2024 考研 301

数学

复习笔记

wjl

2023 年 12 月 10 日

目 录

1 一元函数 2
1.1 函数极限与连续 . . . 2
1.2 一元函数微分学 . . . 2
1.3 一元函数积分学 . . . 2
1.4 中值定理 . . . 3

2 多元函数 4
2.1 多元函数微分学 . . . 4
2.2 空间解析几何 . . . 4
2.3 多元函数积分学 . . . 5

3 微分方程 8
3.1 一阶微分方程 . . . 8
3.2 二阶可降阶的微分方程 . . . 8
3.3 高阶常系数线性微分方程 . . . 8
3.4 n 阶常系数齐次线性微分方程的解 . . . 8

4 无穷级数 9
4.1 判敛法 . . . 9
4.2 幂级数 . . . 9
4.3 傅里叶级数 . . . 9

5 线性代数 10
5.1 行列式和矩阵 . . . 10
5.2 向量组 . . . 10
5.3 线性方程组 . . . 10
5.4 相似矩阵 . . . 11
5.5 特征值与特征向量 . . . 11
5.6 二次型 . . . 12

6 概率论与数理统计 13
6.1 随机变量 . . . 13
6.2 大数定理与中心极限定理 . . . 14
6.3 统计量及其分布 . . . 14
6.4 参数估计与假设检验 . . . 15

1 一元函数

1.1 函数极限与连续

1. 等价无穷小:
$(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\sim -\frac{e}{2}x \quad (x\to 0^+)$, $\quad 1-\cos^{\alpha}x\sim \frac{\alpha}{2}x^2 \quad (x\to 0)$, $\quad \ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x \quad (x\to 0)$.
$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $\quad \tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, $\quad \arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $\quad \arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.
2. 变上限积分：当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^m, g(x)\sim bx^n, ab\neq 0$，$m,n$ 为正整数，则 $F(x)$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小：$F(x)=\int_0^{g(x)} f(t)dt\sim \int_0^{bx^n} at^m dt\sim Cx^{n(m+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})-\frac{1}{2}(n+1)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{n\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}+o\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]-\frac{1}{2}(n+1)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}+\lim_{n\to\infty}n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=-\frac{1}{6}.$$

1.2 一元函数微分学

1. 反函数的导数：$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, $\quad x'=\frac{1}{y'}$, $\quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$, $\quad x''=-\frac{y''}{(y')^3}$.

2. 曲率和曲率半径：曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径 $R=\frac{1}{k}$.

1.3 一元函数积分学

1. 反常积分：**2010-03, 2016-01**

比较判别法：$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1, & 收敛,\\ p\geqslant 1, & 发散.\end{cases}$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1, & 收敛,\\ p\leqslant 1, & 发散.\end{cases}$

1）设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x), a\leqslant x\leqslant +\infty$，则
当 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散。

2）设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda(有限或\infty)$，则

a. 当 $\lambda\neq 0$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 有相同的敛散性；

b. 当 $\lambda=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

c. 当 $\lambda=\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散。

2. 常用公式:

1）区间再现公式:
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx,\quad \int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\,dx.$$

2）华里士公式:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n为大于1的奇数,\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n为正偶数.\end{cases}$$

3）对数-三角公式:
$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\sin bx)'\\ e^{ax} & \sin bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C,\quad \int e^{ax}\cos bxdx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\cos bx)'\\ e^{ax} & \cos bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C.$$

3.Γ 函数:

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \overset{x=t^2}{=} 2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}e^{-t^2}dt(x,t>0)$.

$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^{\alpha}d(e^{-x})=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\alpha x^{\alpha-1}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$.

$\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(2)=1,\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\Gamma(n+1)=n!$.

