Tarea 6
Propedéutico Electrodinámica
2020-04-26

Nombre: ____

Entregar el viernes 2020-05-01.

1. Considera un fragmento de un circuito consistente en un conductor en forma de cilindro sólido con longitud L y sección transversal A. Demuestra que en el mismo circula una corriente $I = V/R$ donde V es el voltaje a través de los extremos del alambre, $R = L/A\sigma$ la resistencia del alambre y σ la conductividad.

   Pistas:

   - En una tarea previa vimos que en un conductor la densidad de corriente es $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, y con un modelo simple obtuvimos $\sigma = ne^2\tau/m$, con n el número de electrones por unidad de volumen, e la carga del electrón, τ el tiempo que el electrón se mueve antes de chocar y m la masa electrónica.
   - La corriente I se puede escribir en términos de $\boldsymbol{j}$ y la sección transversal A.
   - El voltaje $V = \phi_a - \phi_b$ es la caida de potencial ϕ entre los extremos a y b del alambre.
   - El voltaje se puede escribir en términos del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el interior del alambre.

   Notas:

   - El campo eléctrico dentro de un conductor es cero en el caso estático.
   - Argumenta por qué puede ser distinto de cero en el caso no estático.
   - Argumenta por qué en este problema podemos considerar al campo eléctrico como uniforme en el interior del cilindro.
   - La expresión $V = RI$ se conoce como la *Ley de Ohm*.
   - Para geometrías más complicadas se cumple la ley de Ohm, pues la densidad de corriente es lineal en el campo y el voltaje también, y $R \propto 1/\sigma$, pero la dependencia en los parámetros geométricos puede ser más compleja.
   - Se conoce a $\rho = 1/\sigma$ como la resistividad. (No confunda estas ρ y σ con la densidad de carga volumetrica y superficial, aunque se suelan denotar con las mismas letras).
   - Nota que a un material con una conductividad relativamente alta corresponde una resistencia relativamente baja.
   - Un resistor suele consistir de un matrial de baja conductividad conectada a través de terminales metálicas de alta conductividad.
   - Para efectos prácticos suele aproximarse a las terminales metálicas, buenos conductores, por elementos con resistencia nula, equipotenciales. Las caidas de potencial se dan, sobre todo, a través de los materiales de baja conductividad.

2. Considera un sistema formado por un cilindro metálico de radio a en contacto con un cilindro coaxial hueco de radio interior a y radio exterior b hecho de un material con conductividad σ en contacto con otro cilindro coaxial metálico de radio interior b, todos de altura $L \gg b$. Calcula la resistencia R entre el conductor interior y el exterior.

   Pistas:

   - Argumenta por qué podemos tomar a los dos cilindros metálicos como equipotenciales, con potenciales $\phi(a) = \phi_a$ y $\phi(b) = \phi_b$.
   - Argumenta por qué el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ puede escribirse como $\phi(r)$, i.e., sin depender de la coordenada axial ni la coordenada angular.

- Demuestra que $\nabla^2\phi = 0$ en $a < r < b$.
- Obtén el potencial $\phi(r)$ a partir de su ecuación diferencial y sus condiciones de contorno.
- Obtén el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$.
- Obtén la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$.
- Obtén la corriente total I.
- Obtén la resistencia.

3. Considera un circuito en el que varios conductores confluyen sobre cierto nodo. Llama I_n a la corriente que cada conductor lleva *hacia* dicho nodo. Demuestra la Ley de Kirchoff de los nodos, i.e., en el caso estacionario
$$\sum_n I_n = 0.$$
Pistas:
    - Encierra al nodo en el interior de una superficie cerrada $\mathcal{S}$.
    - Argumenta por qué, en el caso estacionario,
    $$\int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0.$$
    - Argumenta cómo se puede reescribir la integral anterior como una suma de integrales sobre secciones transversales de cada alambre que incide en dicho nodo.
    - Relaciona cada una de estas integrales con la corriente I_n correspondiente.

    Notas:
    - Una corriente negativa *hacia* un nodo es una corriente positiva *desde* dicho nodo.

