Tarea 3
Propedéutico Electrodinámica
2020-04-03

Nombre: ____

Entregar el viernes 2020-04-10.

1. Demuestra que para una función escalar $f(\boldsymbol{r})$ de la posición $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ suficientemente suave, diferenciable, etc., y un vector $\boldsymbol{h} = (h_x, h_y, h_z)$ suficientemente pequeño, podemos hacer la expansión de *Taylor*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}) =& f(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{h}\cdot\nabla f(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^2 f(\boldsymbol{r}) + \dots \\ =& \sum_n \frac{1}{n!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^n f(\boldsymbol{r}) \\ =& \exp(\boldsymbol{h}\cdot\nabla) f(\boldsymbol{r}). \end{aligned}$$

   Pista:

   - Considera la función $g(t) \equiv f(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{h})$ escalar de una variable real t y haz una expansión ordinaria de Taylor de $g(t)$ respecto a t alrededor de $t = 0$, usando la regla de la cadena.

   Nota:

   - Identifica en la última expresión $\exp(i\boldsymbol{h}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar)$, con $\hat{\boldsymbol{p}}$ el operador ímpetu de la mecánica cuántica, el *generador de translaciones*.

2. Considera una carga distribuida con una densidad $\rho(\boldsymbol{r})$ en una región de tamaño D alrededor del origen. Demuestra que el potencial $\phi(\boldsymbol{r})$ lejos de dicha región $r \gg D$ se puede escribir como

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \dots$$

   donde $Q = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})$ es la carga total de la distribución, $\boldsymbol{p} = \int d^3r \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$ es el momento dipolar, dado por el primer *momento* de la distribución.

   Pistas:

   - Escribe el potencial Coulombiano y haz una expansión de Taylor para el kernel $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ alrededor de $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$.

   Notas:

   - Generalmente, cada término es de orden D/r comparado con el anterior.
   - Si $Q \neq 0$, el primer término domina a distancias grandes.
   - Si $Q = 0$ pero $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, entonces el segundo término domina a distancias grandes.
   - En general, el primer término distinto de cero es el único relevante a distancias suficientemente lejanas. De lejos, toda distribución de carga es indistinguible de una carga puntual, a menos que la carga total sea cero, en cuyo caso, todo sistema es un dipolo, a menos que el momento dipolar sea cero, en cuyo caso, todo sistema es un cuadrupolo...
   - ¿Cómo escribirías la definición de Q y de $\boldsymbol{p}$ para cargas discretas?

3. Aplica el resultado anterior al de dos cargas q y $-q$ separadas una distancia a.

4. Demuestra que el campo eléctrico producido por un dipolo $\boldsymbol{p}$ colocado en el origen es

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}r^2}{r^5}.$$

   Pista:

   - Usa $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$.

   Nota:

   - Si el dipolo estuviera en una posición $\boldsymbol{r}_0$ basta cambiar $\boldsymbol{r}$ por $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ en las expresiones anteriores.

5. Considera un cubo de lado L orientado con los planos cartesianos, formado por formado por N átomos, cada uno sin carga ni momento dipolar incialmente. En cierto momento un electrón de cada átomo se desplaza una distancia a en la dirección z.

   (a) Demuestra que el número de electrones que atraviesan la cara superior de abajo hacia arriba es $Q = Na/L = naL^2$, donde $n = N/L^3$ es la densidad de número de los átomos.

   (b) Muestra que cada átomo adquiriría un momento dipolar $\boldsymbol{p} = -e\boldsymbol{a} = -ea\hat{\boldsymbol{z}}$.

   (c) Muestra que el momento dipolar por unidad de volumen sería $\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = ne\boldsymbol{a}$.

   (d) Muestra que la carga que atraviesa la superficie superior es $Q = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}L^2$.

   (e) Demuestra que la carga que atraviesa las superficies laterales es nula.

   (f) Generaliza este resultado y muestra que para cualquier pequeña superficie con área da y normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ colocada en la posición $\boldsymbol{r}$ dentro en un medio no polarizado, la carga que atraviesa la superficie en la dirección de $\hat{n}$ cuando el sistema se polariza por el movimiento de algunas o todas sus cargas es $dQ = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{a}$, donde $d\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{n}}da$ y $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen evaluado en la superficie.

