复变函数&&数理方程

By wln,2022.1

复变函数&&数理方程
- 复变期中REVIEW
  - 复数计算
  - 初等复变函数
  - C-R条件
  - 复变函数积分
  - 幂级数
  - 留数定理
    - 留数定理的应用
  - Fourier变换和Laplace变换
    - Fourier变换及常用性质
    - δ函数
    - Laplace变换
- 数理方程
  - 特征线法
  - 一维波动方程初值问题
    - 齐次化原理应用
  - 一维半无界问题
  - 高维无界初值问题
  - 热传导方程和积分变换法
  - 位势方程和Green函数法
  - 分离变量法（齐次）
    - 一般齐次问题
  - 非齐次问题
    - 非齐次波动方程
    - 位势方程的讨论
  - Bessel函数
    - Bessel函数的基本问题
    - Bessel方程的特征值与特征函数
    - Bessel特征函数系的正交性和模值
    - 特征值问题的级数展开解
    - Bessel函数与分离变量法
  - Legendre多项式

readme.txt

复变期中REVIEW

By wln,2021.11

复数计算

- $$z = x + iy \quad \text{则：}$$
  $$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

  eg:用复变量表示过$1+3i$和$-1+4i$的直线:

$$\text{过}(1,3)\text{和}(-1,4)\text{的直线为}: x+2y-7=0$$
$$\text{将}x,y\text{用}z\text{替换即}:$$
$$\frac{1}{2}(z+z^*)+\frac{1}{i}(z-z^*)-7=0$$

- 注意：

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}$$
$$\text{开}n\text{次方时有}:$$
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,\cdots n-1$$

eg:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{1+i}\\
&=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}\\
&=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}\cdot e^{k\frac{\pi i}{2}}\\
&=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}\cdot(1/i/-1/-i)
\end{aligned}$$

初等复变函数

$$\text{令}z=x+iy\quad\text{有:}$$
$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$
$$\ln z=\ln|z|e^{iArgz}=\ln|z|+iArgz=\ln z+i(argz+2k\pi)$$
$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$
$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+z^{-iz})$$
$$z^s=e^{s\ln z}=e^{s(ln|z|+iArgz)}$$

C-R条件

- $f(z)=u+iv$可导(微)的充要条件:
  - $u(x,y)$和$v(x,y)$可微
  - 满足$C-R$条件:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad or\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

  （其中：$z=x+iy=\rho e^{i\varphi}$）

- 复变函数的导数:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

- 解析函数：若f(z)在z_0以及其邻域上处处可导，则f(z)在z_0点解析

  若$f(z)=u+iv$在区域B上解析，则u,v均为B上的的调和函数:

  (常用于和$C-R$条件结合，给定u或v,积分求v或u)

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}\quad or\quad \begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial v}{\partial \rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}=0\end{cases}$$

eg：已知解析函数f(z)的实部u(x,y)或虚部v(x,y)，求该解析函数

（1）$u = e^x \sin y$

先验证解析函数条件（实际上对求结果没什么用）：调和函数为0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

然后利用C-R条件，求出虚部v的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

再积分获得v表达式：

$$\begin{aligned} v(x_0, y_0) &= \int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} -e^x \cos y \, \mathrm{dx} + e^x \sin y \, \mathrm{dy} \\ &= \int_{(0,0)}^{(x_0,0)} + \int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} \\ &= -e^{x_0} \cos y_0 + C \end{aligned}$$

由此得到f(z)：

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \sin y - ie^x \cos y + iC \\ &= -ie^{x+iy} + iC \\ &= -ie^z + iC \end{aligned}$$

（2）$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

转化为极坐标形式：

$$u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\rho^2 \cos 2\varphi}{\rho^4} = \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}$$

验证调和函数=0，略

然后根据极坐标C-R条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} = -2\rho^{-3} \cos 2\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{2 \sin 2\varphi}{\rho^2} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{aligned}$$

然后积分获得虚部v：

$$\begin{aligned} v(\rho_0, \varphi_0) &= \int_{(0,0)}^{(\rho_0,\varphi_0)} 2\rho^{-3} \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\rho - 2\rho^{-2} \cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{(0,0)}^{(\rho_0,0)} + \int_{(\rho_0,0)}^{(\rho_0,\varphi_0)} \\ &= -\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + C \end{aligned}$$

由此得到f(z)：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2} - i\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + iC \\
&= \frac{1}{(\rho e^{i\varphi})^2} + iC \\
&= \frac{1}{z^2} + iC \\
&\xlongequal{f(\infty)=0 \to C=0} \frac{1}{z^2}
\end{aligned}
$$

复变函数积分

- 单连通区域柯西定理:

  若f(z)在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，则沿$\bar{B}$上任一分段光滑闭合曲线l有：

$$\oint_l f(z)\mathrm{dz} = 0$$

- 复连通区域柯西定理：

  若f(z) 是复连通区域$\bar{B}$中的单值解析函数，则:

$$\oint_l f(z)\mathrm{dz} + \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\mathrm{dz} = 0$$

  其中l为区域外边界线，l_i为区域内边界线，积分方向均沿边界线正向

- 柯西积分公式:

  若f(z)在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，l为B的边界线，z为B内任意一点，则有:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

  (若f(z)在l所围区域上存在奇点，则需考虑挖去奇点后的复连通区域，并将l理解为所有边界线，且均取正向)

  - 推论（n阶导数）:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

  - 常用来求取环路积分：构造f(ζ)、z_0，求得:

$$\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} = 2\pi i f(z_0) \quad or \quad \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$$

应用例：

$f(z)$在z_0为圆心的圆内解析，则在圆内任意点可以展开为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

其中$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$

证明：将柯西积分公式展开

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

幂级数

- 以z_0为中心的幂级数:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

收敛半径：

$$R=\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}| \quad or \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

对应收敛圆为:

$$|z-z_0|=R$$

- 常用的级数展开:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$$

$$\star(1+x)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{k!}x^k$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots, \quad x\in(-1,1)$$

$$(\text{注意利用}\frac{1}{1-*}\text{时要把}*\text{整到}(-1,1)\text{范围内})$$

- 洛朗级数:即在挖去研究区域奇点的环域上展开

  给了谁的范围，就是对谁进行展开，应该尽可能凑出它的形式，并尽可能置于标准形式的自变量“x”位置。注意转化为已知的标准形式（“x”位置在展开点z_0处应该是一个趋于0的东西或者在收敛圆内的东西等），可以利用先求导/积分再展开、分别展开、裂项后再展开等

  eg1：

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z^2(z+i)}, \quad 0<|z+i|<1\\&=(z+i)^{-1}\frac{1}{(z+i-i)^2}\\&=(z+i)^{-1}\left[\frac{1}{i-(z+i)}\right]'_{(z+i)}\end{aligned}$$

  对于求导项展开：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i-(z+i)} &= \frac{1}{i}\frac{1}{\color{red}1-(\frac{z+i}{i})} \\
&= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z+i}{i})^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{k+1}(z+i)^k
\end{aligned}
$$

再求导、合并即可

eg2：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \ln z,\ z_0=2 \\
&= \ln(z-2+2) \\
&= \ln 2\left({\color{red}1+\left(\frac{z-2}{2}\right)}\right) \\
&= \ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\cdot 2^k}{\color{red}(z-2)^k}
\end{aligned}
$$

- 对在z_0展开式的负幂项有三种情况：

$$
\begin{cases}
(1)\text{无负幂项：}z_0\text{为可去奇点} \\
(2)\text{有有限个负幂项：}z_0\text{为极点} \\
(3)\text{有无限个负幂项：}z_0\text{为本性奇点}
\end{cases}
$$

eg:

$$
\begin{aligned}
&z_0=0, f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots,\ \text{则}z_0\text{为可去奇点} \\
&z_1=1, z_2=-1, f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)},\ \text{则}z_1\text{为二阶极点，}z_2\text{为单（一阶）极点} \\
&z_0=0, f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!\cdot z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots,\ \text{则}z_0\text{为本性奇点}
\end{aligned}
$$

留数定理

- 留数:$f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$中，$(z-z_0)^{-1}$的系数$a_{-1}$称为$f(z)$在$z_0$的留数，即$Resf(z_0)$
- 留数定理：设$f(z)$在回路l所围区域B上，除有限个孤立奇点$z_1,z_2,\cdots z_n$外解析，在闭区域$\bar{B}$上除了$z_1,z_2,\cdots z_n$外连续，则环路积分：

$$
\oint_l f(z)\mathrm{dz}=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(f(z_k))
$$

（也即：被积函数的环路积分等于该回路所围奇点的留数之和乘以$2\pi i$）

（直接套用留数定理，可以替代柯西积分公式计算环路积分）

- 求在极点z_0的留数的方法（mostly used）：
  - (1)(单极点)

$$
\begin{aligned}
&\text{若}\lim_{z\to z_0}((z-z_0)f(z))\neq 0 \\
&\text{则：}Res(f(z_0))=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}((z-z_0)f(z))
\end{aligned}
$$

  - (2)(n阶极点)（若出现$\frac{0}{0}$，可以通过洛必达直到出现$\frac{C}{0}$，消去分子分母共同的阶数，来判断阶数，见类型3 eg2）

$$Res(f(z_0))=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{\mathrm{d^{n-1}}}{\mathrm{dz^{n-1}}}((z-z_0)^nf(z)))$$

$$（注：是先求完n-1阶导再z\to z_0）$$

⋆注：以上出来分式时，善用洛必达

- 本性奇点留数:展开后用定义求，如：

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-k}(z-1)^k}{(-k)!}$$

$$z_0=1为本性奇点$$

$$Res(f(z_0))=a_{-1}=-1$$

综上：运用留数定理求换积分的步骤：求出极点，并取出符合范围要求的极点（具体见以下四种类型），然后根据这些极点的阶数求f（z）在它们处的留数，然后再加起来并乘以$2\pi i$

留数定理的应用

- **类型1:**

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\mathrm{dx}$$

$$替换(z=e^{ix})\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})\\ \sin x=\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\\ \mathrm{dx}=\frac{\mathrm{dz}}{iz}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$I=\oint_{|z|=1}R(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1}))\frac{\mathrm{dz}}{iz}$$

注意：当原题中积分区间是$0\sim\pi$时，可以使用变量替换$t=2x$，把积分区间变成$0\sim 2\pi$，再利用二倍角公式等。对于高次三角函数，善用倍角公式。

eg:

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\pi}\frac{a\mathrm{dx}}{a^2+\sin^2x}&=\int_0^{\pi}\frac{2a\mathrm{dx}}{2a^2+1-\cos 2x}\\&\xlongequal{t=2x}\int_0^{2\pi}\frac{2a\cdot\frac{1}{2}\mathrm{dt}}{2a^2+1-\cos t}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{a\mathrm{dx}}{2a^2+1-\cos x}\\&\xlongequal{z=e^{ix}}\oint_{|z|=1}\frac{a}{2a^2+1-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{\mathrm{dz}}{iz}\\&=2ai\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1}\mathrm{dz}\end{aligned}$$

