期中以前（动态电路）

一、电容电感

$\varphi=Li$，$V=\frac{d\varphi}{dt}=L\frac{di}{dt}$ （电感电流是状态变量不能突变，电感电压可突变）

$q=CV, i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dV}{dt}$ （电容电压是状态变量不能突变，电容电流可突变）

$v(t)=v_0+\frac{1}{C}\int i\mathrm{dt}$ （电容电压）

$i(t)=i_0+\frac{1}{L}\int v\mathrm{dt}$ （电感电流）

二、分压分流

有初始电压V_0的电容，可以用：$CV_0\delta(t)$的电流源和无初始电压的电容并联（加载冲激函数的瞬间电容短路，但立刻又被充电到V_0，也即是初始电压为$v_{0+}=V_0$）

三、正弦稳态

串联下V_c比V_R滞后$90°$（电抗$X=-\frac{1}{\omega C}$），V_L比V_R超前$90°$（电抗$X=\omega L$）

并联下I_c比I_R超前$90°$（电纳$B=\omega C$），I_L比I_R滞后$90°$（电纳$B=-\frac{1}{\omega L}$）

某元件或电源功率问题（以下各个参量皆为该元件上的）：

$\varphi_V-\varphi_I$：功率因数角，即该元件上电压与电流的相位差

瞬时功率：$P_{瞬}=\frac{1}{2}\dot{V}_P\dot{I}_P(\cos(\varphi_V-\varphi_I)+\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I))=V(t)I(t)$

平均功率：$\bar{P}=\bar{P}_{瞬}=\frac{1}{2}\dot{V}_P\dot{I}_P\cos(\varphi_V-\varphi_I)$

复功率：$P_{复}=\frac{1}{2}\dot{V}_P\dot{I}_P(\cos(\varphi_V-\varphi_I)+j\sin(\varphi_V-\varphi_I))$

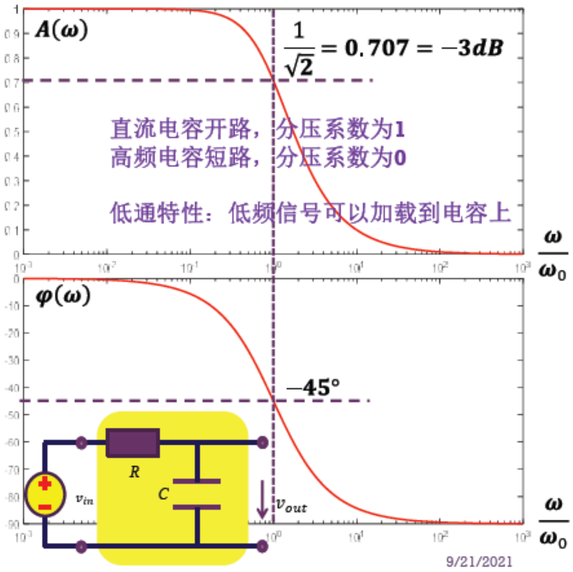
三要素法：

$$x(t)=\underbrace{x_\infty(t)}_{\text{稳态相应}}+\underbrace{(X(0)-X_\infty(0))}_{\text{初值}-\text{稳态初值}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

稳态相应一般由相量法得出的分压比例，再结合源的输出波形来确定

四、一阶时频

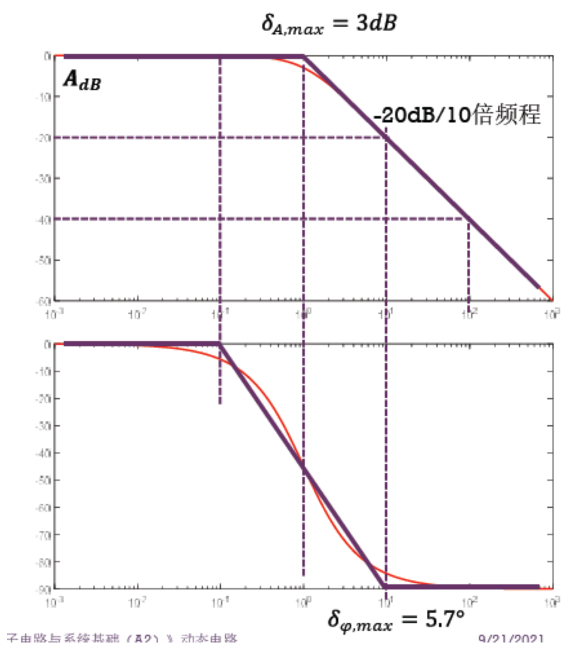
3dB频点：



$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

其中，$\omega_0=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC}$为3dB频点（低通高通分压比都是$\frac{1}{\sqrt{2}}$，与电阻相位差为$45^\circ$）



（对于一阶低通）3dB带宽：$BW_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$，典型传递函数：$H(s)=H_0\frac{1}{1+j\omega\tau}$（$H_0$是中心频点传函）

（对于一阶高通）3dB频点：$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$，典型传递函数：$H(s)=H_0\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$。

判断滤波器类型后，直接写答案（或者通过传函反推τ等）

阶跃响应和冲激响应：[Laplace变换]

由$H(j\omega)$推回时域表达式：
$V_0(t)=V_0\cos{(\omega t+\varphi_s)}$，$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi}\rightarrow V(t)=A(\omega)V_0\cos{(\omega t+\varphi_s+\varphi)}$

五、二阶时域

LC谐振腔：

自由振荡频率：$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

　串联RLC：

　　特征阻抗：$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$

　　品质因数：$Q=\frac{Z_0}{R}$

　　阻尼系数：$\xi=\frac{1}{2Q}=\frac{R}{2Z_0}$

　并联RLC：

　　特征导纳：$Y_0=\sqrt{\frac{C}{L}}$

　　品质因数：$Q=\frac{Y_0}{G}$

　　阻尼系数：$\xi=\frac{1}{2Q}=\frac{G}{2Y_0}$

五要素法（稳态响应、初值、微分初值、自由振荡频率、阻尼系数）：

欠阻尼（时间1.5Q后振铃幅度<1%，2.2Q后振铃幅度<0.1%）：

$$\begin{aligned}x(t)=&\underbrace{x_\infty(t)}_{\text{稳态响应}}+\underbrace{(X(0)-X_\infty(0))}_{\text{初值}-\text{稳态初值}}e^{-\xi\omega_0 t}\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t\right)\\&+\left(X(0)-X_\infty(0)+\frac{\overbrace{\dot{X}(0)-\dot{X}_\infty(0)}^{\text{微分初值}}}{\xi\omega_0}\right)\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t\right)\end{aligned}\qquad(0<\xi<1)$$

过阻尼：把$\cos$、$\sin$换成$\cosh$、$\sinh$，把$1-\xi^2$换成ξ^2-1

临界阻尼：

$$\begin{aligned}x(t)&=x_\infty(t)+(X(0)-X_\infty(0))e^{-\omega_0 t}\\&+\left(X(0)-X_\infty(0)+\frac{\dot{X}(0)-\dot{X}_\infty(0)}{\omega_0}\right)\omega_0 te^{-\omega_0 t}\end{aligned}\qquad(\xi=1)$$

　　关于微分初值：一般用电容电感的约束条件来求（因为它们带着微分），类似 $\frac{dV_c(0^+)}{dt}=\frac{1}{C}I_c(0^+)=\frac{1}{C}(I_s(0^+)-I_L(0^+)-I_R(0^+))$这样的

（important）滤波器四种典型传函（$\frac{\text{负载阻抗}}{\text{总阻抗}}$）

$$H(s)=H_0\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\qquad(\text{低通})$$

$$H(s)=H_0\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\qquad(\text{高通})$$

$$H(s)=H_0\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\qquad(\text{带通})$$

$$H(s)=H_0\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}\qquad(\text{带阻})$$

$$s^2-2\xi\omega_0 s+\omega_0^2$$

$$H(s)=H_0\frac{s^2-2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad (\text{全通})$$

用途：给了一个乱七八糟的电路，什么都没法一眼看出来，那就先写出传函来，并和以上四种形式比对，由于分母永远是$s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2$，因此可以由传函反推出$\xi$、$\omega_0$这些参数，然后再看分子，可以判断滤波器类型

1关于冲激响应和阶跃响应：写出传函之后进行拉普拉斯逆变换，注意以上给出的都是电压~电压传递函数，如果源是电流源的话，需要写出跨阻传递函数（V_{out}/I_{in}），或者用电压-电压传递函数求出来后，再乘一个$I_{S0}R_L$

六、二阶时频

伯特图画法:

$$H(s)=A_0\frac{(s+\omega_{z1})(s+\omega_{z2})+\cdots+(s+\omega_{zm})}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})+\cdots+(s+\omega_{pn})}$$

分子的根：零点

分母的根：极点（必在左半平面）

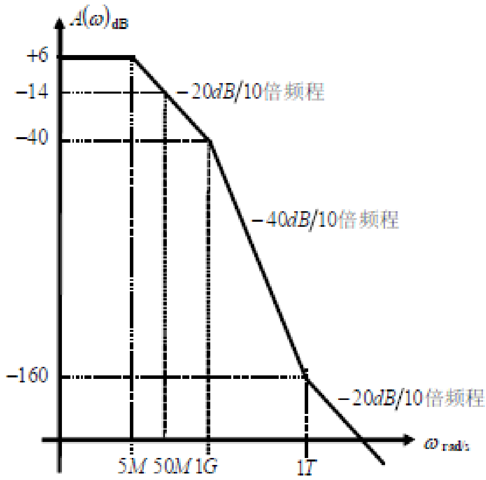
幅频特性：每个极点会导致20dB/10倍频程的下降，每个零点会导致20dB/10倍频程的上升