4. Considera un circuito y considera un bucle cerrado con N elementos $n = 1\dots N$ que van del nodos $n-1$ al nodo n, identificando al nodo N con el nodo 0. Denota con V_n la caida de potencial a través del nodo n yendo del nodo $n-1$ al n. Demuestra la ley de Kirchoff de los bucles
$$\sum_n V_n = 0$$
Pistas:
    - Identifica $V_n = \phi_{n-1} - \phi_n = \int_{\mathcal{C}_n} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, donde $\mathcal{C}_n$ es una trayectoria que va del nodo $n-1$ al nodo n.
    - Identifica $\sum_n V_n = \oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}$ con una integral cerrada sobre una trayectoria cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ seguida de $\mathcal{C}_2$ seguida de $\mathcal{C}_3\dots\mathcal{C}_N$.
    - El resultado se sigue de que el campo eléctrico es conservativo.

    Notas:
    - Una caida de potencial negativa es una subida de potencial.
    - Las dos leyes de Kirchoff pueden emplearse para plantear sistemas lineales de ecuaciones que describen las corrientes y caidas de potencial en circuitos arbitrarios formados por fuentes de voltaje (subidas de potencial por cantidades dadas) y resistencias (caidas de potenciales de acuerdo a las leyes de Ohm).
    - También se pueden usar para plantear ecuaciones diferenciales que cumplen los voltajes y corrientes en circuitos con capacitancias e inductancias.

5. Considera un circuito que contiene N resistencias R_n, $n = 1 \dots N$ conectadas en serie entre los nodos a y b, es decir, una detrás de otra, con R_n entre los nodos $n-1$ y n, identificando el nodo 0 con el nodo a y el nodo N con el nodo b y sin nada más conectado a los nodos intermedios $n = 1 \dots N-1$. Demuestra que este circuito es equivalente a otro circuito en el que las resistencias R_n son reemplazadas por una sola resistencia efectiva R_{ef} conectada entre a y b y dada por

$$R_{\text{ef}} = \sum_n R_n.$$

6. Considera un circuito que contiene N resistencias R_n, $n = 1 \dots N$ conectadas en paralelo entre los nodos a y b, es decir, todas con una terminal conectada al nodo a con y la otra terminal conectada al nodo b. Demuestra que es equivalente a otro circuito en el que las resistencias R_n son reemplazadas por una sola resistencia efectiva R_{ef} dada por

$$\frac{1}{R_{\text{ef}}} = \sum_n \frac{1}{R_n}.$$

7. Considera un capacitor con capacitancia C cuyas terminales se conectan a las terminales de un resistor con resistencia R. Al tiempo $t = 0$ una placa (digamos a) del capacitor tiene carga Q_0 (y la otra, digamos b, tiene carga $-Q_0$).
   (a) Calcula la carga $Q(t)$ en la placa a del capacitor para tiempos subsecuentes $t > 0$.
   (b) Calcula la caida de potencial $V(t)$ a través del capacitor.
   (c) Calcula la corriente $I(t)$ a través de la resistencia.

   Pistas:

   - Argumenta por qué la caida de potencial $V = Q/C$ a través desde la terminal a a la terminal b del capacitor es la misma que la caida de potencial $V = RI$ a través de las terminales correspondientes del resistor, donde convenimos que I es la corriente de a a b a través del resistor.
   - Argumenta por qué con las definiciones arriba, $I = -dQ/dt$.
   - Convierte la ley de Kirchoff en una ecuación diferencial.
   - Resuélvela.
   - Aplica condiciones iniciales.

   Notas:

   - La carga y corriente decaen exponencialmente con un tiempo característico $\tau = RC$, más largo mientras más capacitancia (más carga almacenada para un voltaje dado) y más resistencia (menos corriente para el mismo voltaje).

8. Considera un campo magnético $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \alpha x \hat{\boldsymbol{z}}$ que depende de x y apunta en dirección z, con α constante. Considera un circuito $\mathcal{C}$ formado por un alambre en forma de espira cuadrada de lado L con lados paralelos a los ejes x y y y que se desplaza con velocidad $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ constante en la dirección x. Calcula la *fuerza electromotriz* $\mathcal{E}$ alrededor de este circuito.

   Pistas:

   - Se define la fuerza electromotriz como $\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{F}/q$ donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza que sentiría una carga q en el circuito, i.e., es el trabajo virtual que el campo haría sobre una carga al dar una vuelta al circuito, por unidad de carga.
   - En este caso la fuerza sería la fuerza de Lorentz producida por el campo magnético $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}/c$.