也即存在单极点：

$$z_1=(2a^2+1)-2a\sqrt{a^2+1}$$
$$z_2=(2a^2+1)+2a\sqrt{a^2+1}$$

其中：z_1**在**$|z|=1$**包围内。**

令$f(z)=\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1}$（也即被环路积分的函数）

其留数为：

$$Res(f(z_1)) = \lim_{z \to z_0}((z - z_2)f(z_2)) = \frac{1}{-4a\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I &= 2ai \cdot 2\pi i \cdot Res(f(z_1)) \\
&= -4\pi a \cdot \frac{1}{-4a\sqrt{a^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}
\end{aligned}$$

eg2：注意，如果积分区间是$0 \sim \pi/2$，而且难以转化到$0 \sim 2\pi$区间上，那它实际上并非是类型1，而是应该用tan换元转化成下边的类型

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta \\
&\Downarrow t = \tan\theta,\ \sin^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2},\ d\theta = \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2t^2+1} \mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2t^2+1} \mathrm{dt} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

- **类型2:**

  f(z)在**实轴上无奇点**，在**上半平面内除了有限个奇点**外是解析的，当z在上半平面及实轴上$\to \infty$时，zf(z)一致$\to 0$，则:

  $$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{z_0 \in \{\text{上半平面奇点全体}\}} Resf(z_0)$$

  注意：若原题中积分区间是$0 \sim \infty$，则可以利用偶函数的性质转化到$-\infty \sim \infty$上

  eg：

  (a,b>0)

  $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} = \frac{\mathrm{dx}}{(z+ai)^2(z-ai)^2(z+bi)(z-bi)}$$

  其**上半平面存在两个极点(注意只需要上半平面极点)**：

  $$\begin{aligned}
  z_1 &= bi\ (\text{单极点}) \\
  z_2 &= ai(\text{二阶极点})
  \end{aligned}$$

  其留数为：

  $$Res(f(z_1)) = \frac{1}{(b+a)^2(-1)\cdot(b-a)^2(-1)\cdot 2bi} = -\frac{i}{2b(a^2-b^2)^2}$$

  $$Res(f(z_2)) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\frac{1}{(z+ai)^2(z+bi)(z-bi)}\right) = \frac{(3a^2-b^2)i}{4a^3(a^2-b^2)^2}$$

  因此：

  $$\begin{aligned}
  I &= 2\pi i\left[Res(f(z_1)) + Res(f(z_2))\right] \\
  &= \frac{\pi(2a^3+b^3-3a^2b)}{2a^2b(b^2-a^2)^2}
  \end{aligned}$$

- **类型3**：f,g在**实轴上没有奇点**，在**上半平面内除了有限个奇点**外是解析的，当z在上半平面及实轴上$\to \infty$时，f,g一致$\to 0$，让求的是乘以了一个三角函数的$0 \sim \infty$的积分则:

$$I_1=\int_0^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{dx}\quad (f(x)\text{为偶})$$
$$I_2=\int_0^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{dx}\quad (f(x)\text{为奇})$$
只需把cos、sin写成复数形式来替换：

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\infty} f(x)\cdot\frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})\mathrm{dx}\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}\mathrm{dx}\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{imz}\mathrm{dz}\\&\Downarrow\text{然后再当成普通积分来算}\\&=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\sum Res(f(z_0)e^{imz_0})\\&=\begin{cases}\pi i\sum_{z_0\in\{\text{上半平面奇点全体}\}}Res(f(z_0)e^{imz_0})\quad(m>0)\\-\pi i\sum_{z_0\in\{\text{下半平面奇点全体}\}}Res(f(z_0)e^{imz_0})\quad(m<0)\end{cases}\end{aligned}$$

$$I_2\text{同理随手推}=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{imz}\mathrm{dz}$$
$$(\text{注意}m<0\text{时取下半平面奇点和变号})$$
$$(\text{注意：若出现了实轴上的极点，乘以的是}\pi i\text{，详见该类型}eg1\text{以及类型}4)$$

（总之，遇到三角函数，则转化成指数形式）

1**eg1:**

(a>0)

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\mathrm{dx}&=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\mathrm{dz}\\&=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z(z-ai)(z+ai)}\mathrm{dz}\end{aligned}$$

其存在一个上半平面单极点$z_1=ai$，以及**一个实轴上的单极点**$z_0=0$

其留数为：

$$Res(f(z_0))=\lim_{z\to z_0}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}=\frac{1}{a^2}$$
$$Res(f(z_1))=\lim_{z\to z_1}\frac{e^{imz}}{z(z+ai)}=-\frac{e^{-ma}}{2a^2}$$

因此：

$$I=2\pi i\cdot Res(f(z_1))+\pi i\cdot Res(f(z_0))=\frac{\pi}{2a^2}-\frac{\pi e^{-ma}}{2a^2}$$

1**eg2:**

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2} dx \\
&\xlongequal{\text{偶函数}} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2} dx \\
&\xlongequal{\text{转为复数域}} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix})}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{2ix}}{x^2} dx \\
\text{令} f(z) &= \frac{1-e^{2iz}}{z^2}, \text{通过洛必达确定极点} z_0 = 0 \text{的阶数：} \\
&\xlongequal{\text{洛}} \frac{-2ie^{2iz}}{2z} \\
&\text{也即求了一阶后变成了} \frac{C}{0} \text{形式，消去了分母零点} \\
&\text{这说明原先分子零点是1阶，分母极点是2阶，二者抵消一阶，剩下单纯的一阶极点} \\
&\text{因此存在实轴上的单极点} z_0 = 0 \\
Res(z_0) &= \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = -2i \\
\therefore I &= \pi i \cdot \frac{1}{4}(-2i) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

- **类型4:**

  ……，**实轴上有有限个单极点**，则：

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{z_0 \in \{\text{上半平面奇点全体}\}} Resf(z_0) + \pi i \sum_{\alpha \in \{\text{实轴上奇点全体}\}} Resf(\alpha)
$$

也即：上半平面的奇点乘以$2\pi i$，下半平面奇点乘以πi，参见类型3的eg1↑

Fourier变换和Laplace变换

Fourier变换及常用性质

- Fourier变换(以及反演):

$$
\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{dx}
$$
$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega
$$

  注：用定义求某个傅里叶变换时，**对于sin和cos，应该转为e指数形式再计算**。并且计算这个广义积分的时候，常用**留数定理**，见eg4

- 常用性质：
  - 平移性质：

$$
\mathcal{F}[f(x \pm x_0)] = e^{\pm i\omega x_0} \mathcal{F}[f(x)] \quad (\text{时域平移})
$$
$$
\mathcal{F}[f(x) e^{\pm i\omega_0 x}] = \hat{f}(\omega \mp \omega_0) \quad (\text{频域平移})
$$

$$
\text{注：} \hat{f}(\omega + \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\omega+\omega_0)x} \mathrm{dx}
$$

- 相似性质：

$$\mathcal{F}[f(kx)] = \frac{1}{|k|}\hat{f}(\frac{\omega}{k}) \quad (\text{位置空间拉伸})$$

- 微分性质和积分性质：

$$\mathcal{F}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)] = i\omega\cdot\mathcal{F}[f(x)] \quad (\text{时域求导} \to \text{频域}\cdot i\omega)$$
$$\mathcal{F}[\int^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi] = \frac{1}{i\omega}\cdot\mathcal{F}[f(x)] \quad (\text{时域积分} \to \text{频域} \div i\omega)$$
$$\mathcal{F}[xf(x)] = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega)$$

- 卷积性质:
  - 卷积:$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi$1

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}[f_1(x)]\cdot\mathcal{F}[f_2(x)]$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1(\omega)\cdot\hat{f}_2(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_1(x) * f_2(x)$$

（卷积性质在后边积分变换求解方程的时候，常用于逆变换时处理频域的乘法项）

- 常用结论：1

$$1\text{、}\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (\text{分部积分})$$
$$2\text{、}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}I_{|x|\le t}(x) \quad \text{其中}I = \begin{cases}1, |x| \le t\\ 0, |x| > t\end{cases}$$
$$2\text{推广：}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin a\omega t}{a\omega}\right] = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}I_{|x|\le at}(x)$$

δ函数

- 定义：

$$\delta(x) = \begin{cases}0, & x \ne 0\\ +\infty(\text{形式上}), & x = 0\end{cases}$$
$$and$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = \varphi(0), \quad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$
$$(\text{推论：}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{dx} = f(x_0))$$

- 阶跃函数$H(x)$:

$$H'(x) = \delta(x)$$
$$H(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

- 常用性质：
  - $x\delta(x) = 0$
  - $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
  - $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$ （仅在x_0处非0）
  - $\delta(x-x_0) * f(x) = f(x-x_0)$
- 广义傅里叶变换性质:

$$\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\delta}(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega\to\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(x)$$

$$\mathcal{F}[e^{\pm i\omega_0 x}]=\sqrt{2\pi}\delta(\omega\mp\omega_0)\quad \text{特别地有}\mathcal{F}[1]=\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[H(x)]=\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega)$$

- 常用Fourier变换对：

$$\begin{array}{rcl}
\text{时域} & \to & \text{频域} \\
f(x) & \to & \mathcal{F}[f(x)]=\hat{f}(\omega) \\
1 & \to & \sqrt{2\pi}\delta(\omega) \\
\delta(x) & \to & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
H(x) & \to & \dfrac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\delta(\omega) \\
\cos\omega_0 x & \to & \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)) \\
\sin\omega_0 x & \to & -i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)) \\
e^{-\alpha x^2} & \to & \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \\
e^{-\alpha|x|} & \to & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}
\end{array}$$

eg1:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[\cos\omega_0 x] \\
&=\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}] \\
&=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))
\end{aligned}$$

eg2:

$$\mathcal{F}[e^{3ix}]=\sqrt{2\pi}\delta(\omega-3)$$

eg3:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[e^{2ix}H(x-2)] \\
\text{令}\hat{g}(\omega)&=\mathcal{F}[H(x-2)] \\
&=e^{-2i\omega}\mathcal{F}[H(x)] \\
&=e^{-2i\omega}(\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega)) \\
&\therefore \text{原式}=\hat{g}(\omega-2) \\
&=e^{-2i(\omega-2)}(\frac{1}{i(\omega-2)\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-2))
\end{aligned}$$

1 eg4（用定义求）:

$f(x)=\frac{\cos x}{x^2+a^2}, a>0$，求$\hat{f}(\omega)$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}e^{-i\omega x}dx$$
$$\xlongequal{\text{把}cos\text{转为指数式}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix(1-\omega)}}{2(x^2+a^2)}+\frac{e^{-ix(1+\omega)}}{2(x^2+a^2)}$$
$$\xlongequal{g(x)=\frac{1}{x^2+a^2}}\frac{1}{2}(\hat{g}(\omega-1)+\hat{g}(\omega+1))$$

现考察$\hat{g}(\omega)$：

$\omega=0$时：

$$\hat{g}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx\xlongequal{\text{留数定理}}\sqrt{2\pi}i\ Res(g(ai))=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\omega<0$时：

$$\hat{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$\text{由于}-\omega>0\text{，因此取正向积分和上半平面留数}$$
$$\therefore\hat{g}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{a\omega}}{a}$$

$\omega>0$时：同理，由于$-\omega<0$，因此取反向积分和下半平面留数。计算得：

$$\hat{g}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\omega}}{a}$$

综上有：$\hat{g}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|a|\omega}}{a}$

因此原式为：

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}(\hat{g}(\omega-1)+\hat{g}(\omega+1))=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\omega-1|}+e^{-a|\omega+1|}}{2a}$$

