Tarea 5
Propedéutico Electrodinámica
2020-04-19

Nombre: ____

Entregar el viernes 2020-04-24.

1. Demuestra que

   (a)
   $$\int d^3r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0,$$
   y

   (b)
   $$\int d^3r\, (j_i(\boldsymbol{r})r_j + r_i j_j(\boldsymbol{r})) = 0,$$

   para una distribución de corriente estacionaria $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ localizada en una región finita del espacio.

   Pistas:

   - Escribe $j_i = j_k \partial_k r_i$ y $j_j = j_k \partial_k r_j$, con $\partial_k \equiv \partial/\partial r_k$.
   - Manipula los integrandos arriba para escribirlos en términos de $j_i = \nabla\cdot(\boldsymbol{j} r_i) - (\nabla\cdot\boldsymbol{j})r_i$, y $j_i r_j + r_i j_j = \nabla\cdot(\boldsymbol{j} r_i r_j) - (\nabla\cdot\boldsymbol{j})r_i r_j$.
   - Integra los términos $\nabla\cdot(\ldots)$ usando el teorema de Gauss.
   - Integra los términos $(\nabla\cdot\boldsymbol{j})\ldots$ empleando la ecuación de continuidad para sistemas estacionarios.

2. Considera una distribución de corriente estacionaria $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ localizada en el interior de una región de tamaño ℓ alrededor del origen. Demuestra que el potencial vectorial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ a una distancia $r \gg \ell$ está dada aproximadamente por
   $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$
   donde
   $$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r\, \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$
   es el *momento dipolar magnético* del sistema

   Pistas:

   - Parte de la expresión
     $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$
   - Haz una expansión de Taylor para $\boldsymbol{r}'$ pequeña
     $$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} - \boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \ldots.$$
   - El primer primer término lleva a
     $$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{rc}\int d^3r'\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 0,$$
     de acuerdo al problema anterior.

- Separa la contribución del segundo término en en un término simétrico y uno antisimétrico,

$$A_i^{(1)}(\boldsymbol{r}) = \frac{r_j}{cr^3}\int d^3r'\, j_i(\boldsymbol{r}')r'_j = A_i^s + A_i^a,$$

  con

$$A_i^s(\boldsymbol{r}) = \frac{r_j}{2cr^3}\int d^3r'\,(j_i(\boldsymbol{r}')r'_j + r'_i j_j(\boldsymbol{r}'))$$

  y

$$A_i^a(\boldsymbol{r}) = \frac{r_j}{2cr^3}\int d^3r'\,(j_i(\boldsymbol{r}')r'_j - r'_i j_j(\boldsymbol{r}')).$$

- De acuerdo al problema anterior, la integral en el término simétrico es cero, $\boldsymbol{A}^s = 0$.
- En el término antisimétrico identifica $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{r}')$.
- Identifica en la integral resultante al momento dipolar magnético $\boldsymbol{m}$.

Notas:

- El término monopolar, proporcional a $1/r$ es nulo. No hay monopolos.
- El término dominante es el dipolar, proporcional a $1/r^2$, a menos que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$, en cuyo caso se deben explorar los siguientes términos en la expansión (cuadrupolar, octopolar, etc.).
- El potencial vectorial *rodea* al dipolo magnético de acuerdo a la regla de la mano derecha.

3. Demuestra que el campo producido por un dipolo magnético es

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{m}r^2}{r^5}.$$

Pista:

- Calcula el rotacional del potencial vectorial arriba.

Nota:

- El campo dipolar decae como $1/r^3$.
- Hay un fuerte parecido entre el campo dipolar magnético y el campo dipolar eléctrico, i.e., $\boldsymbol{B}$ es a $\boldsymbol{m}$ como $\boldsymbol{E}$ es a $\boldsymbol{p}$ lejos del dipolo.

4. Considera una corriente estacionaria I que circula en un circuito $\mathcal{C}$. Demuestra que el dipolo magnético es $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{\mathcal{S}}/c$, donde $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ es el área del circuito, i.e. es un vector cuya componente $\mathcal{S}_x$ es el área de la proyección del circuito sobre el plano yz, con contribuciones positivas para recorridos de acuerdo a la regla de la mano derecha con el pulgar a lo largo de x, i.e., contrario a las manecillas del reloj visto desde $x > 0$ hacia el origen, y contribuciones negativas para circuitos que se recorran en la dirección opuesta. Las otras componentes, $\mathcal{S}_y$ y $\mathcal{S}_z$ se definen análogamente.

