

# La lección perdida de Feynman

Luis Mochán

10 de marzo de 2024

## Índice

<b>1. La lección perdida de Feynman</b>	<b>1</b>
1.1. Geometría	2
1.2. Ímpetu angular	5
1.3. Velocidad	6
1.4. Órbita	7
1.5. Código metapost	11
1.5.1. Encabezado	11
1.5.2. Muestra círculo, foco y rayos	11
1.5.3. Muestra rayos rotados	11
1.5.4. Muestra un rayo desde el centro del círculo	12
1.5.5. Quita todo lo demás	12
1.5.6. Segunda ley de Kepler	13
1.5.7. Cambio de velocidad	14
1.5.8. Polígono de velocidades	15
1.5.9. Polígono rotado	15
1.5.10. Polígono rotado y desrotado	16
1.5.11. Final	16

## 1. La lección perdida de Feynman

Parafraseo de la lección perdida de Feynman (Feynman's lost lecture) y de la presentación de la misma en 3B1B.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La lección perdida de Feynman © 2024 by Luis Mochán está licenciada mediante CC BY-SA 4.0.

### 1.1. Geometría

Considere un círculo. Considere un punto excéntrico. Trace líneas desde dicho punto al círculo (fig. 1)

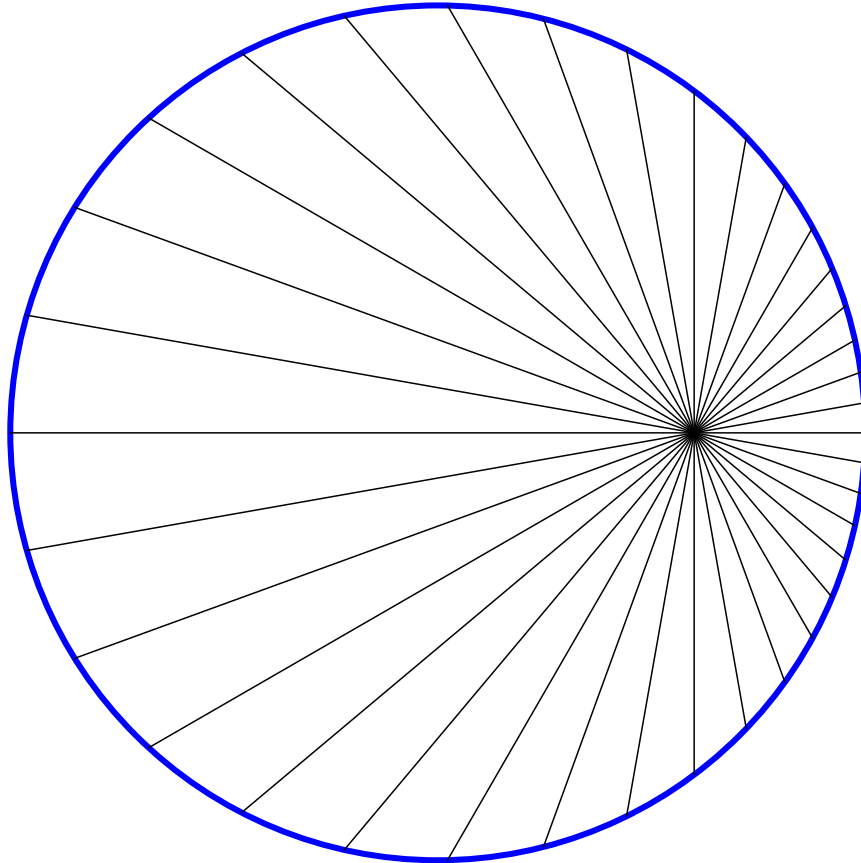


Figura 1: Círculo y líneas desde un punto excéntrico.

Ahora rote todas estas líneas un ángulo recto alrededor de su punto medio (fig. 2).

La envolvente de estas líneas forma una figura que resulta ser una elipse. Para demostrarlo, consideremos una línea que vaya del centro del círculo a un punto en su periferia (fig. 3).

Limpiamos la imagen removiendo todas las líneas que *sobran* y rotulando los puntos relevantes (fig. 4).