相频特性：极点：滞后90°；零点：左超右滞。（这90°是均摊在$0.1\omega_0\sim10\omega_0$内变化的）

eg：

$$H(j\omega)=10000\frac{\left(j\omega+1\times10^{12}\right)}{\left(j\omega+5\times10^{6}\right)\left(j\omega+1\times10^{9}\right)}$$

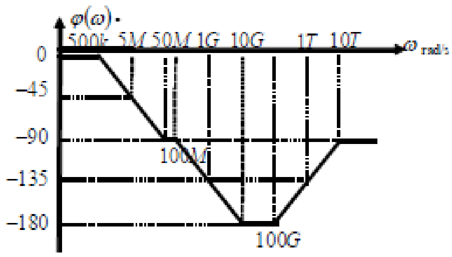
$$=2\frac{\left(1+\dfrac{j\omega}{1\times10^{12}}\right)}{\left(1+\dfrac{j\omega}{5\times10^{6}}\right)\left(1+\dfrac{j\omega}{1\times10^{9}}\right)}$$



$$5\times10^{6}$$

$$1\times10^{9}$$

$$1\times10^{12}$$



其中：初始的$+6$dB来源于：$20\lg 2=20\times0.3=6$

$5\times10^6\sim1\times10^9$那段，差了200倍，并且是20倍频程下降，则下降了$20\lg200=20(2+0.3)=46dB$

$1 \times 10^9 \sim 1 \times 10^{12}$那段，差了1000倍，并且是40倍频程下降，则下降了$40\lg 1000 = 120dB$

并且注意：相位曲线的变化是均摊在根的0.1~10倍范围内的

幅频特性、相频特性、群延时特性

群延时：$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$，也即相频曲线的负斜率

二阶低通：

幅频特性、相频特性、群延时特性

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \overset{s=j\omega}{=} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

幅频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

相频特性

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

群延时：相频特性曲线的斜率
一群信号通过该系统的延时大小

群延时特性

$$\tau_g(\omega) = \frac{2\xi\omega_0(\omega^2 + \omega_0^2)}{\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4}$$

也即：把s拆成$j\omega$，分离出幅度和频率。

关于特征根，也即：

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$
$$\Downarrow$$
$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(\frac{j\omega}{\omega_{p1}} + 1)(\frac{j\omega}{\omega_{p2}} + 1)}$$

过阻尼：以两个频点为分界点，三段折线处理

欠阻尼：在自由振荡频点ω_0处有可能出现谐振峰：带入$\omega = \omega_0$可得$H(j\omega_0) = -j\frac{1}{2\xi}$，也即$A(\omega_0) = \frac{1}{2\xi}$，如果$\xi < 0.5$则在$\omega_0$ 处就会有$A(\omega_0) > 1$

实际上的谐振峰（根据$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$得出）：

谐振峰频点：$\omega_e = \sqrt{1 - 2\xi^2}\omega_0$，$\xi < 0.707$。当$\xi \ll 0.707$时近似为$\omega_e \approx \omega_0$

谐振峰高度：$A(\omega_e) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$，$\xi < 0.707$。当$\xi \ll 0.707$时近似为$A(\omega_0) = \frac{1}{2\xi} = Q$

幅度最大平坦（passband的中心频点最大平坦）：

$$\left.\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}=0,\quad \left.\frac{d^2A(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\xi=0.707$$

3dB带宽：

$$A(\omega_{3dB})=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{3dB}^2)^2+(2\xi\omega_0\omega_{3dB})^2}}=\frac{A(0)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_{3dB}=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{(1-2\xi^2)^2+1}}$$
$$\text{并且有：}$$
$$\omega_{3dB}\xlongequal{\xi=0.707}\omega_0$$
$$\omega_{3dB}\overset{\xi\gg1}{\approx}\frac{1}{2\xi}\omega_0$$
$$\omega_{3dB}\overset{\xi\ll1}{\approx}\omega_0\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

（比如已经确认这是个二阶低通，并且要求幅度最大平坦（$\xi=0.707$），那么可以利用$\omega_{3dB}=\omega_0$，根据传函求出的ω_0直接写出：$BW_{3dB}=\frac{\omega_0}{2\pi}$）

群延时最大平坦：$\xi=0.866$

最优二阶低通系统：$\xi\in(0.707,1)$

大约$5\tau(1.5QT,4.6\tau)$时间进入偏离稳态1%误差范围，$7\tau(2.2QT,6.9\tau)$进入偏离稳态0.1%误差范围

二阶带通系统：RLC串联下，R分压，在自由振荡频点，电容电感的电抗相抵消，犹如短路

习惯用Q

$$H(j\omega)=\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}e^{-j\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

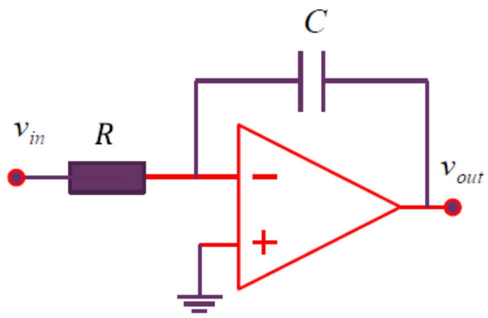
$BW_{3dB}=\frac{f_0}{Q}=2\xi f_0$，其中$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

（若知道是二阶带通可以直接写答案）

七、二阶应用

RC理想积分电路（理想运放可以替代电感的积分功能）

普通电感的积分功能：$i_L(t)=\frac{1}{L}\int v_L(t)dt$



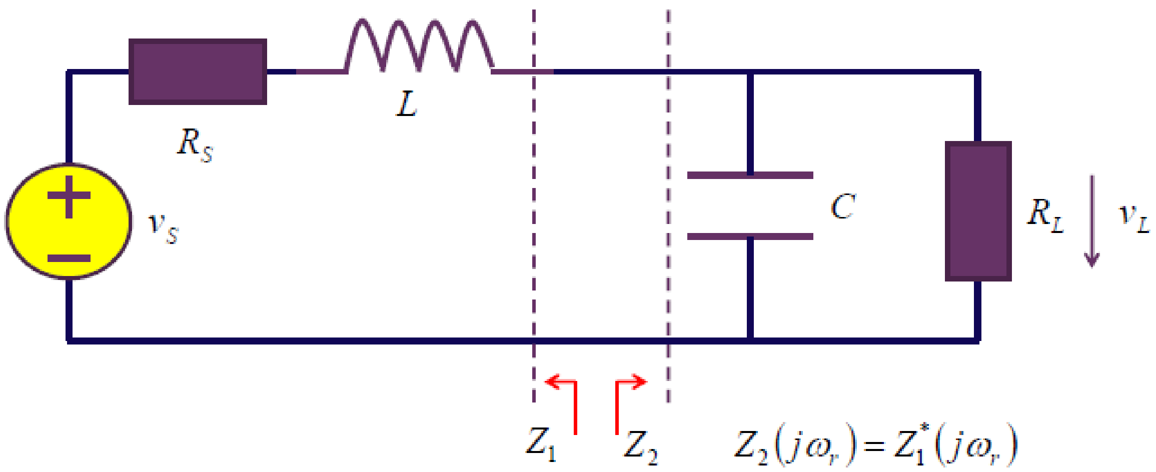
$$\frac{V_{in}(s)-0}{R}=\frac{0-V_{out}(s)}{\frac{1}{sC}}$$
$$\Downarrow$$
$$V_{out}(s)=-\frac{V_{in}(s)}{sRC}$$
$$\Downarrow (\text{时域积分}\rightarrow\text{频域}\div s)$$
$$V_{out}(t)=-\frac{1}{RC}\int V_{in}(t)dt$$

最大功率传输匹配

应该让电感、电容的阻抗（导纳）相互抵消，即只剩下纯阻部分，中心频点功率传递系数$\frac{4R_LR_s}{(R_L+R_s)^2}$，在且仅在$R_L=R_s$时取得$100\%$。若$R_L\neq R_s$，在LC低通网络和LC高通网络中，传递函数存在谐振峰，如果$\xi<0.707$，有可能在谐振峰频点上达到100%传输

令谐振峰频点$\omega_e=\sqrt{1-2\xi^2}\omega_0$为**匹配频点**$\omega_r$（事先给定）（$\omega_0$是由传函求出来的自由振荡频率），令谐振峰值为 $A(\omega_e)=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=1$

实现最大功率传输匹配必须要进行共轭匹配：

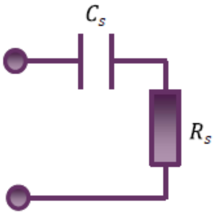


可以由$Z_2(j\omega_r)=Z_1^*(j\omega_r)$解出来（只要L和C如是取值，即可在给定的$\omega_r$频点上获得最大功率传输匹配）：

$$C=\frac{1}{\omega_rR_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_s}-1}$$
$$L=\frac{R_s}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_s}-1}$$

