Tarea 4
Propedéutico Electrodinámica
2020-04-12

Nombre: ______________________________

Entregar el viernes 2020-04-17.

1. Considera un sistema formado por n partículas por unidad de volumen, cada una con carga q y todas moviéndose al unísono con velocidad $\boldsymbol{v}$. Considera una pequeña superficie con área Δa y con un vector normal unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$. Demuestra que en un tiempo Δt la cantidad de carga ΔQ que atraviesa la superficie en la dirección de $\hat{\boldsymbol{n}}$ es

$$\Delta Q = (nq\boldsymbol{v}\Delta t) \cdot (\Delta a\hat{\boldsymbol{n}})$$

   Pistas:

   - Construye un cilindro oblicuo cuya *tapa* sea la pequeña superficie dada y cuyos lados esten dados por el vector $\boldsymbol{v}\Delta t$, de manera que $\boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \geq 0$.
   - El volumen de dicho cilindro es base por altura, $(\boldsymbol{v}\Delta t) \cdot (\Delta a\hat{\boldsymbol{n}})$.
   - Calcula cuánta carga contiene dicho cilindro.
   - Muestra que toda la carga que contenida en dicho cilindro al tiempo t habría atravesado la tapa al tiempo $t + \Delta t$, formando un nuevo cilindro cuya *base* es la pequeña superficie.

   Notas:

   - El problema así planteado es irrealista. No importa. Abajo lo arreglaremos.
   - Podemos definir in *vector* área $\Delta\boldsymbol{a} = \Delta a\hat{\boldsymbol{n}}$.
   - Podemos definir una *densidad de corriente* $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$.
   - Podemos escribir el resultado arriba como $\Delta Q = \boldsymbol{j} \cdot \hat{\Delta\boldsymbol{a}}\Delta t$.

2. Considera un sistema formado por n_α partículas cargadas por unidad de volumen, cada una con una carga q_α y moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}_\alpha$, donde $\alpha = 1, 2\ldots$ denota el tipo de partícula (por ejemplo, electrones y diversos tipos de iones).

   (a) Muestra que la densidad de carga es $\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha$.

   (b) Muestra que la densidad de corriente es $\boldsymbol{j} = \sum_\alpha n_\alpha q\boldsymbol{v}_\alpha$.

   Pistas:

   - Muestra que un pequeño volumen ΔV contiene una carga $\Delta Q_{\Delta V} = \rho\Delta V$.
   - Muestra que una carga $\Delta Q_{\Delta\boldsymbol{a},\Delta t} = \boldsymbol{j} \cdot \Delta\boldsymbol{a}\Delta t$ atraviesa una pequeña superficie $\Delta\boldsymbol{a}$ en la dirección de su normal en un tiempo Δt.
   - Usa el resultado del problema anterior para cada tipo de cargas.

   Notas:

   - Cuando hay más de un tipo de cargas no es cierto que $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$; cada tipo de cargas contribuye de manera distinta a la densidad de carga y a la densidad de corriente.
   - Puede haber una corriente finita en un medio neutral.
   - Típicamente, los metales son materiales que pueden conducir corriente eléctrica $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{0}$ a pesar de ser neutros $\rho = 0$, i.e., tienen el mismo número de electrones de conducción móviles que de protones inmovilizados en los núcleos.

3. Considera un volumen V cuyas cargas se mueven dando origen a una densidad local de corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$. Demuestra que la carga que sale de dicho volumen durante un pequeño tiempo Δ es

$$\Delta Q_{\text{sale}} = \int_{\partial V} d\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\Delta t,$$

donde ∂V denota la frontera del volumen, donde $d\boldsymbol{a} = da\hat{\boldsymbol{n}}$, da es un elemento de área y $\hat{\boldsymbol{n}}$ es la normal a la superficie que apunta hacia afuera.

Pista:

- Calcula la carga que atraviesa cada elemento de área empleando los resultados de los problemas anteriores.

Notas:

- La densidad de corriente se relaciona a la densidad y movimiento de los portadores de carga como en el problema anterior.
- La densidad de número de los portadores y su velocidad pueden depender de la posición y del tiempo, por lo cual $\boldsymbol{j}$ depende en general de $\boldsymbol{r}$ y de t.
- La frontera ∂V de un volumen V es una superficie cerrada y *orientable*.