Laplace变换

- Laplace变换

$$\bar{f}(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

利用定义求定积分（p=一个具体数）

eg（所用性质见后）：

$$\int_0^{\infty}t^3e^{-t}\sin t\mathrm{d}t$$
$$\text{令}f(t)=t^3\sin t,\ \text{则}\mathcal{L}[f(t)]=-\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}p^3}\frac{1}{p^2+1}=24p(p^2+1)^{-3}-48p^3(p^2+1)^{-4}$$
$$\text{则原式即为带入}p=1$$
$$\text{也即原式}=24\cdot 2^{-3}-48\cdot 2^{-4}=0$$

- 常用性质
  - 平移性质:

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}\bar{f}(p)$$
$$\mathcal{L}[e^{st}f(t)]=\bar{f}(p-s)$$

  - 相似性质:

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\bar{f}(\frac{p}{k}) \quad (k>0)$$

- 微分性质：

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\bar{f}(p) - (p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f^{(1)}(0)+\cdots f^{(n-1)}(0))$$
$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \bar{f}^{(n)}(p)$$

（注意第二条：当要变换的$f(t)$中含有t^n项的时候，应该考虑这个求导性质，如eg2和eg3）

- 积分性质:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau] = \frac{1}{p}\bar{f}(p)$$
$$\int_p^{+\infty}\bar{f}(s)\mathrm{ds} = \mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$$

（当要变换的函数中有$\div t^n$时，可以考虑这个积分性质，如eg4）

- 卷积性质:

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] = \bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p)$$

- 常用Laplace变换对：

$$\begin{aligned}
\text{时域} &\quad \to \quad p\text{域}\\
f(t) &\quad \to \quad \mathcal{L}[f(t)]_{(p)} = \bar{f}(p)\\
1 &\quad \to \quad \frac{1}{p}\\
t &\quad \to \quad \frac{1}{p^2}\\
t^2 &\quad \to \quad \frac{2}{p^3}\\
t^n &\quad \to \quad \frac{n!}{p^{n+1}}\\
e^{at} &\quad \to \quad \frac{1}{p-a}\\
\cos kt &\quad \to \quad \frac{p}{p^2+k^2}\\
\sin kt &\quad \to \quad \frac{k}{p^2+k^2}\\
\delta(t) &\quad \to \quad 1\\
H(t) &\quad \to \quad \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

eg1:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[e^{-3t}\cos 2t]\\
&=\mathcal{L}[\cos 2t]_{(p+3)}\\
&=\frac{p+3}{(p+3)^2+4}
\end{aligned}$$

1

eg2:

$$
\begin{aligned}
&(\text{利用}\bar{f}^{(n)}(p)=\mathcal{L}[(-t)^n f(t)])\\
&\mathcal{L}[te^{-3t}\sin 2t]\\
&=-\mathcal{L}[(-t)e^{-3t}\sin 2t]\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}(\mathcal{L}[e^{-3t}\sin 2t])\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}(\frac{2}{(p+3)^2+4})
\end{aligned}
$$

eg3:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^2+3t+2]&=\mathcal{L}[t^2\cdot 1]+3\mathcal{L}[t\cdot 1]+2\mathcal{L}[1]\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dp}^2}-3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}+2\right)\mathcal{L}[1]\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dp}^2}-3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}+2\right)\frac{1}{p}\\
&=\frac{2p^2+3p+2}{p^3}
\end{aligned}
$$

1

eg4：

$$
\begin{gathered}
\text{求}\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]\\
\text{先求：}\mathcal{L}[1-\cos t]=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}\\
\text{因此：}\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]=\int_p^{\infty}\frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{ds}\\
\text{（后续可用}s=\tan\theta\text{换元等做，参见作业1.32）}
\end{gathered}
$$

数理方程

By wln,2021.12

$$
\begin{aligned}
&\text{波动方程：} && \frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial\mathrm{t}^2}-\mathrm{a}^2\Delta\mathrm{u}=\mathrm{f}\\
&\text{热传导方程：} && \frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\mathrm{t}}-\mathrm{a}^2\Delta\mathrm{u}=\mathrm{f}\\
&\text{位势方程：} && -\Delta\mathrm{u}=\mathrm{f}
\end{aligned}
$$

特征线法

（一阶线性偏微分方程）

- **eg:**

$$
\begin{cases}
2\partial_t u=\partial_x u-xu\\
u(x,0)=2xe^{\frac{1}{2}x^2}
\end{cases}
$$

- **solution:**

  化成标准形式：

$$\begin{cases}\partial_t u-\frac{1}{2}\partial_x u=-\frac{1}{2}xu\\ u(x,0)=2xe^{\frac{1}{2}x^2}\end{cases}$$

提取$\partial_x u$的系数，作为特征线斜率

考虑特征线方程（用x的初值x_0(临时变量)和时间t来表示x，这样就相当于只剩下了一个变量t）：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\\ x(0)=x_0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}t+x_0$$

沿着特征线$x=x(t,x_0)$，$u=u(x(t,x_0),t)$满足（u对t求导，恰好能出来原始形式，并且变成了u关于t的常微）：

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{du(x(t,x_0),t)}{dt}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(t,x_0)}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t}\\&=\partial_t u-\frac{1}{2}\partial_x u\\&\xlongequal{\text{带入题干条件}}-\frac{1}{2}xu\\&=-\frac{1}{2}(x_0-\frac{1}{2}t)u\end{aligned}$$

且有初值：$u(x(0,x_0),0)=2x_0e^{\frac{1}{2}x_0^2}$，所以结合上式，分离变量解出u关于t的常微 有：

$$\int_{2x_0e^{\frac{1}{2}x_0^2}}^{u(x(t,x_0),t)}\frac{du}{u}=\int_0^t-\frac{1}{2}(x_0-\frac{1}{2}t)dt$$
$$\Downarrow$$
$$u(x(t,x_0),t)=2x_0e^{\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}x_0t+\frac{1}{8}t^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{代入}x_0=x+\frac{1}{2}t\text{得：}$$
$$u(x,t)=(2x+t)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

一维波动方程初值问题

($\Box u=\partial_{tt}u-a^2\partial_{xx}u$)

对于一维波动方程初值问题

$$\Box \mathrm{u}=\mathrm{f},\quad \mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\varphi(\mathrm{x}),\quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\psi(\mathrm{x})$$

将其一分为三, 使得每个定解问题中只有一个非齐次项，即

$$\begin{array}{ll}\Box \mathrm{u}_1=0,\quad \mathrm{u}_1(\mathrm{x},0)=\varphi(\mathrm{x}),\quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}_1(\mathrm{x},0)=0 & (1)\\ \Box \mathrm{u}_2=0,\quad \mathrm{u}_2(\mathrm{x},0)=0,\quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}_2(\mathrm{x},0)=\psi(\mathrm{x}) & (2)\\ \Box \mathrm{u}_3=\mathrm{f},\quad \mathrm{u}_3(\mathrm{x},0)=0,\quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}_3(\mathrm{x},0)=0 & (3)\end{array}$$

根据线性叠加原理, 可知初值问题的解为

$$\mathrm{u}=\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2+\mathrm{u}_3$$

- 齐次化原理: 假设 $\mathrm{u}_2=\mathrm{M}_\psi(\mathrm{x},\mathrm{t})$ 给出定解问题 (2) 的解, 因此定解问 题 1 和 3 的解 $\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_3$ 可分别表为（其中 $\mathrm{f}_\tau=\mathrm{f}(\mathrm{x},\tau)$）[1]

$$\mathrm{u}_1=\partial_{\mathrm{t}}\mathrm{M}_\varphi(\mathrm{x},\mathrm{t}),\quad \mathrm{u}_3=\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{\mathrm{f}_\tau}(\mathrm{x},\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau$$

（齐次化原理的严谨证明需要泛函知识。寄，不懂。）

有了齐次化关系之后，只需要求解关于u_2的部分：$\begin{cases}\Box u_2=0\\u_2(x,0)=0\\\partial_t u_2(x,0)=\psi(x)\end{cases}$

推u_2的步骤可参考作业2.3，利用的坐标变换$\begin{cases}\xi=x+at\\\eta=x-at\end{cases}\Rightarrow u=F(x+at)+G(x-at)$，比较易懂。

还可以利用积分变换法（见后），求解$u_2(x,t)$，由于源项是齐次的因此求解比较简洁

课件上用的特征线解法：

根据定理1.1，我们只需给出定解问题(1.4)

$$\Box u_2=0,\quad u_2(x,0)=0,\quad \partial_t u_2(x,0)=\psi(x)$$

的解。根据关系

$$\Box=\partial_{tt}-a^2\partial_{xx}=(\partial_t+a\partial_x)(\partial_t-a\partial_x),$$

因此定解问题(1.4)可分解为

$$\partial_t u_2-a\partial_x u_2=v,\quad u_2(x,0)=0,$$
$$\partial_t v+a\partial_x v=0,\quad v(x,0)=(\partial_t u_2-a\partial_x u_2)\big|_{t=0}=\psi(x)$$

利用特征线法，可得$v(x,t)=\psi(x-at)$，以及

$$\frac{dx}{dt}=-a,\quad x(0)=x_0,$$
$$\frac{du_2}{dt}=v(x(t),t),\quad u_2(x(0),0)=0.$$

由此解得$x(t,x_0)=-at+x_0$以及

$$u_2(x,t)=\int_0^t\psi(-2a\tau+x_0)d\tau=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

求出u_2后，即可根据齐次化原理，通过求导和积分关系推出u_1和u_3

- 最终解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

可以看出，u_1确实是u_2形式的对t导数，u_3确实是u_2形式的对t积分

特别的, 当 $f(x,t)\equiv 0$ 时, 上述表达式称为 $d'Alembert$ 公式。若给出的方程是波动方程，则可直接套公式求解，高维的可以通过齐次化原理化成几个一维的叠加，见eg3、eg4

齐次化原理应用

用于求解定解问题（实际上一二三维波动方程直接套公式也是解决这种问题）。把定解问题分为三个部分解，每个部分解分别满足一个条件，假设y_2已求出为M_φ，则y_1,y_3分别满足求导和积分关系(见上)(也是和映射M相关的)

eg1:

已知$y=\varphi(t)$满足常微分方程初值问题：

$$-y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

试用齐次化原理求解初值问题：

$$-y'' + \lambda y = f(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

1solution:

由线性叠加原理，将原方程的解分解成三部分：

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

且满足：

$$\begin{aligned} &-y_1'' + \lambda y_1 = 0, \quad y_1(0) = a, \quad y_1'(0) = 0 \\ &-y_2'' + \lambda y_2 = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = b \\ &-y_3'' + \lambda y_3 = f(t), \quad y_3(0) = 0, \quad y_3'(0) = 0 \end{aligned}$$

由于$\varphi(t)$满足题干条件$(-y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1)$，因此：

$$\begin{aligned} y_2(t) &= M_{y=b}(t) = b\varphi(t) \\ y_1(t) &= \partial_t M_{y=a}(t) = \partial_t a\varphi(t) = a\varphi'(t) \\ y_3(t) &= \int_0^t M_{y=-f(\xi)}(t-\xi)\mathrm{d}\xi = -\int_0^t f(\xi)\varphi(t-\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