Aquí,  $S$  es el punto excéntrico elegido,  $P$  es un punto cualquiera sobre el círculo centrado en  $S'$  y de radio  $r$ ,  $UV$  es la mediatriz del segmento  $SP$ , i.e.,

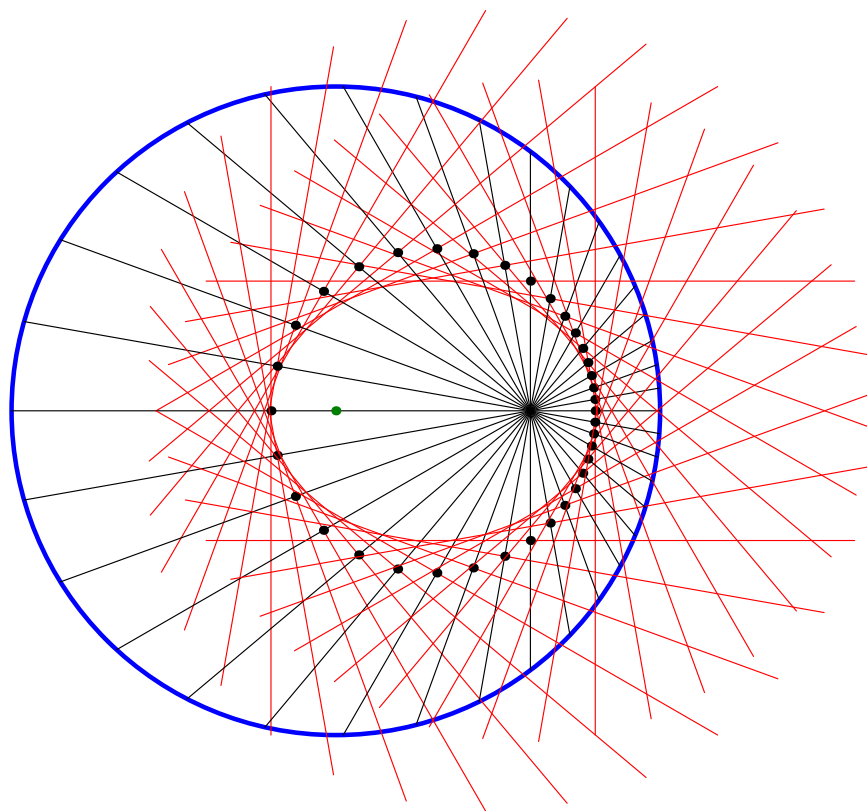


Figura 2: Líneas de la fig. 1 rotadas un ángulo recto alrededor de su punto medio

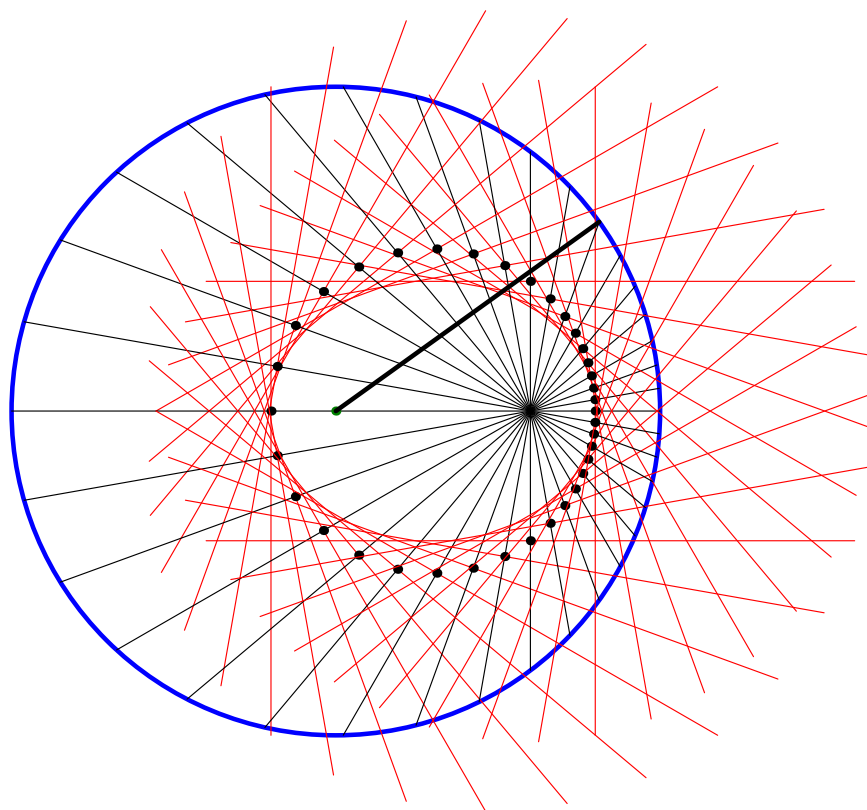


Figura 3: Figura 2 con una línea adicional desde el centro.

