Tarea 8
Propedéutico Electrodinámica
2020-05-10

Nombre: ______________________________

Entregar el viernes 2020-05-15.

1. Deduce las ecuaciones de Maxwell *macroscópicas* en materiales polarizables y magnetizables.

   Pistas:

   1. Parte de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y las fuentes totales ρ^{tot} y $\boldsymbol{j}^{\text{tot}}$ (las llamadas, ecuaciones de Maxwell *microscópicas*).
   2. Escribe separa las fuentes en fuentes externas (no pertenecientes al material) e internas (pertenecientes al material), $\rho^{\text{tot}} = \rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{int}}$, $\boldsymbol{j}^{\text{tot}} = \boldsymbol{j}^{\text{ext}} + \boldsymbol{j}^{\text{int}}$.
   3. Escribe las fuentes internas en términos de la polarización y la magnetización,
   $$\rho^{\text{int}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$
   y
   $$\boldsymbol{j}^{\text{int}} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P} + c\nabla \times \boldsymbol{M}$$
   .
   4. Identifica en las ecuaciones resultantes a $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$.
   5. Las ecuaciones homogéneas no se ven modificadas por la presencia de materiales.
   6. La solución es $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho^{\text{ext}}$, $\nabla\times\boldsymbol{H} = (4\pi/c)\boldsymbol{j}^{\text{ext}} + (1/c)\partial\boldsymbol{D}/\partial t$, $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, $\nabla\times\boldsymbol{E} = -(1/c)\partial\boldsymbol{B}/\partial t$.

   Notas:

   1. Como las ecuaciones homogéneas no se modifican, la existencia de potenciales electromagnéticos ϕ, $\boldsymbol{A}$ y su relación con $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ tampoco.

2. Encuentra las condiciones de contorno que cumplen los campos electromagnéticos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$, así como $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{M}$ en una superficie cualquiera.

   Pistas:

   1. Este problema no es más que un repaso de problemas resueltos en las tareas 3 y 5. Simplemente, hemos de verificar que los resultados son válidos en el caso general y no solo en el estático o el estacionario.
   2. Se llega a la solución integrando las ecuaciones para las divergencias en un pequeño cilindro que atrapa a la superficie entre sus tapas o integrando las ecuaciones para los rotacionales sobre pequeños rectángulos que atrapan la superficie entre dos de sus lados.
   3. La solución es $\Delta B_\perp = 0$, $\Delta\boldsymbol{E}_\parallel = 0$, $\Delta\boldsymbol{D}_\perp = 4\pi\sigma^{\text{ext}}$, $\Delta\boldsymbol{H}_\parallel = (4\pi/c)\boldsymbol{K}^{\text{ext}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$, $\Delta P_\perp = -\sigma^{\text{int}}$, $\Delta\boldsymbol{M}_\parallel = \boldsymbol{K}^{\text{int}} \times \hat{\boldsymbol{n}}/c$. En ausencia de una densidad de carga externa singulare sobre la superficie, $\sigma^{\text{ext}} = 0$, la componente normal a la superficie del desplazamiento es continua en la superficie, $\Delta D_\perp = 0$, y en ausencia de una densidad corriente externa singular en la superficie, $\boldsymbol{K}^{\text{ext}} = 0$, la proyección tangencial a la superficie del campo magnético es continua en la superficie, $\Delta\boldsymbol{H}_\parallel = 0$.

3. Transforma las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en ecuaciones algebraicas para el caso de una onda plana monocromática con vector de onda $\boldsymbol{k}$ y frecuencia ω propagandose en un material polarizable y magnetizable

   Pistas:

1. Considera campos de la forma $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{F}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ donde $\boldsymbol{F}$ representa a cualquiera de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$, y donde se sobreentiende que debemos tomar la parte real al terminar el cálculo.
2. Argumenta que podemos hacer los siguientes reemplazos: $\nabla \to i\boldsymbol{k}$, $\partial/\partial t \to -i\omega$.
3. Concluye que $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = (\omega/c)\boldsymbol{B}$, y $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ y $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -(\omega/c)\boldsymbol{D}$.

