

Esparcimiento de Mie en 2D

Luis Mochán

October 7, 2021

Consideremos un cilindro circular de radio R hecho de algún material con respuesta dieléctrica ϵ sobre el que incide una onda plana monocromática de frecuencia ω . Orientemos el eje z a lo largo del eje del cilindro y el eje x a lo largo de la dirección de propagación, como en la figura 1.

1 Caso transversal magnético (TM)

1.1 Campo incidente

Consideremos primero el caso en que el campo magnético de la onda incidente \mathbf{H}_i apunta en la dirección z . Por simetría, el campo magnético de todas las ondas esparcidas también apuntaría en la dirección z . El campo eléctrico estaría en el plano xy . El campo incidente puede escribirse como

$$\mathbf{H}_i = H_{i0} \hat{\mathbf{z}} e^{i(qx - \omega t)}, \quad (1)$$

donde $q = \omega/c$ y c es la velocidad de la luz. Normalizamos la amplitud del campo incidente, $H_{i0} = 1$, ignoramos la dependencia temporal de los campos, pues todos tienen la exponencial $e^{-i\omega t}$, la cual puede cancelarse, y expresamos $e^{iqx} = e^{iqr \cos \theta}$ en términos de funciones de Bessel y eigenfunciones del ímpetu angular \hat{L}_z

$$e^{iqx} = \sum_l i^l J_l(qr) e^{il\theta}, \quad (2)$$

donde r y θ son las coordenadas polares radial y angular, l es el eigenvalor del ímpetu angular y J_l son las funciones de Bessel del primer tipo.

1.2 Campo en el exterior

En el vacío la componente z del campo magnético obedece la ecuación de onda, que para ondas monocromáticas se convierte en la ecuación de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + q^2)H = 0. \quad (3)$$

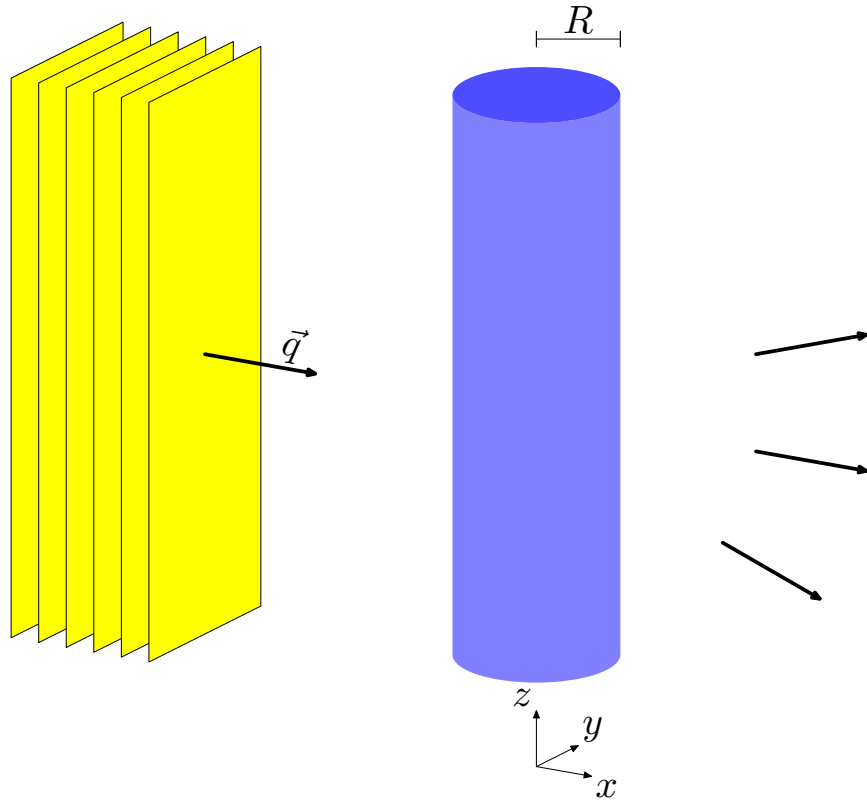


Figure 1: Sistema consistente en un cilindro de radio R sobre el que incide una onda plana con vector de onda \mathbf{q} propagándose en la dirección x , y produciendo ondas esparcidas.

En coordenadas cilíndricas, el laplaciano puede escribirse como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (4)$$

y la ecuación de Helmholtz se puede resolver por separación de variables $H(r, \theta) = f(r)g(\theta)$. La solución de la parte angular con condiciones periódicas $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ es de la forma $g(\theta) = e^{il\theta}$ con l entero, y la ecuación correspondiente para la parte radial es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} f(r) - \frac{l^2}{r^2} f(r) + q^2 f(r) = 0, \quad (5)$$

que se puede reescribir como

$$\chi^2 f''(\chi) + \chi f'(\chi) + (\chi^2 - l^2) f(\chi) = 0, \quad (6)$$

donde hicimos el cambio de variable $\chi \equiv qr$ y donde f'' y f' denotan las derivadas de f respecto a su argumento. Identificamos esta como la ecuación de Bessel y sus soluciones son alguna combinación de ondas de Bessel correspondientes al momento angular l . Como era de esperarse, cada uno de los sumandos en la expansión (2) satisface la ec. de onda. El campo producido por el cilindro debe consistir de ondas salientes en el límite $r \rightarrow \infty$, y por tanto el campo total en el vacío debe ser de la forma

$$H(r, \theta) = \sum_l i^l (J_l(qr) + a_l H_l^{(1)}(qr)) e^{il\theta}, \quad r > R \quad (7)$$

donde $H_l^{(1)}(qr)$ son las funciones de Hankel salientes y a_l son coeficientes a determinar.

1.3 Campo en el interior

En el interior del cilindro también se cumple una ecuación de onda análoga a la ec. (3) pero sustituyendo q por el número de onda k dentro del material, donde

$$k^2 = \epsilon q^2. \quad (8)$$

La solución en el interior debe ser regular en el origen, y por lo tanto puede escribirse como

$$H(r, \theta) = \sum_l i^l b_l J_l(kr) e^{il\theta}, \quad r < R \quad (9)$$

donde b_l son coeficientes a determinar.