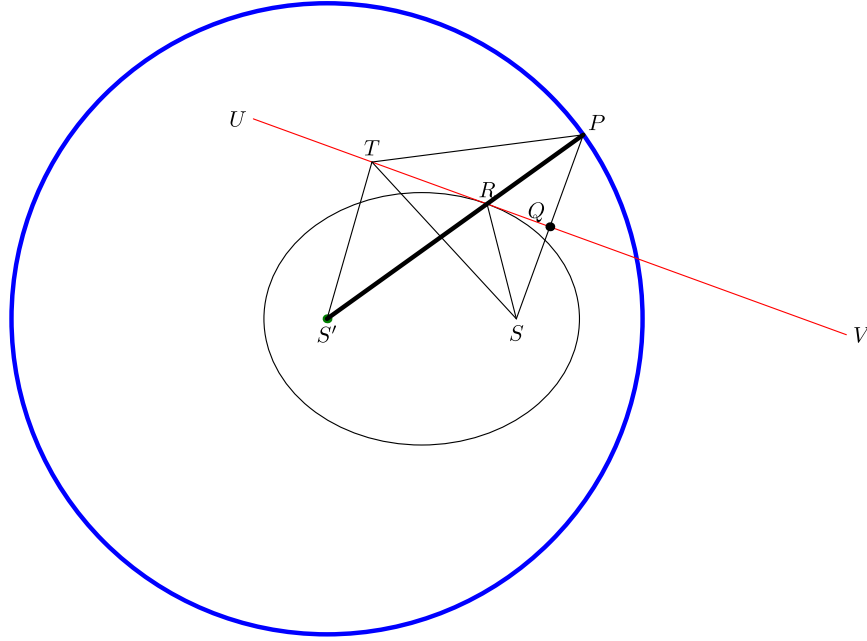


Figura 4: Algunas líneas de la fig. f:radio.

ortogonal y que pasa por su punto medio  $Q$ ,  $R$  es la intersección del segmento  $S'P$  con la línea  $UV$  y  $T$  es un punto cualquiera sobre dicha línea. Como  $UV$  es ortogonal a  $PS$ , entonces  $RS = RP$ . Luego,  $S'R + RS = S'R + RP$  y como  $S'$ ,  $R$  y  $P$  están sobre una línea recta,  $S'R + RS = S'P = r$ , el radio del círculo, constante, independiente del punto  $P$  que hayamos elegido. Esto implica que el lugar geométrico de todos los puntos  $R$  obtenidos de esta manera (para todos los posibles puntos  $P$  sobre el círculo) forman una elipse con focos en  $S$  y  $S'$ . Por otro lado  $ST + SP = ST + TS > r$  para cualquier punto  $T$  sobre la recta que difiera de  $R$ , y por lo tanto, son puntos fuera de la elipse. Esto muestra que la envolvente de todas las líneas  $UV$  construidas de esta manera forman una elipse con focos en  $S'$  y  $S$  y con semieje mayor  $r/2$ .

## 1.2. Ímpetu angular

Considere ahora un cuerpo de masa  $m$  moviéndose de acuerdo a la ley de gravitación universal  $\mathbf{F} = GMm\hat{\mathbf{r}}/r^2$ , con  $G$  la constante de gravitación universal,  $M$  la masa del cuerpo central (el Sol) y  $\mathbf{r}$  la posición de la partícula. Como la fuerza es *central*, el movimiento es tal que se cumple la conservación

del ímpetu angular,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , i.e.,  $\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ . El primer término es cero pues la velocidad  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  es paralela al ímpetu  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . El segundo término es cero pues la fuerza  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  es *central*, i.e., paralela a  $\mathbf{r}$ . Luego,  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  y  $\mathbf{L}$  es constante. Una interpretación geométrica es la *segunda ley de Kepler*, que establece que áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales,  $dA/dt$  es constante. El área barrida en un tiempo  $\Delta t$  pequeño es  $\Delta A = rh/2 = (r\Delta r \sin \phi)/2 = \|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|\Delta t/2$  (fig. 5) y es proporcional a  $\Delta t$  pues  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  es constante. Por otro lado,  $h \approx r\Delta\theta$ , por lo cual  $\Delta A \approx r^2\Delta\theta/2$ .