   Notas:

   - Si el circuito tuviera una resistencia R, la fuerza electromotriz establecería una corriente $I = \mathcal{E}/R$, como si el circuito se cerrara a través de una fuenta de voltaje $V = \mathcal{E}$.

9. Considera un campo magnético $\boldsymbol{B}(t) = \eta t \hat{\boldsymbol{z}}$ que apunta en dirección z y que depende del tiempo, donde η es constante. Considera un circuito $\mathcal{C}$ formado por un alambre en forma de espira cuadrada de lado L que descanza sobre el plano xy con lados paralelos a los ejes x y y. Calcula la fuerza electromotriz.

   Pistas:

   - De acuerdo a la *Ley de Inducción* de Faraday, alrededor de un circuito que no se mueve
   $$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\Phi_B,$$
   donde
   $$\mathcal{E} = \int_{\partial\mathcal{A}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}$$
   es la fuerza electromotriz a lo largo de la frontera $\partial\mathcal{A}$ de una superficie orientable $\mathcal{A}$, y
   $$\Phi_B = \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}$$
   es el *flujo magnético* a través de dicha superficie.

   Notas:

   - Compara la solución de los dos problemas anteriores en el caso $\eta = v\alpha$.
   - ¿Cómo se vería el problema 8 en un sistema de referencia en que el circuito estuviera fijo? (suponiendo velocidades $v \ll c$ bajas).
   - Einstein notó que la respuesta a la nota anterior es general. La fuerza electromotriz debida al movimiento de un circuito con fuentes fijas es igual a la fuerza electromotriz sobre un circuito fijo debida a una fuente en movimiento si la velocidad relativa es la misma en ambos casos. Einstein observó que esto no podía ser una coincidencia y por ello postuló el *Principio de Relatividad.*
   - Es común resolver problemas que involucran a la fuerza de Lorentz como si fueran problemas que involucran inducción. Aunque no es del todo correcto, gracias al principio de relatividad lleva a la solución correcta.
   - Un ejemplo puede ser el siguiente problema.

10. Considera dos barras b_1 y b_2 conductoras largas paralelas unidas entre sí por una barra b_3 conductora corta de longitud L formando una figura como la letra U. Se coloca b_3 horizontalmente y se inclinan las barras largas hasta que forman un ángulo θ con la vertical. Se cierra el circuito con una barra b_4 parcialmente conductora de longitud L, masa M y resistencia R colocada horizontalmente sobre las barras b_1 y b_2 con las que hace contacto eléctrico y sobre las que puede deslizar libremente. Calcula la velocidad a la que se desliza la barra b_4 bajo la acción de la gravedad g en presencia de un campo magnético vertical B.

    Pistas:

    - Cuando la barra b_4 se mueve, disminuye su energía potencial gravitacional y adquiere energía cinética.
    - Cuando la barra se desliza con una velocidad v aparece una fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ que produce una corriente $I = \mathcal{E}/R$ en el circuito b_1-b_3-b_2-b_4 proporcional a la v.
    - Esta corriente disipa energía al atravesar la resistencia. La potencia disipada es $\mathcal{P} = RI$ y es mayor mientras más rápido baja la barra.
    - Cuando la energía disipada por unidad de tiempo iguala a la energía potencial perdida por unidad de tiempo, la barra ya no puede incrementar su energía cinética y llega a una velocidad terminal.

11. Considera una bobina formada por un alambre enrollado uniformemente alrededor de un cilindro de radio a y longitud $\ell \gg a$ formado de un material con permeabilidad μ dando $N \gg 1$ vueltas. Se hace circular por el alambre una corriente $I(t)$. Calcula la caida de potencial V a través de las terminales de la bobina.