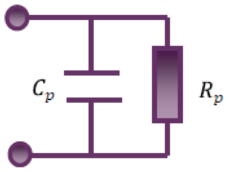
匹配网络设计口诀：并大串小Q相等

设计口诀：并大串小Q相等

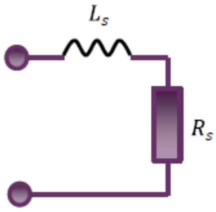


$$Q=\frac{串联电抗}{串联电阻}=\frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s}=\frac{1}{\omega R_s C_s}$$

$$Q=\frac{并联电纳}{并联电导}=\frac{\omega C_p}{G_p}=\omega R_p C_p$$

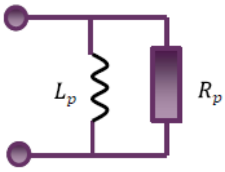


$$Q=\sqrt{\frac{R_p}{R_s}-1}$$



$$Q=\frac{串联电抗}{串联电阻}=\frac{\omega L_s}{R_s}$$

$$Q=\frac{并联电纳}{并联电导}=\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{G_p}=\frac{R_p}{\omega L_p}$$



也即$Q=\sqrt{\frac{R_{大}}{R_{小}}-1}$

eg：

5、（+3）如图 3 所示，50Ω电阻经 10pF 串联电容变换后，在 1MHz 频点上，其等效并联电阻阻值为（　　）MΩ，并联电容容值为（　　）pF。

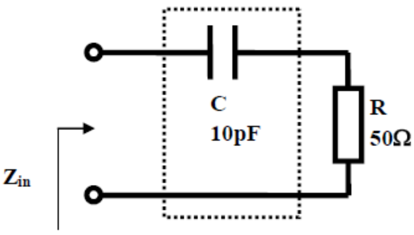


图 3　串臂电容阻抗变换

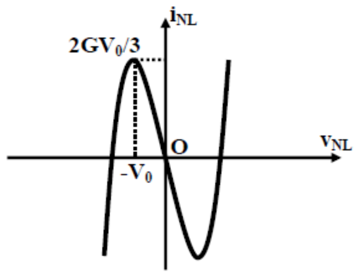
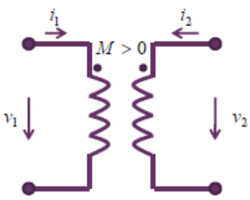


图 4　N 型负阻伏安特性曲线

solution：Q值为局部Q值，在串联电路中即：$Q=Z_0/R$也即$\frac{1}{\omega RC}$，这样就求出了Q值，再依据上边的$Q=\sqrt{\frac{R_{大}}{R_{小}}-1}$可以得到：$R_{大}=(1+Q^2)R$进而可求出转换后的R。再根据并联电路中$Q=Y_0/G$可以求出转换后的电容值

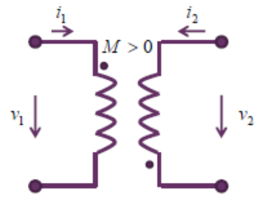
可以应用于：进行最大功率传输匹配时，先将并联部分转化成串联关系，利用Q不变且$Q=\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}\rightarrow R_L'=\frac{R_L}{Q^2+1}$算得转成串联后的等效电阻$R_L'$，然后再根据Q值不变算出此时等效电容$C'$，然后电路就全是串联了，比较好算。

互感变压器：



$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_1 & M\\M & L_2\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}$$

$M>0$



$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_1 & -M\\-M & L_2\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}$$

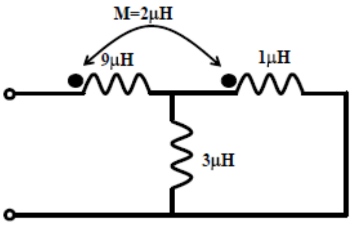
$M>0$

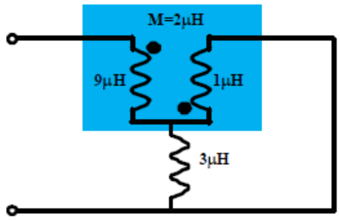
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

由$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$和$v_1(t) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} + M\frac{di_2(t)}{dt}, v_2(t) = \ldots$和$E(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau$

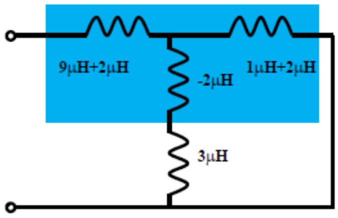
可以推出来：$E(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t)$

T型等效网络：

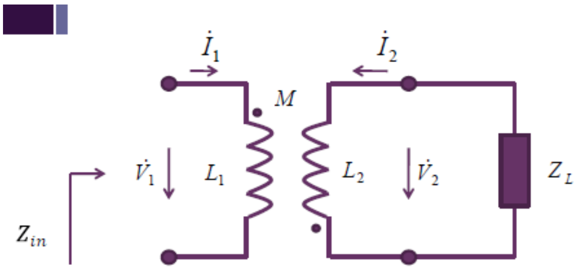




$$\begin{aligned} L &= (L_1 + M)\text{串}((L_3 - M)\text{并}(L_2 + M)) \\ &= 11\mu H\text{串}(1\mu H\text{并}3\mu H) \\ &= 11\mu H + \frac{3\cdot 1}{3+1}\mu H = 11.75\mu H \end{aligned}$$



互感的阻抗变换作用：



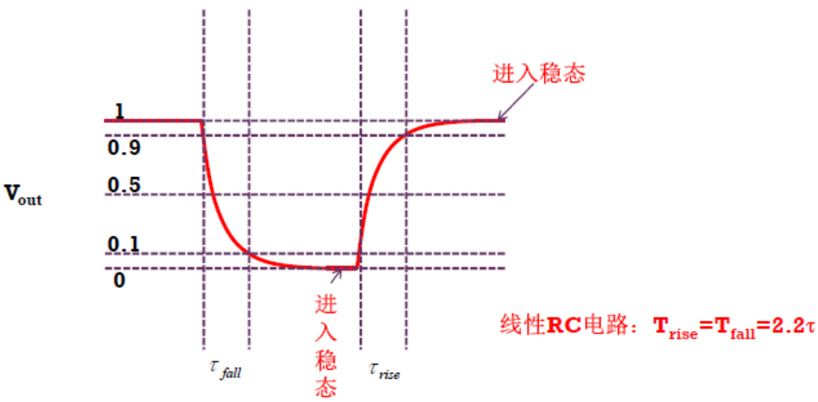
利用z参量矩阵：

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \overset{Z_L = R_L, k=1, Q_L = \frac{R_L}{\omega L_2}}{=\!=\!=\!=\!=} n^2 R_L$$

其中：$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

八、寄生效应

线性RC电路：



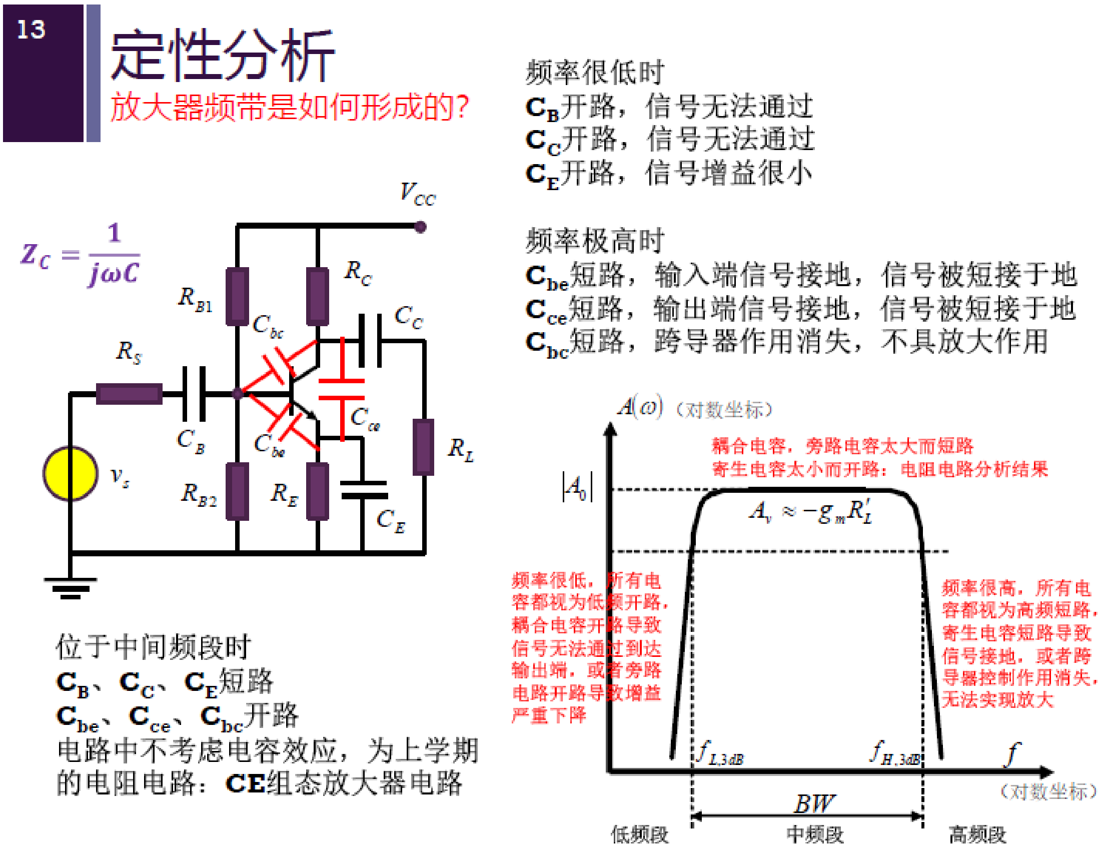
一般以幅度变化10%-90%之间所占时间定义为上升沿时间和下降沿时间

数字门电路延时：

欲减小延时，应该提高电源电压（如果降低功耗则应该降低电源电压），尽量降低两个门电路之间的等效电容量大小，降低晶体管阈值电压（然而过小的阈值电压会降低数字门电路的抗干扰能力）。降低晶体管尺寸可以同时减小延时和功耗