1.4 Condiciones de frontera

Para obtener los coeficientes a_l y b_l recurrimos a las condiciones de frontera en la superficie $r = R$. El campo magnético es tangencial a la superficie del cilindro y por tanto debe ser continuo, con el mismo valor en R^+ que en R^- . Por tanto

$$\sum_l i^l (J_l(qR) + a_l H_l^{(1)}(qR)) e^{il\theta} = \sum_l i^l b_l J_l(kR) e^{il\theta}. \quad (10)$$

Como las funciones trigonométricas $e^{il\theta}$ forman una base ortogonal del espacio de funciones angulares y son linealmente independientes, podemos eliminarlas junto con la suma en la ec. (10) y simplificar la condición de frontera escribiéndola como

$$(J_l(qR) + a_l H_l^{(1)}(qR)) = b_l J_l(kR). \quad (11)$$

Empleando la ec. de Ampère-Maxwell podemos hallar el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} a partir del campo magnético \mathbf{H} . La componente tangencial del desplazamiento es entonces

$$D_\theta = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r} H. \quad (12)$$

Como la componente tangencial del campo eléctrico es continua en R , y $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ en el exterior y $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$ en el interior del material, entonces

$$\epsilon q (J'_l(qR) + a_l (H^{(1)})'_l(qR)) = k b_l J'_l(kR). \quad (13)$$

1.5 Esparcimiento

Podemos eliminar b_l de las ecuaciones (11) y (13) para obtener finalmente los coeficientes de esparcimiento a_l

$$a_l = - \frac{\epsilon q J'_l(qR) J_l(kR) - k J_l(qR) J'_l(kR)}{\epsilon q (H^{(1)})'_l(qR) J_l(kR) - k H_l^{(1)}(qR) J'_l(kR)} \quad (14)$$

2 Caso transversal eléctrico (TE)

En este caso el campo eléctrico apunta en la dirección z y en analogía con el caso TM, escribimos

$$E(r, \theta) = \sum_l i^l (J_l(qr) + a_l H_l^{(1)}(qr)) e^{il\theta}, \quad r > R \quad (15)$$

$$E(r, \theta) = \sum_l i^l b_l J_l(kr) e^{il\theta}, \quad r < R \quad (16)$$

en analogía a las ecs. (7) y (9). El magnético paralelo puede obtenerse de la ley de Faraday, por lo que

$$B_\theta = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r} E. \quad (17)$$

Tanto E como B_θ son continuos en R , lo cual lleva a las condiciones de contorno

$$(J_l(qR) + a_l H_l^{(1)}(qR)) = b_l J_l(kR). \quad (18)$$

y

$$q(J_l'(qR) + a_l (H_l^{(1)})'_l(qR)) = k b_l J_l'(kR). \quad (19)$$

Resolviendo, podemos obtener las amplitudes de dispersión

$$a_l = - \frac{q J_l'(qR) J_l(kR) - k J_l(qR) J_l'(kR)}{q (H_l^{(1)})'_l(qR) J_l(kR) - k H_l^{(1)}(qR) J_l'(kR)} \quad (20)$$

3 Secciones transversales

Para distancias grandes, las funciones de Bessel pueden aproximarse por

$$H_l^{(1)}(qr) = \sqrt{\frac{2}{\pi qr}} e^{i(qr - (l+1/2)\pi/2)}, \quad (21)$$

Por lo tanto, el flujo de energía esparcida es

$$S = \frac{c}{4\pi^2 qr} \text{Re} \sum_{l,l'} a_l a_{l'}^* e^{i(l-l')\theta} e^{-i(l-l')\pi/2} \quad (22)$$

Multiplicando por r obtenemos la potencia esparcida por unidad de longitud (axial) y por unidad de ángulo, y dividiendo entre la intensidad incidente

$$I_i = \frac{c}{8\pi}, \quad (23)$$

obtenemos la sección diferencial de esparcimiento

$$\frac{d\sigma_{\text{es}}}{d\theta} = \frac{2}{\pi q} \text{Re} \sum_{l,l'} a_l a_{l'}^* e^{i(l-l')\theta} \quad (24)$$

Como el problema es 1D esta *sección* tiene unidades de longitud, no de área. Integrando sobre el ángulo obtenemos la sección total de esparcimiento.

$$\sigma_{\text{es}} = \frac{4}{q} \sum_l |a_l|^2. \quad (25)$$

En la direcci3n frontal hay interferencia entre el campo incidente y el campo esparcido. Escribimos el campo total F

$$F(\mathbf{r}) = e^{iqx} + \frac{f(\theta)e^{iqr}}{\sqrt{r}}, \quad (26)$$

donde identificamos a F con el campo magn3tico para el caso TM y con el campo el3ctrico para el caso TE, donde

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \sum_l i^l a_l e^{il\theta} e^{-i(l+1/2)\pi/2} = \sqrt{\frac{2}{i\pi q}} \sum_l a_l e^{il\theta} \quad (27)$$

Para 3ngulos peque1os hacemos las aproximaciones

$$f(\theta) \approx f(0) = \sqrt{\frac{2}{i\pi q}} \sum_l a_l, \quad (28)$$

$e^{iqr} \approx e^{iqx} e^{iqy^2/2x}$. Si colocamos un detector en la direcci3n frontal, la potencia por unidad de longitud que recibir3a ser3a

$$P = \frac{1}{8\pi} \left(\ell + 2\text{Re} \frac{f(0)}{\sqrt{x}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dy e^{iqy^2/2x} \right) + \dots \quad (29)$$

donde ℓ es la apertura del detector y el t3rmino que despreciamos es del orden de $1/\sqrt{qr}$ veces menor que el que conservamos. Suponiendo que el detector cubre un 3ngulo peque1o, $\ell \ll x$, pero que es tan ancho que $e^{iqy^2/x}$ tiene muchas oscilaciones, en su interior, i.e. $\ell l^2 \gg \lambda x$, entonces

$$P = \frac{c}{8\pi} \left(\ell + 2\text{Re} f(0) \sqrt{\frac{2\pi i}{q}} \right), \quad (30)$$

donde usamos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta^2} = \sqrt{i\pi}, \quad (31)$$

como se puede verificar en el ap3ndice 9. El primer t3rmino en la ec. (30) es la potencia que llegar3a al detector de no haber part3culo. Por lo tanto, el cociente del segundo al primero puede identificarse en t3rminos de la fracci3n de energ3a que no llega al detector debido a la presencia de la part3cula, i.e., a la secci3n transversal de extinci3n,

$$\sigma_{\text{ex}} = -2\text{Re} f(0) \sqrt{\frac{2\pi i}{q}} = -\frac{4}{q} \text{Re} \sum_l a_l. \quad (32)$$