Notas:

1. $\boldsymbol{k}$ es ortogonal a $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}$ es ortogonal a $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$ es ortogonal a $\boldsymbol{H}$
2. Nota que $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ forman una terna ordenada derecha.
3. Nota que $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ también.
4. En materiales isotrópicos $\boldsymbol{D}\|\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{H}$ y todos los vectores de las ternas previas son mutuamente ortogonales.

4. Encuentra la relación de dispersión para una onda electromagnética propagándose libremente en un medio polarizable y magnetizable lineal e isotrópico, caracterizado por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ.

   Pistas:

   1. Sustituye las ecuaciones materiales $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ en las ecuaciones *algebráicas de Maxwell* del problema anterior.
   2. Toma el producto vectorial con $\boldsymbol{k}$ de las ecuaciones que incluyen productos vectoriales.
   3. Usa la identidad $\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\ldots) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}.\ldots - k^2\ldots$
   4. Usa las ecuaciones de Maxwell para el producto punto para eliminar los términos de la forma $\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\cdot\ldots$
   5. Llega a $k^2\boldsymbol{E} = \epsilon\mu(\omega^2/c^2)\boldsymbol{E}$ y $k^2\boldsymbol{H} = \epsilon\mu(\omega^2/c^2)\boldsymbol{H}$.
   6. Por tanto, $k = n\omega/c$ donde $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción.

   Notas:

   1. Nota que el campo electromagnético es *transversal*, i.e., $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ son perpendiculares al vector de onda $\boldsymbol{k}$, i.e., a la dirección de propagación.
   2. La velocidad de propagación de la onda es $v_f = \omega/k = c/n$, donde el subíndice f denota que ésta es la *velocidad de fase*.
   3. Típicamente, la permeabilidad a altas frecuencias es $\mu = 1$, por lo que $n = \sqrt{\epsilon}$.
   4. Si $\epsilon\mu < 0$, n es imaginario, el vector de onda se vuelve complejo y la onda no se propaga en el medio, sino que decae exponencialmente. El medio se vuelve opaco. El medio también es opaco si ϵ o μ no son reales, i.e., si hay absorción.
   5. Para n real, $B = nE$.

5. Encuentra el teorema de Poynting en el interior de un material lineal isotrópico caracterizado por ϵ y μ.

   Pistas:

   1. El teorema de Poynting de la tarea 7 es correcto, pero describe el intercambio de energía con todas las cargas.
   2. La potencia que pierda el campo por unidad de volumen debido a su interacción con las cargas *externas*, en lugar de su interacción con todas las cargas, es $-\boldsymbol{j}^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{E}$.
   3. En analogía con la tarea 7, la ley de conservación de la energía es $\partial u/\partial t + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{j}^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{E}$.
   4. Aquí, u y $\boldsymbol{S}$ incluyen la energía asociada a las cargas internas y su movimiento.
   5. Sustituyendo $\boldsymbol{j}^{\text{ext}}$ de la ley de Ampère-Maxwell en materiales y haciendo las mismas manipulaciones que en la tarea 7, obtén $u = (1/8\pi)(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$ y $\boldsymbol{S} = (c/4\pi)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

6. Una onda electromagnética plana monocromática, como en el problema 3, con frecuencia ω, vector de onda $\boldsymbol{k}$, campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ con amplitud $\boldsymbol{E}_0$, se propaga en un medio transparente caracterizado por ϵ y μ. Calcula su flujo y su densidad de energía.

