Rangkuman Bab 10

Muhammad Akmal
13517028

One- and Two-Sample Tests of Hypotheses

10.1 Statistical Hypotheses : General Concepts.

- A statistical hypothesis is an assertion or conjecture concerning one or more populations
- Null Hypothesis (H_0) adalah suatu hipotesis yang dirumuskan dari teori parameter populasi atau sampel
  - $H_0 : \theta = \theta_0$ (satu sampel) atau $\theta_1 - \theta_2 = \theta_0$ (dua sampel)
- Alternative Hypothesis (H_1) merupakan hipotesis tandingan H_0.
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$, $\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$ (satu sampel) atau $\theta_1 - \theta_2 \neq \theta_0$, $\theta_1 - \theta_2 < \theta_0$, $\theta_1 - \theta_2 > \theta_0$ (dua sampel)

10.2 Testing a Statistical Hypothesis

- Tes hipotesis statistik adalah prosedur yang dikenakan pada sampel yang menghasilkan / menyimpulkan suatu tes hipotesis statistik H_0 ditolak atau gagal ditolak.

Possible Situations for Testing a Statistical Hypothesis.

	Ho is true	Ho is false
Do not reject Ho	Correct decision	Type II error
Reject Ho	Type I Error	Correct decision

Type I Error.

Peluang menolak hipotesis nol ketika diketahui Ho benar disebut kesalahan tipe I.

$$\alpha = P(H_0 \text{ is true, reject } H_0)$$

Type II Error

Peluang tidak menolak hipotesis nol ketika diketahui H1 benar disebut kesalahan tipe II.

$$\beta = P(H_0 \text{ is false, do not reject } H_0)$$

- Idealnya, prosedur tes statistik memiliki nilai α dan β kecil.

Properti Penting Tes Hipotesis

- Kesalahan Tipe I dan Tipe II saling berhubungan.
- Kesalahan tipe I dapat direduksi dengan mengatur nilai kritis.
- Jika salah satu membesar, maka yang lain mengecil. (ukuran sampel tetap)
- Menambah ukuran sampel akan mengurangi peluang kesalahan tipe I dan II
- Jika Ho salah, nilai β akan maksimum jika nilai seberarnya dekat dengan nilai parameter hipotesis, dan sebaliknya akan semakin kecil. Semakin besar jaraknya, nilai β semakin kecil.

Tes Satu Arah dan Dua Arah

- Tes Hipotesis Satu Arah (one-tailed test)

$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta = \theta_0$
$H_1 : \theta > \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$
Daerah kritis $\theta > \theta_0$	Daerah kritis $\theta < \theta_0$

- Tes Hipotesis Dua Arah (two-tailed test)

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0 \Rightarrow \theta < \theta_0 \wedge \theta > \theta_0$

Nilai Kritis dan Daerah Kritis

P-value = power dari tes $\Rightarrow P(H_0 \text{ is false, reject } H_0)$

$\beta = P(H_0 \text{ is false, do not reject } H_0)$

Langkah-Langkah Tes Hipotesis

1. Tentukan hipotesis nol $H_0 : \theta = \theta_0$
2. Pilih hipotesis alternatif $H_1 : \theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$ atau $\theta \neq \theta_0$
3. Tentukan tingkat signifikan α
4. Tentukan uji statistik yang sesuai dan tentukan daerah kritis.
5. Hitung nilai uji dari data sampel
6. Hitung P-value sesuai dengan uji statistik yang digunakan.
7. Keputusan : TOLAK H_0 jika nilai uji terletak di daerah kritis
8. Tes signifikan : TOLAK H_0 jika P-value lebih kecil dari tingkat signifikan yang diinginkan (α)

Kekuatan Uji Hipotesis (P-Value)

Kekuatan / Power dari uji hipotesis, notasi P-value adalah Peluang menolak hipotesis nol diberikan nilai alternatif tertentu benar

Nilai-P dari tes $= 1 - \beta$ di mana β = error tipe 2.

Uji Hipotesis untuk Mean (satu sampel)

H_0	Value of test statistic	H_1	Critical Region
$\mu = \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, σ known	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, $v = n-1$, σ unknown	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$

Uji Hipotesis untuk Mean (Dua Sampel)

H_0	Value of test statistic	H_1	Critical Region
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$, σ_1 dan σ_2 known	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2}$ or $z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$, $v = n_1 + n_2 - 2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ but unknown	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{v}$$

$M_1 - M_2 = d_0$

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

$$v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

$M_1 - M_2 < d_0 \quad t' < -t_\alpha$

$M_1 - M_2 > d_0 \quad t' > t_\alpha$

$M_1 - M_2 \neq d_0 \quad t' < -t_{\alpha/2}$ or $t' > t_{\alpha/2}$

$\sigma_1 \neq \sigma_2$ and unknown

$M_D = d_0$

paired observations

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d/\sqrt{n}}$$

$v = n - 1$

$M_D < d_0 \quad t < -t_\alpha$

$M_D > d_0 \quad t > t_\alpha$

$M_D \neq d_0 \quad t < -t_{\alpha/2}$ or $t > t_{\alpha/2}$

Tes Hipotesis Proporsi

1. Tentukan hipotesis nol $H_0 : p = p_0$
2. Pilih hipotesis ~~pro~~ alternatif $H_1 : p < p_0$, $p > p_0$ atau $p \neq p_0$
3. Tentukan tingkat signifikan α.
4. Tes Statistik : variabel binomial X dengan $p = p_0$
5. Komputasi : P-value dari x (jumlah sukses)
6. Keputusan : TOLAK H_0 jika p-value lebih kecil dari tingkat signifikan yang diinginkan. (α)