La secci3n transversal de absorpci3n est3 dada por la diferencia

$$\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{ex}} - \sigma_{\text{es}}. \quad (33)$$

4 Campo superficial.

Para evaluar el campo dentro del cilindro debemos obtener los coeficientes b_l . Empleando las ecs. (11) o (18) obtenemos para ambas polarizaciones

$$b_l = \frac{J_l(qR) + a_l H_l^{(1)}(qR)}{J_l(kR)}. \quad (34)$$

El campo eléctrico tangencial superficial puede evaluarse a partir de las ecs. (12) para polarización TM y de (16) para polarización TE usando condiciones de continuidad. Podemos obtener una medida de su magnitud promediando su cuadrado sobre la superficie,

$$\langle E_\theta^2 \rangle = \left| \frac{k}{\epsilon} \right|^2 \sum_l |b_l J'_l(kR)|^2, \quad \text{TM} \quad (35)$$

$$\langle E^2 \rangle = \sum_l |b_l J_l(kR)|^2. \quad \text{TE} \quad (36)$$

5 Límite no retardado

En el caso no retardado $qR \ll 1$ puedo obtener resultados aproximados tomando los valores asintóticos de las funciones de Bessel,

$$\begin{aligned} J_l(\zeta) &\approx \frac{\zeta^l}{2^l l!} \\ N_0(\zeta) &\approx \frac{2}{\pi} \log \zeta \\ N_l(\zeta) &\approx -\frac{(l-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\zeta} \right)^l, \quad l > 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Sustituyendo en la ec. (14) obtenemos para $l > 1$

$$a_l = i\pi(qR)^{2l} \frac{l}{(2^l l!)^2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (38)$$

Multiplicando por la función de Hankel correspondiente, obtenemos el campo magnético inducido en el exterior, dado por

$$H^{\text{ind}}(r) = \sum_l (iq)^l \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{1}{2^l l!} \frac{R^{2l}}{r^l} e^{il\theta} \approx iq \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} R^2 \frac{x}{r^2}, \quad (39)$$

dominado por las contribuciones $l = \pm 1$. Aquí he ignorado el término con $l=0$ pues no contribuye al campo eléctrico. El campo eléctrico inducido puede obtenerse de la ec. de Ampère-Faraday

$$\mathbf{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{iq} \nabla \times \mathbf{H}^{\text{ind}} = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} R^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^2} \right). \quad (40)$$

Notamos que $x/r^2 = \partial \log r \partial x$ y que $\partial^2 \partial x^2 \log r = -\partial^2 \partial y^2 \log r$, pues $\log r$ obedece la ec. de Laplace, por lo que podemos reescribir la ec. (40) como

$$\mathbf{E}^{\text{ind}} = -2\mathbf{p} \cdot \nabla \nabla \log r, \quad (41)$$

donde identificamos el dipolo inducido por unidad de longitud

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}^{ex}, \quad (42)$$

donde el campo eléctrico externo tiene la misma magnitud que el campo magnético externo (que hemos normalizado a 1) y apunta en la dirección y , y donde identificamos la polarizabilidad por unidad de longitud

$$\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{R^2}{2}. \quad (43)$$

Este es un resultado bien conocido que puede obtenerse mediante un desarrollo multipolar cuasiestático.

6 Código

Empiezo el código cargando los paquetes y las opciones usuales.

```
#Calcula los coeficientes de esparcimiento de un cilindro dieléctrico.
use v5.12;
use warnings;
use List::Util;
use Getopt::Long;
use IO::Prompter;
use PDL;
use PDL::NiceSlice;
#use PDL::GSLSF::BESSEL;
use PDL::Graphics::Gnuplot;
```


Figure 2: paquetes

Declara e inicializa los parámetros.

```
my $eps; # función dieléctrica del cilindro.
my $R=1; # Usa el radio como unidad de distancia.
my $c=1; # R/c como unidad de tiempo.
my ($wmin, $wmax, $Nw); # frecuencias mínima, máxima y número
my $lmax; # maximo momento angular
my $options=q(
'eps=f'=>\$eps, # función dieléctrica del cilindro
'wmin=f'=>\$wmin, # frecuencia mínima
'wmax=f'=>\$wmax, # frecuencia máxima
'Nw=i'=>\$Nw, # número de frecuencias
'lmax=i'=>\$lmax, # máximo momento angular
);
my %options=(eval $options);
die "Error en definición de opciones; $@" if $@;
GetOptions(%options) or usage($options, "Opciones erróneas");
usage($options, "Faltan parámetros")
    unless List::Util::all {defined $_} ($eps, $wmin, $wmax, $Nw);
my $w=zeros($Nw)->xlinvals($wmin,$wmax); # Arreglo de frecuencias
my $qR=$w/$c*$R;
my $kR=sqrt($eps)*$w*$R;
my $l=sequence($lmax+1);
```

Figure 3: inicializa

Necesitamos una rutina para explicar el uso si hubiera un error.

```
sub usage {
    my ($options, $message)=@_;
    say $message if defined $message;
    say $options;
    exit 1;
}
```