4. 极坐标表示的曲线在直角坐标系下的切线和法线:

24 超越 4-12 曲线 $r=1+\cos\theta$ 在点 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 处的法线方程: $\underline{y=\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

$$\begin{cases} x\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{4}, \\ y\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases} \text{则 } \frac{dx}{dy}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=\frac{dx/d\theta}{dy/d\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=0 \quad \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5. **旋转体体积:**

1) 平面曲线绕定直线旋转: 设平面曲线 $L: y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$, 且 $f(x)$ 可导, 定直线 $L_0: Ax+By+C=0$, 且过 L_0 的任一条垂线与 L 至多有 1 个交点, 则 L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体体积为:

$$V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b[Ax+By+C]^2|Af'(x)-B|dx.$$

2) 平面曲边梯形绕 x 轴旋转: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

3) 平面曲边梯形绕 y 轴旋转: $V=2\pi\int_a^b x|f^2(x)|dx$.

4) 平面图形 $D=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\in[0,\pi]\}$ 绕<u>极轴</u> 旋转:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

5. **旋转曲面的面积（侧面积）:**

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx. \quad S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$$

1.4 中值定理

1. 乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用: $[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$. $\quad [f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.
$\left[f(x)e^{\varphi(x)}\right]'=f'(x)e^{\varphi(x)}+f(x)e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=\left[f'(x)+f(x)\varphi'(x)\right]e^{\varphi(x)}$.

2. 商的求导公式 $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ 的逆用: $\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$, $\quad \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $\quad [\ln f(x)]''=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}$.

3. **中值定理和不等式:**

1) 积分中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

2) 柯西积分不等式: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

曲线 $x^3+y^3=3axy(a>0)$ 的渐近线:

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=b$, 等式变形为 $1+(\frac{y}{x})^3=\frac{3a}{x}\cdot\frac{y}{x}$, 两边取极限, 得 $k=-1$.

则 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y+x)$, 又 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, 等式变形为 $x+y=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}=\frac{3a\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}$,

两边取极限, 得 $b=-a$, 即渐近线为 $y=-x-a$.

2 多元函数

2.1 多元函数微分学

1. **全微分**：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，若函数在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A 和 B 不依赖于 Δx 和 Δy，而仅与 x 和 y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

函数在 $z=f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) 处可微等价于

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}=\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x^{'}(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y^{'}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

2. **偏导数连续的判断**：判断函数 $z=f(x,y)$ 在特殊点 (x_0,y_0) 处的偏导数是否连续：

1）用定义法求 $f_x^{'}(x_0,y_0),f_y^{'}(x_0,y_0)$.；用公式法求 $f_x^{'}(x,y),f_y^{'}(x,y)$.

2）计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_x^{'}(x,y),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_y^{'}(x,y)$，看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_x^{'}(x,y)=f_x^{'}(x_0,y_0),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_y^{'}(x,y)=f_y^{'}(x_0,y_0)$ 是否成立，若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

3. **隐函数求导**：设 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 当满足 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y}&\dfrac{\partial F}{\partial z}\\\dfrac{\partial G}{\partial y}&\dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$ 时，可确定 $\begin{cases}y=y(x),\\z=z(x),\end{cases}$ 且有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},$$

4. 二元函数的二阶泰勒公式：**22 李林 4-3-14**

> $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二阶泰勒公式为：
>
> $$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+(x-x_0)f_x^{'}(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y^{'}(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}x-x_0&y-y_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{xx}^{''}(x_0,y_0)&f_{xy}^{''}(x_0,y_0)\\f_{yx}^{''}(x_0,y_0)&f_{yy}^{''}(x_0,y_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}+o(\rho^2).\end{aligned}$$
>
> 其中 $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

2.2 空间解析几何

1. **空间曲线的切线与法平面**：

曲线：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$ 当 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y}&\dfrac{\partial F}{\partial z}\\\dfrac{\partial G}{\partial y}&\dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$ 时，取 $\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F_x^{'}&F_y^{'}&F_z^{'}\\G_x^{'}&G_y^{'}&G_z^{'}\end{vmatrix}=(A,B,C)$.

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{A}+\dfrac{y-y_0}{B}+\dfrac{z-z_0}{C}=0$. 法平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. **旋转曲面**：曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 旋转一周形成的一个旋转曲面：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$。在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的维圆上的任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件 $\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{s},|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|$，即

联立 $\begin{cases}m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0,\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2,\\F(x_1,y_1,z_1)=0,\\G(x_1,y_1,z_1)=0.\end{cases}$ 即得旋转曲面的方程。

3. 场论：

1）**方向导数**：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域 $U\subset \boldsymbol{R}^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点，则 $\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha, \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta, \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma. \end{cases}$ 以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离.