Pistas:

- El integrando que define $\boldsymbol{m}$ sólo es distinto de cero en el alambre que lleva la corriente.
- Considera un fragmento de alambre conductor, parte del circuito, con sección transversal s, longitud dl y dirección $\hat{\boldsymbol{t}}$. Su contribución a la integral que define a $\boldsymbol{m}$ se puede obtener reemplazando d^3r por sdl.
- Reemplaza $sdl\boldsymbol{j}$ por $Id\boldsymbol{l}$, identificando $\boldsymbol{j} = j\hat{\boldsymbol{t}}$, $d\boldsymbol{l} = dl\hat{\boldsymbol{t}}$ e $I = js$.
- Identifica $d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l}/2$ con el vector área de un triángulo angosto con un vértice en el origen y uno de cuyos lados es $d\boldsymbol{l}$.
- Suma sobre todos los elementos de longitud del circuito.

Nota:

- En un circuito plano, i.e., contenido en un plano, $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \mathcal{S}\hat{\boldsymbol{n}}$ donde $\mathcal{S}$ es el área de la región rodeada por el circuito y $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector unitario perpendicular al plano, cuya dirección se establece con la regla de la mano derecha

5. Considera un circuito circular de radio a en el que circula una corriente I y que descansa en el plano xy centrado en el origen. Calcula el campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ a distancias $r \gg a$.

   Pista:

   - Usa los resultados de los últimos problemas.

   Nota:

   - En la tarea anterior calculamos el resultado exacto a lo largo del eje z. Verifiquen que es compatible con el resultado de la aproximación dipolar.

6. Considera una esfera de radio a centrada en el origen uniformemente cargada en su interior con carga Q y que gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. Calcula el campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ que produce a distancias $r \gg a$.

   Pista:

   - Calcula la densidad de carga, la velocidad con que se mueve cada elemento de volumen, su correspondiente densidad de corriente eléctrica, su contribución al momento dipolar magnético y el momento dipolar magnético total.

   Nota:

   - El campo dipolar magnético en este caso coincide con la solución exacta y vale en todo el exterior de la esfera.

7. Considera un circuito en forma de cuadrado de lado L que descanza en el plano xy centrado en el origen y con los lados paralelos a los ejes cartesianos, en el que circula una corriente I en dirección opuesta a las manecillas del reloj visto desde el eje z. Se aplica un campo $\boldsymbol{B}$ homogéneo en el plano yz formando un ángulo θ con el eje z, i.e., $\boldsymbol{B} = B(0, -\sin\theta, \cos\theta)$. Demuestra que el circuito es sujeto a una torca $\tau = mB\sin\theta$ que apunta en la dirección x, i.e., $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$.

   Pistas:

   - Calcula las fuerzas $\pm(IL/c)\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}$ y $\pm(IL/c)\hat{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{B}$ sobre cada uno de los cuatro lados del circuito.
   - Nota que la fuerza total es nula.
   - Multiplica cada fuerza por su correspondiente brazo de palanca y suma para obtener la torca total.

8. Considera un dipolo magnético $\boldsymbol{m}$ centrado en el origen sujeto a un campo externo $\boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{r})$ que varía lentamente en el espacio. Demuestra que sobre el dipolo actua

   (a) una fuerza $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}}$ y

   (b) una torca $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})$.