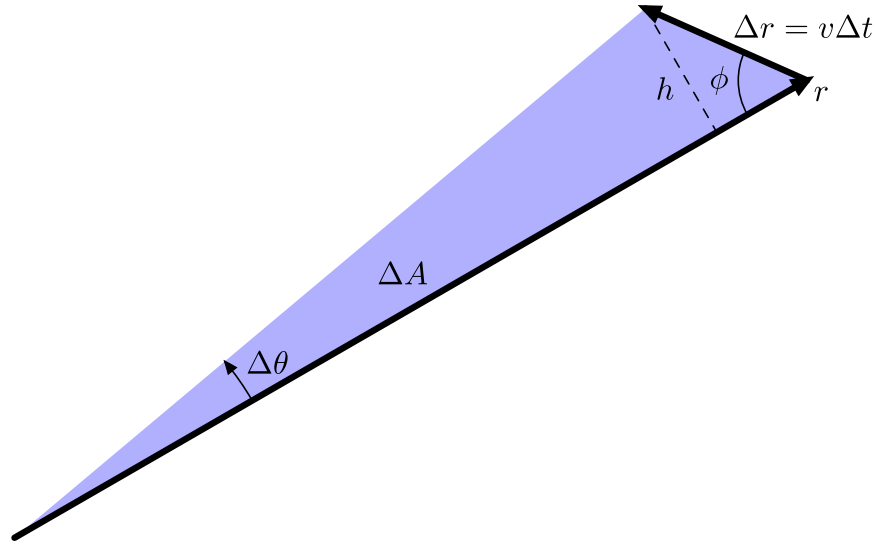


Figura 5: Área barrida por el vector  $\mathbf{r}$  en un tiempo  $\Delta t$ .

### 1.3. Velocidad

Consideremos ahora la velocidad (fig. 6).

Durante el tiempo  $\Delta t$  en que la posición cambia por un ángulo  $\Delta\theta$  el área barrida es  $\Delta A = r(t)^2\Delta\theta \propto \Delta t$ . Durante dicho tiempo la velocidad cambia por  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$  donde  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = -GM\hat{\mathbf{r}}/r^2$  es la *aceleración de la gravedad*. La dirección de  $\Delta\mathbf{v}$  es opuesta a la dirección de  $\mathbf{r}$ , mientras que su tamaño es  $\|\Delta\mathbf{v}\| \propto \Delta t/r^2 \propto \Delta\theta$ . Por lo tanto, la punta del vector velocidad forma un polígono (fig. f:poli).

Como todas las  $\Delta\mathbf{v}$  son del mismo tamaño y están todas rotadas por el mismo ángulo una detrás de otra, poniendo una detrás de otra formamos un círculo en el límite de  $\Delta\theta$ 's pequeñas. Como la punta del vector velocidad

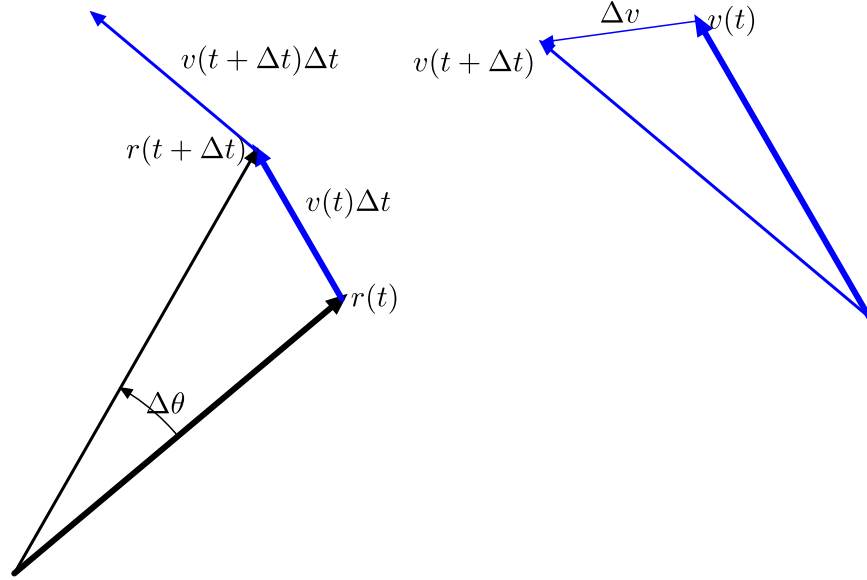


Figura 6: Cambio de velocidad  $\Delta v$  cuando la posición cambia por un ángulo  $\Delta\theta$ .

$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v(t)$ , las puntas de los vectores velocidad describen un círculo conforme transcurre el tiempo.

#### 1.4. Órbita

Notamos que los vectores  $\Delta v$  son antiparalelos a los vectores de posición  $r$ . Por lo tanto, si roto el diagrama 7 un ángulo recto en la dirección de las manecillas del reloj (fig. 8) y luego rotamos todos los vectores  $\Delta v$  alrededor de su base, apuntarían al centro del círculo. Si además rotamos cada vector velocidad  $v$  alrededor de su centro, su envolvente formaría una elipse (fig. f:rotrot).