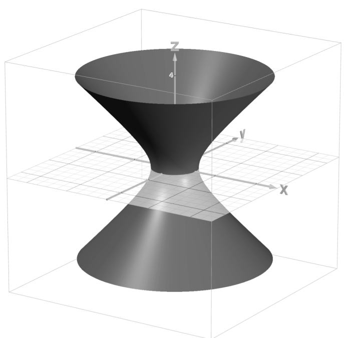
若极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$ 存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记作 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$.

计算：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦。

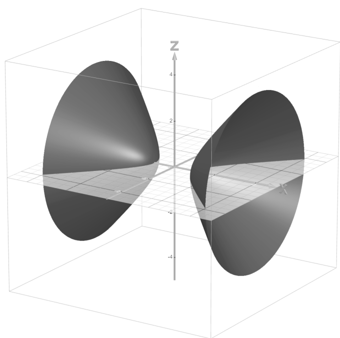
2）梯度：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶连续偏导数，则函数在点 P_0 处的梯度为 $\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}=(u_x'(P_0),u_y'(P_0),u_z'(P_0))$，函数在某点处的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模为方向导数最大值。$|\mathbf{grad}u|=\sqrt{(u_x')^2+(u_y')^2+(u_z')^2}$.

3）散度：$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$；旋度：$\mathbf{rotA}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

4. 双曲面：注意区分



单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$



双叶双曲面 $x^2-y^2-z^2=1$

2.3 多元函数积分学

换元法：取 $\begin{cases} x=x(u,v,\omega), \\ y=y(u,v,\omega), \\ z=z(u,v,\omega). \end{cases}$ 其中 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{uv\omega}} f\left[x(u,v,\omega),y(u,v,\omega),z(u,v,\omega)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right|dudvd\omega.$$

1. 第一型曲线积分：边界方程可带入被积函数

1）空间情形：空间曲线 L 由参数式给出 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 则 $ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}dt$，且

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}dt$$

2）平面情形：

a. 平面曲线 L 由 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则 $ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f\left[x,y(x)\right]\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx.$$

b. 平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt.$$

c. 平面曲线由极坐标形式 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $ds=\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f\left(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta\right)\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta.$$

2018-12 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds=\underline{-\frac{\pi}{3}}$.

$\oint_L=\frac{1}{6}\oint_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]ds.$

24 超越 3-2 曲线 $L:x^2+y^2=-2y$，则曲线积分 $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\underline{8}$.

24 李林 6-2-14 曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y+z=0,\end{cases}$ 则 $I=\int_L(x^2+2y+2z)ds=\int_L x^2ds=\underline{\pi}$.

注意轮换对称性条件

2. 第一型曲面积分：边界方程可带入被积函数

1）一投：将曲面 Σ 投影到某一平面（如 xOy 面）上 $\Rightarrow$ 投影区域为 D（如 D_{xy}）；

2）二代：将 $z=z(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$；

3）三计算：计算 z_x',z_y'，得 $dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$，得到

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy.$$

3. 第二型曲线积分：

1）化为定积分：平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),(t:\alpha\to\beta)\\ y=y(t),\end{cases}$ 给出，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{Px'(t)+Qy'(t)\}dt.$$

2）**格林公式**：设平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，则

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

a. 曲线封闭且无奇点在内部，直接用公式；

b. 曲线封闭但有奇点在内部，且除奇点外 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径；

c. 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径；

d. 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，可补线使其封闭。

24 张八-1-4 被积函数为积分区域正向边界时值最大。
积分区域不是单连通区域时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y} \not\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关。

3）两类曲线积分的关系：其中 $(\cos\alpha,\sin\beta)$ 为 L 上点 (x,y) 处与 L 同向的单位切向量：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\sin\beta)ds.$$

4）空间问题：

a. 直接计算：设 $\Gamma:\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), t:\alpha\to\beta, 则有 \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]dt.\\ z=z(t).\end{cases}$

b. **斯托克斯公式**：设 Ω 为某空间区域，Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片，Γ 为逐段光滑的 Σ 的边界，则有