   Pistas:

   1. Dado $\boldsymbol{E}_0$ podemos calcular los campos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ usando las ecuaciones materiales y las ecuaciones de Maxwell para ondas planas (problema 3).
   2. No podemos directamente reemplazar campos complejos de la forma $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ en las expresiones para u y $\boldsymbol{S}$ pues antes es necesario tomar las partes reales, como fue discutido en el problema 24 de la tarea 7.
   3. Podemos, siguiendo dicho problema, emplear las expresiones para el promedio temporal de la densidad de energía y del flujo de energía $\langle u\rangle = \mathrm{R}e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*)/16\pi$ y $\langle \boldsymbol{S}\rangle = (c/8\pi)\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times H^*)$.
   4. El resultado es $\langle u\rangle = \epsilon|E|^2/(8\pi)$ y $\langle \boldsymbol{S}\rangle = (c/8\pi)\sqrt{\epsilon/\mu}|E|^2\hat{\boldsymbol{k}}$ con $\hat{\boldsymbol{k}}$ un vector unitario en la dirección de propagación.

   Notas:

   1. Podemos escribir $\boldsymbol{S} = uv_f\hat{\boldsymbol{k}}$, i.e., el flujo es densidad por velocidad, como el gasto en un fluido o la corriente eléctrica. En este caso, la velocidad es la velocidad de fase y la densidad es la densidad de energía.
   2. Se define la intensidad I de una onda mediante $\langle \boldsymbol{S}\rangle = I\hat{\boldsymbol{k}}$.
   3. Podemos reescribir el resultado como $I = (c/8\pi)\sqrt{\epsilon/\mu}|E|^2$.
   4. Hay sutilezas que considerar cuando ϵ y μ dependen de la frecuencia.
   5. Un cálculo más cuidadoso emplearía un grupo de ondas, no ondas planas, para las cuales $\nabla\cdot\langle \boldsymbol{S}\rangle = 0$ y $\partial\langle u\rangle/\partial t = 0$.

7. Considera un material a semiinfinito ocupando la región $z < 0$ en contacto con un material b semiinfinito ocupando la región $z > 0$. Los materiales tienen permitividades ϵ_a y ϵ_b y son no magnéticos, $\mu_a = \mu_b = 1$. Una onda plana monocromática con frecuencia ω linealmente polarizada incide de abajo hacia arriba sobre la interfaz $z = 0$ moviéndose en la dirección z . Calcula la reflectancia y la transmitancia.

   Pistas:

   1. La reflectancia R y transmitancia T se definen como los cocientes entre las componentes normales a la superficie de los flujos de energía en las ondas reflejada y transmitida. En este caso, $R \equiv -\langle S_r^z\rangle/\langle S_i^z\rangle$ y $T = \langle S_t^z\rangle/\langle S_i^z\rangle$, donde i, r y t denotan a las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.
   2. Argumenta por qué la onda reflejada y la transmitida tienen la misma frecuencia ω que la onda incidente y se propagan a lo largo del eje z.
   3. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar al campo eléctrico de la onda incidente a lo largo del eje x.
   4. Argumenta por qué en este caso, los campos eléctricos de todas las ondas apuntan a lo largo de x y todos los campos magnéticos van a lo largo de y.
   5. Toma $E_i^x(z,t) = E_0 e^{i(k_a z-\omega t)}$.
   6. ¿Cuánto vale k_a?
   7. ¿Cuanto vale $B_i^y(z,t)$?
   8. ¿Cuánto vale $\langle S_i^z\rangle$?
   9. Escribe el campo eléctrico reflejado como $E_r^x(z,t) = rE_0 e^{-i(k_a z+\omega t)}$.
   10. r es la *amplitud de reflexión* por ser determinada.
   11. ¿Cuánto vale $B_r^y(z,t)$? (Cuidado con los signos)