Tes Hipotesis Proporsi (n besar)

- Prosedur aproksimasi untuk n besar :
  - Jika p_0 mendekati 0 atau 1, gunakan distribusi Poisson.
  - Jika p_0 tidak mendekati 0 atau 1, gunakan distribusi normal

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$$

  - Daerah kritis two-tailed test : $z < -z_{\alpha/2}$ atau $z > z_{\alpha/2}$
  - Daerah kritis one-tailed test untuk :
    a) $p < p_0$: $z < -z_\alpha$
    b) $p > p_0$: $z > z_\alpha$.

Tes Hipotesis Proporsi (2 sampel)

1. Tentukan $H_0 : p_1 = p_2 \rightarrow p_1 - p_2 = 0$.
2. Tentukan $H_1 : p_1 < p_2 \rightarrow p_1 - p_2 < 0$
   $p_1 > p_2 \rightarrow p_1 - p_2 > 0$
   $p_1 \neq p_2 \rightarrow p_1 - p_2 \neq 0$
3. Nilai z untuk tes $p_1 = p_2$:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(1/n_1 + 1/n_2)}}, \quad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

- Daerah kritis untuk $p_1 \neq p_2$ =

$z < -z_{\alpha/2}$ atau $z > z_{\alpha/2}$

- Daerah kritis untuk $p_1 < p_2$ = $z < -z_\alpha$

- — " — $p_1 > p_2$ = $z > z_\alpha$.

$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$.

Lanjutan Bab 10

Muhammad Akmal
13517028

Pengujian Hipotesis Varians Satu Sampel dan Dua Arah

Tes Statistik Variansi

One-Sample

1. Tentukan H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2$
2. Pilih H_1 : $\sigma^2 < \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$, $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
3. Tentukan tingkat signifikan α.
4. Hitung nilai χ^2 =

- Daerah kritis :
  a) Two-tailed test :
  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ atau $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$.
  b) One-tailed test untuk $\sigma^2 < \sigma_0^2$ =
  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$
  c) One-tailed test untuk $\sigma^2 > \sigma_0^2$ =
  $\chi^2 > \chi^2_\alpha$

Two-Sample

1. $H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. $H_1 = \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
3. Hitung f-value untuk dua sampel acak independen (n_1, n_2) dari 2 populasi

- Daerah kritis two-tailed test:

  $f < f_{1-\alpha/2}(v_1, v_2)$ atau $f > f_{\alpha/2}(v_1, v_2)$

- Daerah kritis one tailed test untuk:

  a) $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ = $f < f_{1-\alpha}(v_1, v_2)$

  b) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ = $f > f_{\alpha}(v_1, v_2)$

Goodness-Of-Fit-Test.

- Tes kesesuaian (fit test) untuk menentukan suatu populasi memenuhi distribusi sesuai teori tertentu.
- Goodness-of-Fit-Test = Tes kesesuaian antara frekuensi observasi dan frekuensi teori (ekspektasi) berdistribusi tertentu.
- Good Fit artinya menerima H_0, dan poor fit artinya menolak H_0.

- H_0 = good fit ($o_i = e_i$)
- H_1 = poor fit ($o_i > e_i$)
- o_i = frekuensi observasi untuk $u = i$
- e_i = frekuensi ekspektasi untuk $u = i$

- Goodness-of-Fit-Test berbasis.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

- Good fit = selisih sekecil mungkin $\rightarrow \chi^2$ kecil
- Daerah kritis dengan tingkat signifikan α : $\chi^2 > \chi^2_\alpha$
- Syarat: frekuensi ekspektasi ≥ 5
- $v = k-1$; k = jumlah sel / nilai yang diobservasi (yg memenuhi syarat)

Test for Independence (Categorical Data)

- Prosedur tes χ^2 dapat digunakan untuk tes hipotesis independence 2 variabel kategorikal
  - H_0 = kedua variabel independent
  - H_1 = kedua variabel tidak independent

Menggunakan contingency table.

$$\text{expected frequency} = \frac{(\text{column total}) \times (\text{row total})}{\text{grand total}}$$

- Hitung $\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$ dengan $v = (\underset{\text{row}}{r} - 1)(\underset{\text{column}}{c} - 1)$
- Daerah kritis dengan tingkat signifikan α = $\chi^2 > \chi^2_\alpha$
- Keputusan = <u>TOLAK</u> H_0 jika χ^2 berada di daerah kritis.

Test for Homogeneity

- Jika fokus tes untuk menentukan apakah opini setiap kategori voters homogen tentang suatu hal, tes ini disebut test for homogeneity.