4. Muestra que *la ley de conservación de la carga* se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}Q_V(t) + \int_{\partial V} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0,$$

Notas:

- La carga no se crea ni se destruye. La única manera como puede salirse carga del interior de un volumen es atravesando su superficie.
- Se pueden crear y destruir partículas cargadas, pero siempre por pares, acompañadas de la creación o destrucción en el mismo punto y al mismo tiempo de una partícula con la carga opuesta. Se crean y destruyen pares de partículas de carga opuesta.

5. Muestra que la ley de conservación de la carga también se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

Pistas:

- En el problema anterior escribe $Q_V(t)$ en términos de $\rho(\boldsymbol{r}, t)$.
- Usa el teorema de Gauss.
- Demuestra que $\int_V d^3r(\partial\rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j}) = 0$ *para todo volumen* V, y por tanto el integrando es nulo.

Nota:

- Éstas últimas ecuaciones se conocen como *ecuación de continuidad*.

6. Demuestra que en un sistema estacionario
   (a) $\int_{\partial V} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0$ donde ∂V es la frontera de un volumen arbitrario V fijo.
   (b) $\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0$.

Notas:

- Un sistema se llama *estático* cuando nada se mueve.
- Un sistema se llama *estacionario* cuando ninguna cantidad (macroscópica) depende del tiempo.

7. Considera el siguiente modelo simplificado de metal, formado por n iones positivos y n electrones por unidad de volumen. Cada ion tiene carga e y cada electrón carga $-e$. Cada electrón se mueve libremente durante cierto tiempo azaroso Δt hasta que choca. Inmediatamente después del choque los electrones emergen moviendose en una dirección totalmente al azar.

   (a) Demuestra que al aplicar un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ se induce una densidad de corriente $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, donde σ es la *conductividad* dada por

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m},$$

   donde τ es el tiempo promedio transcurrido desde el último choque hasta el momento de observación.

   Pistas:

   - Integra la ecuación de movimiento de un electrón desde que emerge de su choque previo hasta el momento de observación.
   - Promedia el resultado sobre todas las posibles velocidades con las que pudo haber emergido y sobre todos los momentos en los que pudo haber sido el choque.
   - Argumenta por qué el promedio de la velocidad inicial (pasando el choque anterior) es cero, aunque el promedio de la rapidez no.
   - Sustituye la velocidad promedio en las expresiones anteriores para la densidad de corriente.

   Notas:

   - El modelo es malón, pero el resultado es razonablemente bueno y útil.
   - Cada material tiene su propia conductividad. Es de las propiedades que más variaciones muestra entre distintos materiales. Por ejemplo, va desde $5 \times 10^{17} s^{-1}$ para la plata hasta $10^{-15} s^{-1}$ para el teflón.
   - Demuestra que las unidades de la conductividad en el sistema CGS son s^{-1}.

8. Considera un alambre cilíndrico conductor en el cual circula una corriente eléctrica con densidad $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$. Considera dos superficies $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ que cortan el alambre con una normal que apunta a lo largo de la dirección que lleva de 1 a 2 a lo largo del alambre. Define $I_1(t) = \int_{\mathcal{S}_1} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ e $I_2(t) = \int_{\mathcal{S}_s} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ como las corrientes totales que atraviesan las superficies 1 y 2. Demuestra que en el caso estacionario $I_1 = I_2$.

   Pistas:

   - Considera una superficie $\mathcal{S}$ en forma de cilindro, quizás chueco, cuya base sea $\mathcal{S}_1$, cuya tapa sea $\mathcal{S}_2$ y cuyas paredes estén pegadas a las paredes del alambre pero por fuera. Dicha superficie encierra totalmente a un fragmento de alambre.
   - Demuestra que $\int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j} = \int_{\mathcal{S}_2} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j} - \int_{\mathcal{S}_1} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j} = I_2 - I_1$.
   - Usa la ley de conservación de la carga en el caso estacionario.

   Notas:

   - Como $I_1 = I_2$ sin importar en qué parte del alambre hacemos los cortes 2 y 1, en el caso estacionario podemos hablar de una corriente I que es la misma a todo lo largo del alambre.
   - El resultado anterior es válido aunque el alambre cambie de sección transversal a su largo.
   - Por lo tanto, una corriente estacionaria sólo puede circular en un alambre finito que se cierra sobre sí mismo o en un alambre infinitamente largo.

9. Usando la ley de Biot y Savart, calcula la fuerza entre dos alambres conductores $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ delgados rectos paralelos de longitud L y separados una distancia $d \ll L$ en los que circulan corrientes estacionarias I_1 y I_2.