（注意：这里应当将二阶导系数归一，转化为：$y_3'' - \lambda y_3 = -f(t)$）

（可以很不靠谱地理解为：M这个作用，从题干式映射到问题式，由假设可知其在2式中产生了作用：$\varphi'(0) = 1 \to y_2'(0) = b$，也即相应地把解函数从$\varphi(t)$映射到$b\varphi(t)$，那么可以认为$M_h(g)$的作用就是给映射变量下的原函数$\varphi(g)$乘以一个$h$）

综上，把三者的结果线性叠加：

$$y(t) = a\varphi'(t) + b\varphi(t) - \int_0^t f(\xi)\varphi(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

eg2（积分变换与齐次化原理结合）（点击跳转）

ps.类似地，对于一阶问题：$\varphi(t)$满足:$y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 1$。则$y' + \lambda y = f(t), \quad y(0) = 0$的解有形式：$y(t) = \int_0^t f(\xi)\varphi(t-\xi)\mathrm{d}\xi$。事实上一阶变系数非齐次常微可以直接套公式求。证明见作业2.9

1

eg3:

习题 2.13 试求解波动方程初值问题 $(x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\ a > 0)$

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - a^2(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) = t\sin y, \\ u(x,y,0) = x^2, \quad \partial_t u(x,y,0) = \sin y. \end{cases}$$

solution:

自变量解耦：将原方程的解分解成两部分，化成了分别只跟x，y有关的两部分，相当于是两个一维波动方程初值问题。**既然是波动方程那就可以套用公式**

解：根据线性叠加原理，原方程的解可以分解成两部分

$$u(x,t)=v(x,y,t)+w(x,y,t)$$

且它们分别满足

$$\partial_{tt}v-a^2\left(\partial_{xx}v+\partial_{yy}v\right)=0,\quad v(x,y,0)=x^2,\ \partial_t v(x,y,0)=0,$$
$$\partial_{tt}w-a^2\left(\partial_{xx}w+\partial_{yy}w\right)=t\sin y,\quad w(x,y,0)=0,\ \partial_t w(x,y,0)=\sin y.$$

这本质上是两个一维问题，即

$$v(x,y,t)=\widetilde{v}(x,t),\quad w(x,y,t)=\widetilde{w}(y,t),$$

并有

$$\partial_{tt}\widetilde{v}-a^2\partial_{xx}\widetilde{v}=0,\quad \widetilde{v}(x,0)=x^2,\ \partial_t\widetilde{v}(x,0)=0,$$
$$\partial_{tt}\widetilde{w}-a^2\partial_{yy}\widetilde{w}=t\sin y,\quad \widetilde{v}(y,0)=0,\ \partial_t\widetilde{v}(y,0)=\sin y.$$

求解上述方程，得到

$$\widetilde{v}(x,t)=\frac{1}{2}\left((x+at)^2+(x-at)^2\right)=x^2+a^2t^2,$$

以及

$$\begin{aligned}\widetilde{w}(y,t)&=\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\sin\xi\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{y-a(t-\tau)}^{y+a(t-\tau)}\tau\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\&=-\frac{1}{2a}\left(\cos(y+at)-\cos(y-at)\right)-\frac{1}{2a}\int_0^t\tau\left(\cos(y+a(t-\tau))-\cos(y-a(t-\tau))\right)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{t\sin y}{a^2}+\frac{1-a^2}{2a^3}\left(\cos(y+at)-\cos(y-at)\right).\end{aligned}$$

最终再线性叠加即可

eg4：

试求解波动方程初值问题 $(x,y,z\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}^+,\ a>0)$

$$\begin{cases}\partial_{tt}u-a^2\left(\partial_{xx}u+\partial_{yy}u+\partial_{zz}u\right)=0,\\ u(x,y,z,0)=f(x)+g(y),\\ \partial_t u(x,y,z,0)=\varphi(y)+\psi(z).\end{cases}$$

依然是利用自变量解耦，转化成多个一维问题叠加，然后**套用一维波动方程解的公式**：

$$u(\vec{x},t)=\frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at)+g(y+at)+g(y-at))+\frac{1}{2a}\left(\int_{y-at}^{y+at}\varphi(\xi)d\xi+\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi\right)$$

一维半无界问题

$$\begin{cases}\Box u=f(x,t) & 0<x<\infty,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x) & 0\le x<\infty\\ \partial_t u(x,0)=\psi(x) & 0\le x<\infty\\ u(0,t)=g(t)\quad(\text{若是}\partial_x u(0,t)=g(t)\text{则偶延拓}) & t>0\end{cases}$$

方法: 利用 $u(x,t)=v(x,t)+g(t)$ 将**边界条件**齐次化，然后将 $f(x,t),\varphi(x),\psi(x)$ 对 x 进行奇 (偶) 延拓，化为无界初值问题求解

- 以下分析以初始条件$u(0,t)=g(t)$(奇延拓)为例:

对 $f(x,t)$ 作奇延拓（对 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 类似），即

$$\bar{f}(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x\geq 0\\ -f(-x,t), & x<0\end{cases}$$

因此半无界问题 等价于初值问题：

$$\begin{cases}\Box\bar{\mathrm{u}}=\bar{\mathrm{f}}, & -\infty<\mathrm{x}<\infty,\mathrm{t}>0\\ \bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x},0)=\bar{\varphi}(\mathrm{x}), & -\infty<\mathrm{x}<\infty\\ \partial_{\mathrm{t}}\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x},0)=\bar{\psi}(\mathrm{x}), & -\infty<\mathrm{x}<\infty\end{cases}$$

显然, 我们有：

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x},\mathrm{t}),\quad \mathrm{x}\geq 0$$

根据无界一维波动方程解的公式, 可知：

$$\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\frac{1}{2}(\bar{\varphi}(\mathrm{x}+\mathrm{at})+\bar{\varphi}(\mathrm{x}-\mathrm{at}))+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_{\mathrm{x}-\mathrm{at}}^{\mathrm{x}+\mathrm{at}}\bar{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_{\mathrm{x}-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}^{\mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}\bar{\mathrm{f}}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

当 $x\geq at$ 时, 区间 $[0,\infty)$ 可以完全决定 $u(x,t)$ 的解, 则有：

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})=&\frac{1}{2}(\varphi(\mathrm{x}+\mathrm{at})+\varphi(\mathrm{x}-\mathrm{at}))\\ &+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_{\mathrm{x}-\mathrm{at}}^{\mathrm{x}+\mathrm{at}}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_{\mathrm{x}-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}^{\mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

当 $x<at$ 时, 可理解为解到边界发生了反射。 此时应利用奇函数的性质，把此时处于负半轴的部分转换回原先定义在$[0,+\infty)$上的φ、ψ、f上

有：

$$\bar{\varphi}(x-at)=-\varphi(at-x)$$

以及：

$$\begin{aligned}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)d\xi&=\int_0^{x+at}\bar{\psi}(\xi)d\xi+\int_{x-at}^{0}\bar{\psi}(\xi)d\xi\\ &=\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{x-at}^{0}\psi(-\xi)d\xi\\ &=\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi\\ &=\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

类似地，也可对f进行相应转化（推导易出错，直接写答案）

综上即有:

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})=&\frac{1}{2}(\varphi(\mathrm{x}+\mathrm{at})-\varphi(\mathrm{at}-\mathrm{x}))+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_{\mathrm{at}-\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\mathrm{at}}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_{\mathrm{t}-\mathrm{x}/\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}\int_{\mathrm{x}-\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}^{\mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{t}-\mathrm{x}/\mathrm{a}}\int_{\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)-\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

高维无界初值问题

$$\begin{cases}\Box u=\partial_{tt}u-a^2\triangle u=f(\vec{x},t),\vec{x}\in\mathbb{R}^d\\ u(\vec{x},0)=\varphi(\vec{x})\\ \partial_t u(\vec{x},0)=\psi(\vec{x})\end{cases}$$

- 球对称下，n维波动方程的球坐标表示：

$$\Delta u=\partial_{rr}u+\frac{n-1}{r}\partial_r u$$

进而可推出三维波动方程(n=3)的球坐标表示：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0,$$

可写成

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}=0.$$

（也即关于ru的一维波动方程）

- 三维波动方程解（kirchhoff公式）

$$\mathrm{u}(\vec{\mathrm{x}},\mathrm{t})=\partial_{\mathrm{t}}\left(\frac{1}{4\pi\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\iint_{|\vec{\mathrm{y}}-\vec{\mathrm{x}}|=\mathrm{at}}\varphi(\vec{\mathrm{y}})\mathrm{dS}\right)+\frac{1}{4\pi\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\iint_{|\vec{\mathrm{y}}-\vec{\mathrm{x}}|=\mathrm{at}}\psi(\vec{\mathrm{y}})\mathrm{dS}$$
$$+\int_0^{\mathrm{t}}\left(\frac{1}{4\pi\mathrm{a}^2(\mathrm{t}-\tau)}\iint_{|\vec{\mathrm{y}}-\vec{\mathrm{x}}|=\mathrm{a}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{f}(\vec{\mathrm{y}},\tau)\mathrm{dS}\right)\mathrm{d}\tau$$

- 二维波动方程解（poisson公式）

$$u(\vec{x},t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\partial_t\iint_{|\vec{y}-\vec{x}|\le at}\frac{\varphi(\vec{y})d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2-|\vec{y}-\vec{x}|^2}}+\iint_{|\vec{y}-\vec{x}|\le at}\frac{\psi(\vec{y})d\vec{y}}{\sqrt{a^2t^2-|\vec{y}-\vec{x}|^2}}\right.$$
$$\left.+\int_0^t\iint_{|\vec{y}-\vec{x}|\le a(t-\tau)}\frac{f(\vec{y},\tau)d\vec{y}d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\vec{y}-\vec{x}|^2}}\right]$$

对于高维初值问题，如果自变量容易解耦，可以用齐次化原理转化成一维问题叠加。如果不能解耦（比如下例，源项不是简单的线性叠加）可以直接套公式写答案

eg:

习题 3.13 试求解波动方程初值问题 ($x, y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$)

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - a^2(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) = f(t)\delta(x)\delta(y), \\ u(x,y,0) = 0, \quad \partial_t u(x,y,0) = 0. \end{cases}$$

解: 根据二维波动方程的 *Poisson* 公式

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le a(t-\tau)} \frac{f(\boldsymbol{y},\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le a(t-\tau)} \frac{f(\tau)\delta(y_1)\delta(y_2)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}$$

(1) 若 $|\boldsymbol{x}| \ge at$，易见

$$(0,0) \notin \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \le at\},$$

因此

$$u(\boldsymbol{x},t) = 0.$$

(2) 若 $|\boldsymbol{x}| < at$ 时，则有

$$\iint_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le a(t-\tau)} \frac{f(\tau)\delta(y_1)\delta(y_2)\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}} = \begin{cases} \frac{f(\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}, & |\boldsymbol{x}| < a(t-\tau), \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \ge a(t-\tau). \end{cases}$$

因此得到

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{a}} \frac{f(\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\boldsymbol{x}|^2}}\mathrm{d}\tau. \quad \square$$