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} \quad （第二型曲面积分形式）$$

若 $\boldsymbol{rotF}=0$，可换路径。

4. **第二型曲面积分**：

1）化为二重积分：拆成三个积分

2）转换投影法：若 Σ 投影到 xOy 平面上不是一条线，并且 Σ 上任意两点到 xOy 平面上的投影不重合，则可将 Σ 投影到 xOy 平面，设投影域为 D_{xy}，曲面方程写成 $z=z(x,y)$ 的形式，则有

$$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left[P\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R\right]dxdy.$$

$$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{xz}}\left[P\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+Q+R\left(-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right]dzdx.$$

$$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{yz}}\left[P+Q\left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right)+R\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right]dydz.$$

3）高斯公式：设空间有界闭区域 Ω 由分段光滑曲面 Σ 围成，则

$$\oiint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

a. 封闭曲面且内部无奇点，直接用公式；

b. 封闭曲面，有奇点在内部，且除奇点外 $div\boldsymbol{F}=0$，换个面积分；

c. 非封闭曲面，且 $div\boldsymbol{F}=0$，换个面积分；

d. 非封闭曲面，且 $div\boldsymbol{F}\neq 0$，补面使其封闭。

4）两类曲面积分的关系：其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 在点 (x,y,z) 处与 Σ 同侧的单位法向量。

$$\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

5. **应用**：

1）弧长：$l=\int_L ds=\int_a^b\sqrt{1+(y_x')^2}dx.$

2）曲面面积：$S=\iint\limits_\Sigma dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy.$

3）曲顶柱体体积：$V=\iint\limits_{D_{xy}}|z(x,y)|d\sigma.$

4）转动惯量：空间物体 Ω，对 x 轴、原点 O 的转动惯量：

$$I_x=\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,\quad I_O=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv.$$

3 微分方程

3.1 一阶微分方程

1.$y' + p(x)y = q(x)$，则 $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C\right]$.

2. **伯努利方程**：$y' + p(x)y = q(x)y^n$，令 $z = y^{1-n}$，得 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则 $\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$.

3.2 二阶可降阶的微分方程

1.$y'' = f(x, y')$：令 $y' = p, y'' = p'$，则 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$.

2.$y'' = f(y, y')$：令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$，则 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

3.3 高阶常系数线性微分方程

1.$y'' + py' + qy = f(x)$ 特解

微分算子：$y^* = \frac{1}{F(D)}f(x)$

1）$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}$：

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{F(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} = 0$，而 $F'(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = x\frac{1}{F'(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} = F'(D)\big|_{D=\alpha} = 0$，而 $F''(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = x^2\frac{1}{F''(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

2）$\frac{1}{F(D^2)}\cos\beta x$ 或 $\frac{1}{F(D^2)}\cos\beta x$：

若 $F(D^2)\big|_{D=\beta i} \neq 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(D^2)}\cos\beta x = \frac{1}{F(D^2)\big|_{D=\beta i}}\cos\beta x$.

若 $F(D^2)\big|_{D=\beta i} = 0$，有 $y^* = \frac{1}{F(D^2)}\cos\beta x = x\frac{1}{[F(D^2)]'}\cos\beta x$.

3）$\frac{1}{F(D)}(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k)$：$y^* = Q_k(D)(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k)$.

4）$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}v(x)$：$y^* = \frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}v(x)$.

2. **欧拉方程**：$x^2y'' + pxy' + qy = f(x), x < 0$ 时，令 $x = -e^t$.
$x > 0$ 时，令 $x = e^t$，则 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$ 即 $\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$.

3.4 n 阶常系数齐次线性微分方程的解

1.λ 为单实根，$Ce^{\lambda x}$.

2.λ 为重实根，$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$.

3.λ 为单复根 $\alpha + \beta i$，$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

4.λ 为二重复根 $\alpha + \beta i$，$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3x\cos\beta x + C_4x\sin\beta x)$.

24 李林 6-2-17 $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^2-1}}{2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4} \Rightarrow \underline{y = C_1e^{\frac{1}{2}} + C_2e^{-\frac{1}{2}}}$.