12. Escribe el campo eléctrico transmitido como $E_t^x(z,t) = tE_0 e^{i(k_b z - \omega t)}$.
13. t es la *apmlitud de transmisión* por ser determinada.
14. ¿Cuánto vale k_b?
15. ¿Cuánto vale $B_t^y(z,t)$?
16. Plantea las condiciones de contorno independientes que obedece el campo electromagnético en $z = 0$. Verifica que hay cuatro condiciones de contorno, pero en este caso sólo dos son independientes.
17. Resuelve las ecuaciones subsecuentes para obtener las dos incógnitas r y t.
18. Encuentra $\langle S_r^z \rangle$ y $\langle S_t^z \rangle$.
19. Calcula R y T.
20. El resultado es $R = |(n_a - n_b)/(n_a + n_b)|^2$ y $T = 4n_a n_b/|n_a + n_b|^2$.

Notas:

1. La polarización es irrelevante. Escogí polarización lineal por simplicidad.
2. Se puede generalizar el problema anterior a otros ángulos de incidencia.
3. Para ello, primero hay que establecer la ley de la reflexión y la ley de Snell.
4. También hay que separar los casos de polarización transversal eléctrica TE y transversal magnética TM.

8. Considera dos ondas planas monocromáticas con la misma polarización lineal que se propagan en un medio caracterizado por ϵ y μ con la misma amplitud, frecuencia y dirección de propagación, pero difiriendo por una fase ψ. Calcula la intensidad I de la onda resultante.

Pistas:

1. Calcula el campo total y úsalo para calcular la intensidad.

Notas:

1. Dependiendo de su fase relativa, la intensidad de la suma de dos campos iguales copropaantes puede variar desde 4 veces la de una onda sola hasta 0.
2. Si la fase es 0 tenemos *interferencia constructiva.*
3. Si la fase es π tenemos *interferencia destructuva.*

9. Considerea dos ondas planas monocromáticas de frecuencia ω con polarización lineal a lo largo de x con la misma amplitud E_0 y que se propagan una en la dirección z y otra en la dirección $-z$ en un medio no magnético con permitividad ϵ y permeabilidad μ.

(a) Calcula el campo eléctrico $E_x(z,t)$.
(b) Calcula el campo magnético $B_y(z,t)$.
(c) Calcula la densidad de energía $\langle u(z,t) \rangle$.
(d) Calcula el flujo de energía $\langle S_z(z,t) \rangle$.

Notas:

1. Esta es una onda estacionaria.
2. La distancia entre nodos sucesivos o entre antinodos sucesivos es media longitud de onda.

10. Considera dos ondas planas monocromáticas de frecuencias $\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega$ y $\omega_2 = \omega_0 - \delta\omega$ moviéndose en la dirección z con polarización lineal a lo largo de x y con amplitudes E_{10} y E_{20} en un medio con permitividad $\epsilon(\omega)$ *dependiente* de la frecuencia y con permeabilidad $\mu = 1$. Suponiendo que $\delta\omega$ es muy pequeño:

(a) Calcula el campo resultante $E_x(z,t)$.

(b) Demuestra que $E_x(z,t)$ se puede escribir como el producto de una onda portadora monocromática de frecuencia ω_0 multiplicada por una envolvente.

(c) ¿Cuál es la velocidad de la onda portadora?

(d) ¿De qué frecuencia es la envolvente?

(e) ¿Cual es la velocidad de la envolvente?

Pistas:

1. Aproxima $\epsilon(\omega_0 \pm \delta\omega) \approx \epsilon(\omega_0) \pm \delta\omega d\epsilon/d\omega$.
2. Realiza las aproximaciones correspondientes para calcular los números de onda $k(\omega_0 \pm \delta\omega)$.

Notas:

1. La velocidad de la envolvente se conoce como *velocidad de grupo* v_g.
2. Cuando ϵ no depende de ω, la velocidad de grupo es igual a la de fase.
3. Si ϵ es creciente, la velocidad de grupo es menor que la de fase. Este caso se conoce como *dispersión normal*.
4. En el caso opuesto, tenemos *dispersión anómala*.