   (g) Considera un volumen V cuya frontera sea la superficie orientable ∂V dentro de un material neutro no polarizado. Demuestra que la carga que sale del volumen a través de su superficie cuando el sistema se polariza es

$$Q_{\partial V} = \int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}.$$

   (h) Argumenta mediante la ley de conservación de la carga y el teorema de Gauss que el interior del volumen queda cargado con una carga

$$Q_V = -\int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} = -\int_V d^3r\,\nabla\cdot\boldsymbol{P}.$$

   (i) Argumenta que, como el volumen anterior es arbitrario, hay una densidad de carga ρ^i asociada a la polarización dada por

$$\rho^i(\boldsymbol{r}) = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}).$$

   (j) Argumenta por qué, si el material es finito, en su superficie aparecerá una carga σ^i por unidad de superficie dada por

$$\sigma^i(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}),$$

   donde $\boldsymbol{r}$ se halla en la frontera del material, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ es la polarización justo adentro del material y $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$ es una normal que apunta desde adentro hacia afuera del material.

   (k) Argumenta por qué en una interface entre dos medios (1 y 2) polarizados, hay una densidad de carga superficial debida a la polarización $P(\boldsymbol{r})$ dada opr

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_1) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_2))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}),$$

   donde $\boldsymbol{r}$ está en la superficie, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \zeta\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector pegado a $\boldsymbol{r}$ pero dentro del medio 1, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} + \zeta\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector pegado a $\boldsymbol{r}$ pero dentro del medio 2, tomamos el límite $\zeta \to 0^+$ y el vector normal a la superficie $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$ apunta desde el medio 1 hacia el medio 2.

6. Considera un cilindro circular recto de radio R y altura L uniformemente polarizado con polarización $\boldsymbol{P}$ a lo largo del eje. Calcula el momento dipolar total del cilindro $\boldsymbol{p}$
   (a) integrando su polarización sobre el volumen,
   (b) calculando las cargas inducidas en su superficie y empleando luego la definición de momento dipolar.

7. Utiliza la ley de Gauss para demostrar la *ley de Gauss macroscópica*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 4\pi\rho^e,$$

   donde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ es el *desplazamiento* y ρ^e es la densidad de carga externa.

   Pista:

   - Escribe la densidad de carga total $\rho = \rho^e + \rho^i$ y escribe la densidad de carga *interna* o de polarización ρ^i en términos de $\boldsymbol{P}$.

   Nota:

   - A veces se usan los superíndices t, e, e i para denotar cargas totales, externas e internas, pero muchas veces se olvidan dichas anotaciones, esperando que el lector adivine por el contexto a qué tipo de carga se refiere uno. Si en un texto leen $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho$ deben entender que en este caso ρ se refiere a las cargas internas, mentras que si leen $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, entonces deberán entender que ρ se refiere a las cargas totales.

8. Considera un volumen V dentro de un material. Demuestra que la cantidad de carga externa dentro del volumen está dada por

$$Q_V^e = \int d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}).$$

   Nota:

   - *carga externa dentro del volumen* suena contradictorio, pero en este contexto, *externa* no significa que está geométricamente afuera, sino que no esta formada por las cargas (electrones y protones) que conforman al material.

9. Demuestra que en una superficie cualquiera que separa dos regiones 1 y 2 se cumple la condición $(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_2) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_1)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}) = 4\pi\sigma^e(\boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{r}$ es una posición en la superficie, $\boldsymbol{r}_2$ y $\boldsymbol{r}_1$ son posiciones pegadas a $\boldsymbol{r}$ del lado 2 y del lado 1 de la superficie respectivamente, y donde σ^e es la densidad superficial de carga *externa* depositada justo en la superficie.

   Pista:

   - Integra la ley de Gauss macroscópica en un pequeño cilindro con tapas paralelas a la superficie, una de cada lado, y toma el límite en que las paredes del cilindro se colapsan.

   Nota:

   - En ausencia de una carga externa superficial podemos concluir que la componente normal del desplazamiento es contínua $\Delta D_\perp(\boldsymbol{r}) = E_\perp(\boldsymbol{r}_2) - E_\perp(\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$.
   - La otra condición de contorno, la continuidad de $\boldsymbol{E}_\parallel$ sigue sin cambio, así como las ecuaciones $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, $\int_{\partial A} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ y la condición de continuidad de ϕ.