晶体管放大器的寄生电容效应：高频增益严重下降，有可能变成无源电路。高频稳定性变差，放大器调匹配时，又可能变成振荡器，无法正常放大。

九、频率特性



C_B、C_C、C_E：耦合电容（大电容）低频开路

C_{be}、C_{ce}、C_{bc}：寄生电容（小电容）高频短路

低端3dB频点：主要受C_B、C_C、C_E（高通电容）影响，C_E起决定性作用，因为其两端等效电阻$1/g_m$最小，时间常数最小，导致低端3dB频点增大，也即影响最大（应该提高C_E来降低低端3dB频点，扩大通带）

$$f_{L,3dB} \approx f_{oB} + f_{oC} + f_{oE} = \frac{1}{2\pi\tau_B} + \frac{1}{2\pi\tau_C} + \frac{1}{2\pi\tau_E}$$

也即：

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}$$

高端3dB频点：

$$f_{L,3dB} \approx \frac{1}{2\pi(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}$$

也即：

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}$$

电路有源性条件：

若为实数参量矩阵，则：$P_{11} < 0 \ or \ P_{22} < 0 \ or \ (P_{12} + P_{21})^2 - 4P_{11}P_{22}$

若为复数矩阵（带着$j\omega$的动态电路），则：
$Re(P_{11}) < 0 \ or \ Re(P_{22}) < 0 \ or \ |P_{21} + P_{12}^*|^2 > 4Re(P_{11})Re(P_{22})$

期中以后（正负反馈）

负反馈

负反馈分析流程：

若写出了整体网络参量：

根据串并关系判断受控源类型->写出整体的网络参量（开环参量+反馈网络参量）->得到开环...增益（根据受控源类型）：$A_0 = \frac{-P_{21}}{P_{11}P_{22}}$(其中21元素舍去了反馈网络项)，以及反馈系数（根据受控源类型逆过来）：$F = P_{12}$->得到开环输入电阻和输出电阻（由参量的量纲决定写成其倒数与否）：$R_{in} = \{P_{11}\}$，$R_{out} = \{P_{22}\}$->根据$A_f = \frac{A_0}{1+A_0F}$求得闭环...增益，以及相应的闭环输入电阻和闭环输出电阻（根据连接方式判断是乘以还是除以(1+T)）

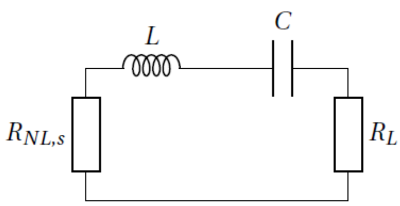
若难以写出整体网络参量，想要直接从电路分析：

判断受控源类型->把反馈网络单独拿出来求得反馈系数(P_{12})->把放大网络拿出来求开环增益、开环输入电阻、开环输出电阻（开环放大器=原始放大器+反馈网络负载效应）：放大网络画一遍，反馈网络画两遍（对面是并/串则这边的反馈网络悬空端短路/开路）->进而求得开环增益、开环输入输出电阻->再把开环部分和反馈部分合并，求出相应的闭环增益、闭环输入输出电阻

正反馈

S型负阻：电流源激励。N型负阻：电压源激励

正反馈振荡器：



电路说明：负阻与正阻的电压关联参考方向都是从上往下。电流参考方向是向右。

负阻伏安特性方程：

$$v_{NL} = -r_0 i_{NL} + \frac{r_0}{3I_{S0}^2} i_{NL}^3$$

附注 2021/12/

高Q值（$Q \gg 1$）下，滤除高次谐波分量

正弦回路电流 $i(t) = I_m\cos\omega_0 t$ 激励下，非线性负阻产生了基波分量与高次谐波分量，但是只有基波分量能通过 LC 谐振腔，高次谐波分量被滤除（电感承担）：

$$v_{NL}(t) = -r_0(-i(t)) + \frac{r_0}{3I_{s0}^2}(-i(t))^3 = r_0 I_m\cos\omega_0 t - \frac{r_0}{3I_{s0}^2} I_m^3\cos^3\omega_0 t$$

$$= \left(r_0 - r_0\frac{I_m^2}{4I_{s0}^2}\right) I_m\cos\omega_0 t - \frac{r_0}{12I_{s0}^2} I_m^3\cos 3\omega_0 t \approx r_0\left(1 - \left(\frac{I_m}{2I_{s0}}\right)^2\right) I_m\cos\omega_0 t$$

（注：由于初始带入$i(t)$的时候就带入的是负值，因此最终表达式里的就是负阻的大小（正值））

起振条件：初始位置的负阻（微分电阻）大于正阻。（$r_0 > R_L$）

平衡条件(对于输入信号的幅度、频率的要求)：

（实部条件、幅度条件）负阻抵偿正阻，也即$r_n = r_0(1-(\frac{I_{m,\infty}}{2I_{S0}})^2) = R_L$，进而解出$I_{m,\infty}$需要满足的条件

（虚部条件、频率条件）正负电抗相互抵消（对于LC串联谐振腔，也即需要满足：$\omega_{osc}L + \frac{1}{-\omega_{osc}C} = 0 \to \omega_{osc} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$）

eg:

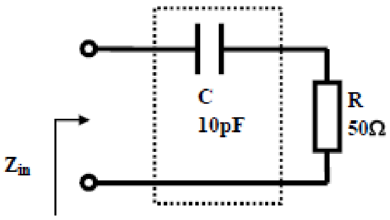


图 3　串臂电容阻抗变换

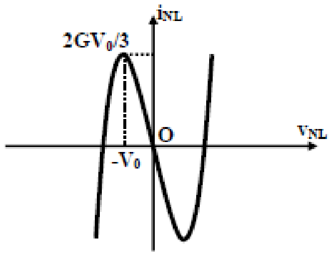


图 4　N 型负阻伏安特性曲线

6、（+3）N 型负阻的单端口元件约束方程为$i_{NL} = -Gv_{NL} + \frac{G}{3V_0^2}v_{NL}^3$，其中 v_{NL} 和 i_{NL} 为单端口元件的关联端口电压和端口电流，两个参量 G 和 V_0 均为已知量，该元件的伏安特性曲线如图 4 所示。该 N 型负阻现被偏置在负阻区中心位置 O 点，之后被正弦波电压 v(t)=$V_m$cosωt 激励。当激励电压幅值 V_m 很小时，N 型负阻可视为线性负阻，线性负导$-g_{n0}$的大小为g_{n0}=（　　　）；当激励电压峰值幅值 V_m 很大时，N 型负阻两端将产生高次谐波电流分量，假设只有基波电流分量被带通滤波器保留下来而其他频率分量被滤除，于是 N 型负阻加带通滤波器被视为准线性负导，准线性负导$-\overline{g_n}$和激励电压峰值幅度 V_m 的关系为$\overline{g_n}$=(　　　　　　　)。

solution:

$$\text{线性负导} - g_{n0}\text{的大小即为}v\text{极小时候的微分电导：}G$$

$$\text{当}V_m\text{很大时，带入激励电压表达式（}V_m\cos\omega t\text{）：}$$

$$\begin{aligned}
i_{NL}(t) &= -GV_m\cos\omega t + \frac{G}{3V_0^2}(V_m\cos\omega t)^3 \\
&= -GV_m\cos\omega t + \frac{GV_m^3}{3V_0^2}(\frac{3}{4}\cos\omega t - \frac{1}{4}\cos 3\omega t) \\
&\xlongequal{\text{舍去高次谐波分量}} G(\frac{V_m^2}{4V_0^2} - 1)V_m\cos\omega t
\end{aligned}$$

$$\text{再取负值即得到准线性负导}\bar{g_n} = G(1 - \frac{V_m^2}{4V_0^2})$$

振荡条件小结：

RLC串联（S型负阻）：

起振条件：$r_n > R_s$

平衡条件：$r_n = R_s$

稳定条件：r_n随着幅度上升而单调下降

RLC并联（N型负阻）：

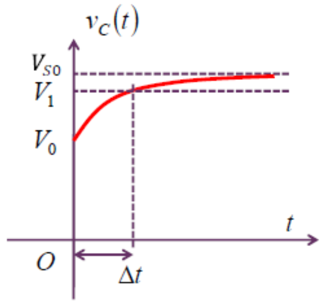
起振条件：$g_n > G_p$

平衡条件：$g_n = G_p$

稳定条件：g_n随着幅度上升而单调下降

振荡器

张弛振荡，电容充放电时间计算：



$$\Delta t = \tau \ln \frac{\overbrace{V_{S0} - V_0}^{\text{终值}-\text{初值}}}{\underbrace{V_{S0} - V_1}_{\text{终值}-\text{转折值}}}$$