11. Una onda plana monocromática de frecuencia ω se propaga en el espacio vacío e incide normalmente sobre una pantalla opaca delgada en la que se han cortado dos ventanas delgadas largas idénticas separadas una distancia d. A una distancia $L \gg d$ se coloca una pantalla.

(a) Calcula la intensidad normalizada $I(\theta)/I(0)$ como función del ángulo θ respecto a la dirección de propagación original (para ángulos pequeños).

(b) ¿Cual es la distancia angular $\Delta\theta$ entre máximos de intensidad?

Pistas:

1. De acuerdo al principio de Kirchoff, cada punto en un frente de onda se comporta como un emisor de ondículas secundarias esféricas que se propagan en todas las direcciones.
2. Similarmente, una línea recta en un frente de onda con amplitud constante a lo largo de la línea se comporta como la fuente de ondículas cilíndricas que se propagan en todas las direcciones normales a la línea. Proyectando sobre un plano normal a la línea, tendríamos ondas circulares.
3. El decaimiento de la onda con la distancia se puede ignorar, pues a largas distancias es más rápido su cambio de fase.
4. Además, se pide el resultado *normalizado* a la intensidad central.
5. Entonces, hay que sumar dos campos cuya fase difiere por haber recorrido distancias distintas, y de ahí obtener la intensidad.

Notas:

1. El fenómeno en que un haz luminoso se separa en varios haces con distintas direcciones en al pasar por obstáculos se conoce como *difracción*.
2. La difracción por una *doble rejilla* fue un experimento clave para establecer el caracter ondulatorio de la luz.

12. Una onda plana monocromática de frecuencia ω se propaga en el espacio vacío e incide normalmente sobre una pantalla opaca delgada en la que se ha cortado una ventana larga de ancho d. A una distancia $L \gg d$ se coloca una pantalla. Calcula la intensidad la intensidad normalizada $I(\theta)/I(0)$ como función del ángulo θ respecto a la dirección de propagación original (para ángulos pequeños).

Pistas:

1. Divide la ventana rectangular en un gran número de rectángulos largos muy delgados, de ancho δx.
2. Aplica el principio de Kirchoff a cada rectángulo.
3. Suma los campos resultantes.
4. Convierte la suma en una integral tomando el límite $\delta x \to 0$.

Notas:

1. Así como hay un principio de incertidumbre $\Delta p \Delta x > \hbar$ en mecánica cuántica, hay análogos clásicos que relacionan, por ejemplo $\Delta\omega$ con Δt para un paquete de onda. Este problema ilustra un principio de incertidumbre que relaciona Δx con $\Delta\theta$. Mientras mejor sabemos por dónde está confinada una onda (en el interior de la ventana), menos sabemos qué dirección tiene. Sólo las ondas planas tienen una dirección bien definida. ¿Puedes estimar en este problema $\Delta x \Delta\theta$?

13. Demuestra que la ecuación de onda para un campo $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ con fuentes dadas $f(\boldsymbol{r}, t)$, $(\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2)\phi(\boldsymbol{r}, t) = -4\pi f(\boldsymbol{r}, t)$, se convierte en la *ecuación de Helmholtz* $(\nabla^2 + k^2)\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = -4\pi f_\omega(\boldsymbol{r})$ cuando las fuentes son monocromáticas con frecuencia ω, donde $k = \omega/c$.

    Pistas:

    1. Sustituye $f(\boldsymbol{r}, t) = f_\omega(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$, propón el *ansatz* estacionario $\phi(\boldsymbol{r}, t) = \phi_\omega(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ y evalua las derivadas temporales.

14. Demuestra que una solución particular de la ecuación de Helmholtz con fuentes es

$$\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = \int d^3r'\, G_\omega(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')f_\omega(\boldsymbol{r}'),$$

donde $G_\omega(\boldsymbol{r})$ obedece la ecuación de Helmholtz con una fuente puntual unitaria colocada en el origen,

$$(\nabla^2 + k^2)G_\omega(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}),$$

$k = \omega/c$ y $\delta(\boldsymbol{r})$ es la delta de Dirac.