10. Considera una placa en forma de prisma cuadrado de lado L y altura $h \ll L$ que descansa sobre su base en el plano xy y hecha de un material ferroeléctrico, i.e., que tiene una transición de fase que lo hace pasar espontáneamente de un estado con $\boldsymbol{P} = 0$ a un estado con $\boldsymbol{P} \neq 0$. Calcula el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en todo el espacio cuando el material se polariza, suponiendo que la polarización apunta en la dirección z e ignorando efectos de borde.

    Pistas:

- Calcula las cargas de polarización y de ahí obtén el campo eléctrico que producen.
- Otra alternativa consiste en argumentar por qué en este caso $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$.

11. Considera un modelo atómico clásico (malísimo, pero no importa) en que un electrón con carga $-e$ está ligado a al núcleo por un resorte con constante κ. La posición de equilibrio del electrón es *encima* del núcleo. Los demás electrones, por lo pronto, supongamos que son inertes, que no se mueven.

    (a) Demuestra que al aplicar un campo $\boldsymbol{E}$ estático el átomo adquiere un momento dipolar $\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}$, donde la polarizabilidad α es
    $$\alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2},$$
    $\omega_0^2 = \kappa/m$ y m es la masa del electrón.

    (b) Si en cambio el campo dependiera del tiempo sinusoidalmente, como $\boldsymbol{E}(t) = \mathrm{Re}\tilde{\boldsymbol{E}}(t) = \mathrm{Re}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$ el dipolo sería $\boldsymbol{p}(t) = \mathrm{Re}\tilde{\boldsymbol{p}}(t)$, con $\tilde{\boldsymbol{p}}(t) = \alpha(\omega)\tilde{\boldsymbol{E}}(t)$ y la polarizabilidad sería
    $$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

    (c) Si además hubiera una fuerza viscosa sobre el electrón proporcional a su velocidad, $\boldsymbol{F}_v = -\gamma \boldsymbol{v}$, con γ una constante, la polarizabilidad sería
    $$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau},$$
    donde $\tau = m/\gamma$ es un tiempo característico.

    Pista:

    - Simplemente resuelve la ecuación de movimiento clásica para el electrón.
    - Es más fácil resolver la ecuación compleja y tomar parte real al final del cálculo.

    Nota:

    - Curiosamente, el modelo no es tan malo. Para un átomo o molécula real, e incluso para un sólido, el resultado es una suma de términos como los anteriores, uno para cada posible transición electrónica del sistema de muchos electrones, con un peso fraccional conocido como *fuerza de oscilador*.

12. Considera un sólido formado por n moléculas por unidad de volumen, cada una de ellas no polar, isotrópica y con polarizabilidad α.

    (a) Argumenta por qué podemos escribir $\boldsymbol{P} = \chi \boldsymbol{E}$ bajo ciertas condiciones, donde $\chi = n\alpha$ es la susceptibilidad.

    (b) Demuestra que podemos entonces escribir $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$, donde $\epsilon = 1 + 4\pi\chi$ es conocida como permitividad, constante dieléctrica o función dieléctrica (*función* pues puede depender de ω).

13. Considera un medio isotrópico, homogéneo e infinito. En el origen se coloca una carga (externa) puntual q. Demuestra que

    (a) el campo eléctrico que produce es
    $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = q\frac{\boldsymbol{r}}{\epsilon r^3}$$

    (b) y el potencial electríco es
    $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\epsilon r}.$$

    Pista:

    - Puedes usar la versión integral de la ley de Gauss macroscópica para obtener $\boldsymbol{D}$ y de ahí $\boldsymbol{E}$ y ϕ.

Nota:

- En este caso, el resultado es como si la carga q se reemplazara por una carga apantallada q/ϵ. ¿Por qué se apantalla la carga?