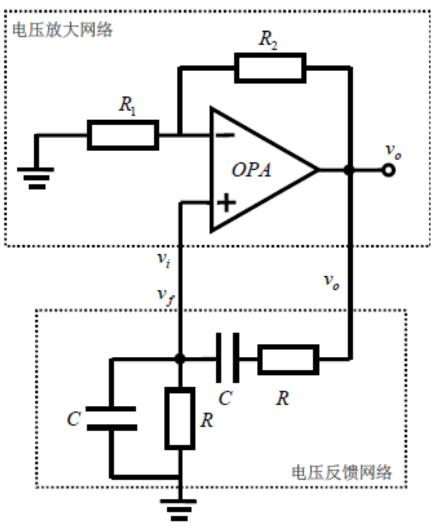
正反馈振荡

起振条件：$A_0 F > 1$，$\varphi_{A_0 F}(\omega_{osc}) = 0$

平衡条件：随着振荡幅度增加，放大器必将进入非线性工作区，其准线性放大倍数必然下降，最终使得AF=1，振荡幅度不再继续增加。只要AF=1，电路中的正弦波信号可以自行维持。反馈网络具有选频作用，使得只有特定的频率ω_{osc}才能满足正反馈条件，从而只有这个特定的频率才能满足起振条件$A_0 F(j\omega_{osc}) > 1$和平衡条件$AF(j\omega_{osc}) = 1$，一般情况下，振荡频率由反馈网络决定

同时也有相位要求：$\varphi_{AF}(\omega_{osc}) = 0$

分析例：（文氏电桥串并正反馈，压控压源）



step0：根据虚短虚断求出开环（电压）增益：$A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

step1：先写出反馈网络传函，由相移为0的条件得到符合条件的振荡频点ω_{osc}（也即“反馈网络的选频作用”）

$$\text{（电压）反馈系数：}F(j\omega)=\frac{R||\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}+R||\frac{1}{j\omega C}} \\ =\frac{j\omega RC}{(1-\omega^2R^2C^2)+j3\omega RC}$$

为了使其为实数（虚部为0，也即没有相移），只能是$1-\omega^2R^2C^2=0\rightarrow\omega_{osc}=\frac{1}{RC}$

step2：将上述得到的ω_{osc}带入$A_0F(j\omega)$，并使其满足起振条件：$A_0F(j\omega)>1$

$$A_0F(j\omega_{osc})=\frac{1}{3}(1+\frac{R_2}{R_1})>1\rightarrow R_2>2R_1$$

最终得到电阻需要满足的关系

若反馈网络复杂，有多个部分级联，则可用$ABCD$矩阵相乘来获得反馈系数F

其中：

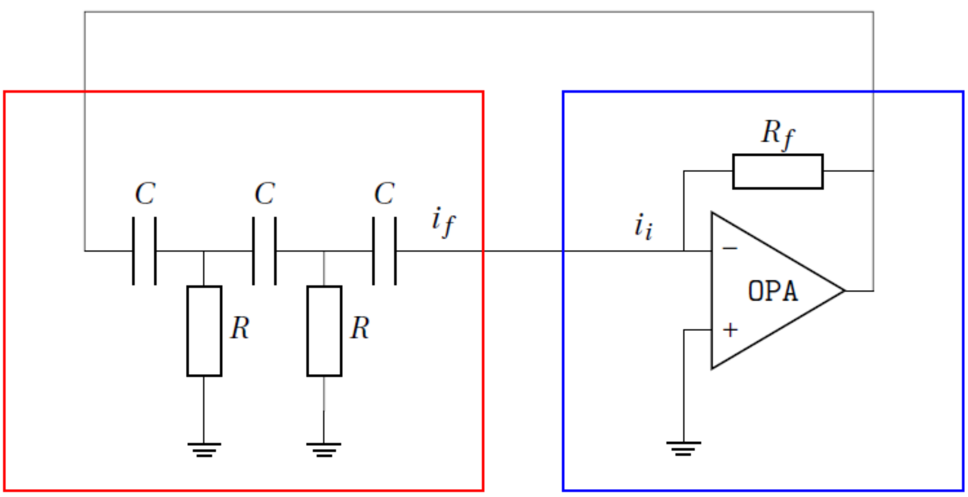
$$\begin{pmatrix}V_1\\I_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_2\\-I_2\end{pmatrix}$$

注：横着的电阻对应的ABCD矩阵为$\begin{pmatrix}1&R\\0&1\end{pmatrix}$

竖着的电阻对应的ABCD矩阵为$\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{R}&1\end{pmatrix}$

电容电感的阻抗可以直接带进R的位置

例如：RC移相正弦振荡器



显然，是并并负反馈，即为流控压源（正向是跨阻增益，反馈是跨导增益）

$$ABCD=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{sC}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{sC}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{sC}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}- & \left(\left(\frac{1}{sRC}\right)^2+\frac{4}{sRC}+3\right)\frac{1}{sC}\\ - & -\end{bmatrix}$$

$$F(j\omega)=G_f=\frac{1}{B}=\frac{sC}{\left(\frac{1}{sRC}\right)^2+\frac{4}{sRC}+3}=\frac{sC\cdot(sRC)^2}{3s^2R^2C^2+4sRC+1}$$

只保留B参量：因为$V_1=BI_2$，那么反馈网络（已经是从后往前的方向）的跨导增益系数即为：$F=\frac{I_2}{V_1}=\frac{1}{B}$

需要F的相移为0，也即虚部为0，即：

$$F(j\omega)=\frac{j\omega C(\omega RC)^2}{(1-3\omega^2R^2C^2)+4j\omega RC}$$
$$\Downarrow$$
$$1-3\omega^2R^2C^2=0$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_{osc}=\frac{1}{\sqrt{3}RC}$$

又由于开环跨阻增益（虚短虚断）为$A_0=\frac{V_o}{I_{in}}=R_f$

因此综上所述，起振需要满足：

$$A_0F=\frac{1}{12}\frac{R_f}{R}>1\rightarrow R_f>12R$$

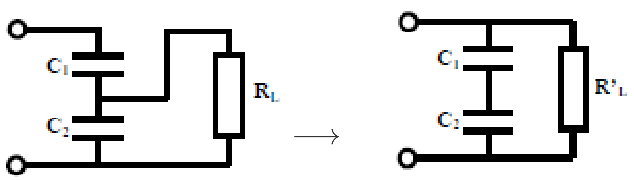
三点式正弦波振荡器

通过弱耦合，使得接入谐振回路的等效负载变大，可有效提高回路Q值

部分接入（条件：局部（并联部分）Q值$\gg 1$）：

部分接入的作用：防止重负载使得谐振腔损耗太大，提高Q值、频率稳定度

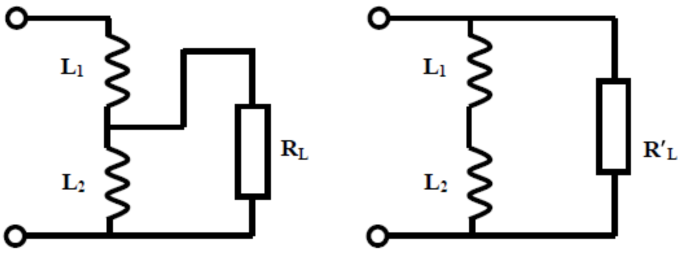
电容部分接入：



（a）部分接入　（e）全接入等效

其中：$R_L'=\frac{R_L}{p^2}$，部分接入系数$p=\frac{C_1}{C_1+C_2}$

电感部分接入：



其中：$R_L' = \frac{R_L}{p^2}$，部分接入系数$p = \frac{L_2}{L_1+L_2}$

eg：

8、（+5）如图 5 所示，这是一个用共基组态 BJT 晶体管实现的电容三点式 LC 正弦波振荡器。如果视共基组态的晶体管为放大网络，将负载电阻 R_L 影响折合到该放大器的输出端口（晶体管 CB 端口），等效负载电阻 R'_L=（　　　　　）kΩ， R_L 部分接入的原因是为了（