Pistas:

1. Por simplicidad, tomemos a la delta como una *función* que vale cero en todo el espacio excepto en el origen, y cuya integral en cualquier región que incluya al origen es 1, $\int_V d^3r\delta(\boldsymbol{r}) = 1$ si $\boldsymbol{0} \in V$.
2. Si no estás familiarizado con ella, considera una función que vale cero en todo el espacio excepto en una pequeña región de tamaño despreciable sobre la cual la integral vale 1.
3. En todo caso, si la región es suficientemente chica, $\int d^3r'\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')f_\omega(\boldsymbol{r}') = f_\omega(\boldsymbol{r})$. De hecho, ésta esta está relacionada con una mejor *definición* de la delta de Dirac, cono *funcional.*
4. Aplica el operador de Helmholtz a la solución propuesta e intercambialo con la integral para encontrar

$$(\nabla^2 + k^2)\int d^3r'\, G_\omega(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')f_\omega(\boldsymbol{r}') = -4\pi\int d^3r'\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')f_\omega(\boldsymbol{r}') = -4\pi f_\omega(\boldsymbol{r}).$$

15. Demuestra que

$$G_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}.$$

es una función de Green isotrópica saliente para la ecuación de Helmholtz.

Pistas:

1. Demuestra que para $r \neq 0$ cumple la ecuación de Helmholtz.
2. Argumenta por qué a distancias chicas $r \ll 1/k$ se puede aproximar por $1/r$, la función de Green electrostática, el potencial coulombiano.

3. Argumenta por qué a distancias chicas se puede ignorar el factor k^2 en la ecuación de Helmholtz.
4. Por tanto $(\nabla^2 + k^2)(e^{ikr}/r) = \nabla^2 1/r$ a distancias chicas, y eso es como la densidad de carga correspondiente a una carga puntual unitaria en el origen, i.e., una delta de Dirac.
5. Al introducir la dependencia temporal, multiplicando por $e^{-i\omega t}$, y alejarnos a grandes distancias $r \gg 1/k$ en cualquier dirección, obtenemos una onda que se aleja del origen. Por eso ésta solución se llama saliente.
6. La solución *entrante* es e^{-ikr}/r.

16. Considera una distribución de corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ que oscila con frecuencia ω bien definida. Demuestra que los potenciales electromagnéticos en la *norma de Lorentz* están dados por $\phi(\boldsymbol{r}, t) = \phi(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ y $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ con

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \rho(\boldsymbol{r}')$$

y

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$$

Pistas:

1. En la norma de Coulomb ϕ y $\boldsymbol{A}$ obedecen la ecuación de onda con fuentes ρ y $\boldsymbol{j}/c$ respectivamente.
2. Para fuentes monocromáticas, podemos reemplazarla por la ecuación de Helmholtz.
3. Podemos usar la función de Green del problema 15.

17. Considera un sistema como el del inciso 16, pero en el cual las fuentes están totalmente contenidas en una pequeña región de radio $R \ll \lambda$, donde $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda y $k = \omega/c$. Demuestra que a distancias muy grandes $r \ll \lambda$ el potencial vectorial está dado aproximadamente por

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikr}}{rc} \int d^3r' \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}').$$

Pistas:

1. Haz una expansión de Taylor en r' y conserva el término más grande cuando $r' \ll r$ y $kr' \ll 1$.

Notas:

1. Este es el término dominante del potencial en la *zona de radiación* ($r \gg \lambda$) en la *aproximación de longitud de onda larga* $r' < R \ll \lambda$.