4 无穷级数

4.1 判敛法

1. 比较判别法：p 级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & p>1,\\ 发散, & p\leqslant 1.\end{cases}$ 广义 p 级数：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收敛, & p>1,\\ 发散, & p\leqslant 1.\end{cases}$

2. 积分判别法：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若存在 $[1,+\infty)$ 上单调减少的非负连续函数 $f(x)$，使得 $u_n=f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性相同。

3. 常用结论：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})收敛,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})不定.\end{cases}$ $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})收敛,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})收敛.\end{cases}$

4.2 幂级数

1. 收敛域：比值法和根值法只是计算幂级数收敛半径的充分条件，而不是必要条件。

记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 R_1,则 $R_1\geqslant R$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散,则 $|r|\geqslant R_1\geqslant R$.

2. 和函数：

1）直接套公式、先积后导或先导后积

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1.\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.\qquad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<+\infty.\qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty.\qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

2）用所给微分方程求和、建立微分方程求和。

4.3 傅里叶级数

1. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2,\cdots),\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,(n=1,2,3,\cdots).$$

2. 狄利克雷收敛定理：$S(x)=\begin{cases}f(x), & x为连续点,\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x为间断点,\\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$

3. 只在 $[0,l]$ 上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开：

1）正弦级数：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, x\in[0,l]$, $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx(n=1,2,3,\dots)$.

2）余弦级数：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x, x\in[0,l]$, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx(n=0,1,2,\dots)$.

5 线性代数

5.1 行列式和矩阵

1. 代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$，行列式按某一行（列）展开的展开公式：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(i=1,2,\ldots,n), \\ a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(j=1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

2. 矩阵的初等变换："左行右列"。

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵：
1）若 $r(\boldsymbol{A})=n$(列满秩)，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$；若 $r(\boldsymbol{B})=n$(行满秩)，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.
2）$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.
2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，$\quad r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}])=r(\boldsymbol{A})$.
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶方阵，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$；若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

分块矩阵秩的常用结论：
1）$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，$\quad r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.
2）当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.
3）$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，$\quad r\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.
4）$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$，$\quad r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.

2018-06 $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

5.2 向量组

1. 基坐标：向量空间 V 中的任一向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都可由这个基唯一地线性表示：$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha_r}$. 称有序数组 $x_1,x_2,\ldots,x_r$ 为向量 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha_r}$ 下的坐标.

2. 过渡矩阵：设 V 的两个基 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n};\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}$，若 $[\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n}]=[\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}]\boldsymbol{C}$. 称 C 为由基 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}$ 到基 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n}$ 的过渡矩阵.

24 张八-2-7 n 维向量组 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n,),B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n,)$ 等价，则
$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\Rightarrow r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{B}^T)=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\\ \boldsymbol{B}^T\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\\ \boldsymbol{B}^T\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$同解.

5.3 线性方程组

1. 公共解：齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的解，即联立方程的解。同理可求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$。

2. 同解方程组：两个方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 和 $\boldsymbol{Bx}=0$ 有完全相同的解。

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}\text{是同解方程组}\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}\text{的解满足}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O},\text{且}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}\text{的解满足}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$$

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}),\text{且}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}\text{的解满足}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}(\text{或}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{O}\text{的解满足}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O})$$

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}(\text{三秩相同较方便}).$$

$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^T)=r[(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})^T]=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的基础解向量个数相等 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 同解。

表 1: 线性方程组与空间平面、直线的关系

秩的情况	解的情况	位置关系
$r(\boldsymbol{A})=1,r(\boldsymbol{A}\vert\boldsymbol{b})=1$	有无穷解	1. 三平面重合
$r(\boldsymbol{A})=1,r(\boldsymbol{A}\vert\boldsymbol{b})=2$	无解	2. 三平面平行且三平面互异 3. 两平面重合，第三个平面与之平行
$r(\boldsymbol{A})=2,r(\boldsymbol{A}\vert\boldsymbol{b})=2$	有无穷解	4. 两平面相交，第三个平面与其中一个平面重合 5. 三平面互异，相交于一条直线
$r(\boldsymbol{A})=2,r(\boldsymbol{A}\vert\boldsymbol{b})=3$	无解	6. 两平面平行，第三个平面与这两个平面分别相交 7. 三平面互不平行，两两相交
$r(\boldsymbol{A})=3,r(\boldsymbol{A}\vert\boldsymbol{b})=3$	有唯一解	8. 三平面相交于一点