）。

假设振荡条件已经满足，该振荡器的振荡频率为 f_0 =（　　　　　　）MHz。

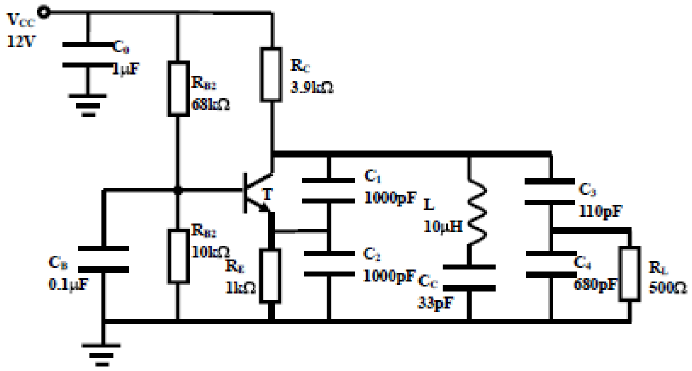


图 5　LC 正弦波振荡器

solution：

1.8　共基组态三点式

R_L折合到放大器输出端口，应该要计算部分接入系数：

$$p = \frac{C_3}{C_3 + C_4} = \frac{110p}{110p + 680p} \approx 0.139$$

按照"功率守恒"原则来放置R_L'：

$$R_L' = \frac{R_L}{p^2} \approx 25.79k\Omega$$

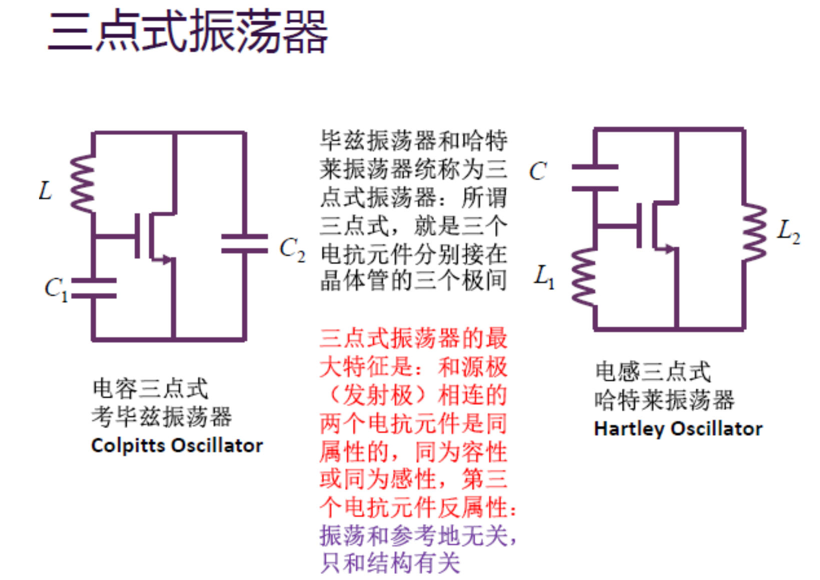
R_L部分接入的原因是 500Ω的负载太重了，使谐振腔损耗变大，Q 值、频率稳定度下降甚至不能起振。因此改为部分接入，从而提高 Q 值、频率稳定度，使得振荡器容易起振。

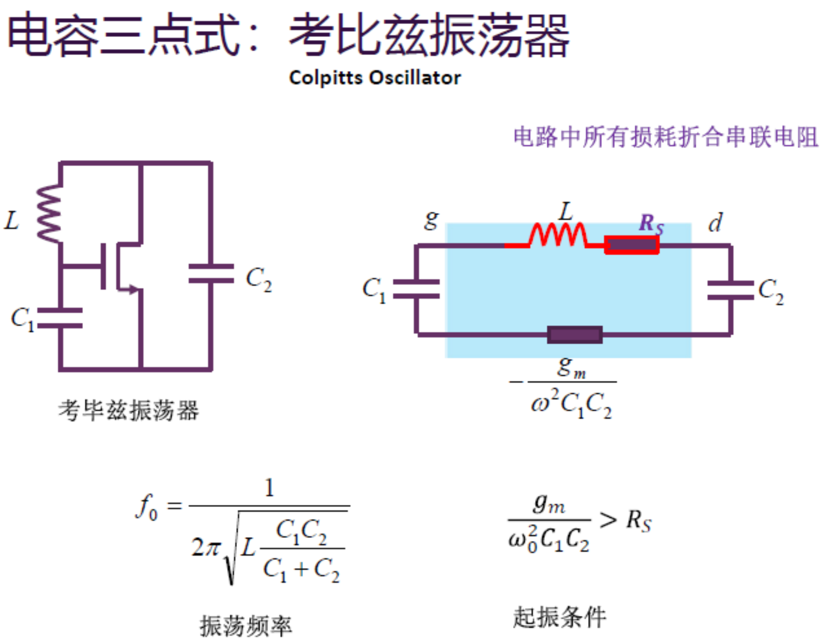
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_\Sigma}}, \qquad C_\Sigma = \big((C_1 \parallel C_2) + (C_3 \parallel C_4)\big) \parallel C_c \approx 31.265pF$$

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{10\mu \times 31.265p}} \approx 9.00MHz$$

（注：这里计算三点式振荡器的频率时，就是用的LC谐振腔的公式。电容是电感L看到的电容（L和总C形成一个环路：谐振腔）。解析里边的||是串联，意思是按照并联计算规则计算该部分总电容）

所谓三点式振荡器就是三个电抗元件分别接在晶体管的三个极之间。三点式振荡器的最大特征是：**和源极（发射极）相连的两个电抗元件是同属性的，同为容性或同为感性，第三个电抗元件反属性**。振荡与参考地无关，只与结构有关。电容三点式振荡器是Colpitts 振荡器，电感三点式振荡器是Hartley 振荡器。





起振条件：$g_m > \frac{G_p}{p(1-p)}$，其中G_p是电路中所有损耗折合的等效电导，p是接入系数（跨导器等效电导必须足够大，足以抵消电路中损耗折合的等效电导）

三点式振荡器的振荡频率就是$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，只不过这里边的L、C都是等效谐振腔中的总电感总电容

附录：Laplace变换求解阶跃响应和冲激响应

1

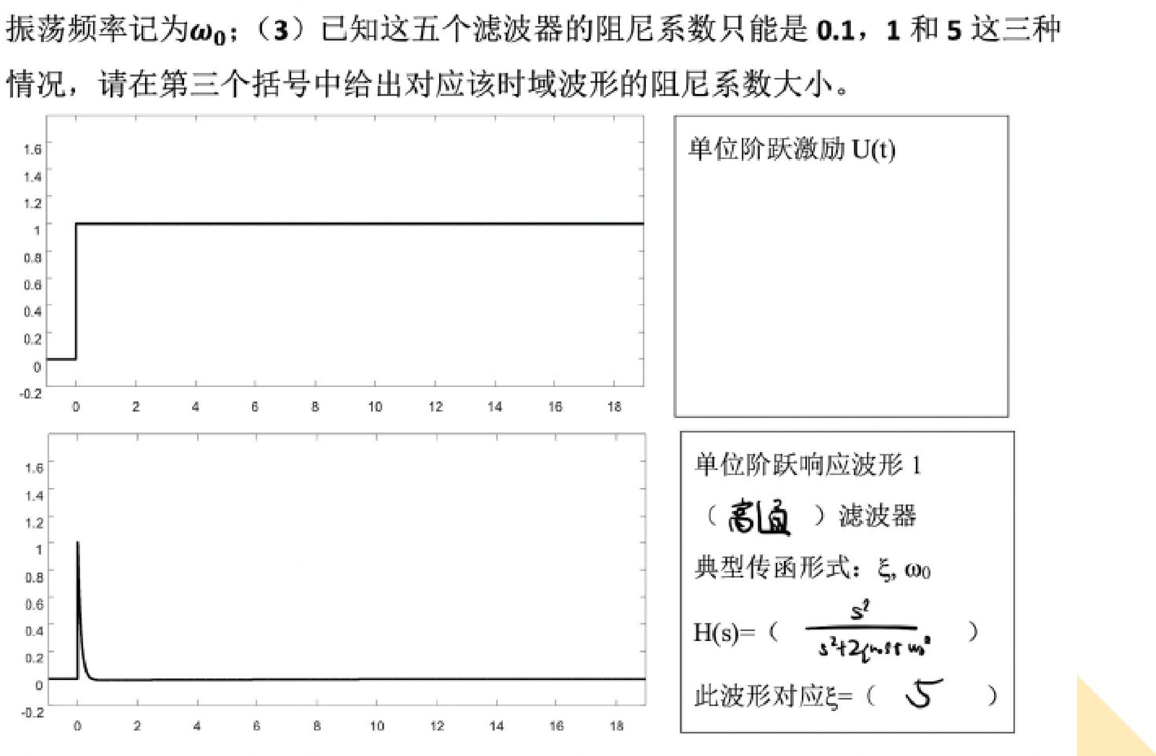
Laplace变换求解冲激响应和阶跃响应图像

$$f(0+) = \lim_{p\to\infty} p\bar{f}(p)$$

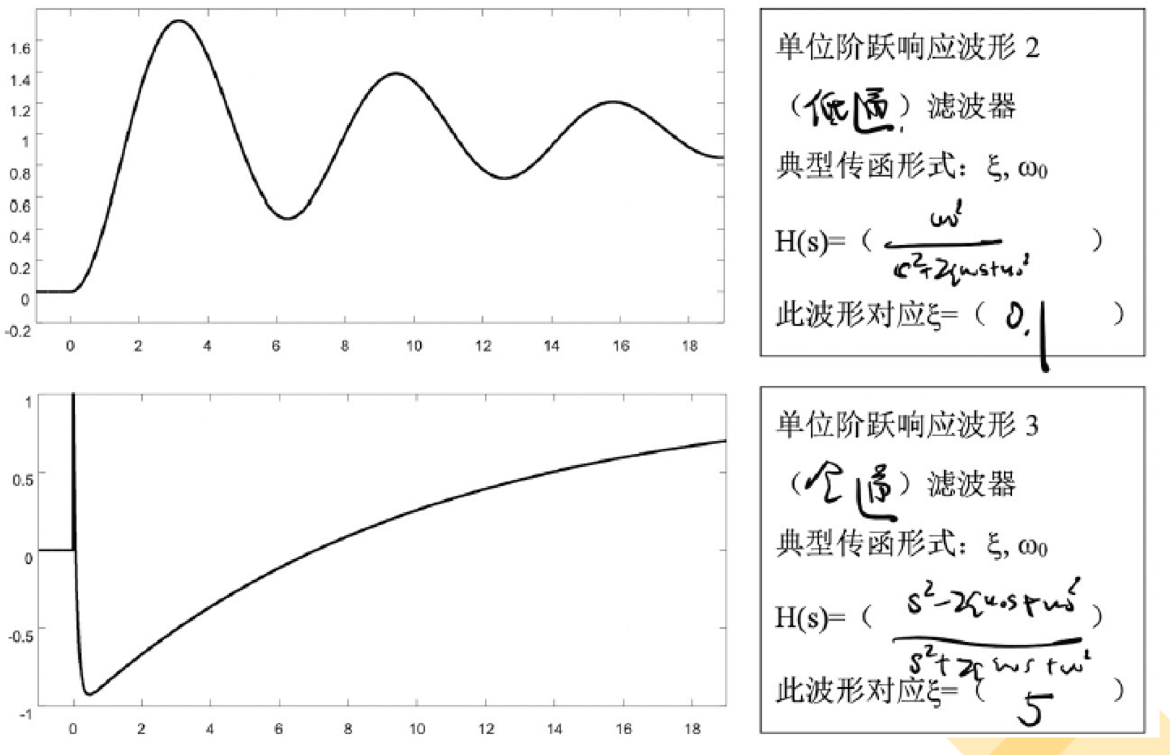
$$f(\infty) = \lim_{p\to 0} p\bar{f}(p)$$