（Comment：（1）中的情况下，由于(0,0)不在范围内，因此y_1, y_2不可能同时为0，因此$\delta(y_1)\delta(y_2) \equiv 0$。

（2）中同理，仅在(0,0)处有积分值，并且为1）

热传导方程和积分变换法

考虑一维热传导方程初值问题

$$\begin{aligned} \partial_t u - a^2\partial_{xx}u = f(x,t), &\quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \varphi(x), &\quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

利用傅里叶变换方法求解。（对x做Fourier变换，求导转为乘以$i\omega$，转换为$\hat{u}(\omega,t)$关于t的常微分方程，再做傅里叶逆变换得到$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)]$进而求出$u(x,t)$）

- 热传导初值问题的Poisson公式

  (齐次情况下只有第一项:$\varphi(x) * K(x,t)$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x) * K(x,t) + \int_0^t f(x,\tau) * K(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

  其中Poisson核 $K(x,t)$ 由下式给出

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4a^2t}}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

  容易验证, $K(x,t)$ 满足齐次方程

$$\partial_t v - a^2\partial_{xx} v = 0$$

并且

$$\lim_{t\to 0+} K(x,t)=\delta(x)$$

即 $K(x,t)$ 在广义函数意义下满足以下初值问题

$$\partial_t v - a^2\partial_{xx}v=0,\quad v(x,0)=\delta(x)$$

- 在广义函数意义下, 如果函数 $u(x,t)$ 满足初值问题

$$\partial_t u - a^2\partial_{xx}u=\delta(x-\xi,t-\tau),\quad u(x,0)=0$$

则称它为热传导方程的**基本解**, 记为 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$。事实上我们有

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)$$

积分变换法求解数理方程

（好就好在利用了傅里叶变换中求导等同于频域$\cdot i\omega$，以及拉普拉斯变换中求导等同于$\cdot p$，消去了一个方向的求导，把偏微分转为常微分。注意转化之后，虽然整体上是关于ω、t的函数关系式，但并没有关于ω的微分项，因此实际上就是频域函数关于t的常微）1

- Fourier变换(一般对x变换)

eg：

$$(2)\quad \begin{cases}\partial_{tt}u+2\partial_t u-\partial_{xx}u+u=0,\\ u(x,0)=0,\quad \partial_t u(x,0)=x.\end{cases}$$

solution:

对$u(x,t)$关于x做傅里叶变换，即：

$$\begin{aligned}&\partial_{tt}\hat{u}+2\partial_t\hat{u}+(\omega^2+1)\hat{u}=0\\ &\hat{u}(\omega,0)=0\\ &\partial_t\hat{u}(\omega,0)=\hat{x}\downarrow\\ &(\text{实际上}\hat{x}\text{是个关于}\omega\text{的式子，这里先留着，一会直接变回去})\end{aligned}$$

则消去了偏微分方程中的偏x，获得了$\hat{u}$关于t的二阶常微（ω相当于参量）：

$$\begin{gathered}\hat{u}''+2\hat{u}'+(\omega^2+1)\hat{u}=0\\ \Downarrow\\ \hat{u}(\omega,t)=e^{-t}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)\end{gathered}$$

带入初始条件，得到u在频域的解：

$$\hat{u}(\omega,t)=e^{-t}\hat{x}\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

然后再对其逆变换（含有ω的项），得到时域解（这里的逆变换参考一个常用变换以及卷积性质）：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,t)] \\
&= e^{-t}\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{x}\frac{\sin\omega t}{\omega}\right] \quad (\text{逆变换是}\omega\to x\text{，}t\text{相当于常数}) \\
&\xlongequal{\text{卷积性质}} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x*\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right] \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}x*\sqrt{\frac{\pi}{2}}I_{|x|\le t}(x) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\int_{x-t}^{x+t}\xi\mathrm{d}\xi \\
&= xte^{-t}
\end{aligned}
$$

eg2（积分变换与齐次化原理相结合，参考齐次化原理eg）1

$$
\begin{cases}
\partial_{tt}u-\partial_{xx}u=t\sin x, \\
u(x,0)=0, \quad \partial_t u(x,0)=\sin x.
\end{cases}
$$

solution:

对u关于x做傅里叶变换得：

$$
\begin{aligned}
&\partial_{tt}\hat{u}+\omega^2\hat{u}=t\hat{\sin x} \\
&\hat{u}(\omega,0)=0 \\
&\partial_t\hat{u}(\omega,0)=\hat{\sin x}
\end{aligned}
$$

(源项跟上题一样，也先保留着\hat的形式，一会可以直接变回来)

由于是非齐次二阶常微，不好解，因此先齐次化，设存在$\hat{\varphi}(\omega,t)$满足：

$$
\begin{aligned}
&\partial_{tt}\hat{\varphi}+\omega^2\hat{\varphi}=0 \\
&\hat{\varphi}(\omega,0)=0 \\
&\partial_t\hat{\varphi}(\omega,0)=1
\end{aligned}
$$

则（很不靠谱地）套用齐次化原理eg的结论（注意这里仍是u关于t的关系，是常微，ω相当于参数）：

$$
\hat{u}(\omega,t)=\hat{\varphi}(\omega,t)\hat{\sin x}+\int_0^t\xi\hat{\sin x}\hat{\varphi}(\omega,t-\xi)\mathrm{d}\xi
$$

事实上，可以随手推出齐次二阶常微得到：

$$
\hat{\varphi}(\omega,t)=\frac{\sin\omega t}{\omega}, \quad \varphi(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}I_{|x|\le t}
$$

因此，带入得：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\omega,t)\hat{\sin x}]+\int_0^t\xi\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\omega,t-\xi)\hat{\sin x}]\mathrm{d}\xi \\
&\xlongequal{\text{卷积性质}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(x,t)*\sin x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\xi\varphi(x,t-\xi)*\sin x\mathrm{d}\xi \\
&\xlongequal{\varphi(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\pi/2}, & |x|\le t \\ 0, & |x|>t\end{cases}} \frac{1}{2}(\cos(x-t)-\cos(x+t))+t\sin x-\frac{1}{2}(\cos(x-t)-\cos(x+t)) \\
&= t\sin x
\end{aligned}
$$

- Laplace变换

（x,t在$\mathbb{R}^+$上，一般对t变换）

eg:($x, y \in \mathbb{R}^+$)

$$\begin{cases}\partial_{xy}u = 1, \\ u(0,y) = y+1, \\ u(x,0) = 1\end{cases}$$

解：对 $u(x,y)$ 关于 y 做拉普拉斯变换, 即

$$\bar{u}(x,p) = \mathcal{L}[u(x,y)]$$

(以下用到这些变换：)

$$\mathcal{L}[1]_{(p)} = \frac{1}{p}, \mathcal{L}[y]_{(p)} = \frac{1}{p^2}$$
$$\text{以及} \mathcal{L}[f'(y)]_{(p)} = p\bar{f}(y)$$

将该变换应用于原问题, 则有

$$p\partial_x \bar{u} = \frac{1}{p}, \quad \bar{u}(0,p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

直接求解上述方程, 可得

$$\bar{u}(x,p) = \frac{x+1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

再根据拉普拉斯变换的反演, 得到原问题的解

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{u}(x,p)] = (x+1)y + 1$$

位势方程和Green函数法

位势方程：

$$-\Delta u = f$$

其中$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，$d$为空间维数，$f = f(x)$为源项，当$f \equiv 0$时，该方程称为Laplace方程

- $\star$ **n维球对称下，有：**

$$\Delta u = \partial_{rr}u + \frac{n-1}{r}\partial_r u$$

  例如：三维空间中即有：$\Delta u = \partial_{rr}u + \frac{2}{r}\partial_r u$

- Laplace方程的基本解

  如果$\mathbb{R}^d$上的局部绝对可积函数U在广义函数意义下满足

$$-\Delta U = \delta(\vec{x} - \vec{\xi}), \quad \vec{x}, \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

即对于 $\mathbb{R}^d$ 上的任意测试函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, 有（需要做两次分部积分）

$$-\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{U}(\vec{\mathrm{x}}) \Delta \varphi(\vec{\mathrm{x}}) \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}} = \varphi(\vec{\xi}),$$

则称U为 d维Laplace方程的一个基本解, 记为 $\Gamma(\vec{x}; \vec{\xi})$ 。

(也即二维情况下有：$-\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \delta(x-\xi, y-\eta)$)

(从热力学角度看, 如果在三维空间中 $x = \xi$ 处放置了一个（恒温）点热源, 当时间足够长以后, 温度分布趋于稳 定, 其分布情况即为基本解 $\Gamma(\vec{x}; \vec{\xi})$）

二维Laplace方程基本解：

$$\Gamma(\vec{x};\vec{\xi}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}$$

$$\text{设}\vec{x} = (x,y), \vec{\xi} = (\xi,\eta), \text{则：}$$
$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$
$$\text{其满足：}$$
$$-\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma\Delta\varphi\mathrm{dxdy} = \varphi(\xi,\eta), \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

三维Laplace方程基本解：

$$\Gamma(\vec{x};\vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{\xi}|}$$

n维Laplace方程基本解($n\geq 3$)：

(其中$\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$是d维空间中单位球面的面积)

$$\Gamma(\vec{x};\vec{\xi}) = \frac{1}{(d-2)\omega_d}\cdot\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^{d-2}}$$

- Green公式（d=2）

  ($\vec{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量)

$$\iint_\Omega(u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{dxdy} = \int_{\partial\Omega}(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}})\mathrm{d}l$$

(可以和诸如$-\iint_\Omega u(x,y)\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta)\mathrm{dxdy} = u(\xi,\eta)$等关系式搭配使用)

- Green函数

考虑位势方程的Dirichlet问题

$$-\Delta\mathrm{u} = \mathrm{f(x,y)}, \quad \mathrm{(x,y)}\in\Omega, \quad \mathrm{u}|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathrm{x,y}).$$

有(可由Green公式推出来):

$$\mathrm{u}(\xi,\eta) = \iint_\Omega\Gamma\mathrm{fdxdy} + \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\vec{\mathrm{n}}} - \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{\mathrm{n}}}\varphi\right)\mathrm{d}\ell.$$

引入辅助函数g使得：

$$\Delta_{(x,y)}g(x,y;\xi,\eta) = 0$$

再取Green函数，并考虑g的边界条件：$g = -\Gamma, \quad (x,y)\in\partial\Omega$：

$$G(x,y;\xi,\eta) = \Gamma(x,y;\xi,\eta) + g(x,y;\xi,\eta)$$
$$G(x,y;\xi,\eta) = 0, \quad (x,y)\in\partial\Omega$$

得到由Green函数表达的解的形式：

$$u(\xi,\eta) = \iint_\Omega G f\mathrm{dxdy} - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l$$