   Pistas:

   - Considera la distribución de corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$. La fuerza sobre un elemento de volumen es $d\boldsymbol{f} = d^3r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})/c$.
   - Haz una aproximación de Taylor del campo,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{r} \cdot \nabla\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}).$$

- Integra sobre el volumen en que circula la corriente

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\left(\int d^3r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\right) \times \boldsymbol{B}(0) + \frac{1}{c}\left(\int d^3r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{B}(0))\right).$$

- La integral en el primer término es cero, como en un problema previo.
- Para el segundo término podemos usar notación de índices,

$$F_i = \frac{1}{c}\int d^3r\, \epsilon_{ijk} j_j(\boldsymbol{r}) r_l \partial_l B_k(0),$$

  con ϵ_{ijk} el tensor de Levi-Civita.
- El término $j_k r_l$ puede separarse en un término simétrico y uno antisimétrico.
- Como en un problema previo, el término simétrico integra a cero.
- El término antisimétrico se puede manipular de varias formas para obtener $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} F_i = & \quad \tfrac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\int d^3r\,(j_j r_l - j_l r_j)\partial_l B_k(\boldsymbol{0}) \\ = & \quad \tfrac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\epsilon_{nom}\int d^3r\, j_n r_o\ \partial_l B_k(\boldsymbol{0}) \\ = & \quad -\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} m_m \partial_l B_k(\boldsymbol{0}) \\ = & \quad \epsilon_{ijk}(\boldsymbol{m}\times\nabla)_j B_k(\boldsymbol{0}) \\ = & \quad ((\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}))_i \end{aligned}$$

- Finalmente, se pueden usar identidades y la ley de Gauss

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{m}\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}).$$

- Para la torca integramos el elemento de torca

$$d\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{f} = d^3r\,\frac{1}{c}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}))$$

  usando identidades vectoriales

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{c}\int d^3r\,(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})).$$

- El segundo término tiene la integral de $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot(r^2\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})/2) - r^2\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})/2 = \nabla\cdot(r^2\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})/2)$, donde se usa la ecuación de continuidad, caso estacionario. Este término se puede integrar usando el teorema de Gauss y da cero.
- El primer término puede serpararse en una parte simétrica y una antisimétrica,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2c}\int d^3r\,(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) + \frac{1}{2c}\int d^3r\,(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}).$$

- La parte simétrica integra a cero, como en el primer problema arriba.
- En la parte antisimétrica podemos identificar el momento dipolar magnético y llegar al resultado final.

9. Muestra que los resultados de los últimos dos problemas son compatibles con una energía potencial $U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$ para un dipolo magnético $\boldsymbol{m}$ en presencia de un campo $\boldsymbol{B}$.

   Pistas:

- La fuerza y la torca se pueden derivar de la energía potencial U a partir de

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U,$$

y

$$\tau_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\partial U/\partial\theta,$$

donde θ es un ángulo alrededor de un eje de giro que apunta a lo largo de un vector unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$ medido de acuerdo a la regla de la mano derecha.

10. Considera dos dipolos magnéticos $\boldsymbol{m}_1$ y $\boldsymbol{m}_2$ separados una distancia d. Calcula la fuerza entre ellos si
    (a) Ambos apuntan en la dirección z y están separados a lo largo de z.
    (b) Ambos apuntan en la dirección z y están separados a lo largo de x.
    (c) Uno apuntan en la dirección z y el otro en la dirección $-z$, y están separados a lo largo de z.
    (d) Uno apuntan en la dirección z y el otro en la dirección $-z$, y están separados a lo largo de x.

11. Considera un cilindro de radio a y altura L uniformemente magnetizado a lo largo de su eje con magnetización $\boldsymbol{M}$. Demuestra que el dipolo magnético total del cilindro es igual al que produciría una corriente superficial $K = cM$ recorriendo las paredes del cilindro alrededor de la magnetización, siguiendo la regla de la mano derecha.

    Pistas:

    - Se define la magnetización $\boldsymbol{M}$ como el momendo dipolar magnético por unidad de volumen.
    - Calcula el momento dipolar magnético del cilindro $\boldsymbol{m} = \pi a^2 L\boldsymbol{M}$ multiplicando magnetización por volumen.
    - Así como la densidad de corriente (volumétrica) es corriente que atraviesa una superficia en su dirección normal por unidad de área, la densidad de corriente superficial es corriente que atraviesa de un lado a otro de una línea en la superficie por unidad de longitud.
    - Una corriente superficial K sobre la pared del cilindro corresponde a una corriente total $I = KL$ circulando alrededor del cilindro.
    - Dicha corriente produce un momento dipolar magnético $I\mathcal{S}/c$, donde $\mathcal{S} = \pi a^2$ es el área del circuito.
    - Luego $I\mathcal{S}/c = m$, $KL\pi a^2/c = \pi a^2 LM$, $K = cM$.