给出传函H（s），选择对应的冲激响应和阶跃响应图像

eg:

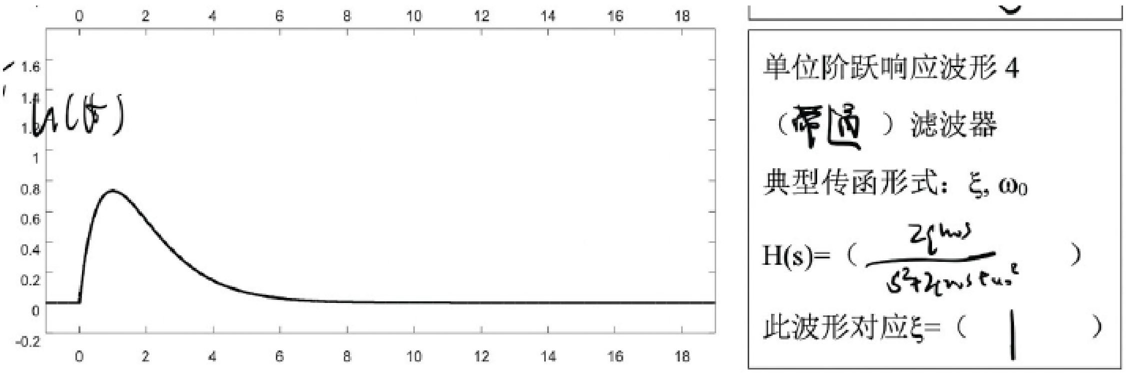


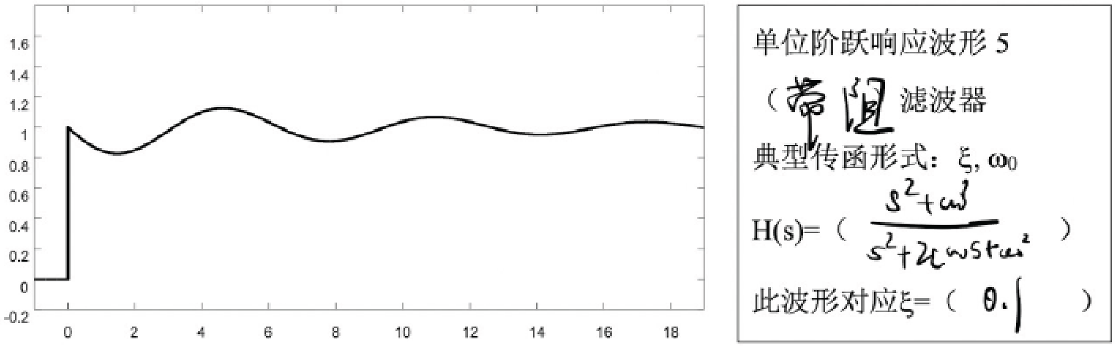
(1) 0时刻：$f(0+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$，$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=0$（高通符合）



(2) $f(0+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=0$，$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$（低通符合）

(3)$f(0+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$，$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$（全通符合）





(4) $f(0+)=\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s}H(s)=0$，$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}H(s)=0$（带通符合）

(5) $f(0+)=\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$，$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}H(s)=1$（带阻符合）

laplace变换，看初值、看终值、看变化趋势（衰减、振荡）

设$h(t)$为时域下的冲激响应，$g(t)$为时域下的阶跃响应

因为有：$H(j\omega)=H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{dt}$

（时域积分$\rightarrow$ 频域 $\div\, j\omega$）

因此有：

冲激响应：$H(s)\rightarrow h(t)$(直接逆变换)

阶跃响应：$\frac{1}{s}H(s)\rightarrow g(t)$（除以s再逆变换或者用初值终值定理）

eg:频域传函：

$$H(s)=\frac{1}{s+\omega_0}$$

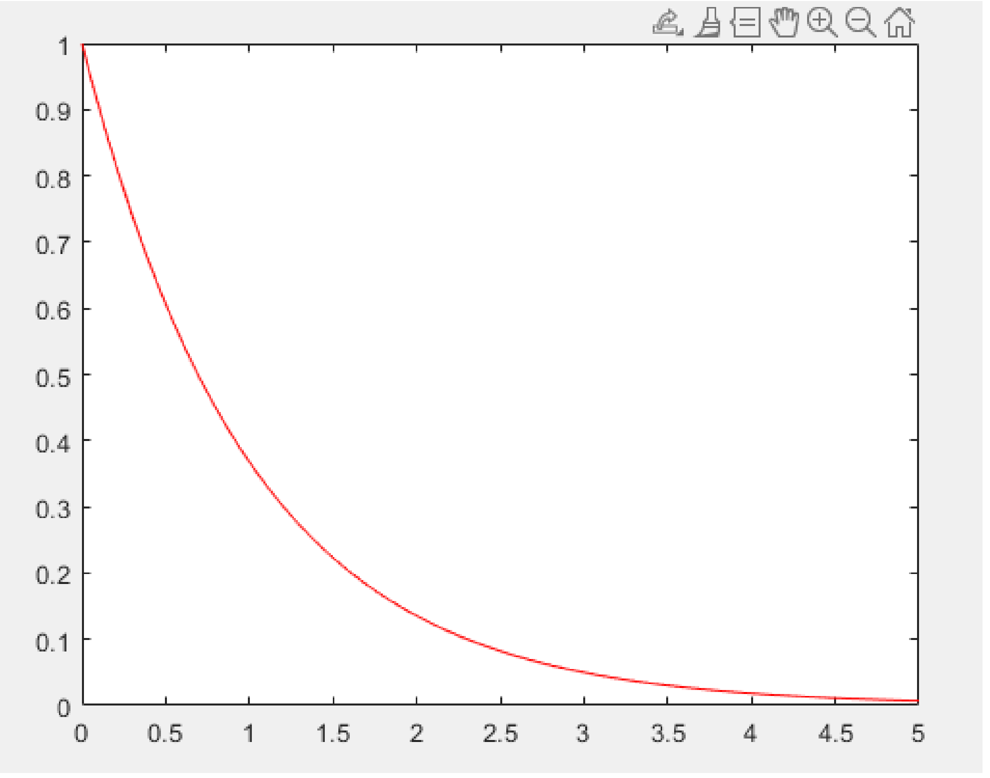
冲激响应：

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(H(s))=e^{-\omega_0 t}$$

直接看出时域的初值和末值：

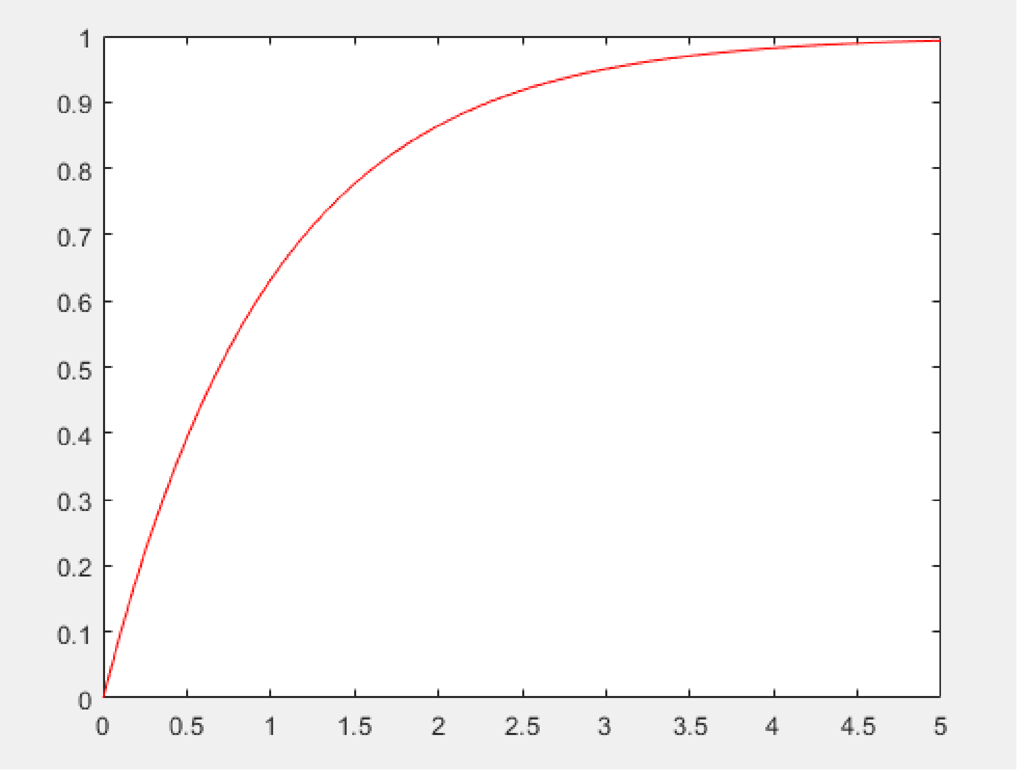
$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=1$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sH(s)=0$$