En esta figura, las flechas azules coinciden con las de  $\Delta v$ , que son opuestas a la dirección del vector de posición  $r$ . Las flechas negras tienen la dirección de la velocidad y debe ser por tanto tangente a la trayectoria del cuerpo. Vemos en la figura que para cada dirección, la velocidad es tangencial a la elipse que hemos construido, demostrando así que el movimiento de cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional de un cuerpo central, la cual decae como  $1/r^2$ , tiene la forma de una elipse.

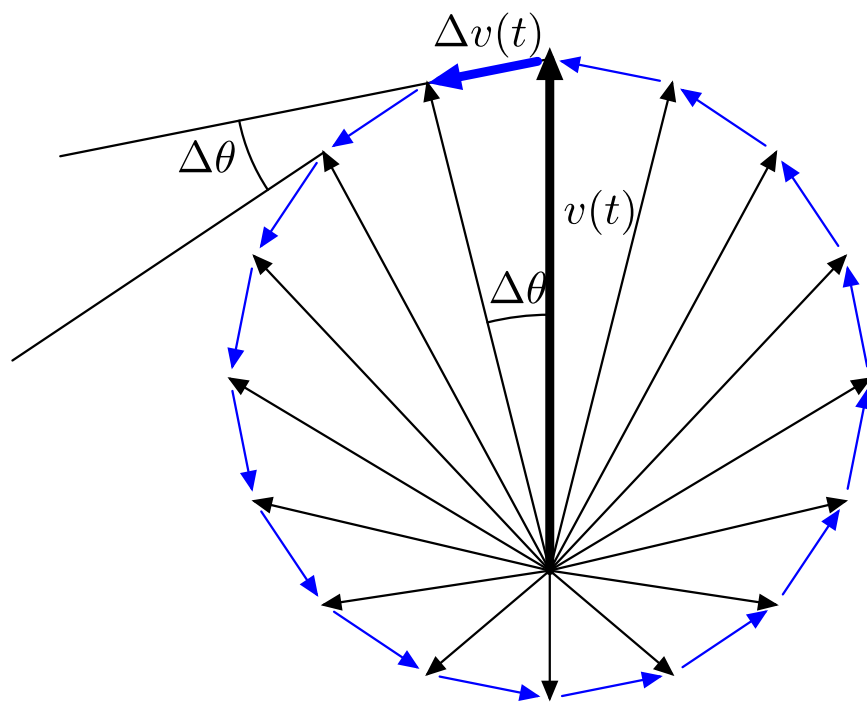


Figura 7: Conforme cambia la direcci3n de un cuerpo respecto al sol por un 3ngulo  $\Delta\theta$ , los cambios en la velocidad conservando su tama1o  $\Delta v \propto \Delta\theta$