Figure 4: uso

Calcula

```
# Calcula las funciones de Bessel, Neumann y Hankel
my $JlqR=bessjn($qR->dummy(1), $l->dummy(0));
```

```

my $NlqR=bessyn($qR->dummy(1), $l->dummy(0));
my $HlqR=$JlqR+i()*$NlqR;
my $JlkR=bessjn($kR->dummy(1), $l->dummy(0));
# Calcula sus derivadas
my $DJlqR=deriva($JlqR, $qR);
my $DHlqR=deriva($HlqR, $qR);
my $DJlkR=deriva($JlkR, $kR);
# factor 1,2,2,2... para contar l's negativas
my $factor_l=(1+($l>=1))->dummy(0);
# Polarización TM
# Coeficientes
my $al_TM=-(($eps*$qR*$DJlqR*$JlkR-$kR*$JlqR*$DJlkR)
/($eps*$qR*$DHlqR*$JlkR-$kR*$HlqR*$DJlkR));
my $bl_TM=($JlqR+$al_TM*$HlqR)/$JlkR;
# Secciones
my $sigma_s_TM=($factor_l*4/$qR*$al_TM->abs2)->mv(1,0)->sumover;
my $sigma_ex_TM=-( $factor_l*4/$qR*$al_TM->re)->mv(1,0)->sumover;
# Campo
my $E2_TM=($factor_l*($kR/$eps*$bl_TM*$DJlkR)->abs2)->mv(1,0)->sumover;
# Polarización TE
# Coeficientes
my $al_TE=-(($qR*$DJlqR*$JlkR-$kR*$JlqR*$DJlkR)
/($qR*$DHlqR*$JlkR-$kR*$HlqR*$DJlkR));
my $bl_TE=($JlqR+$al_TE*$HlqR)/$JlkR;
# Secciones
my $sigma_s_TE=($factor_l*4/$qR*$al_TE->abs2)->mv(1,0)->sumover;
my $sigma_ex_TE=-( $factor_l*4/$qR*$al_TE->re)->mv(1,0)->sumover;
# Campo
my $E2_TE=($factor_l*($bl_TE*$JlkR)->abs2)->mv(1,0)->sumover;

```

Figure 5: calcula

Necesito una subrutina para derivar las funciones de Bessel. Uso la expresión recursiva que relaciona la derivada de un orden con el orden anterior. El caso $l=0$ es especial.

```

sub deriva {
  my ($Bl, $x) = @_; # B(x,l), B is any Bessel, $x are arguments of Bessel
  my $Blm1=$Bl->mv(1,0)->rotate(1)->mv(0,1); # B(x,l-1)
  my $DBl=-$Bl->yvals/$x*$Bl+$Blm1;
  $DBl(:,(0)).=-$Bl(:,(1));
}

```

```

    return $DB1;
}

```

Figure 6: deriva

Por completez, va abajo la versión en términos de la siguiente en lugar de la previa función de Bessel. En este caso, la derivada del orden máximo está equivocada y no debe usarse.

```

sub deriva {
  my ($B1, $x) = @_; # B(x,l), B is any Bessel, $x are arguments of Bessel
  my $B1p1=$B1->mv(1,0)->rotate(-1)->mv(0,1); # B(x,l+1)
  my $DB1=$B1->yvals/$x*$B1-$B1p1; # don't trust higest l;
  return $DB1;
}

```

Figure 7: deriva-alt

Grafica

```

my $gw=gpwin();
$gw->plot({title=>'F. Bessel del primer tipo', xlabel=>'qR', yzeroaxis=>1},
  with=>'lines', $qR, $J1qR);
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>'Derivadas de Bessel del primer tipo', xlabel=>'qR', yzeroaxis=>1},
  with=>'lines', $qR, $DJ1qR);
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>'F. Bessel del segundo tipo', xlabel=>'qR', yzeroaxis=>1, yrange=>[-
  with=>'lines', $qR, $N1qR, with=>'lines', $qR, pdl(0));
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Coeficientes de esparcimiento TM {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', y
  with=>'lines', $qR, $a1_TM->abs2); # remueve la l más alta
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Secciones transversales TM {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', yzeroax
  with=>'lines', $qR, $sigma_s_TM,
  with=>'lines', $qR, $sigma_ex_TM,
);
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Campo cuadrado promedio TM {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', yzeroax
  with=>'lines', $qR, $E2_TM);
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Coeficientes de esparcimiento TE {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', y

```

```

        with=>'lines', $qR, $al_TE->abs2); # remueve la l más alta
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Secciones transversales TE {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', yzeroax
        with=>'lines', $qR, $sigma_s_TE,
        with=>'lines', $qR, $sigma_ex_TE,
});
prompt -single, -void, "Listo?";
$gw->plot({title=>"Campo cuadrado promedio TE {/Symbol e}=$eps", xlabel=>'qR', yzeroax
        with=>'lines', $qR, $E2_TE);
prompt -single, -void, "Listo?";

```

Figure 8: grafica

```

<<paquetes>>
<<inicializa>>
<<calcula>>
<<deriva>>
<<grafica>>
<<uso>>

```

Figure 9: todo

7 Resultados

Corrimos el programa 9 como en la figura 10 indicando una función dieléctrica $\epsilon = 10$, y haciendo cálculos para 1000 frecuencias entre .1 y 3.5, empleando momentos angulares $l = 0, 1, \dots 10$.

```
./mie2D.pl -eps 10 -wmin .1 -wmax 3.5 -Nw 1000 -lmax 10
```

Figure 10: Ejecución del programa 9.

La figura 11 muestra las primeras funciones de Bessel del primer tipo. Son regulares en el origen, donde son aproximadamente potencias de su argumento, i.e., J_0 es constante, J_1 lineal, J_2 cuadrática y así sucesivamente. En la figura 12 mostramos las derivadas de las funciones de Bessel, para verificar cualitativamente que correspondan a lo esperado a partir de la fig. 11. En la figura 13 mostramos las primeras funciones de Bessel del segundo tipo de orden entero, o funciones de Neumann N_l . Observamos su singularidad

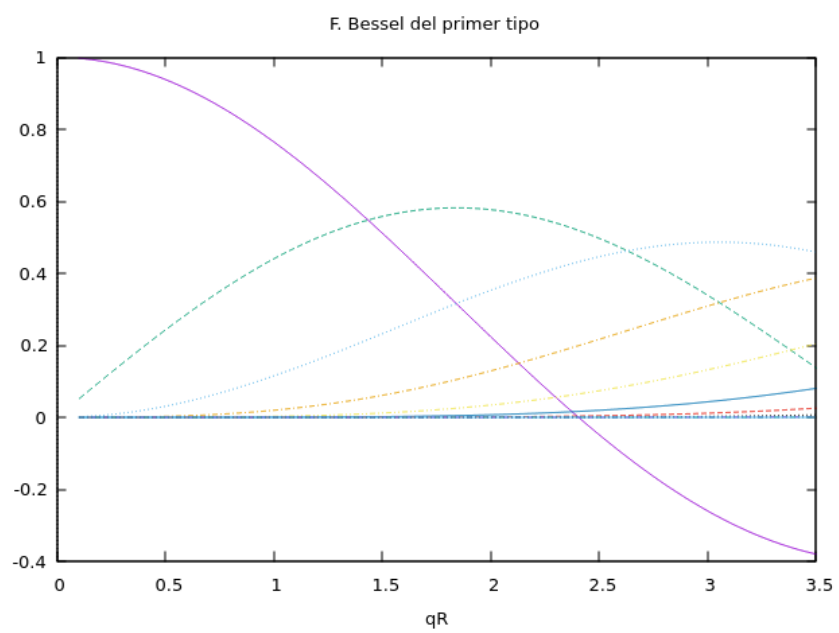


Figure 11: Primeras funciones de Bessel del primer tipo J_l con órdenes enteros $l = 0, 1, 2, \dots$.