Green函数满足以下问题和性质:

$$
\begin{gathered}
-\Delta G(x, y ; \xi, \eta)=\delta(x-\xi, y-\eta), \quad(x, y) \in \Omega \\
G(x, y ; \xi, \eta)|_{\partial \Omega}=0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
-\Delta \mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{y} ; \xi, \eta)=0, \quad(x, y) \in \Omega \backslash\{(\xi, \eta)\} \\
0<G(x, y ; \xi, \eta) \leq \frac{1}{2 \pi} \ln \frac{d}{\sqrt{(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}}}, \quad(x, y) \in \Omega \backslash\{(\xi, \eta)\}, \text{其中d是}\Omega\text{的直径。} \\
\mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{y} ; \xi, \eta)=\mathrm{G}(\xi, \eta ; \mathrm{x}, \mathrm{y}) . \quad (Green\text{函数具有对称性}) \\
\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{y} ; \xi, \eta)}{\partial \mathrm{n}} \mathrm{d} \ell=-1 . \quad (Green\text{函数法向导数在边界上的积分})
\end{gathered}
$$

物理意义：1.热力学解释：在物体内部$(x, y)=(\xi, \eta)$处放置一单位点热源，与外界接触的表面保持恒温$u=0$，则物体的稳定温度场就是Green函数；

2.静电学解释：某导体表面接地，在内部$(x, y)=(\xi, \eta)$处放置一单位点电荷，则导体内部的电位分布就是Green函数。

Green函数求解（电像法）：

电像法基本套路：先把电荷位置设计好，以满足"零势面"，然后直接写答案：

$$
G(x, \xi)=\sum \frac{\text{"电荷正负"}}{2 \pi} \ln \left(\frac{1}{|x-\xi|}\right)
$$

eg:

试给出以下 Green 函数的表达式

$$
\begin{aligned}
& -\Delta G(\vec{x} ; \vec{\xi})=\delta(\vec{x}-\vec{\xi}), \quad \vec{x} \in \Omega \\
& G(\vec{x} ; \vec{\xi})=0, \quad \vec{x} \in \partial \Omega
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\Omega & =\left\{\left(x_{1}, x_{2}\right) \in \mathbb{R}^{2} \mid 0<x_{1}<1\right\}, \\
\partial \Omega & =\left\{\left(x_{1}, x_{2}\right) \in \mathbb{R}^{2} \mid x_{1}=0 \text{ 或 } x_{1}=1\right\},
\end{aligned}
$$

并且 $\vec{\xi} \in \Omega$ 。

solution:

由电镜法可知，两个边界 $x_{1}=0, x_{1}=1$ 造成了无限多电像。对于 $\xi=\left(\xi_{1}, \xi_{2}\right)$ 处的电荷
位置 $\left(\xi_{1}+2 n, \xi_{2}\right)$ 处电像带同号电荷,
位置 $\left(-\xi_{1}+2 n, \xi_{2}\right)$ 处电像带异号电荷,
其中 n 为整数。因此 Green 函数具有无穷级数形式:

$$
G(x ; \xi)=\frac{1}{2 \pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{\left(x_{1}-\xi_{1}-2 n\right)^{2}+\left(x_{2}-\xi_{2}\right)^{2}}}-\frac{1}{2 \pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{\left(x_{1}+\xi_{1}-2 n\right)^{2}+\left(x_{2}-\xi_{2}\right)^{2}}}
$$

分离变量法（齐次）

考虑一维波动方程混合问题（有边界条件！）

$$
\star \quad
\begin{aligned}
& \partial_{\mathrm{tt}} \mathrm{u}-\mathrm{a}^{2} \partial_{\mathrm{xx}} \mathrm{u}=0, \quad 0<\mathrm{x}<\ell, \mathrm{t}>0 \\
& \mathrm{u}(0, \mathrm{t})=\mathrm{u}(\ell, \mathrm{t})=0, \quad \mathrm{t}>0, \quad (\text{第一类边界条件}) \\
& \mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)=\varphi(\mathrm{x}), \partial_{\mathrm{t}} \mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)=\psi(\mathrm{x}), \quad 0 \leq \mathrm{x} \leq \ell .
\end{aligned}
$$

该问题描述了两端固定的弦作自由振动的物理过程。

solution:

将一个复杂振动分解成若干简单振动叠加:$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$

下面解出每个特解$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)$ 的具体形式(简写先不带k)：

将分解形式带入方程1：

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$
$$\text{分离变量}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$
$$\Downarrow$$
$$\text{得到}X\text{和}T\text{的常微分方程：}$$
$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$$

带入边界条件：

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$$
$$\Downarrow$$
$$X(0)=X(l)=0$$

求解X(x)的常微分方程(很容易验证$\lambda>0$时才能得到使X(x)不恒为0的非平凡解)

⋆注意：若两个边界条件均为第二类边界条件（$\partial_x u(0,t)=\partial_x u(\ell,t)=0$），则需要考虑$\lambda=0$的解！！！

得$\lambda>0$时的通解：

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

带入边界条件得：

$$X(0)=C_1=0$$
$$X(l)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\quad(k=1,2,3\cdots)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{得到一族非平凡解：}$$
$$\text{特征值：}\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$$
$$\text{特征函数：}X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$$

下一步，将特征值$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$带入T(t)的常微分方程：

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

随手推出其通解：

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l},\quad(k=1,2,3\cdots)$$

由此将X(x)和T(t)组合，得到u的分离变量形式的解：

$$
\begin{aligned}
u_k(x,t) &= X_k(x)T_k(t) \\
&= (A_k\cos\frac{k\pi at}{l} + B_k\sin\frac{k\pi at}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}
\end{aligned}
$$

进一步，确定常数A_k, B_k，

使得$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\frac{k\pi at}{l} + B_k\sin\frac{k\pi at}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}$ 满足初始条件3

将$u(x,t)$的形式带入初始条件得A_k, B_k(利用傅里叶级数展开的性质):

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x}) &= \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\mathrm{A_k}\sin(\mathrm{k}\pi\mathrm{x}/\ell), \quad A_{\mathrm{k}} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin(\mathrm{k}\pi\xi/\ell)\mathrm{d}\xi, \\
\psi(\mathrm{x}) &= \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{k}\pi\mathrm{a}}{\ell}B_{\mathrm{k}}\sin(\mathrm{k}\pi\mathrm{x}/\ell), \quad B_{\mathrm{k}} = \frac{2}{\mathrm{k}\pi\mathrm{a}}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin(\mathrm{k}\pi\xi/\ell)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

得到最终解：

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}\mathrm{d}\xi\cdot\cos\frac{k\pi at}{\ell} + \frac{2}{\mathrm{k}\pi\mathrm{a}}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}\mathrm{d}\xi\cdot\sin\frac{k\pi at}{l})\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}
$$

$Tips$：加快计算积分的小技巧：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ell}x\sin\frac{k\pi x}{\ell}\mathrm{dx} &= \frac{\ell^2}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi}x\sin x\mathrm{dx} \\
\int_0^{\ell}x^2\sin\frac{k\pi x}{\ell}\mathrm{dx} &= \frac{\ell^3}{k^3\pi^3}\int_0^{k\pi}x^2\sin x\mathrm{dx}
\end{aligned}
$$

一般齐次问题

特征值问题有一般形式：

$$
\begin{gathered}
X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\
-\alpha_1X'(0) + \beta_1X(0) = 0, \quad \alpha_2X'(\ell) + \beta_2X(\ell) = 0
\end{gathered}
$$

这里$\alpha_i \ge 0, \beta_i \ge 0, \alpha_i + \beta_i \ne 0$,寻找以上二阶常微分方程所有特征值和特征函数的问题，称为Sturm-Liouville问题

- 所有特征值都是非负实数，当$\beta_1 + \beta_2 > 0$时，所有特征值为正。（也即如果只有$X'(0) = X'(\ell) = 0$，则要考虑$\lambda = 0$）
- 不同特征值对应的特征函数必正交，即:

$$
\int_0^{\ell}X_{\lambda}(x)X_{\mu}(x)\mathrm{dx} = 0, \quad (\lambda \ne \mu)
$$

- 对任意满足以上边界条件的可积函数$g(x)$，有展开形式：

$$
g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k(x)
$$

$$
\text{其中：} \quad g_k = \frac{\int_0^{\ell}g(x)X_k(x)\mathrm{dx}}{\int_0^{\ell}X_k^2(x)\mathrm{dx}}
$$

  - **注**：Fourier系数展开中的$\varphi(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\mathrm{A_k}\sin(\mathrm{k}\pi\mathrm{x}/\ell), \quad A_{\mathrm{k}} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin(\mathrm{k}\pi\xi/\ell)\mathrm{d}\xi$，实际上是$X_k(x) = \sin(k\pi x/\ell)$时的特例：

$$
g_k = \frac{\int_0^l g(x)\sin(k\pi x/l)dx}{\int_0^l \sin^2(k\pi x/l)dx} = \frac{\int_0^l g(x)\sin(k\pi x/l)dx}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(k\pi x/l)dx
$$

当$X_k(x)=\sin(k\pi x/l)$，$\cos(k\pi x/l)$，$\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x/l\right)$等时，可以直接写系数$\frac{2}{l}$

最一般的求展开式系数的办法是带入原式的g_k公式，例如在如下问题中：

已算得：

$$\begin{cases}\lambda_k=\mu_k^2, \quad \text{其中}\mu_k\tan\mu_k\ell=h\\ X_k(x)=\cos\mu_k x\end{cases}$$

则有展开式：

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)X_k(x)$$
$$\text{则：}$$
$$T_k(0)=\frac{\int_0^\ell u(x,0)X_k(x)\mathrm{dx}}{\int_0^\ell X_k^2(x)\mathrm{dx}}$$

进而可以求关于$T_k(t)$的方程：

$$\begin{cases}T_k''(t)+a^2\mu_kT_k(t)=0\\ T_k(0)=\varphi_k, \quad T_k'(0)=0\end{cases}$$

解得：

$$T_k(t)=\varphi_k\cos a\mu_k t,$$
$$\text{其中}\varphi_k\text{满足：}$$
$$\varphi_k=T_k(0)=\frac{\int_0^\ell u(x,0)X_k(x)\mathrm{dx}}{\int_0^\ell X_k^2(x)\mathrm{dx}}$$

（也即：当解得的$X_k(x)$不是简单的$\sin(k\pi x/\ell)$等时，下一步求得的展开式系数（也即$T_k(t)$边界值）并不是简单的Fourier展开系数！）

非齐次问题

（边界条件非齐次、源项非齐次）

（以下讨论的都是边界条件形式最简单的情况（两个第一类边界条件），求得的$\lambda_k=k^2\pi^2/\ell^2, X_k(x)=\sin(k\pi x/\ell)$。实际上边界条件的形式可以很复杂，会解出来不同形式的特征根和特征函数，见上“一般齐次问题”）

非齐次波动方程

$$\begin{aligned}&\partial_{\mathrm{tt}}\mathrm{u}-\mathrm{a}^2\partial_{\mathrm{xx}}\mathrm{u}=f(x,t), \quad 0<\mathrm{x}<\ell,\mathrm{t}>0\\ &\mathrm{u}(0,\mathrm{t})=g_1(t), \quad \mathrm{u}(\ell,\mathrm{t})=g_2(t), \quad \mathrm{t}>0,\\ &\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\varphi(\mathrm{x}), \quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\psi(\mathrm{x}), \quad 0\le\mathrm{x}\le\ell.\end{aligned}$$

- **边界条件齐次化：**

引入辅助函数$w(x,t)$满足：

$$\partial_{xx}w(x,t)=0, \quad w(0,t)=g_1(t), \quad w(\ell,t)=g_2(t)$$

求解这个关于x的二阶齐次常微分方程，解得$w(x,t)$

再令：$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，且显然$v(x,t)$满足齐次边界条件，即有：