   Pistas:

- Coloca el alambre 1 a lo largo del eje z centrado en el origen.
- Coloca el alambre 2 paralelo al eje z y centrado en el punto $(d, 0, 0)$.
- Calcula el campo magnético producido por el alambre 1 evaluado a lo largo del alambre 2 usando

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{I_1}{c} \int_{\mathcal{A}_1} d\boldsymbol{l}_1 \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3}.$$

- Para simplificar el cálculo anterior *adivina* en qué dirección apuntará el resultado y sólo calcula la componente relevante de $\boldsymbol{B}_1$. Ignora efectos de borde y aproxima el resultado usando $d \ll L$.
- Nota de qué variables depende realmente $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r})$.
- Calcula la fuerza usando

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{I_2}{c} \int_{\mathcal{A}_2} d\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2).$$

- Simplifica este último cálculo.

Notas:

- Nota que el problema está mal planteado. Los conductores no pueden ser de longitud L finita y llevar una corriente estacionaria.
- En la ley de Biot y Savart aparecen integrales sobre trayectorias cerradas,

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{I_2 I_1}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\boldsymbol{l}_2 \times \oint_{\mathcal{C}_1} d\boldsymbol{l}_1 \times \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}.$$

  En este caso se pueden cambiar las integrales por integrales sobre circuitos abiertos, i.e., las partes rectas de los circuitos enfrentadas. ¿Por qué?
- Nota el parecido entre esta ley de Biot y Savart y la ley de Coulomb

$$\boldsymbol{F}_{21} = \int_1 dq_2 \int_2 dq_1 \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}.$$

  En el caso de líneas de carga reemplazaríamos $dq_1 \to \lambda_1 dl_1$ y $dq_2 \to \lambda_2 dl_2$. ¿Cuáles son las diferencias?
- En analogía al caso electrostático, la fuerza resulta proporcional a la longitud L y a las corrientes I_1 e I_2, e inversamente proporcional a la distancia d.
- Si las corrientes son paralelas, la fuerza ¿es atractiva o repulsiva?. Y ¿si las corrientes son antiparalelas?

10. Encuentra las unidades de c a partir de la expresión para $\boldsymbol{F}_{21}$ arriba.

11. Encuentra
    (a) las unidades de $\boldsymbol{B}$ a partir de la ley de Biot-Savart y
    (b) comparalas con las unidades del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$.

12. Demuestra que la ley de Biot y Savart es compatible con la segunda ley de Newton.

    Pistas:

    - Intercambia los índices $1 \leftrightarrow 2$ en la ley de Biot y Savart

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{I_2 I_1}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\boldsymbol{l}_2 \times \oint_{\mathcal{C}_1} d\boldsymbol{l}_1 \times \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}.$$

      para obtener $\boldsymbol{F}_{12}$.

- Suma $\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{12}$ y usa identidades del álgebra y del cálculo vectorial para demostrar que el resultado es cero.

13. Considera una espira circular de radio a que descansa en el plano xy y centrada en el origen, formada por un alambre conductor delgado en el que circula una corriente I. Utilizando la ley de Biot y Savart calcula el campo magnético a lo largo del eje z.

    Pista:

    - Identifica la única componente distinta de cero para simplificar tu cálculo.

    Notas:

    - Nota que el campo es máximo en el origen.
    - Nota que a distancias grandes el campo decae como $1/z^3$, similar al caso de un dipolo eléctrico.

14. Considera dos espiras de radio a como las del problema anterior, ambas llevando una corriente I y separadas una distancia d, descansando en los planos $z=\pm d/2$. Encuentra cuánto debe valer d para que el campo en el origen sea lo más constante posible.

    Pista:

    - Calcula la segunda derivada $\partial^2/\partial z^2 B_z(0,0,z)|_{z=0}$ y encuentra para que valor de d ésta vale cero.

    Notas:

    - Nota que si las espiras están muy separadas (d grande) el campo tendrá dos máximos, uno en cada centro, y un mínimo entre ellas.
    - En cambio, si están casi pegadas, el campo tendrá un máximo en su centro común.
    - En el primer caso la segunda derivada será positiva en el origen.
    - En el segundo caso la segunda derivada será negativa en el origen.
    - Entonces, para algún valor intermedio, la segunda derivada deberá ser cero.
    - Argumenta por qué la primera y la tercera derivada son cero.
    - Por lo tanto, haciendo una expansión de Taylor, el campo es de la forma $B_z(z)=B_z(0)+\text{constante}\times z^4$.
    - Estas espiras se conocen como *bobinas de Helmholtz*.