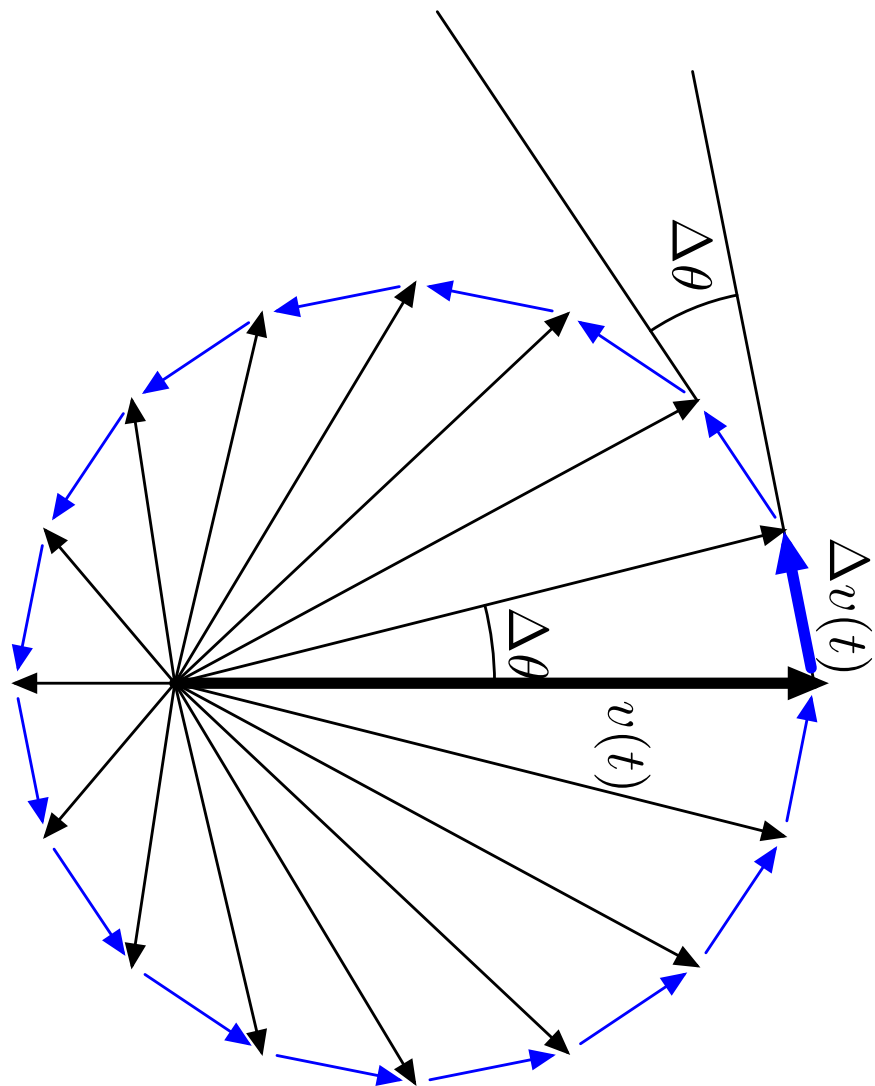


Figura 8: Figura 7 rotada 90 grados en la dirección de las manecillas del reloj (con todo y letreros).

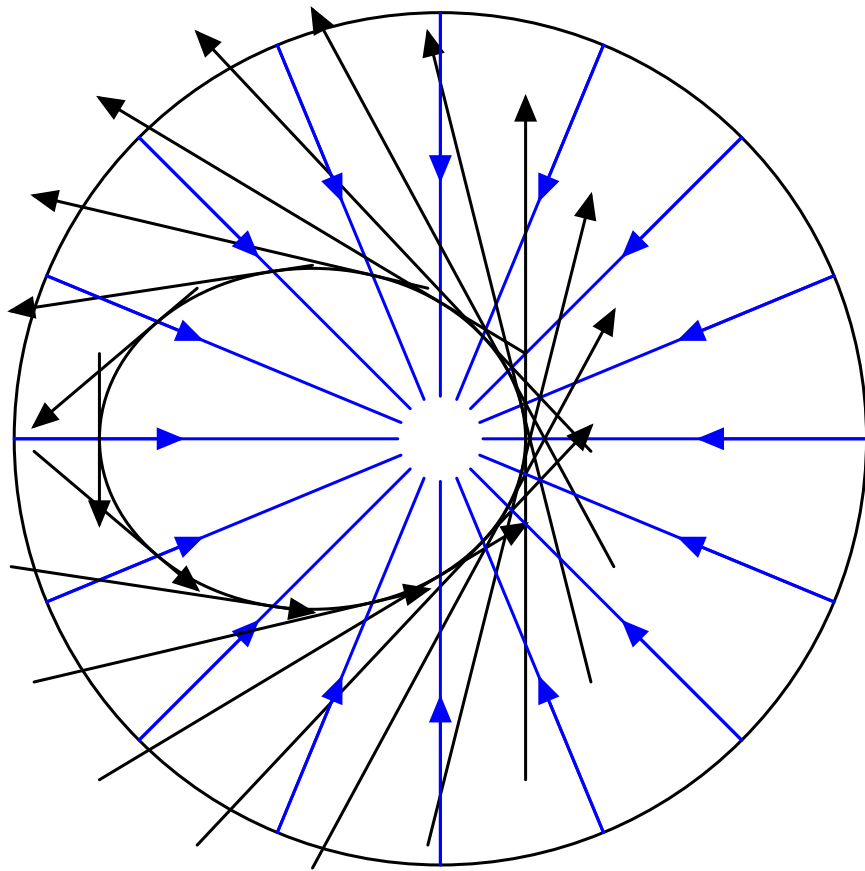


Figura 9: Figura 8 con cada vector velocidad rotado de regreso alrededor de su centro.

## 1.5. Código metapost

### 1.5.1. Encabezado

```
g_use_svg = 1; %0 for postscript, 1 for svg
prologues:=3;
u=1cm;
outputtemplate := "%j-%c.eps";
if g_use_svg > 0:
    outputtemplate := "%j-%c.svg";
    outputformat := "svg";
fi
```

### 1.5.2. Muestra círculo, foco y rayos

Rotando 90 grados las líneas que llevan de puntos de un círculo al borde se genera una elipse. Lo hago gradualmente:

```
pair focus;
focus=(3u,0);
beginfig(1)
    save p;
    path p[];
    p0=fullcircle scaled (2*5u) shifted -focus;
    draw p0 withpen pencircle scaled 2pt withcolor blue;
    for i=0 upto 35:
        draw (0,0)--((0,0)--10u*dir(i/36*360)) intersectionpoint p0;
    endfor
endfig;
```