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mathrm{tt}}\mathrm{v}-\mathrm{a}^2\partial_{\mathrm{xx}}\mathrm{v}=f(x,t)-\partial_{tt}w, \quad 0<\mathrm{x}<\ell,\mathrm{t}>0\\
&\mathrm{v}(0,\mathrm{t})=\mathrm{v}(\ell,\mathrm{t})=0, \quad \mathrm{t}>0,\\
&\mathrm{v}(\mathrm{x},0)=\varphi(\mathrm{x})-w(x,0),\\
&\partial_{\mathrm{t}}\mathrm{v}(\mathrm{x},0)=\psi(\mathrm{x})-\partial_t w(x,0), \quad 0\le\mathrm{x}\le\ell.
\end{aligned}
$$

也即转为了源项非0，但边界条件齐次的问题

- **波动方程齐次化：**

  考虑源项非0，边界条件齐次的问题

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mathrm{tt}}\mathrm{u}-\mathrm{a}^2\partial_{\mathrm{xx}}\mathrm{u}=f(x,t), \quad 0<\mathrm{x}<\ell,\mathrm{t}>0\\
&\mathrm{u}(0,\mathrm{t})=0, \quad \mathrm{u}(\ell,\mathrm{t})=0, \quad \mathrm{t}>0,\\
&\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\varphi(\mathrm{x}), \quad \partial_{\mathrm{t}}\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=\psi(\mathrm{x}), \quad 0\le\mathrm{x}\le\ell.
\end{aligned}
$$

先将分离变量形式的解$u(x,t)=X(x)T(t)$带入**相应的齐次方程和齐次边界条件**：

$$\partial_{tt}u-a^2\partial_{xx}u=0$$

解得特征值和特征函数：

$$\lambda_k=k^2\pi^2/\ell^2, \quad X_k(x)=\sin(k\pi x/\ell), \quad (k=1,2\cdots)$$

然后将$u(x,t),f(x,t),\varphi(x),\psi(x)$按照**特征函数系**展开

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin(k\pi x/\ell)\\
f(x,t)&=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin(k\pi x/\ell)\\
\varphi(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin(k\pi x/\ell)\\
\psi(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin(k\pi x/\ell)
\end{aligned}
$$

在这个情境下，$T_k(t),f_k(t),\varphi_k,\psi_k$分别是傅里叶展开系数（**若$X_k(x)\neq\sin(k\pi x/\ell)$则需要带入一般展开系数的公式来求！见上“一般齐次问题”**）

进而得到关于$T_k(t)$的方程（此时$f_k(t)$体现了源项的作用）：

$$
\begin{gathered}
T_k''(t)+(k\pi a/\ell)^2T_k(t)=f_k(t)\\
T_k(0)=\varphi_k, \quad T_k'(0)=\psi_k
\end{gathered}
$$

可以解得$T_k(t)$

进而得到混合问题的解$u(x,t)$

位势方程的讨论

在矩形区域$\Omega=[0,a]\times[0,b]$上求解位势方程边值问题

- **位势方程齐次化：**

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u=2, \quad (x,y)\in\Omega\\
&u(0,y)=u(a,y)=0, \quad y\in[0,b]\\
&u(x,0)=u(x,b)=0, \quad x\in[0,a]
\end{aligned}
$$

首先引入辅助函数$v(x,y)$满足：

$$-\Delta v = 2$$
$$v(0,y) = v(a,y) = 0$$

考虑$v(x,y) = v(x)$形式的解，有$v(x,y) = x(a-x)$

令$w(x,y) = u(x,y) - v(x,y) = u(x,y) - x(a-x)$

从而$w(x,y)$满足其次定解问题：

$$\begin{aligned} &-\Delta w = 0 \\ &w(0,y) = w(a,y) = 0 \\ &w(x,0) = w(x,b) = -x(a-x) \end{aligned}$$

再按照边界条件齐次化的方法继续做即可

- **边界条件齐次化：**

$$\begin{aligned} &-\Delta u = 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ &u(0,y) = A\sin(\pi y/b), \quad u(a,y) = 0, \quad y \in [0,b] \\ &u(x,0) = B\sin(\pi x/a), \quad u(x,b) = 0, \quad x \in [0,a] \end{aligned}$$

引入辅助函数满足$v(x,y)$与$w(x,y)$满足：

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \\ v(0,y) = A\sin(\pi y/b), \quad v(a,y) = 0 \\ v(x,0) = v(x,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 \\ w(0,y) = w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = B\sin(\pi x/a), \quad w(x,b) = 0 \end{cases}$$

且满足$u = v + w$

这样可以使得u和v分别都只有一个方向的边界条件非齐次

先分离变量法求解v：

令$v(x,y) = X(x)Y(y)$

带入方程及边界条件：

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

先解有齐次边值的$Y_k(y)$：

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_k(y) = \sin(k\pi y/b), \quad k = 1, 2\cdots$$

再考虑关于$X_k(x)$的方程：

$$X_k''(x)-\lambda_k X_k(x)=0$$
$$\Downarrow$$
$$X_k(x)=A_k e^{\sqrt{\lambda}x}+B_k e^{-\sqrt{\lambda}x},$$
$$v(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(0)\sin(k\pi y/b)=A\sin(\pi y/b)$$
$$v(a,y)=0\rightarrow X_k(a)=0$$
$$\text{带入解得的边值}X_k(0),X_k(a)$$
$$\Downarrow$$
$$X_1(x)=\frac{A}{1-e^{2\pi a/b}}e^{\pi x/b}-\frac{Ae^{2\pi a/b}}{1-e^{2\pi a/b}}e^{-\pi x/b}$$
$$X_k(x)=0,\quad k=2,3\cdots$$

因此有：

$$v(x,y)=(\frac{A}{1-e^{2\pi a/b}}e^{\pi x/b}-\frac{Ae^{2\pi a/b}}{1-e^{2\pi a/b}}e^{-\pi x/b})\sin(\pi y/b)$$

类似地可解得同样是只有一个方向边界条件非齐次的$w(x,y)$

综上可得$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)=\cdots$

Bessel函数

Bessel函数的基本问题

- m阶Bessel方程(m>0)

  $$x^2\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}+x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+(x^2-m^2)y=0$$

  考虑其级数解形式：

  $$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{c+k}=x^c(a_0+a_1x+\cdots+a_kx_k+\cdots)$$

  其中c（任意实数）和a_k待定，且$a_0\neq 0$

  将级数解形式带入Bessel方程，并取$a_0=\frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}$

  当取$c=m$时，得到Bessel方程的一个特解（第一类Bessel函数）：

  $$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)}(\frac{x}{2})^{m+2k}$$

  类似地，当取$c=-m$时，得到Bessel方程的另一个特解：

  $$J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-m+k+1)}(\frac{x}{2})^{-m+2k}$$

- Bessel方程的通解
  - 当m不为整数时，$J_m(x)$和$J_{-m}(x)$线性无关，由此引入Bessel方程的另一个特解：

    $$Y_m(x)=\frac{J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x)}{\sin mx}$$

    它和$J_m(x)$是线性无关的

- 当m为整数时，$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$，即二者线性相关，由此引入另一个特解（第二类Bessel函数，也即Neumann函数）：

$$Y_m(x)=\lim_{\alpha\to m}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha x}$$

综合上述讨论，Bessel方程通解可以表示为：

$$y(x)=AJ_m(x)+BY_m(x)$$

- Bessel函数的性质
  - 导数的递推关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^m J_m(x))=x^m J_{m-1}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^{-m} J_m(x))=-x^{-m} J_{m+1}(x)$$

  - 函数值递推关系：

$$J_{m+1}(x)=2mx^{-1}J_m(x)-J_{m-1}(x)$$
$$J_{m-1}(x)-J_{m+1}(x)=2J_m'(x)$$

事实上，当m为正整数时，$J_m(x)$和$J_m'(x)$可以用$J_0(x)$和$J_1(x)$表示

eg:

$$J_3(x)=4x^{-1}J_2(x)-J_1(x)=4x^{-1}(2x^{-1}J_1(x)-J_0(x))-J_1(x)$$

$$J_2'(x)=\frac{1}{2}(J_1(x)-J_3(x))=(1-4x^{-2})J_1(x)+2x^{-1}J_0(x)$$

$$\begin{aligned}\int J_3(x)\mathrm{dx}&=\int x^2(x^{-2}J_3(x))\mathrm{dx}\\&=\int x^2\mathrm{d}(-\mathrm{x}^{-2}\mathrm{J}_2(\mathrm{x}))\\&=-J_2(x)+2\int x^{-1}J_2(x)\mathrm{dx}\\&=-J_2(x)-2x^{-1}J_1(x)\end{aligned}$$

当m为整数时，$J_{m+\frac{1}{2}}(x)$和$J_{-(m+\frac{1}{2})}(x)$都是初等函数

eg:

$$\Gamma(k+1+\frac{1}{2})=(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}$$
$$\Downarrow$$
$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$
$$\Downarrow$$
$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(x^{-1}\sin x-\cos x)\text{等}$$
$$\Downarrow$$
$$J_{m+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{m+\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^m(\frac{\sin x}{x}),$$
$$J_{-(m+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{m+\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^m(\frac{\cos x}{x})$$

- 其他性质：
  - $m\in\mathbb{Z}\to J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$ 可以得到诸如 ：$J_{-1}(x)=-J_1(x)\to J_0'(x)=-J_1(x)$、$J_{-2}(x)=J_2(x)$这样的替代关系
  - Bessel函数的零点：

    $J_0(0)=1$

    $J_m(0)=0,\quad\forall m>0$
- 补充：关于Γ函数
  - $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$
  - 常用性质：
    1. $\Gamma(s)>0,\forall s>0;\Gamma(1)=1;\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

       $\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\Gamma(-2)=\cdots=\infty$,（但取值为负分数时不是无穷）
    2. $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad\forall s>0\quad(\text{若}n=s\text{为自然数，则反复利用该性质可得：}\Gamma(n+1)=n!)$
       .
    3. $\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.
    4. 余元公式：$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$

Bessel方程的特征值与特征函数

- **特征值≥ 0的证明:**

  考虑关于λ 的特征值问题：

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-m^2)R(r)=0$$

  且满足边界条件（此处以一个第一类边界条件为例分析）：

$$\begin{array}{c}R(r_0)=0\\|R(0)|<\infty\quad(\text{自然边界条件})\end{array}$$

  在方程两边乘以R/r，并在区间$[0,r_0]$ 上积分：

$$\int_0^{r_0}rRR''\mathrm{dr}+\int_0^{r_0}RR'\mathrm{dr}+\lambda\int_0^{r_0}rR^2\mathrm{dr}-m^2\int_0^{r_0}\frac{R^2}{r}\mathrm{dr}=0$$

  对前两项做分部积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} rRR''\mathrm{dr}+\int_0^{r_0} RR'\mathrm{dr}&=\int_0^{r_0} R(rR''+R')\mathrm{dr}\\&=\int_0^{r_0} R\,\mathrm{d(rR')}\\&=rRR'|_0^{r_0}-\int_0^{r_0} r(R')^2\mathrm{dr}\\&=-\int_o^{r_0} r(R')^2\mathrm{dr}\end{aligned}$$