14. Considera un capacitor formado por dos placas metálicas planas paralelas cuadradas de lado L separadas una distancia $d \ll L$. Se coloca una carga externa Q en una placa y $-Q$ en la otra.
    (a) Despreciando efectos de borde, calcula el campo eléctrico entre las placas y afuera de ellas.
    (b) Obten el potencial entre las placas.
    (c) Encuentra la capacitancia $C = A/4\pi d$, con $A = L^2$ el área de las placas.
    (d) Repite el cálculo anterior cuando el capacitor está lleno de un material con permitividad ϵ.

    Pistas:

    - Podrías colocar las placas paralelas al plano xy, sin pérdida de generalidad.
    - Argumenta que el campo y la densidad de carga son cero en el interior de los metales, i.e., la carga se distribuye en la superficie.
    - Las placas son equipotenciales.
    - Ignorando los bordes, el potencial sólo depende de z.
    - La solución de la ec. de Poisson entre las placas y afuera es entonces lineal en z, y por tanto el campo es constante y apunta en la dirección z.
    - Argumenta que el campo afuera de las placas es nulo y obtén el campo dentro usando condiciones de contorno sobre $\boldsymbol{E}$.
    - Intégralo para obtener el potencial $\phi(z)$ y la caida de potencial entre la placa positiva y la negativa.
    - La capacitancia es el cociente entre la carga y la caida de potencial.
    - Repite el cálculo aplicando condiciones de contorno sobre $\boldsymbol{D}$.

    Nota:

    - La capacitancia se multiplica por ϵ debido al relleno del capacitor.

15. Un cilindro metálico con radio exterior a se coloca dentro de un cilindro metálico hueco coaxial con radio interior $b > a$. Ambos tienen la misma altura $h \gg b$. El espacio entre ellos se llena de un dieléctrico con permitividad ϵ. Encuentra la capacitancia del sistema.

    Pista:

    - Coloca cargas $\pm Q$ en los dos cilindros.
    - Las dos superficies metálicas son equipotenciales.
    - La carga se distribuye entonces uniformemente en sus superficies.
    - El campo es radial, no depende ni de z y su componente radial no depende de θ.
    - Usa la ley de Gauss en su forma integral para obtener la comonente radial de D, luego de E, y luego intégrala para obtener el potencial.
    - La capacitancia es la carga dividida entre la caida de potencial.

16. Considera un dieléctrico semiinfinito con permitividad ϵ_1 ocupando la región $z > 0$ y otro con permitividad ϵ_2 ocupando la región $z < 0$. Se coloca una carga puntual q sobre el eje z a una distancia $d > 0$ del origen.

(a) Demuestra que el potencial que produce es

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q/\epsilon_1}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} + \frac{q'/\epsilon_1}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{1/2}}$$

en $z > 0$ y como

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q''/\epsilon_2}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}}$$

en $z < 0$, donde

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

y

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Pistas:

- Usa el método de imágenes. Argumenta que añadir cargas ficticias en $z < 0$ no afecta las ecuaciones de campo en $z > 0$ y añadir cargas ficticias en $z > 0$ no afecta las ecuaciones de campo en $z < 0$.
- Propón como *anzatz* una solución en la región $z > 0$ dada por el potencial que produciría la carga original q en el eje z en $z = d$ y una carga ficticia, *la carga imágen*, colocada también en el eje z (dónde si no) y a una distancia d' hacia abajo del origen, ambas en un medio ficticio homogeneo con permeabilidad ϵ_1. La carga y la permeabilidad de este sistema ficticio coinciden con las reales en la región $z < 0$, aunque no en la región $z < 0$.
- Propón como *anzatz* una solución en la región $z < 0$ dada por el potencial que produciría una carga ficticia q'' colocada en el eje z a una distancia d'' arriba del origen dentro de un medio homogéneo con permeabilidad ϵ_2. La carga y la permeabilidad coinciden con las reales en la región $z < 0$, pero no en la región $z > 0$.
- Impón condiciones de contorno sobre el potencial en la interfaz $z = 0$, i.e., el potencial justo arriba debe ser igual al potencial justo abajo, para toda x y y.
- Impón condiciones de contorno para las comonentes normales a la superficie del desplazamiento.
- Demuestra que eligiendo juiciosamente d' y d'', las condiciones de contorno se cumplirían para toda x y y con cumplirse en un solo punto.
- Escribe entonces ambas ecuaciones de contorno como dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, q' y q'' y resuélvelas.