultado es

    $$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

      y

    $$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\delta_{ij}\right).$$

22. Considera una carga $\pm Q$ depositada sobre las placas de un capacitor formado por dos discos metálicos de radio a separados una distancia $d \ll a$. Calcula la fuerza entre los discos.

    Pista:

    - El resultado *no* es simplemente $\boldsymbol{E}Q$ con $\boldsymbol{E}$ el campo en el capacitor. Esto se debe a que el campo es discontinuo en la superficie donde se acumula la carga.
    - Calcula la fuerza integrando el tensor de esfuerzos en una superficie que rodee la cara interna de uno de los discos, i.e., un cilindro con una tapa en el espacio entre las placas y la otra tapa en el interior de la placa metálica.
    - El resultado es consistente con un estado de *tensión* (lo opuesto a una presión) a lo largo de las líneas de campo $(1/8\pi)E^2$.

23. Considera una bobina en forma de cilindro de longitud ℓ y radio $a \ll \ell$ en el que se enrollan uniformemente $N \gg 1$ vueltas de alambre que lleva una corriente I. Considera un pequeño pedazo de bobina contenida en un pequeño cilindro gaussiano de sección transversal $\mathcal{S}$ con eje normal a la pared de la bobina, con una tapa en su interior y otra en el exterior. Demuestra que la fuerza sobre dicho pedazo de bobina es $P\mathcal{S}$ donde $P = (1/8\pi)B^2$ juega el papel de una presión, como si las líneas de campo estuvieran en un estado de compresión en su dirección normal.

    Nota:

    - Si la corriente oscila 60 veces por segundo, esta presión sobre las paredes de la bobina oscila 120 veces por segundo. Esta presión variable es el origen del zumbido que se escucha en la cercanía de transformadores de potencia en la red eléctrica.

24. Considera una onda plana monocromática linealmente polarizada viajando en la dirección z con amplitud E_0 la cual es totalmente absorbida por una placa fija de cierto material que ocupa la región $z > 0$. Calcula

    (a) la potencia transmitida a la placa por unidad de área y

    (b) la presión de radiación ejercida sobre la placa, promediadas sobre un ciclo de oscilación del campo.

    (c) ¿Cómo cambiarían los resultados previos si la placa fuera un reflector perfecto en lugar de un absorbedor perfecto?

    Pistas:

    - Calcula el vector de Poynting y el tensor de esfuerzos.
    - Promedialos en el tiempo.
    - Si usas la notación compleja hay que tener cuidado, pues si $a(t) = \mathrm{Re}\, a_0 e^{-i\omega t}$ y $b(t) = \mathrm{Re}\, b_0 e^{-i\omega t}$, entonces $a(t)b(t) \neq \mathrm{Re}\, a_0 b_0 e^{-2i\omega t}$. Sin embargo, $\langle a(t)b(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, a_0 b_0^* = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, a_0^* b_0$.