因而分离变量得到：

$$\lambda=\frac{\int_0^{r_0} r(R')^2\mathrm{dr}+m^2\int_0^{r_0}\frac{R^2}{r}\mathrm{dr}}{\int_0^{r_0} rR^2\mathrm{dr}}\geq 0$$

即：特征值非负

（事实上，若为第一类边界条件，$\lambda=0$意味着$R(r)$为常数，再结合边界条件，得$R(r)=0$，是trivial的）

（若为第二类边界条件，$\lambda=0$或许能推出$R_0(r)=1$之类的解，可单独讨论，最终写级数解的时候再加入）

- **求特征函数和特征值:**

考虑$\lambda>0$，引入新变量$\rho=\sqrt{\lambda}r$，记$P(\rho)=R(r)$，则方程化为标准的m阶Bessel方程：

$$\rho^2P''+\rho P'+(\rho^2-m^2)P=0$$

该方程通解为：

$$P(\rho)=AJ_m(\rho)+BY_m(\rho)$$

从而得到原方程通解：

$$R(r)=AJ_m(\sqrt{\lambda}r)+BY_m(\sqrt{\lambda}r)$$

根据自然条件$|R(0)|<\infty$以及Neumann函数的性质 $Y_m(0)=\infty$

得：$B=0$

再代入边界条件$R(r_0)=0$，则有：

$$J_m(\sqrt{\lambda}r_0)=0$$

因此，当λ_i满足：$\sqrt{\lambda_i}r_0$是J_m的零点时，上式成立，所以：

特征值满足：

$$\lambda_k=\frac{x_k^2}{r_0^2},\quad \text{其中}x_k\text{是}J_m\text{的正零点}$$

相应的特征函数为：

$$J_m(\sqrt{\lambda_k}r),\ k=1,2,3\cdots$$

Bessel特征函数系的正交性和模值

接上文，将Bessel函数$J_m(x)$的零点记为x_k，因此有：

$$\begin{aligned}&\text{特征值：}\lambda_k=\frac{x_k^2}{r_0^2}\\&\text{特征函数：}J_m(\frac{x_k}{r_0}r),\ k=1,2\cdots\end{aligned}$$

下面讨论特征函数的（带权）正交性和模值：

记：$R_1(r) = J_m(\frac{x_k}{r_0}r),\ R_2(r) = J_m(\alpha r)$ (α为任意参数)

根据特征值方程：

$$\begin{gathered} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - m^2)R = 0 \\ \Downarrow \\ rR'' + R' + ((\frac{x_k}{r_0})^2 r - \frac{m^2}{r})R = 0 \\ \Downarrow \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}(r\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{dr}}) + ((\frac{x_k}{r_0})^2 r - \frac{m^2}{r})R_1 = 0 \quad (1) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}(r\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{dr}}) + (\alpha^2 r - \frac{m^2}{r})R_2 = 0 \qquad\quad (2) \end{gathered}$$

将$(1)\times R_2 - (2)\times R_1$**，然后在**$[0, r_0]$**上积分，得：**

$$\int_0^{r_0}(R_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}(r\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{dr}}) - R_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}(r\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{dr}}))\mathrm{dr} + ((\frac{x_k}{r_0})^2 - \alpha^2)\int_0^{r_0} rR_1R_2\mathrm{dr} = 0$$

将第一项分部积分，并分离出交叉项，得：

$$\int_0^{r_0} rR_1R_2\mathrm{dr} = -\frac{r_0(R_2(r_0)R_1'(r_0) - R_1(r_0)R_2'(r_0))}{(\frac{x_k}{r_0})^2 - \alpha^2}$$

由于：$R_1(r_0) = J_m(x_k) = 0,\ R_2(r_0) = J_m(\alpha r_0),\ R_1'(r_0) = \frac{x_k}{r_0}J_m'(x_k)$

因此有：

$$\int_0^{r_0} rR_1R_2\mathrm{dr} = -\frac{x_kJ_m(\alpha r_0)J_m'(x_k)}{(\frac{x_k}{r_0})^2 - \alpha^2}$$

若$\alpha = \frac{x_\ell}{r_0}\ (\ell \neq k)$**，则**$J_m(\alpha r_0) = 0$**，即给出（正交性）：**

$$\int_0^{r_0} rJ_m(\frac{x_k}{r_0}r)J_m(\frac{x_\ell}{r_0}r)\mathrm{dr} = 0,\ \ k \neq \ell$$

若$\alpha = \frac{x_k}{r_0}$**，则式中分子分母均为0，洛必达得（模值）：**

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} r(J_m(\frac{x_k}{r_0}r))^2\mathrm{dr} &= -\lim_{\alpha\to x_k/r_0}\frac{x_kJ_m(\alpha r_0)J_m'(x_k)}{(\frac{x_k}{r_0})^2 - \alpha^2} \\ &= \lim_{\alpha\to x_k/r_0}\frac{x_kr_0J_m'(\alpha r_0)J_m'(x_k)}{2\alpha} \\ &= \frac{r_0^2}{2}(J_m'(x_k))^2 \end{aligned}$$

再根据递推关系把导数项转化为Bessel函数的零点问题：

$$\begin{gathered} J_{m-1}(x_k) + J_{m+1}(x_k) = 2mx^{-1}J_m(x_k) = 0 \\ J_{m-1}(x_k) - J_{m+1}(x_k) = 2J_m'(x_k) \\ \Downarrow \\ (J_{m-1}(x_k))^2 = (J_{m+1}(x_k))^2 = (J_m'(x_k))^2 \end{gathered}$$

综上，特征函数的正交性和模值：

$$\int_0^{r_0} rJ_m(\frac{x_k}{r_0}r)J_m(\frac{x_\ell}{r_0}r)\mathrm{dr} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \frac{r_0^2}{2}(J_{m\pm1}(x_k))^2, & k = \ell \end{cases}$$

（第一类边界条件下，可以直接套用以上结论）

特征值问题的级数展开解

任意满足边界条件：$\varphi(r_0)=0,\ |\varphi(0)|<\infty$ 的函数$\varphi(r)$ 均可以展开为Bessel函数的级数形式：

$$\varphi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k J_m(\frac{x_k}{r_0}r)$$

其中φ_k满足：

$$\varphi_k=\frac{\int_0^{r_0} r\varphi(r)J_m(\frac{x_k}{r_0}r)\mathrm{dr}}{\int_0^{r_0} r(J_m(\frac{x_k}{r_0}r))^2\mathrm{dr}}$$

（分子为模值）

（ps.具体计算积分时，常利用换元$r'=\frac{x_k}{r_0}r$，例如：

$$\int_0^1 rJ_0(x_kr)\mathrm{dr}=\frac{1}{x_k^2}\int_0^{x_k} r'J_0(r')\mathrm{dr}'=\frac{1}{x_k^2}r'J_1(r')|_{r'=0}^{r'=x_k}=\frac{J_1(x_k)}{x_k}$$

Bessel函数与分离变量法

圆盘上的热传导方程混合问题（第二类边界条件的需要考虑$\lambda=0$，以及非齐次边界条件，参考课件）

eg:

用分离变量法给出以下定解问题的形式解：

$$\begin{cases}\partial_t u-a^2\left(\partial_{rr}u+\frac{1}{r}\partial_r u\right)=0, & 0\le r<1,t>0\\ u|_{r=1}=0, & t>0\\ |u|<\infty, & t>0\\ u|_{t=0}=1-r^2, & 0\le r\le 1\end{cases}$$

将分离变量形式的解：$u(r,t)=R(r)T(t)$带入方程以及边界条件得：

$$R(r)T'(t)-a^2(R''(r)T(t)+\frac{1}{r}R'(r)T(t))=0$$
$$R(1)T(t)=0,\qquad |R(0)T(t)|<\infty$$

分离变量：

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}=-\lambda$$

即得：

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0 \qquad R(1)=0,\qquad |R(0)|<\infty \tag{1}$$
$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{2}$$

对于（1），由于是第一类边界条件，因此只需考虑$\lambda>0$

易得：$R_k(r)=AJ_0(\sqrt{\lambda}r)+BY_0(\sqrt{\lambda}r)$

由于$Y(0)=\infty,\ |R(0)|<\infty$，因此$B=0$

由于$R_k(1)=0$，因此 $J_0(\sqrt{\lambda_k})=0$，也即$\sqrt{\lambda_k}=\mu_k,$ 其中μ_k是$J_0(x)=0$的正根

由此得到特征值和特征函数：

$$
\lambda_k = \mu_k^2
$$
$$
R_k(r) = J_0(\mu_k r), \quad k = 1, 2 \cdots
$$

进一步推出特征函数的正交性和模值：

$$
\int_0^1 r J_0(\mu_k r) J_0(\mu_\ell r) \mathrm{dr} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \frac{1}{2} J_1^2(\mu_k), & k = \ell \end{cases}
$$

将λ_k 带入关于$T(t)$的方程：

$$
T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0
$$

解得：

$$
T_k(t) = A_k e^{-a^2 \mu_k^2 t}
$$

进而给出分离变量形式的解：

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\mu_k r) e^{-a^2 \mu_k^2 t}
$$

考虑初值：$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\mu_k r) = 1 - r^2$

得到系数A_k：

$$
A_k = \frac{\int_0^1 r(1-r^2) J_0(\mu_k r) \mathrm{dr}}{\frac{1}{2} J_1^2(\mu_k)} = \frac{8}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}
$$

综上：

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} J_0(\mu_k r) e^{-a^2 \mu_k^2 t}
$$

Legendre多项式

Legendre方程：

$$
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - 2x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + n(n+1)y = 0
$$

其中n为任意实数

推导太麻烦，直接写出Legendre方程的通解（推导见课件）：

$$
y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots
$$
$$
y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots
$$
$$
\Downarrow
$$
$$
\text{通解：} y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad a_1, a_2 \text{为任意常数}
$$

当n为整数时，y_1, y_2中必有一个是有限项（多项式）

n为正偶数（或负奇数）时，$y_1(x)$ 是n次（或-n-1次）多项式

n为正奇数（或负偶数）时，$y_2(x)$是n次（或-n-1次）多项式

整理可得n次Legendre多项式（第一类Legendre函数）：

$$
P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}
$$

其中

$$M=\begin{cases}\frac{n}{2}, & \text{当}n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{2}, & \text{当}n\text{为奇数}\end{cases}$$

$P_n(x)$ 的微分形式（Rodrigues表达式）：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{dx^n}}(x^2-1)^n$$

Legendre多项式的递推公式：

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right)$$

Legendre多项式的正交性和模值：

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{dx}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

（正交性也等价于：$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)\mathrm{dx}=0$ 对任意正整数$k<n$成立）

由于$\{P_n(x)\}$构成正交函数系，因此$(-1,1)$上的函数$f(x)$可展开为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x),\ \ x\in(-1,1)$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{dx},\ \ n=0,1,2\cdots$$

另外，对于给定的n，$y_1(x)$和$y_2(x)$中有一个为$P_n(x)$，另一个仍为无穷级数，记为$Q_n(x)$，因此Legendre方程的通解为：

$$y(x)=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x),\quad C_1\text{、}C_2\text{为任意常数}$$

$Q_n(x)$ 称为第二类Legendre函数。