15. A partir de la ley de Biot y Savart demuestra que la fuerza $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ por unidad de volumen en una región en que circula una corriente descrita por la densidad $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ es

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}).$$

    Pistas:

    - Considera un fragmento muy pequeño de longitud $d\boldsymbol{l}$ y de sección transversal S tomado de un circuito $\mathcal{C}$ conductor delgado. La fuerza total sobre el circuito, de acuerdo a Biot-Savart,

$$\boldsymbol{F}=\frac{I}{c}\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}),$$

      es como una suma de términos de la forma $d\boldsymbol{F}=(I/c)d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$.
    - Pero la corriente I y la densidad de corriente están relacionadas $I=jS$. Luego $d\boldsymbol{F}=(1/c)Sjd\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=(1/c)Sdl\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$.
    - Nota el sutil truco $jd\boldsymbol{l}=dl\boldsymbol{j}$, pues $\boldsymbol{j}$ y $d\boldsymbol{l}$ son paralelos.

- Identificando dlS con un elemento de volumen del conductor llegamos al resultado.

16. Demuestra que la fuerza sobre una carga q situada en $\boldsymbol{r}$ que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{F} = q\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}).$$

Pistas:

- En un problema previo obtuvimos la fuerza por unidad de volumen $f = (1/c)\boldsymbol{j} \times B$,
- y en otro problema anterior vimos que $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$ para un sistema de n partículas por unidad de volumen cada una con carga q.
- Dividiendo f entre n obtenemos la fuerza sobre una partícula.

Notas:

- Esta expresión se conoce como la *Fuerza de Lorentz*.
- Si además hay campo eléctrico, la fuerza total sería $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))$.

17. Una partícula se mueve al tiempo $t = 0$ con velocidad $\boldsymbol{v}$ en presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (a) Describe su movimiento subsecuente.
   (b) Calcula la velocidad angular ω_c de su giro.
   (c) Calcula el radio r_c de su giro.

Pistas:

- Escribe la ecuación de movimiento.
- Separa la ecuación a lo largo de z y las ecuaciones en el plano xy.
- Muestra que v_z es constante.
- Desacopla las ecuaciones en el plano xy sustituyendo una en la derivada de la otra.
- Resuelve la ecuación resultante para v_x.
- Sustituye para obtener v_y.
- Integra el resultado en el tiempo para obtener la trayectoria $\boldsymbol{r}(t)$.
- Identifica el movimiento como una hélice que avanza en z mientras gira en xy.
- Identifica la velocidad angular ω_c.
- Identifica el radio de giro r_c.

Nota:

- ω_c se conoce como *frecuencia de ciclotrón*.

18. Considera una partícula quieta en el origen al tiempo $t = 0$, en presencia de un campo eléctrico $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ y un campo magnético $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{y}}$ uniformes y constantes.
   (a) Obtén y describe el movimiento resultante $\boldsymbol{r}(t)$.
   (b) Muestra que la partícula se mueve en promedio con velocidad constante $\boldsymbol{v}_d = (E/B)c\hat{\boldsymbol{z}}$.

Notas:

- El movimiento es una cicloide, un desplazamiento a velocidad constante sumado a una rotación.
- El resultado anterior sólo vale cuando $B \gg E$, pero esa limitación tiene que ver con la teoría de la relatividad.

19. Una corriente estacionaria se distribuye de acuerdo a una densidad $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$. A partir de la ley de Biot-Savart demuestra que

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.$$

Pistas:

- Para el caso del campo producido por un circuito $\mathcal{C}$, interpreta

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{c}\int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l}' \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

como una suma de términos de la forma

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{c} d\boldsymbol{l}' \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.$$

- Si el alambre en $\boldsymbol{r}'$tiene una sección transversal S', escribe $I = j(\boldsymbol{r}')S$.
- Sustituye

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} S' j(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{l}' \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.$$

- Intercambia el caracter vectorial $j(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{l}' = dl'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$
- e identifica $S'dl' = dV'$ en términos de un elemento de volumen del alambre,

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} d^3r'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.$$

- Finalmente, integra sobre el volumen del alambre. Para corrientes distribuidas sobre un volumen extendido, interpreta este como la unión de muchos *tubos de flujo*, aplica el resultado anterior para cada uno y suma para obtener una integral sobre todo el espacio.