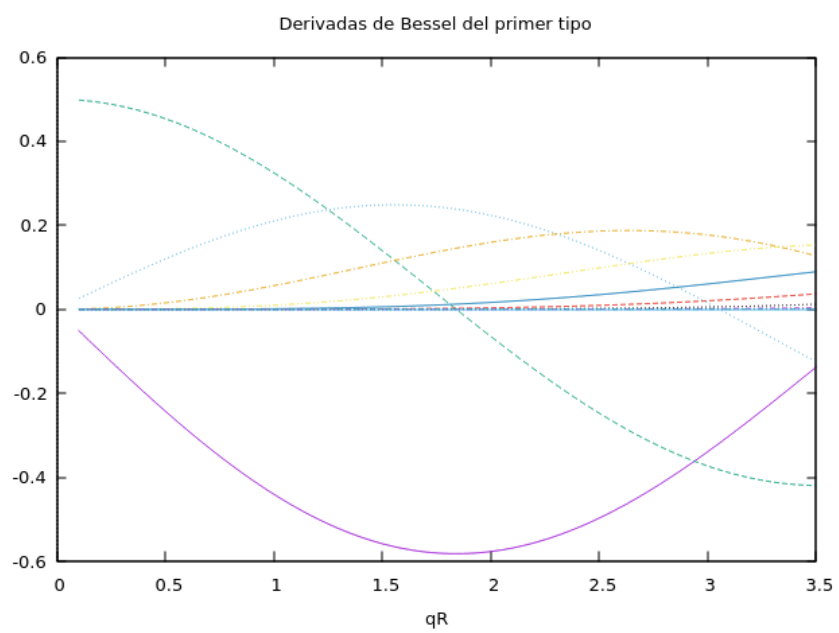


Figure 12: Derivadas J'_l respecto a su argumento de las primeras funciones de Bessel del primer tipo.

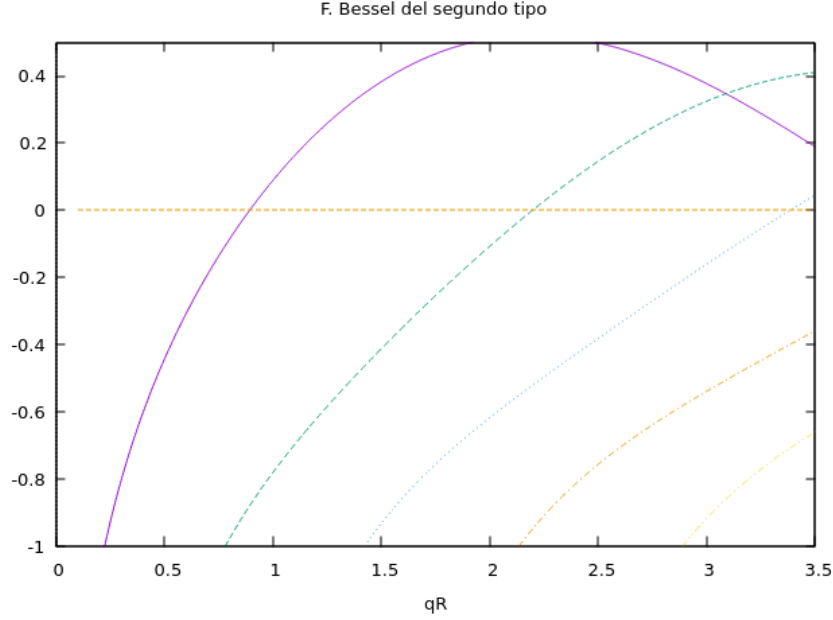


Figure 13: Funciones de Neumann N_l con órdenes enteros $l = 0, 1, 2, \dots$

en el origen. Con estas podemos obtener las funciones de Hankel salientes empleadas en el cálculo de esparcimiento.

Las figuras 14 y 15 muestra los coeficientes de dispersión correspondientes a las polarizaciones TM y TE, respectivamente correspondientes a un cilindro dieléctrico con permitividad $\epsilon = 10$ iluminado con una onda plana monocromática de frecuencia $\omega = qc$ de amplitud 1. Notamos que el valor máximo para los coeficientes de dispersión es 1. Esto se debe a que distintos momentos angulares no se mezclan debido a la simetría rotacional, y para cada valor l del momento angular, no puede esparcirse más energía que la que incide. Las formas de las curvas son curiosas y algunas muestran resonancias muy delgadas mientras que otras no.

Las figuras 16 y 17 muestran el cuadrado del campo eléctrico paralelo a la superficie promediado sobre ella para ambas polarizaciones. Notamos que aparecen una serie de picos angostos y altos. Estos corresponden a las resonancias de Mie 2D. Notamos que para toda l , para distancias suficientemente largas el campo esparcido se vuelve propagante. Por tanto, siempre hay pérdida de energía de estos modos, aunque los materiales mismos sean dieléctricos que no presenten absorción. Por tanto, las resonancias de Mie