    Pistas:

    - Utiliza la ley de Ampère para obtener el campo magnético $\boldsymbol{H}(t)$ en el interior del cilindro ignorando efectos de borde.
    - Calcula la densidad de flujo magnético $\boldsymbol{B}$ en el interior del cilindro.
    - Considera un circuito que va de un punto a en una terminal de la bobina a través del alambre y siguiendo a la corriente hasta un punto b en la terminal opuesta y regresa al punto a cerrando el circuito a través del espacio vacío por fuera de la bobina.
    - Calcula el flujo magnético Φ_B a través de este circuito.
    - Calcula la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ a lo largo de este circuito.
    - Argumenta que el campo eléctrico en el interior del alambre es nulo, por ser buen conductor.
    - Por tanto podemos identificar $\mathcal{E} = \int_b^a d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}$ con la contribución a la integral cerrada del tramo entre terminales, afuera de la bobina y afuera del alambre.
    - Afuera de la bobina el campo magnético es (prácticamente) nulo.
    - Por tanto, afuera de la bobina el campo eléctrico es conservativo y
    - se puede definir un potencial.
    - Compara la integral anterior con la caida de potencial V.
    - Obtén V.

    Notas:

    - Podemos escribir $V = LdI/dt$ con
    $$L = \frac{4\pi^2}{c^2}\mu a^2 \frac{N^2}{L}$$
    la *autoinductancia* de la bobina.
    - Para otras geometrías también tendríamos $V = LdI/dt$, pero con otras expresiones para la inductancia.
    - Las unidades de la inductancia son aceleración inversa.

12. Considera un inductor con autoinductancia L en el que circula una corriente I. Demuestra que la energía que almacena es
    $$U = \frac{1}{2}LI^2.$$

    Pistas:

    - Cuando una carga δq pasa de una terminal a a la otra terminal b de un inductor a través del cual hay una caida de potencial V, pierde una energía $\delta U = V\delta q$. Esta energía se almacena en la bobina como energía magnética.
    - La potencia transferida a la bobina es entonces $\mathcal{P} = VI$ donde $I = \delta q/\delta t$ es la carga que circula por unidad de tiempo.
    - Como $V = LdI/dt$, $\mathcal{P} = LIdI/dt$.
    - La energía almacenada es $U(t) = \int_{t_0}^t dt'\,\mathcal{P}(t')$ inciando la integral cuando la corriente es nula.

    Notas:

- Para un sistema con muchos circuitos podemos generalizar los resultados anteriores y escribir $V_n = \sum_m L_{nm} dI_m/dt$ donde L_{nm} es la autoinductancia del circuito n si $n = m$ y la inductancia mutua entre los circuitos n y m si $n \neq m$.
- La inductancia mutua se debe a que una corriente I_m en el circuito m produce en general un campo B_m que puede atravesar al circuito n.
- La energía total de un sistema de inductores es

$$U = \frac{1}{2} L_{nm} I_n I_m.$$

- Podemos invertir nuestro razonamiento y emplear esta ecuación para definir la autoinductancia y la inductancia mutua y de aquí concluir que $V_n = \sum_m L_{nm} dI_m/dt$.

13. Muestra que la energía en el inductor del problema 11 puede escribirse como

$$U = \int_V d^3r \, u(\boldsymbol{r}),$$

donde $u(\boldsymbol{r})$ es la densidad de energía magnética

$$u = \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}}{8\pi}.$$

Pistas:

- Obtén U en términos de la corriente I empleando la autoinductancia.
- Escribe la corriente en términos de B.
- Escribe la energía total en términos de B.
- Divide entre el volumen de la bobina $\Omega = \ell \pi a^2$.

Notas:

- Esta demostración es muy limitada, pero el resultado es totalmente general.
- Una forma de calcular la inductancia de un circuito es primero calcular la energía a partir de su densidad y después escribirla en términos de la corriente.

14. Considera un cable coaxial de longitud ℓ formado por un cilindro hueco de paredes delgadas y de radio $a \ll \ell$ en el que va una corriente I rodeado por otro cilindro delgado coaxial de radio $b > a$, $b \ll \ell$ por el que va la corriente de retorno $-I$. Calcula la autoinductancia L del sistema.

Pistas:

- Calcula el campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ entre ambos cilindros ignorando efectos de borde.
- Argumenta por qué se puede ignorar el campo en el resto del espacio.
- Calcula la densidad de energía $u(\boldsymbol{r}) = u(r)$.
- Integrala sobre el volumen entre los cilindros para obtener la energía total U.
- Identifica la autoinductancia L.

15. Considera un circuito formado por un capacitor con capacitancia C cuyas terminales a y b están conectadas a las terminales de un inductor con autoinductancia L. Al tiempo $t = 0$ la carga en el electrodo a del capacitor es $Q(0) = Q_0$ (y en el electrodo b es $-Q_0$) y la corriente a través del inductor de a hacia b es $I(0) = I_0 = 0$.
    (a) Calcula la carga $Q(t)$ en el electrodo a.
    (b) Calcula la corriente $I(t)$ de a a b a través del inductor.