### 1.5.3. Muestra rayos rotados

```
beginfig(2)
    save p;
    path p[];
    pair r[];
    p0=fullcircle scaled (2*5u) shifted -focus;
    draw p0 withpen pencircle scaled 2pt withcolor blue;
    for i=0 upto 35:
        r0:=((0,0)--10u*dir(i/36*360)) intersectionpoint p0;
        p1:=(0,0)--r0;
        p2:=(-unitvector(r0)--unitvector(r0))scaled 5u rotated 90 shifted (.5r0);
```

```

        draw p1;
        draw p2 withcolor red;
        draw p1 intersectionpoint p2 withpen pencircle scaled 4pt;
    endfor
    draw -focus withcolor .5green withpen pencircle scaled 4pt;
endfig;

```

#### 1.5.4. Muestra un rayo desde el centro del círculo

```

beginfig(3)
    save p;
    path p[];
    pair r[];
    p0=fullcircle scaled (2*5u) shifted -focus;
    draw p0 withpen pencircle scaled 2pt withcolor blue;
    for i=0 upto 35:
        r0:=((0,0)--10u*dir(i/36*360)) intersectionpoint p0;
        p1:=(0,0)--r0;
        p2:=(-unitvector(r0)--unitvector(r0))scaled 5u rotated 90 shifted (.5r0);
        draw p1;
        draw p2 withcolor red;
        draw p1 intersectionpoint p2 withpen pencircle scaled 4pt;
    endfor
    draw -focus withcolor .5green withpen pencircle scaled 4pt;
    draw -focus--((0,0)--10u*dir(7/36*360)) intersectionpoint p0
        withcolor -5green withpen pencircle scaled 2pt;
endfig;

```

#### 1.5.5. Quita todo lo demás

```

beginfig(4)
    save p;
    path p[];
    pair r[];
    p0=fullcircle scaled (2*5u) shifted -focus;
    draw p0 withpen pencircle scaled 2pt withcolor blue;
    p3:=fullcircle xscaled 5u yscaled (sqrt(5**2-(xpart(focus)/u)**2)*u) shifted -.5focus;
    draw p3;
    r0:=((0,0)--10u*dir(7/36*360)) intersectionpoint p0;
    p1=(0,0)--r0;

```

```

p2=(-unitvector(r0)--unitvector(r0))scaled 5u rotated 90 shifted (.5r0);
draw p1;
draw p2 withcolor red;
z0=p1 intersectionpoint p2;
draw z0 withpen pencircle scaled 4pt;
draw -focus withcolor .5green withpen pencircle scaled 4pt;
draw -focus--((0,0)--10u*dir(7/36*360)) intersectionpoint p0
    withcolor -5green withpen pencircle scaled 2pt;
label.bot(btex  $S$  etex, (0,0));
label.bot(btex  $S'$  etex, -focus);
label.urt(btex  $P$  etex, r0);
label.ulft(btex  $Q$  etex, z0);
z1=(-focus--r0) intersectionpoint p3;
label.top(btex  $R$  etex, z1);
z2=point .8 of p2;
draw -focus--z2;
draw z2--r0;
label.top(btex  $T$  etex, z2);
draw z1--(0,0);
draw z2--(0,0);
label.lft(btex  $U$  etex, point 1 of p2);
label.rt(btex  $V$  etex, point 0 of p2);
endfig;

```

### 1.5.6. Segunda ley de Kepler

```

beginfig(5)
    save p;
    path p[];
    z0=(0,0);
    z1=10u*right rotated 30;
    z2=9u*right rotated 40;
    z3=((z0--10u*right) rotated -60 shifted z2) intersectionpoint (z0--z1);
    fill z0--z1--z2--cycle withcolor .3blue+.7white;
    draw z2--z3 dashed evenly;
    drawarrow z0--z1 withpen pencircle scaled 2pt;
    drawarrow z1--z2 withpen pencircle scaled 2pt;
    p1=reverse(fullcircle scaled 1.5u shifted z1 cutbefore (z1--z2) cutafter (z0--z1));
    draw p1;
    label.lrt(btex  $r$  etex, z1);

```

```

label.urc(btex  $\Delta r=v\Delta t$  etex, .5[z1,z2]);
label.llft(btex  $h$  etex, .5[z2,z3]);
p0= fullcircle scaled 6u cutbefore (z0--z1) cutafter (z0--z2);
drawarrow p0;
label.urc(btex  $\Delta\theta$  etex, point .5 of p0);
label.urc(btex  $\Delta A$  etex, .5[z1,z2] scaled .5);
label.lft(btex  $\phi$  etex, point 1 of p1);
endfig;