阶跃响应：

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}H(s)\cdot s=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s+\omega_0}=0$$
$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}H(s)\cdot s=\frac{1}{\omega_0}$$



- eg1:已知阻尼系数ξ<1, 请给出电流源为$i_s(t)=I_{S0}$下的电阻电压表达式$v_R(t)$

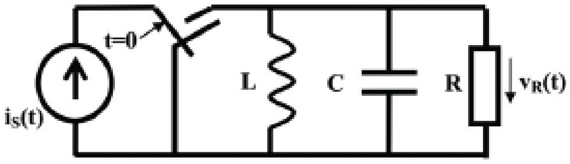


图 1　RLC 并联谐振电路

$$\because \text{是带通的}$$

$$\therefore \text{（频域）传递函数} H(s) = \frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \text{（电压传递函数）}$$

$$\frac{1}{s}H(s) = \frac{2\xi\omega_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\therefore (\text{时域})\text{阶跃响应} g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}H(s)]$$

$$\text{将} \frac{1}{s}H(s) \text{分母配方}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{s}H(s) = \frac{2\xi\omega_0}{(s+\xi\omega_0)^2 + (1-\xi^2)\omega_0^2}$$

$$= \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\xi^2}\omega_0}{(s+\xi\omega_0)^2 + (1-\xi^2)\omega_0^2}$$

$$(\text{凑出} \mathcal{L}[sinkt] = \frac{k}{p^2+k^2} \text{形式})$$

$$\text{这里} p = p + \xi\omega_0 (\text{有位移})$$

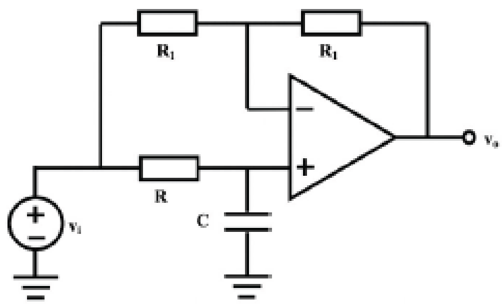
$$\therefore g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}H(s)] = v_R(t)$$

$$\text{也即：} v_R(t) = \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t) \cdot U(t)$$

$$\text{结合题干条件，给的是电流}$$

$$\therefore v_R(t) = I_{S0}R\frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t) \cdot U(t)$$

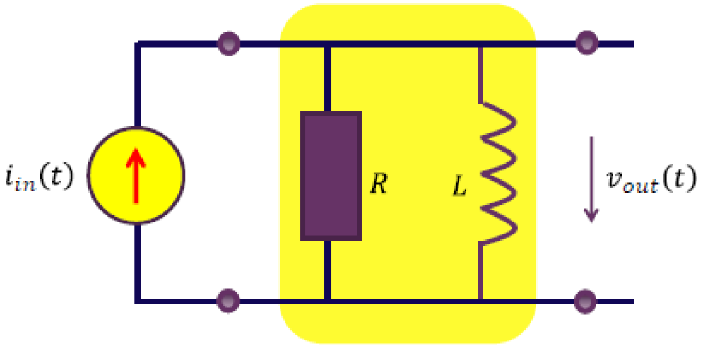
- eg2：计算得传递函数:$H(s) = \frac{1-sRC}{1+sRC} = \frac{1-\frac{s}{\omega_0}}{1+\frac{s}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 - s}{\omega_0 + s}$



$$\text{则该系统单位阶跃响应：}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}H(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+\omega_0}) = (1-2e^{-\omega_0 t})U(t)$$

- eg3:



- 请对左侧一阶RL电路进行时频分析
  - 分析频域跨阻传递函数，说明低通高通类型
  - 时域跨阻冲激响应、阶跃响应分析（三要素法）
  - 验证阶跃响应的微分等于冲激响应
  - （选作）验证冲激响应的傅立叶变换为传递函数

(1)

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}}{\dot{I}_{in}}=\frac{\frac{R}{j\omega L+R}\cdot I_{in}\cdot j\omega L}{I_{in}}=R\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}=H_o\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

其中：

$$\tau=\frac{L}{R},\quad H_0=R,\quad f_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

也即为高通

（2）

由跨阻传递函数：

$$H(s)=R\frac{s\tau}{1+s\tau}$$
$$\frac{1}{s}H(s)=R\frac{\tau}{1+s\tau}$$

因此有：

冲激响应：

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[R\frac{s\tau}{1+s\tau}\right]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[R\left(1-\frac{1}{\tau}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right)\right]\\&=R\delta(t)-\frac{R}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\end{aligned}$$

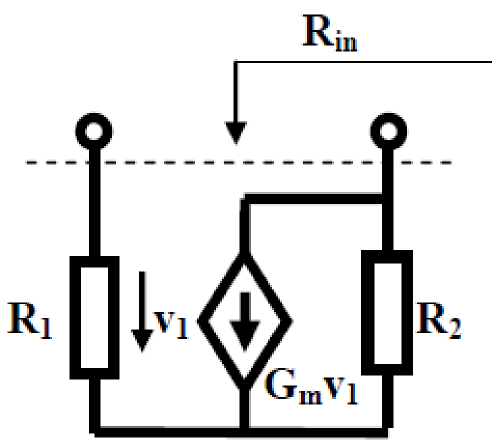
阶跃响应：

$$\begin{aligned}g(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[R\frac{\tau}{1+s\tau}\right]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[R\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right]\\&=Re^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\end{aligned}$$

并且有：阶跃响应在时域的微分为冲激响应：$\frac{d}{dt}g(t)=h(t)$

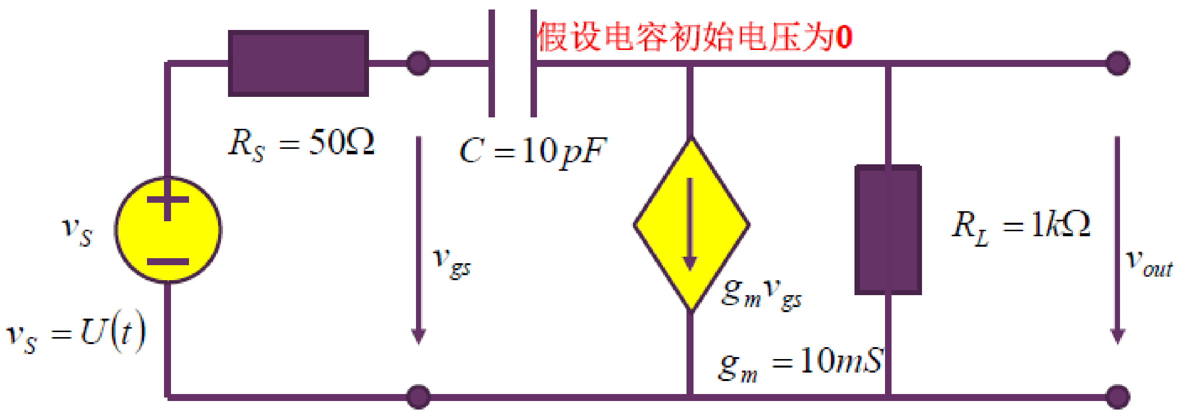
等效阻抗

- 一、



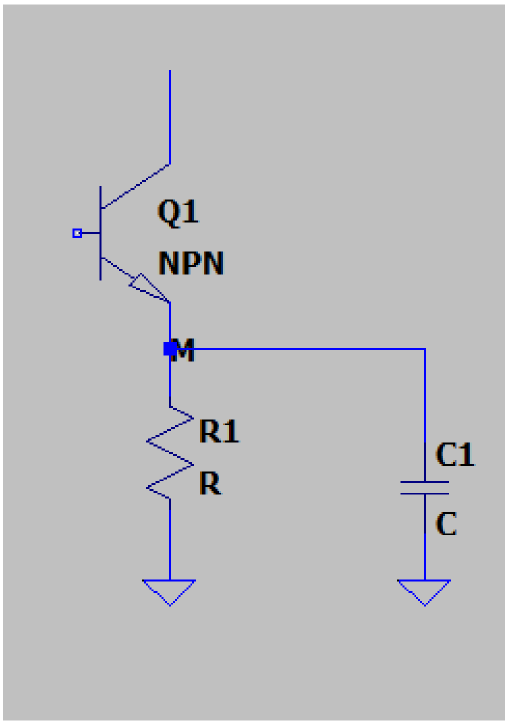
$$R_{in} = R_1 + R_2 + G_m R_1 R_2$$

eg：



则电容看见等效$R = R_S + R_L + g_m R_S R_L$，可进一步求出$\tau = RC$

- 二、



M点向上看去的等效阻抗为$\frac{1}{g_m}$，也即在C看来等效为：