20. Demuestra que podemos escribir

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

donde

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Pistas:

- Reconoce a $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$ en el problema anterior como análogo a un campo Coulombiano.
- Dicho campo se deriva de un potencial Coulombiano $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, i.e., $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 = -\nabla(1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$.
- Saca ∇ de la integral del problema anterior, donde $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ no depende de $\boldsymbol{r}$
- Puedes usar la identidad $\nabla \times f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F} = (\nabla f(\boldsymbol{r})) \times \boldsymbol{F}$ donde f es un campo escalar y $\boldsymbol{F}$ un vector constante.

21. Demuestra la ley de Gauss magnética $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$.

Pista:

- Usa el resultado del problema anterior.

22. Demuestra que para toda superficie cerrada orientable ∂V

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Pistas:

- Usa el resultado del problema anterior
- y el teorema de Gauss.

23. Demuestra que $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$.

    Pistas:

    - Toma la divergencia de la expresión anterior

    $$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

    - Cambia la derivada sobre $\boldsymbol{r}$ por una derivada sobre $\boldsymbol{r}'$ aprovechando que $1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ sólo depende de la diferencia $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$.
    - Integra

    $$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

    por partes.
    - Usa el teorema de Gauss para escribir una parte

    $$-\frac{1}{c} \int_V d^3r' \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

    como una integral de superficie. ¿Sobre qué volumen V y sobre qué superficie ∂V se realiza dicha integral?
    - Argumenta por qué dicha interal es nula.
    - Para la otra parte usa la ecuación de continuidad.

24. Demuestra que

    $$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}).$$

    Pista:

    - Usa la analogía con los resultados de electrostática $\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' \, \rho(\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ y $\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{r})$ y las ecuaciones que cumple cada componente de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

25. Demuestra la *ley de Ampère* diferencial

    $$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

    Pistas:

    - Escribe $\boldsymbol{B}$ en términos de $\boldsymbol{A}$ y toma el rotacional.
    - Usa la identidad $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}$.
    - Sustituye los resultados de los problemas anteriores.

26. Demuestra la forma integral de la ley de Ampère

    $$\int_{\partial \mathcal{A}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{c} I_{\mathcal{A}},$$

    donde $\mathcal{A}$ es una superficie orientable, $\partial \mathcal{A}$ es su frontera, una curva que se recorre en la dirección que dicta la ley de la mano derecha, y

    $$I_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

    es la corriente que atraviesa la superficie $\mathcal{A}$.

    Pista:

- Integra $\nabla \times \boldsymbol{B}$ sobre la superficie $\mathcal{A}$ y usa el teorema de Stokes.

27. Considera un alambre recto delgado infinitamente largo que lleva una corriente I. Encuentra el campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ que produce a su alrededor.

    Pistas:

    - Usa argumentos de simetría para concluir que el campo rodea al alambre de acuerdo a la ley de la mano derecha y su magnitud no depende del ángulo.
    - Usa la ley de Ampère integral en un disco circular de radio r centrado en el alambre y en un plano perpendicular al mismo.
    - Concluye que $2\pi r B_\theta(a) = 4\pi I/c$ y despeja.
    - Concluye que $B_\theta(r) = 2I/rc$.

28. Considera un alambre recto cilíndrico de radio a infinitamente largo que lleva una corriente I uniformemente distribuida en su sección transversal. Encuentra el campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ en todo el espacio.

    Pistas:

    - Sigue los pasos del problema anterior.
    - Si empleas un disco de radio $r > a$ nada cambia.
    - Si empleas un disco de radio $r < a$, la corriente que lo atraviesa es una fracción r^2/a^2 de la corriente I.

29. Considera una bobina circular recta formada por un alambre que se enrrolla uniformemente formando $N \ll 1$ espiras alrededor de un cilindro de radio a y altura $\ell \gg a$. Despreciando efectos de borde, demuestra que el campo en su interior es constante, apunta a lo largo del eje y su tamaño es $B = 4\pi NI/\ell c$. Su dirección está dada por la ley de la mano derecha con el pulgar hacia el campo y los demas dedos girando con la corriente.

    Pistas:

    - Argumenta por simetría, usando la ley de Gauss magnética y la ley de Ampère sobre discos coaxiales que el campo debe ser axial.
    - Integra la ley de Ampère sobre pequeños rectángulos con dos lados paralelos al eje y dos lados radiales.
    - Concluye que el campo axial en el exterior es constante y por condiciones de contorno, nulo.
    - Concluye que el campo axial en el interior es constante.
    - Integrando sobre un rectángulo que tenga un lado dentro y un lado fuera del cilindro, obtén el valor del campo dentro.