12. Considera un material magnetizado a lo largo de y con una magnetización $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = M_y(x)\hat{\boldsymbol{y}}$ que sólo depende de x. Considera una superficie immersa en el material en forma de rectángulo de lados L_x y L_y en el plano xy y con aristas en x_0, $x_1 = x_0 + L_x$, y_0 y $y_1 = y_0 + L_y$ Calcula la corriente que atraviesa dicho rectángulo.

    Pistas:

    - Usa un modelo simple de magnetización, en que cada átomo tiene un electrón (carga $-e$) que circula con periodo T en una trayectoria que encierra un área $\mathcal{S}$ con normal $\hat{\boldsymbol{y}}$. Hay n de estas órbitas por unidad de volumen. Luego, la magnetización es $M_y = -ne\mathcal{S}/cT$. Permitimos que n, $\mathcal{S}$ y/o T dependan de x.
    - Sólo contribuyen a la corriente aquellas átomos que intersecten a la superficie rectangular. Y de éstas, las órbitas que la intersecten dos veces (o cualquier número par de veces) no contribuyen, pues cada vez que el electrón atraviesa en una dirección, atraviesa en la dirección opuesta para cerrar su circuito.
    - Entonces, sólo aquellas trayectorias que pasen en una dirección a través de la superficie y regresen por fuera de la superficie pueden contribuir a la corriente. Esto es, sólo las trayectorias que encierran a la línea en x_0 y a la línea x_1.

- El número de trayectorias que encierran la línea x_0 es igual al número de átomos en un volumen cilíndrico de sección transversal $\mathcal{S}(x_0)$ y de longitud L_y, i.e., $n(x_0)L_y\mathcal{S}(x_0)$. Cada una de estas trayectorias contribuye a la corriente z con un electrón cada tiempo T atravesando hacia abajo, por lo que su contribución a la corriente es $n(x_0)L_y\mathcal{S}(x_0)e/T = -cM_y(x_0)L_y$.
- Análogamente, la contribución a la corriente en x_1 es $-n(x_1)L_y\mathcal{S}(x_1)e/T = cM_y(x_1)L_y$.
- Sumando, obtenemos la corriente total $I = c(M_y(x_1) - M_y(x_0))L_y$.
- Si hubiera muchos tipos de cargas y de órbitas, estas contrinuirían tanto a I como a M_y por lo cual el resultado seguiría siendo válido.

Notas:

- Podemos escribir entonces $I = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy\, c(\partial/\partial x)M_y$.
- Podemos interpretar este resultado en términos de una densidad de corriente $j_z = c(\partial/\partial x)M_y$.
- Si además hubiera una magnetización apuntando en x y que dependiera de y podríamos sumar su contribución a la corriente y generalizar al resultado anterior a $j_z = c((\partial/\partial x)M_y - (\partial/\partial y)M_x$.
- Si la magnetización apuntara en z no contribuiría a j_z.
- Si M_x dependiera de x o z o M_y dependiera de de y o z tampoco contribuiría a j_z.
- Si repitiéramos el cálculo anterior para otras superficies obtendíamos la generalización $\boldsymbol{j} = c\nabla \times \boldsymbol{M}$.

13. Considera un material magnetizado finito. Demuestra que sobre su frontera circula una corriente superficial $K = c\boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.

    Pistas:

    - Afuera del material la magnetización es nula, por lo que hay una fuerte variación espacial de la magnetización al atravesar la superficie.
    - Considera la vecindad de cierto punto en la superficie.
    - Sin perdida de generalidad, puedes transladar y orientar el sistema coordenado para que dicho punto quede en el origen y la normal a la superficie apunte en la dirección z. Cerca de ese punto $(\partial_z)\boldsymbol{M}$ es muy grande pues $\boldsymbol{M}$ pasa de un valor finito en el interior a cero en el exterior. Toma el límite en que dicha variación se hace infinitamente abrupta pero en una región infinitamente delgada.
    - Entonces, cerca de la superficie hay corrientes muy grandes $j_x = -c\partial_z M_y$ y $j_y = c\partial_z M_x$. Integrando desde un punto inmediatamente dentro hasta un punto inmediatamente afuera obtén la corriente superficial $K_x = cM_y$ y $K_y = -cM_x$ donde $\boldsymbol{M}$ es la magnetización dentro del material.
    - Escribe el resultado anterior de manera vectorial $\boldsymbol{K} = c\boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{z}}$.
    - Generaliza a cualquier punto de la superficie con cualquier orientación, $\boldsymbol{K} = c\boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ apunta hacia el exterior.

14. Demuestra que en la interface entre dos materiales 1 y 2 magnetizados circula una corriente $\boldsymbol{K} = c\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1)$ donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector normal unitario que apunta del medio 1 al 2.

    Pista:

    - Usa el problema anterior introduciendo una pequeña región vacía entre los materiales y toma el límite en que su ancho se anula.

15. Demuestra la ley de Ampère *macroscópica*

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^e,$$

    donde $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi M$ y $\boldsymbol{j}^e$ es la corriente externa.

    Pista:

- Escribe la corriente total $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}^e + \boldsymbol{j}^i$ en la ecuación de Ampère *microscópica*, donde $\boldsymbol{j}^i = c\nabla \times \boldsymbol{M}$ es la corriente interna debido a la magnetización del material.

16. Demuestra que en una superficie que separa dos regiones 1 y 2 con normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ que apunta de 1 hacia 2 se cumple que:

    (a) La componente normal de la densidad de flujo magnético $\boldsymbol{B}$ es contínua, $\Delta B_\perp = 0$, $B_\perp(2) = B_\perp(1)$.

    (b) La componente tangencial del campo magnético $\boldsymbol{H}$ es continua en ausencia de corrientes superficiales externas, $\Delta \boldsymbol{H}_\parallel = 0$, $\boldsymbol{H}_\parallel(2) = \boldsymbol{H}_\parallel(1)$.

    (c) La componente tangencial del campo magnético $\boldsymbol{H}$ es discontínua en presencia de una corriente externa superficial, $\hat{n} \times (\boldsymbol{H}(2) - \boldsymbol{H}(1)) = (4\pi/c)\boldsymbol{K}^e$.

    Pistas:

    - Integra la ley de Gauss magnética en pequeños cilindros Gaussianos con una tapa en la región 2 y otra en la región 1 y toma el límite en que ambas tapas aprisionan la superficie.
    - Integra la ley de Ampère macroscópica en pequeños rectángulos con un lado en el medio 1 y otro en el medio 2 y toma el límite en que dos lados aprisionan la superficie.
    - Otra alternativa es usar las condiciones de continuidad para $\boldsymbol{B}_\parallel$ y escribir la corriente superficial total en términos de la externa y de la discontinuidad de la magnetización.

17. Una bobina está formada por $N \gg 1$ espiras de alambre enrolladas uniformemente alrededor de un cilindro de altura ℓ y radio $a \ll \ell$ lleno de un material con permeabilidad magnética μ. Ignorando efectos de borde, halla los campos $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ en todo el espacio.

    Pistas:

    - El campo magnético $\boldsymbol{H}$ y la densidad de flujo magnético $\boldsymbol{B}$ están ligados en muchos materiales a través de una simple relación lineal $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, donde μ se conoce como permeabilidad magnética y es un atributo de cada material.
    - Usa argumentos de simetría y la ley de Gauss magnética para establecer que la dirección de los campos es axial.
    - Integra la ley de Ampère macroscópica en rectángulos con dos lados axiales y dos lados radiales para demostrar que el campo es constante en el exterior y constante en el interior y para hallar la diferencia entre H dentro y fuera de la bobina.
    - Usa condiciones de contorno lejos de la bobina y obtén H en todo el espacio.
    - Obtén B en todo el espacio.

18. Considera un material superconductor, un diamagneto perfecto, llenando la región $z < 0$ con vacío en la región $z > 0$, y un dipolo magnético $\boldsymbol{m}$ que apunta en la dirección z y colocado sobre el eje z a una distancia d del origen.