18. Evalúa la integral del problema 17 en términos del momento dipolar eléctrico del sistema.

Pistas:

1. Queremos evaluar $\int d^3r' \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = \int d^3r \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$.
2. Escribe cada componente del integrando $j_i(\boldsymbol{r})$ como

$$j_i(\boldsymbol{r}) = j_k(\boldsymbol{r})\delta_{ik} = j_k(\boldsymbol{r})\frac{\partial r_i}{\partial r_k}$$

donde δ_{ik} es la *delta de Kronecker* y empleamos la notación de Einstein (suma implícita sobre índices repetidos, en este caso k).

3. Manipula las derivadas para obtener

$$\int d^3r \, j_i(\boldsymbol{r}) = \int d^3r \, \nabla \cdot (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})r_i) - \int d^3r \, (\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}))r_i.$$

4. Usa el teorema de Gauss y el hecho de que la carga está cerca del origen para argumentar que la primera integral vale cero.
5. En la segunda integral usa la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = -\partial\rho(\boldsymbol{r},t)/\partial t = i\omega\rho(\boldsymbol{r},t)$.
6. Finalmente $\int d^3r\, j_i(\boldsymbol{r}) = -i\omega p_i$, donde $\boldsymbol{p} = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}e^{-i\omega t}$ es el momento dipolar de la distribución de cargas.

19. Calcula la contribución dipolar al potencial vectorial $\boldsymbol{A}$, el campo magnético $\boldsymbol{B}$ y el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en la zona de radiación en la aproximación de longitud de onda larga.

    Pistas:

    1. Sustituye la solución del problema 18 en la del problema 17 para obtener $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.
    2. El campo magnético $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ se puede obtener calculando $\nabla \times \boldsymbol{A}$.
    3. Argumenta por qué en la zona de radiación podemos aproximar $\nabla \approx ik\hat{\boldsymbol{n}}$, donde $\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de observación.
    4. Utiliza esta aproximación para evaluar el campo magnético $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$.
    5. El campo eléctrico se puede obtener a partir de la Ley de Ampère-Maxwell $\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = (1/c)(\partial/\partial t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -ik\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$.
    6. Aproxima el rotacional en la zona de radiación.
    7. Los resultados son $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -ik\boldsymbol{p}e^{ikr}/r$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k^2\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{p}e^{ikr}/r$ y $E(\boldsymbol{r}) = -k^2\hat{\boldsymbol{n}} \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{p})e^{ikr}/r$.

20. Calcula la potencia radiada por unidad de ángulo sólido en el caso de la radiación dipolar.

    Pistas:

    1. El flujo de energía está dado por el vector de Poynting $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*$.
    2. Sustituyendo los resultados para radiación dipolar se obtiene $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}|\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{p}|^2\hat{\boldsymbol{n}}/r^2$.
    3. Considera una esfera de radio $r \ll \lambda$ centrada en el origen. Considera un cono angosto con vértice en el origen y que cubre un ángulo sólido $d\Omega$. La intersección del cono con la esfera es un área $da = r^2 d\Omega$.
    4. La potencia que atraviesa dicha área es $d\mathcal{P} = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}da = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}r^s d\Omega$.
    5. De aquí, obtén la potencia por unidad de ángulo sólido.
    6. Sustituye el vector de Poynting calculado arriba.
    7. El resultado es $d\mathcal{P}/d\Omega = (ck^4/8\pi)|\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{p}|^2$

    Notas:

    1. Nota que esta potencia no depende de la distancia en la zona de radiación y que siempre es positiva.
    2. Esto significa que un dipolo oscilante radía y pierde energía irreversiblemente.
    3. Las oscilaciones dipolares son entonces una fuente de energía luminosa.

21. Calcula y dibuja el patrón de radiación de energía para un momento dipolar

    (a) que oscila con frecuencia ω a lo largo del eje z;

    (b) que gira en el plano xy siguiendo un círculo con radio p_0.

    Pistas:

    1. En ambos casos escribe el momento dipolar $\boldsymbol{p}(t)$ como $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t}$, encuentra la amplitud (compleja) $\boldsymbol{p}_0$ de la oscilación y sustitúyela en el resultado de los problemas previos.