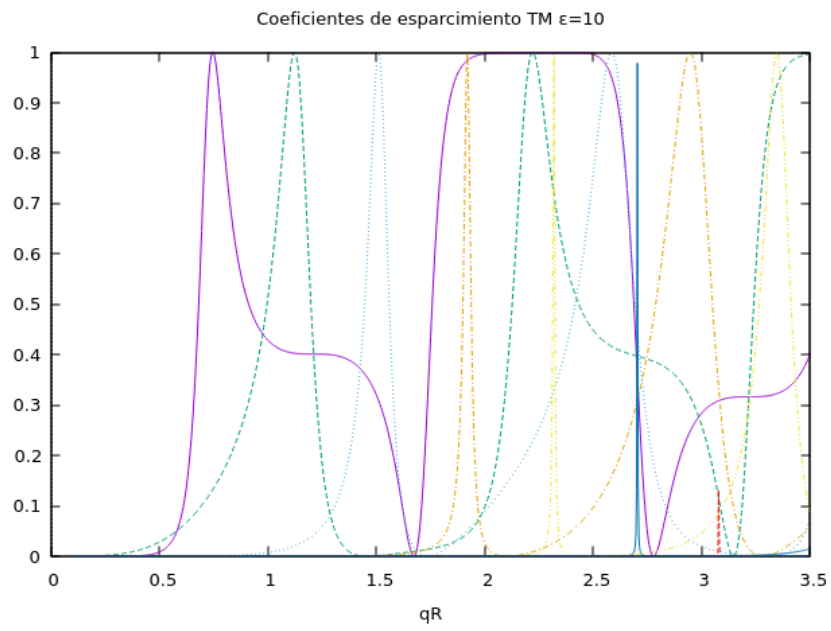


Figure 14: Coeficientes de dispersión a_l evaluados en el exterior de un cilindro dieléctrico con permitividad $\epsilon = 10$ como función de la frecuencia normalizada qR .

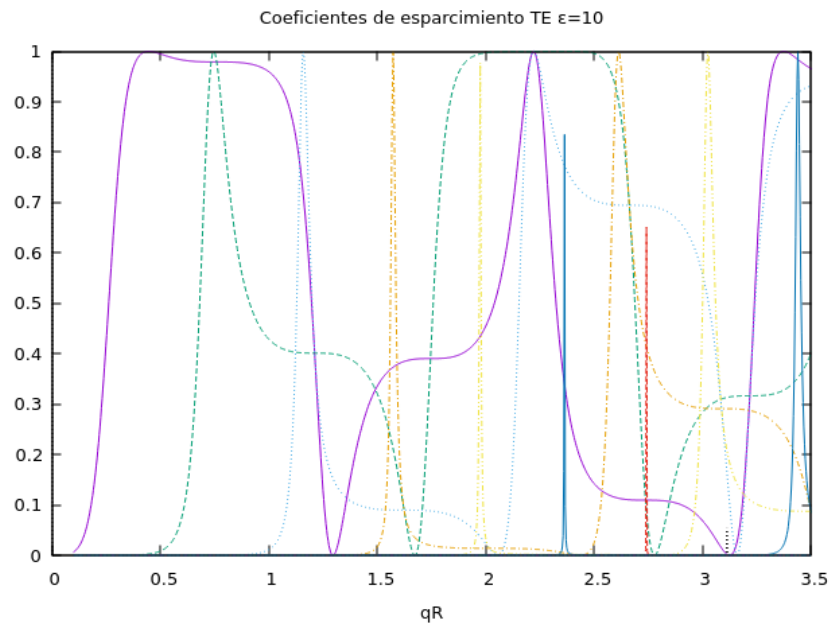


Figure 15: Coeficientes de dispersión como en la fig. 14 pero para polarización TE.

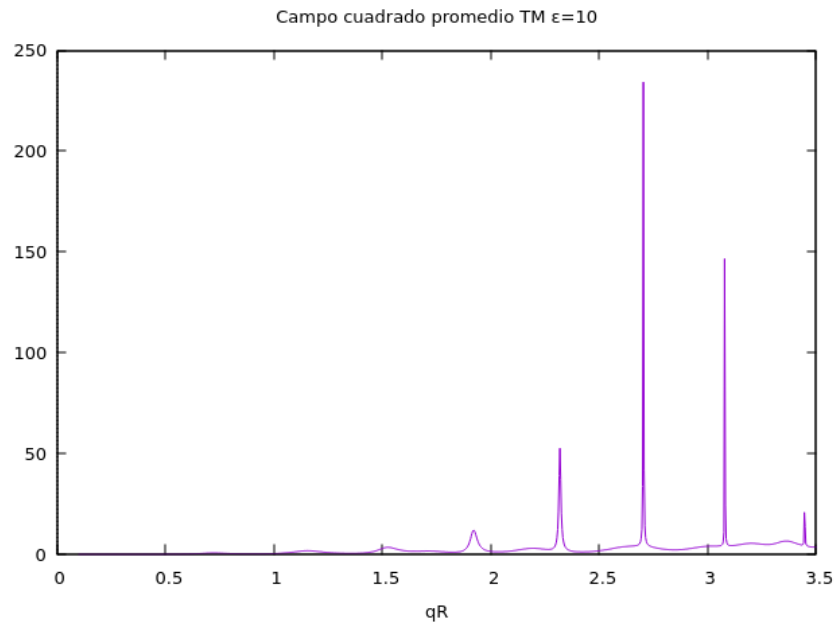


Figure 16: Cuadrado del campo electrico tangencial E_θ^2 promediado sobre la superficie del cilindro para polarización TM.

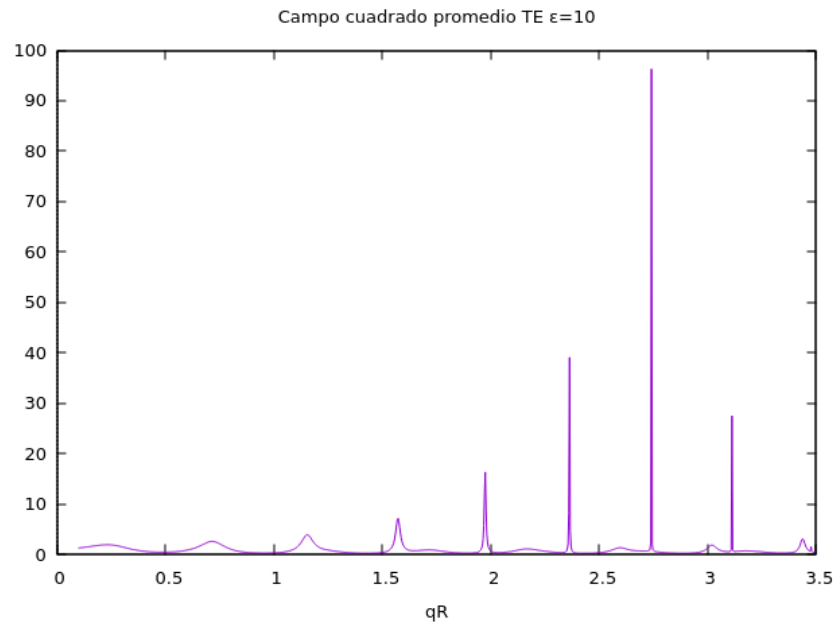


Figure 17: Cuadrado del campo electrico tangencial E_z^2 promediado sobre la superficie del cilindro para polarización TE.

tienen necesariamente anchos y alturas finitas. Los anchos disminuyen conforme aumenta el índice de la resonancia, hasta llegar a la resonancia situada alrededor de $qR \approx 2.7$. Para polarización TM el campo alcanza amplificaciones mayores que para polarización TE.