    (a) Demuestra que en $z > 0$ el campo $\boldsymbol{B}$ es igual al campo producido en el espacio vacío por el dipolo $\boldsymbol{m}$ en $z = d$ mas el campo que produciría un dipolo ficticio $\boldsymbol{m}' = -\boldsymbol{m}$ colocado en $z = -d$.

    (b) Halla la fuerza que siente el dipolo real. ¿Se ve atraido o repelido por la superficie?

    (c) ¿Cambiaría el resultado si rotamos el dipolo 180 grados?

    Pistas:

    (a) Un diamagneto es un material con $\mu < 1$.

    (b) Un diamagneto *perfecto*, como lo son los superconductores, tiene $\mu = 0$.

    (c) Calcula $\boldsymbol{B}$ en el sistema real, en $z < 0$.

    (d) Aplica condiciones de contorno para hallar $B_z(0^+)$.

    (e) Demuestra que estas se cumplen por la solución propuesta.

(f) ¿Cuánto vale la densidad de corriente *externa* en la superficie del superconductor?

(g) Demuestra que la solución propuesta también cumple las condiciones de contorno para $\boldsymbol{H}_\parallel$ en $z = 0$.

(h) La fuerza sobre un dipolo en términos del campo fue obtenida en un problema previo.

19. Demuestra que en una región simplemente conexa en que no hay corrientes eléctricas externas y hecha de un material homogéneo el campo magnético se puede obtener de un potencial *escalar* ϕ_m, $\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_m$,y que satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi_m = 0$.

    Pistas:

    (a) En dicha región se cumplen las ecuaciones $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ y $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$.

    (b) Usa la segunda para escribir $\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_m$ en términos de algún potencial escalar ϕ_m.

    (c) Usa la relación constitutiva $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ y escribe la primera como $-\nabla \cdot \mu\nabla\phi_m = 0$.

    Nota:

    - Si la región no es simplemente conexa el potencial escalar podría resultar multivaluado. Hay que tener cuidado con estos casos.
    - Un ejemplo sería el de un alambre recto infinitamente largo en que circula una corriente I. El campo $\boldsymbol{B}$ es tangencial, $B_\theta = 2I/rc$, y puede derivarse de un potencial escalar $\phi_m(\boldsymbol{r}) = \phi_m(\theta) = -2I\theta/c$, pero este potencial cambia de valor al dar una vuelta completa, i.e., $\phi_m(\theta + 2\pi) \neq \phi_m(\theta)$.

20. Considera una esfera aislante no magnetizable de radio a centrada en el origen en cuya superficie se deposita una carga con densidad uniforme σ. La esfera se pone a girar alrededor del eje z con velocidad angular ω. Calcula el campo magnético producido en todo el espacio.

    Pistas;

    - En el interior de la esfera el campo se puede describir por un potencial escalar $\phi_<$ que obedece la ecuación de Laplace.
    - Lo mismo en el exterior, con otro potencial escalar $\phi_>$.
    - El sistema tiene un dipolo magnético no nulo.
    - Calcula la corriente superficial debida a la rotación de la carga superficial en términos de σ y ω en función de θ. Verifica que es proporcional a $\sin\theta$.
    - Prueba entonces como anzatz potenciales que van como $\cos\theta$ y que satisfagan la ecuación de Laplace.
    - En el exterior prueba un potencial dipolar que decaiga en $r \to \infty$: $\phi_>(r, \theta) = \alpha\cos\theta/r^3$.
    - En el interior prueba que no sea singular en el origen, $\phi_<(r, \theta) = \beta r\cos\theta$.
    - Calcula $\boldsymbol{B}$ en el interior y el exterior.
    - Aplica condiciones de contorno sobre $B_\perp$ y $\boldsymbol{B}_\parallel$ y determina las constantes α y β.
    - Calcula el momento dipolar magnético $\boldsymbol{m}$ de la esfera rotante. Relacionalo con las constantes α y β.

    Nota:

    - Nota que el potencial no está definido en la región superficial, donde sí hay corriente, y que no hay continuidad entre sus valores fuera y dentro de la esfera ni hay por qué esperarla.