(c) Calcula la caida de potencial $V(t)$ de a a b.

Pistas:

- Argumenta mediante la ley de Kirchoff que la caida de potencial $V(t)$ de a a b a través del capacitor es la misma que a través del inductor.
- Relaciona dicha caida con la carga $Q(t)$ e $I(t)$.
- Escribe $I(t)$ en términos de $Q(t)$ (ojo con los signos y la dirección de la corriente).
- Escribe una ecuación diferencial para Q.
- Resuelvela imponiendo condiciones iniciales.

Notas:

- Este circuito es un oscilador. La energía electrica almacenada en el capacitor cargado se convierte en energía magnética almacenada en el inductor conforme la carga disminuye y la corriente aumenta, y luego regresa al capacitor cuando se vuelve a cargar con signo opuesto y disminuye la corriente.
- La frecuencia de oscilación de la carga, corriente y voltaje es $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
- La frecuencia con que se intercambia la energía es el doble.

16. Demuestra que en un circuito en que todos los voltajes, cargas y corrientes oscilan con una misma frecuencia ω podemos reemplazar las resistencias R, capacitancias C e inductancias L por *impedancias* Z que cumplen una ley de Ohm generalizada $V = ZI$, donde

(a) $Z_R = R$,

(b) $Z_C = i/\omega C$,

(c) $Z_L = -i\omega L$.

Pistas:

- Escribe el voltaje, carga y corriente como $V(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{V}(t) = \mathrm{Re}\,V_0 \exp(-i\omega t)$, $Q(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{Q}(t) = \mathrm{Re}\,Q_0 \exp(-i\omega t)$, $I(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{I}(t) = \mathrm{Re}\,I_0 \exp(-i\omega t)$.
- La corriente $I(t)$ que *entra* a un capacitor se relaciona con la carga Q almacenada en el electrodo correspondiente $I = dQ/dt$.
- Luego, $\tilde{Q} = i\tilde{I}/\omega = C\tilde{V} \Rightarrow \tilde{V} = Z_C\tilde{I}$.
- Similarmente, $V = LdI/dt$ se puede escribir como $\tilde{V} = Z_L\tilde{I}$.

Notas:

- La solución estacionaria a las ecuaciones correspondientes a un circuito con fuentes de poder oscilatorias con frecuencia ω, resistencias, capcitancias e inductancias se puede obtener de un circuito con fuentes e impedancias.
- Cada impedancia se puede tratar como si fuese una simple resistencia, pero con valores complejos.
- En particular, se pueden sumar impedancias en serie y en paralelo.
- Como resultado, se pueden obtener impedancias complejas.
- La parte real de una impedancia es la parte disipativa y la parte imaginaria es la parte reactiva; una produce disipación de energía y la otra un defasamiento entre voltaje y corriente.

17. Demuestra que un conjunto de capacitores con impedancias C_n, $n = 1 \ldots N$ se pueden cambiar,

(a) si están conectadas en paralelo, por una capacitancia efectiva

$$C_{\mathrm{ef}} = \sum_n C_n;$$

(b) si están conectadas en serie, por una capacitancia efectiva C_{ef} donde

$$\frac{1}{C_{\mathrm{ef}}} = \sum_n \frac{1}{C_n}.$$

Pistas:

- Suma las impedancias en serie y en paralelo como si fueran resistencias.
- Escribelas en términos de la capacitancia.

18. ¿Cómo se suman inductancias en serie y en paralelo?

19. Considera una fuente de voltaje $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$ conectada a través de una resistencia R a un capacitor con capacitancia C. Encuentra el voltaje de salida $V_s(t)$ a través del capacitor a tiempos largos.