5.4 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T,\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*,\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m,f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$.
若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

5.5 特征值与特征向量

1. 迹数：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素之和，等于特征值总和。$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.
2. 反对称矩阵：$\boldsymbol{A}^T=-A(a_{ij}=-a_{ji}),r(\boldsymbol{A}_{3\times3})=2$.

表 2: 特征值及其对应的特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\vert\boldsymbol{A}\vert}{\lambda}$	λ	$f(\lambda)$
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$

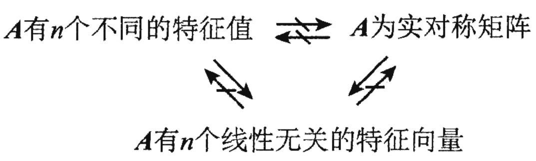


图 1: 相似和特征值之间的关系

5.6 二次型

1.n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\neq 0, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0 \Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n$ $\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{D}$ 可逆，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于 0.

2. 同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的判定：

1）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

2）实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数相同。

3）同阶实对称矩阵相似必合同。

2008-20 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

2012-13 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}$ 的秩为：<u>2</u>.

取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，则 $\begin{cases} r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant 3 \\ r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant 3 \end{cases}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3$，又 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}})=1$，即 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}})=2$.

或者：$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow \lambda_1=1, \\ r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=1. \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

2017-05 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆。

2017-20 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2 \Rightarrow r(\boldsymbol{A})=2$.

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量。

6 概率论与数理统计

6.1 随机变量

1. **随机变量概率分布及其数字特征:**

表 3: 一维随机变量概率分布及其数字特征

分布	概率密度/概率分布	均值	方差
泊松分布	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\dots)$	$EX=\lambda$	$DX=\lambda$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\dots)$	$EX=\dfrac{1}{p}$	$DX=\dfrac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$EX=\dfrac{a+b}{2}$	$DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$EX=\dfrac{1}{\lambda}$	$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$EX=\mu, E\|X-\mu\|=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma$	$DX=\sigma^2$

1. 分布函数：$F(x)$ 是分布函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 是 x 的单调不减、右连续函数，且 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$.
2. 若随机变量 X 分布函数 $F_X(x)$ 严格单调增加，反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在，则 $Y=F_X(X)\sim U(0,1)$.
3. 泊松定理：若 $X\sim B(n,p)$，当 n 很大，p 很小，$\lambda=np$ 适中时，二项分布可用泊松分布近似表示，即 $C_n^k p^k(1-p)^{n-1}\simeq\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

设 X 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=a_i\}=p_i(i=1,2,\dots)$，则数学期望 EX 存在的:
充分条件：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2p_n$ 收敛，必要条件：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_np_n$ 收敛.

2. **二维正态分布：**(X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

24 超越 1-22 $(X_1,X_2)\sim N$, $\begin{cases}Y_1=a_1X_1+a_2X_2\\ Y_2=b_1X_1+b_2X_2\end{cases}$，且 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow(Y_1,Y_2)\sim N.$

若 X,Y 都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则不论 X,Y 是否独立, 都有 $P\{\max(X,Y)>\mu\}=P\{\min(X,Y)\leqslant\mu\}$.
$P\{\max(X,Y)>\mu\}=P\{X>\mu\}\bigcup P\{Y>\mu\}=P\{X>\mu\}+P\{X>\mu\}-P\{X>\mu,Y>\mu\}$
$=1-P\{\min(X,Y)>\mu\}=P\{\min(X,Y)\leqslant\mu\}$.