22. Calcula la potencia total radiada por un dipolo que oscila con frecuencia ω.

    Pistas:

1. Integra $d\mathcal{P}/d\Omega$ sobre el ángulo sólido.

Notas:

1. El resultado, $\mathcal{P} = ck^4|\boldsymbol{p}|^2/3$ se conoce como la *fórmula de Larmor*.

23. Considera un modelo clásico para el átomo de hidrógeno consistente en un electrón que gira alrededor de un protón en una órbita circular de radio a_B (el radio de Bohr). Calcula qué la energía que pierde por radiación durante cada vuelta.

    Pistas:

    1. Calcula clásicamente el momento dipolar instantáneo, la amplitud del dipolo giratorio, la frecuencia de giro y sustituye en la fórmula de Larmor.

    Notas:

    1. Este problema demuestra que un átomo clásico sería inestable frente a pérdidas de energía radiativas.
    2. Un cálculo completo muestra que el electrón colapsaría al nucleo en un tiempo finito pequeñito. Calcúlalo o estímalo
    3. La predicción clásica de que la materia colapsaría rápidamente por las pérdidas radiativas de energía es uno de los motivos que llevaron al surgimiento de la mecánica cuántica.

24. Considera una molécula con una polarizabilidad α iluminada por una onda plana monocromática con frecuencia ω. Calcula su sección transversal de esparcimiento (dispersión).

    Pistas:

    1. El campo eléctrico oscilante $\boldsymbol{E}$ de la onda plana induce un momento dipolar oscilante $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}$.
    2. Por tanto, la molécula radiaría energía electromagnética en todas direcciones, esparciendo una potencia dada por la fórmula de Larmor.
    3. La sección transversal de esparcimiento σ (no es conductividad ni carga superficial, aunque use la misma letra) se define como $\sigma = \mathcal{P}/I$, donde I es la intensidad, potencia por unidad de área de la onda incidente.
    4. Verifica que σ tiene las unidades correctas.
    5. Como $\mathcal{P}$ y I son ambos proporcionales a E^2, el campo se cancela y σ depende sólo de las propiedades de la molécula.

    Notas:

    1. La interpretación de σ es como el área efectiva de la molécula. Como si toda la energía de la onda incidente que cayera sobre el área σ fuese esparcida, mientras que el resto seguiera su camino.
    2. Nota que σ es inversamente proporcional a λ^4. Por tanto, la luz roja es mucho menos esparcida que la luz azul.
    3. Cualquier relación de este resultado con el color del cielo y con el de los atardeceres, ¡no es coincidencia!

25. Considera una partícula puntual cargada que se mueve a lo largo de una trayectoria $\boldsymbol{r}(t)$. Calcula la potencia instantánea que radía.

    Pistas:

    1. Calcula el momento dipolar $\boldsymbol{p}(t) = q\boldsymbol{r}(t)$.
    2. Escríbelo como una superposición de Fourier

$$\boldsymbol{p}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} p_\omega e^{-i\omega t}.$$

3. Para cada p_ω usa los resultados de los problemas anteriores.
4. El resultado es
$$\mathcal{P}(t) = \frac{2}{3}\frac{q^2 a(t)^2}{c^3},$$
donde $\boldsymbol{a}$ es la aceleración de la partícula
5. Una forma rápida, no muy formal, de llegar a este resultado es identificar $\boldsymbol{p}$ con $q\boldsymbol{r}$, $\omega^2\boldsymbol{p}$ con $-d^2\boldsymbol{p}/dt^2 = -q\boldsymbol{a}$ y por tanto $\omega^4 p^2$ es como $q^2 a^2$. El factor de $2/3$ en lugar de $1/3$ viene de que en los problemas anteriores calculamos la potencia promedio, y aquí, la potencia instantánea.