    Pistas:

    - Argumenta por qué a tiempo largos $t > RC$ la solución es una simple oscilación con frecuencia ω.
    - Reemplaza el circuito por un divisor de voltaje formado por una fuente y dos impedancias Z_R y Z_C.
    - Por tanto el voltaje *complejo* de salida es

    $$\tilde{V}_s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \tilde{V}_e.$$

    Notas:

    - Nota que a frecuencias bajas $\omega \ll 1/RC$ el voltaje de salida es igual al de entrada $V_s = V_e$.
    - Nota que a frecuencias altas el voltaje de salida es muy pequeño y decae en proporción inversa a la frecuencia

    $$\tilde{V}_s = \frac{i}{\omega RC} \tilde{V}_e.$$

    - Este circuito se conoce como *filtro pasabajos*.
    - Análogamente se pueden diseñar filtros pasabajos, pasaaltos y pasabandas con redes de resistencias, capacitores y/o inductores.

20. Considera un dipolo magnético $\boldsymbol{m}(t) = m(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ que gira alrededor del eje z. Considera una espira circular de radio a colocada paralela al plano yz y centrada alrededor del eje x a una distancia $x = d \gg a$ del origen.

    (a) Calcula la fuerza electromotriz $\mathcal{E}(t)$ alrededor de la espira.

    (b) Supón que se abre la espira y se conectan sus extremos a través de una resistencia R. Calcula, la corriente eléctrica a través de la resistencia.

    (c) Calcula la potencia disipada en la resistencia.

    (d) Calcula la torca sobre el dipolo rotante.

    (e) Calcula la potencia que se le debe proporcionar para mantener su rotación.

    Pistas:

    - Usa la condición $a \ll d$ para simplificar el cálculo.
    - La corriente en la espira produce un dipolo inducido orientado en x que varía en el tiempo.
    - Este dipolo genera un campo magnético que interacciona con el dipolo rotatorio en el centro.

    Notas:

- Este es una versión simplificada de un generador de voltaje de *corriente alterna.*
- Una variante es que sea la espira la que gira alrededor del dipolo y que sus extremos se conmuten, para generar una contribución de corriente directa.
- La condición $a \ll d$ no es esencial, pero simplifica el cálculo.
- Se verifica la conservación de la energía, i.e., la energía disipada en la resistencia iguala a la energía propocionada al dipolo rotante mediante la torca que se le debe aplicar para evitar que se frene.

21. Considera tres pares de bobinas de Helmholtz idénticas centradas en el origen con ejes en el plano xy, formando ángulos de $\theta_1 = 0°$, $\theta_2 = 120°$ y $\theta_3 = 240°$ con respecto al eje x. Se excitan dichas bobinas con corrientes $I_1 = A\cos(\omega t)$, $I_2 = A\cos(\omega t - 2\pi/3)$ e $I_3 = A\cos(\omega t + 2\pi/3)$. En el origen se coloca un pequeño imán con momento magnético $\boldsymbol{m}$ en el plano xy y libre de girar alrededor del eje z sujeto a un poco de fricción.

    (a) Muestra que cerca del origen el campo $\boldsymbol{B}(t)$ que producen las bobinas en el origen tiene magnitud constante y rota con velocidad angular constante ω alrededor del eje z.

    (b) Muestra que el dipolo giraría a tiempos largos con la misma velocidad angular ω y alineado con el campo magnético.

    (c) Muestra que si aplicamos una torca externa $\boldsymbol{\tau}$ constante y no demasiado grande al dipolo para intentar frenar su rotación, este seguiría rotando con la misma velocidad angular pero su dirección formaría un ángulo de retraso con respecto a $\boldsymbol{B}$.

    (d) Para este caso, calcula la energía que el campo magnético $\boldsymbol{B}(t)$ proporciona al dipolo para conservar su rotación.

    (e) Calcula la fuerza electromotriz que el campo producido por el dipolo produce en las bobinas.

    (f) Calcula la potencia que es necesario proporcionar a las bobinas para conservar la corriente eléctrica en ellas.

    Pistas:

    - La torca sobre un dipolo fue calculada en una tarea previa.

    Notas:

    - Esta es una versión simplificada de un motor eléctrico trifásico de velocidad constante.
    - La energía se conserva. La potencia eléctrica que se transmite a las bobinas es igual a la potencia que se transmite al dipolo rotatorio y es igual al trabajo mecánico que dicho dipolo ejerce sobre los dispositivos sujetos al eje de giro.
    - La aproximación dipolar no es esencial, pero simplifica los cálculos.
    - El generador (problema anterior) y el motor eléctrico (este problema) forman la base de la enorme industria electromecánica en que se ha sustentado el desarrollo industrial del último siglo.