```

### 1.5.7. Cambio de velocidad

```

beginfig(6)
  save p;
  path p[];
  z0=(0,0); %origen
  z1=5u*right rotated 40; %posición
  z2=2u*right rotated (40+80); %velocidad
  z3=z2 shifted z1; % nueva posición
  z4=2.5u*right rotated(40+80+20); %nueva velocidad
  drawarrow z0--z1 withpen pencircle scaled 2pt; %posición
  drawarrow (z0--z2) shifted z1 withcolor blue withpen pencircle scaled 2pt; %velocidad
  drawarrow z0--z3 withpen pencircle scaled 1pt; % nueva posición
  drawarrow (z0--z4) shifted z3 withcolor blue withpen pencircle scaled 1pt; %nueva velocidad
  p1=fullcircle scaled 5u cutbefore (z0--z1) cutafter (z0--z3);
  drawarrow p1;
  z5=(10u,3u);
  drawarrow (z0--z2) scaled 2 shifted z5 withcolor blue withpen pencircle scaled 2pt; %
  drawarrow (z0--z4) scaled 2 shifted z5 withcolor blue withpen pencircle scaled 1pt; %
  drawarrow (z2--z4) scaled 2 shifted z5 withcolor blue; %diferencia
  label.rt(btex  $r(t)$  etex, z1);
  label.lft(btex  $r(t+\Delta t)$  etex, z3);
  label.urc(btex  $v(t)\Delta t$  etex, .5z2 shifted z1);
  label.urc(btex  $v(t+\Delta t)\Delta t$  etex, .5z4 shifted z3);
  label.top(btex  $\Delta\theta$  etex, point 1 of p1);
  label.rt(btex  $v(t)$  etex, z2 scaled 2 shifted z5);
  label.llft(btex  $v(t+\Delta t)$  etex, z4 scaled 2 shifted z5);
  label.top(btex  $\Delta v$  etex, .5[z2,z4] scaled 2 shifted z5);
endfig;

```

### 1.5.8. Polígono de velocidades

```

picture figsiete;
beginfig(7)
  save p, r, N;
  path p[];
  pair r[];
  p0=fullcircle scaled 5u;
  z0=(0,-1.5u);
  N=16;
  for i=0 upto N-1:
    drawarrow z0--point i*8/N of p0;
    drawarrow subpath(.1,.9) of (point i*8/N of p0--point (i+1)*8/N of p0)
      withcolor blue;
  endfor
  drawarrow z0--point 2 of p0 withpen pencircle scaled 2pt;
  z1=point 2 of p0;
  z2=point (N/4+1)*8/N of p0;
  z3=point (N/4+2)*8/N of p0;
  z4=(z2-z1) scaled 4 shifted z1;
  z5=(z3-z2) scaled 3 shifted z3;
  draw z1..z4;
  draw z3..z5;
  drawarrow subpath(.1,.9) of (z1--z2) withpen pencircle scaled 2pt withcolor blue;
  label.rt(btex  $v(t)$  etex, .7[z0,point 2 of p0]);
  label.top(btex  $\Delta v(t)$  etex, .5[point 2 of p0, point (N/4+1)*8/N of p0]);
  p1=fullcircle scaled 4u shifted z0 cutbefore (z0--z1)
    cutafter (z0--z2); draw p1;
  p2=fullcircle scaled 3u shifted z2 cutbefore (z2--z4)
    cutafter (z2--z5);
  draw p2;
  label.top(btex  $\Delta\theta$  etex, point .5 of p1);
  label.lft(btex  $\Delta\theta$  etex, point .5 of p2);
  figsiete=currentpicture;
endfig;

```

### 1.5.9. Polígono rotado

```

beginfig(8)
  currentpicture:=figsiete rotated -90;

```

```
endfig;
```

#### 1.5.10. Polígono rotado y desrotado

```
beginfig(9)
  save p, r, d;
  path p[];
  pair r[];
  p0=fullcircle scaled 5u;
  draw p0;
  z0=(-1.5u,0);
  N=16;
  d=abs(point 1*8/N of p0-point 0 of p0);
  for i=0 upto N-1:
    r0:=point i*8/N of p0 rotated -90;
    drawarrow (z0--r0) shifted -.5[z0,r0] rotated 90 shifted .5[z0,r0];
    draw subpath(0,.9) of (point i*8/N of p0--(0,0)) withcolor blue;
    drawarrow r0-- -d*unitvector(r0) shifted r0
      withcolor blue;
  endfor
  draw fullcircle xscaled 2.5u yscaled (sqrt(2.5**2-(xpart z0/u)**2)*u) shifted .5z0;
endfig;
```

#### 1.5.11. Final

```
end.
```

```
mpost feynman
```