Finalmente, en las figuras 18 y 19 mostramos las secciones de esparcimiento y de extinción, σ_{es} y σ_{ex} para ambas polarizaciones. Notamos que no hay diferencia apreciable entre ellas, pues no introdujimos disipación. La forma de las curvas se ve bastante caprichosa.

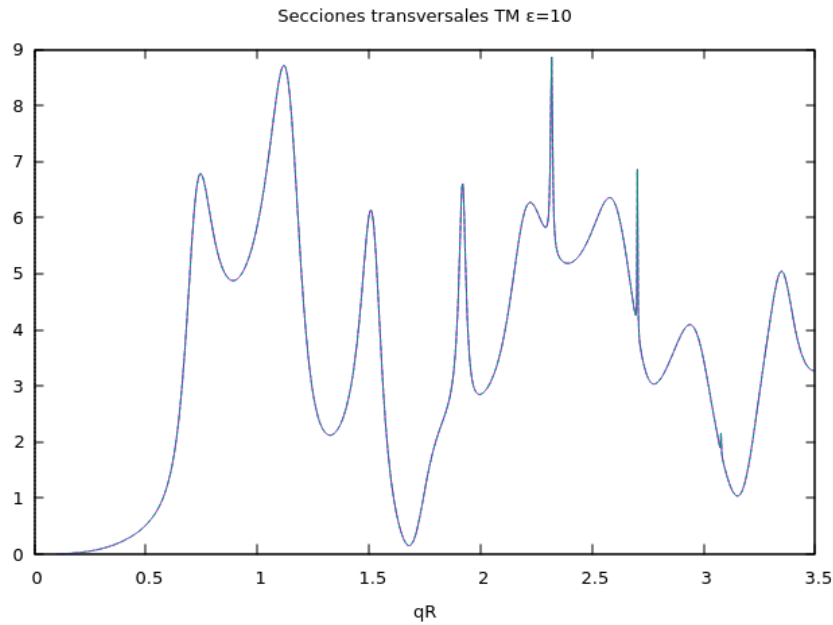


Figure 18: Secciones transversales σ_{es} y σ_{ex} para polarización TM.

8 Conclusiones

Desarrollamos la teoría para el cálculo del esparcimiento por cilindros dieléctricos en términos de funciones de Bessel. Obtuvimos la amplificación del campo en la superficie, la cual puede ser un par de órdenes de magnitud mayor que el campo incidente, y mostramos las resonancias tipo Mie y su manifestación en las secciones transversales de dispersión.

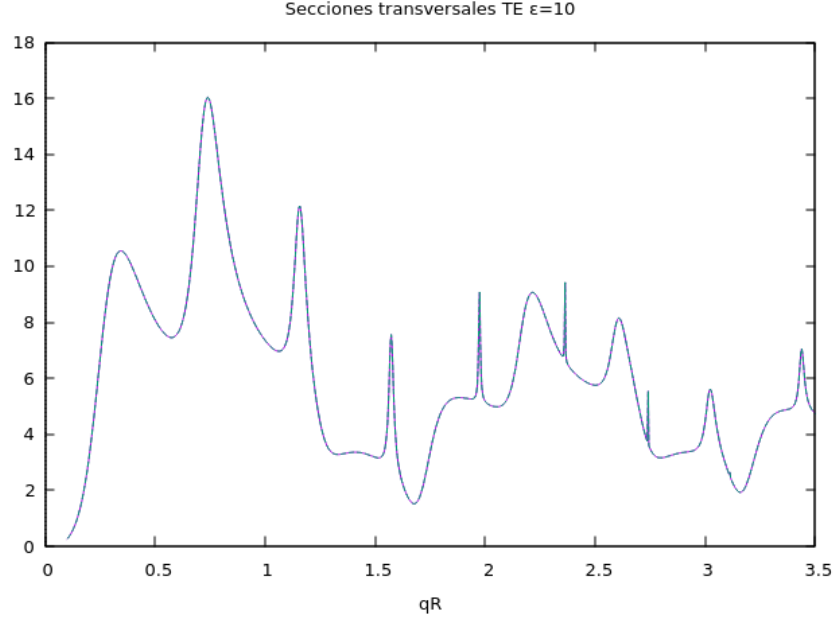


Figure 19: Secciones transversales σ_{es} y σ_{ex} para polarización TM.

9 Apéndice. Gaussiana imaginaria

En este apéndice mostramos como obtener la integral (31). Para ello, consideremos primero la integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} d\zeta e^{i\zeta^2}, \quad (44)$$

sobre el circuito cerrado mostrado en la fig. 20. Como no hay singularidades en su interior, la integral es $I = 0$. Por otro lado, la integral puede separarse en tres partes como

$$\begin{aligned} 0 = I &= \int_0^R d\zeta e^{i\zeta^2} + \int_0^{\pi/4} d(Re^{i\theta}) e^{i(Re^{i\theta})^2} - \int_0^R d(t\sqrt{i}) e^{i(t\sqrt{i})^2} \\ &= \int_0^R d\zeta e^{i\zeta^2} + \int_0^{\pi/4} d\theta R e^{i\theta} e^{iR^2 e^{i2\theta}} - \int_0^R dt e^{-t^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

El segundo término incluye un factor de la forma $R \exp(iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)) = R \exp(iR^2 \cos 2\theta) \exp(-R^2 \sin 2\theta)$. Para $\theta \in (0, \pi/4)$, $\sin 2\theta > 0$

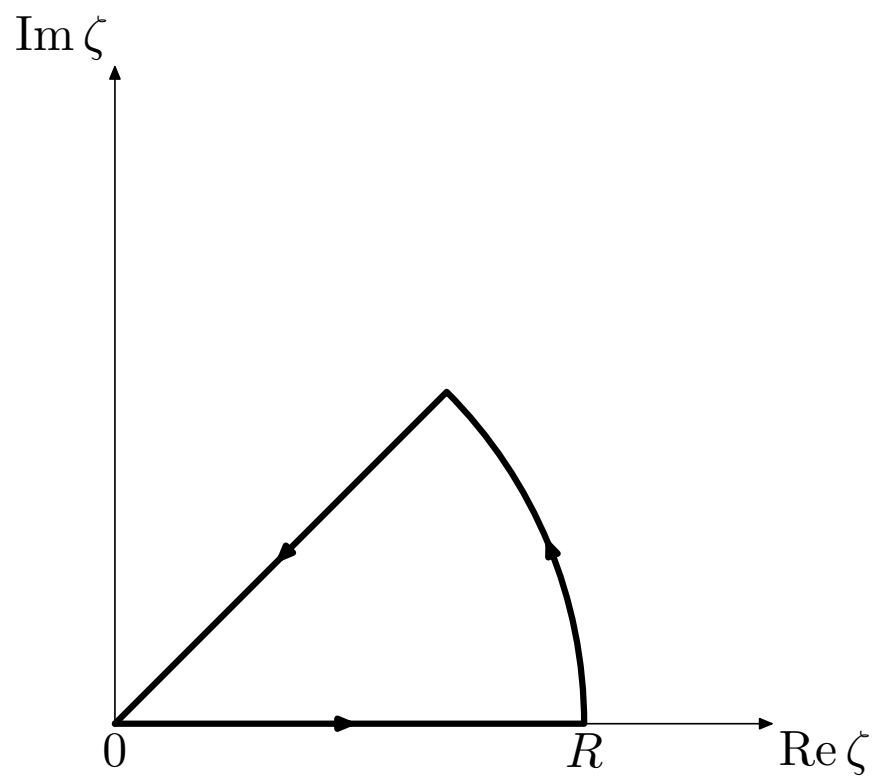


Figure 20: Circuito \mathcal{C} para realizar la integral (44) consistente en una recta de 0 hasta R sobre el eje real, un octavo de círculo de radio R y el retorno recto al origen.

y ese factor tiene magnitud menor a 1 y tiende a cero rápidamente cuando $R \rightarrow \infty$. Por lo tanto, en el límite $R \rightarrow \infty$ podemos escribir `beginexport latex`

$$\int_0^\infty d\zeta e^{i\zeta^2} = \sqrt{i} \int_0^\infty dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{ti}\pi}{2}, \quad (46)$$

`#+endexport` de donde el resultado se sigue de inmediato.

10 Apéndice. Códigos de metapost

Código para producir las figuras [1](#) y [20](#).

```
g_use_svg = 0; %0 for postscript, 1 for svg
prologues:=3;
u=1cm;

outputtemplate := "%j-%c.eps";
if g_use_svg > 0:
    outputtemplate := "%j-%c.svg";
    outputformat := "svg";
fi

color yellow;
yellow=green+red;

beginfig(1)
    path p[];
    p0=fullcircle xscaled 3u yscaled 1u;
    p1=p0 shifted (10u*up);
    p2=subpath (-4,0) of p0--subpath(0,-4) of p1--cycle;
    fill p2 withcolor .5blue+.5white;
    fill p1 withcolor .7blue+.3white;
    p3=unitsquare xscaled 10u yscaled 2u slanted -.5 rotated 90;
    for i=-15 upto -10:
        fill p3 shifted (i*((.5u,0))rotated -10) withcolor yellow;
        draw p3 shifted (i*((.5u,0))rotated -10);
    endfor;
    drawarrow (((0,0)--(2u,0)) shifted (-10*((.5u,0))) rotated -10
        shifted .5[point 0 of p3, point 2 of p3] withpen pencircle scaled
        2pt;
    label.top(btex $\vec{q}$ etex scaled 2, (1.5u,0) shifted (-10*((.5u,0))) rotated -10 s
```

```

        of p3, point 2 of p3] withpen
        pencircle scaled 2pt;
drawarrow (((0,0)--(2u,0)) shifted (10*(.5u,0))) rotated -10 shifted
.5[point 0 of p3, point 2 of p3] withpen pencircle scaled 2pt;
drawarrow (((0,0)--(2u,0)) shifted (10*(.5u,0))) rotated -30 shifted
.5[point 0 of p3, point 2 of p3] withpen pencircle scaled 2pt;
drawarrow (((0,0)--(2u,0)) shifted (10*(.5u,0))) rotated 10 shifted
.5[point 0 of p3, point 2 of p3] withpen pencircle scaled 2pt;
drawarrow ((0,0)--(0,1u)) shifted(0,-2u);
drawarrow ((0,0)--(1u,0)) rotated -10 shifted (0,-2u);
drawarrow ((0,0)--(0,-.75u)) slanted -.5 rotated 90 shifted (0,-2u);
label.ulft(btex  $z$  etex scaled 2, (0,1u) shifted (0,-2u));
label.lrt(btex  $x$  etex scaled 2, (1u,0) rotated -10 shifted (0,-2u));
label.urt(btex  $y$  etex scaled 2, (0,-.75u) slanted -.5 rotated 90 shifted (0,-2u));
interim aangle:=180;
drawdbllarrow ((0,0)--(point 0 of p0))shifted (0,11u);
label.top(btex  $R$  etex scaled 2, (point 0 of p0) scaled .5 shifted (0,11u));
endfig;
beginfig(2)
    path p[];
    p0=(0,0)--(5u,0)..subpath(0,1) of fullcircle scaled 10u--cycle;
    drawdbllarrow (0,7u)--(0,0)--(7u,0);
    label.lrt(btex  $\operatorname{Re}\zeta$  etex scaled 1.5, (7u,0));
    label.ulft(btex  $\operatorname{Im}\zeta$  etex scaled 1.5, (0,7u));
    label.bot(btex  $0$  etex scaled 1.5, (0,0));
    label.bot(btex  $R$  etex scaled 1.5, point 1 of p0);
    drawarrow subpath(0,.5)of p0 withpen pencircle scaled 2pt;
    drawarrow subpath(.5,2.5)of p0 withpen pencircle scaled 2pt;
    drawarrow subpath(2.5,3.5)of p0 withpen pencircle scaled 2pt;
    draw subpath(3.5,4)of p0 withpen pencircle scaled 2pt;
endfig;
end.

```

Este código se puede correr con el comando

`mpost notas`