3. 卷积公式：设 $(X,Y)\sim f(x,y)$

1）$Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\overset{独立}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

2）$Z=X-Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx\overset{独立}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx.$$

3）$Z=XY$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)dy.$$

4）$Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy.$$

4. **切比雪夫不等式**：设随机变量 X 的 EX 与 DX 均存在，则

$$\forall\varepsilon>0,P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}\text{或}P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

设随机变量 $X\sim B(n,p),Y=e^X-2$，则 $EY=[(e-1)p+1]^n-2$.

$$EY=\sum_{k=0}^{n}(e^k-2)\cdot C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ep)^k(1-p)^{n-k}-2\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$$
$$=(ep+1-p)^n-2(p+1-p)^n=(ep+1-p)^n-2=[(e-1)p+1]^n-2.$$

$Y=aX+b:a>0\Rightarrow\rho_{XY}=1,a<0\Rightarrow\rho_{XY}=-1.$

2012-08 将长度为 1 的木棒随机截成两段，其中 $X+Y=1$，则两段长度的相关系数为 $\rho_{XY}=-1$.

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{Cov(X,-X+1)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(-X+1)}}=\frac{E[X(-X)]-EX\cdot E(-X)}{DX}=\frac{-DX}{DX}=\underline{-1}.$$

独立和相关性的判断：

1.X,Y 独立 $\Rightarrow$ X,Y 不相关，反之不；X,Y 相关 $\Rightarrow$ X,Y 不独立。

2.(X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关。

3.X,Y 均服从 $0-1$ 分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关。

24 超越 5-10 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho),U=X+Y,V=X-Y$，$U$ 与 V 独立的充要条件为 $\underline{\sigma_1^2=\sigma_2^2}$.
(U,V) 服从二维正态分布，则 U,V 独立 $\Leftrightarrow$ U,V 不相关 $\Leftrightarrow$ $Cov(U,V)=Cov(X+Y,X-Y)=DX-DY=0\Leftrightarrow\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

6.2 大数定理与中心极限定理

中心极限定理：设 X_i 独立同分布于某一分布，期望、方差均存在，当 $n\to\infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从正态分布，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\varPhi(x).$$

6.3 统计量及其分布

1.χ^2 分布：若随机变量 $X_1,X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布. $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha,EX=n,DX=2n.$

常见分布的**可加性**:
1. 二项分布：$X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p) \Rightarrow X+Y \sim B(n+m,p)$.
2. 泊松分布：$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.
3. 正态分布：$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
4.χ^2 分布：$X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m) \Rightarrow X+Y \sim \chi^2(n+m)$.

2.t 分布：设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，$X$ 与 Y 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/N}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布. $P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha, Et=0$.

3.F 分布：设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布. $P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha, F \sim F(n_1,n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$，若 $t \sim t(n)$，则 $t^2 \sim F(1,n)$.

4. 正态总体下的常用结论：设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，则

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1), \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n).$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1) \Rightarrow \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1,n-1).$$

设 X_1,X_2 为来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1+X_2)^2$ 相互独立:
$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$, $\quad S^2=(X_1-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2+(X_2-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2=\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2}$,
$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，故 $(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1+X_2)^2$ 相互独立。

6.4 参数估计与假设检验

1. **矩估计**:
1）一个参数，用一阶矩建方程，令 $\overline{X}=EX$，**若一阶矩为 0**，用二阶矩建方程，令 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)$.
2）两个参数，用一阶矩和二阶矩建立两个方程.

2. **最大似然估计**：写似然函数 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 或 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$.
1）若似然函数有驻点，令 $\dfrac{dL}{d\theta}$ 或 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，解出 $\hat{\theta}$.
2）若似然函数无驻点（单调），或为常数，用定义求 $\hat{\theta}$.

24 超越 6-22 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} bx, & 0 \leqslant x<1, \\ ax, & 1 \leqslant x<2, \\ 0, & else. \end{cases}$ 测得样本观察值为 $0.5,0.8,1.5,1.5$. 则 a 与 b 的最大似然估计为$\hat{a}=\dfrac{1}{3}, \hat{b}=1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\dfrac{3a+b}{2}=1. \Rightarrow b=2-3a. \quad L=0.5b\cdot 0.8b\cdot(1.5a)^2=0.9\cdot(2-3a)^2a^2.$

$\ln L=\ln 0.9+2\ln(2-3a)+2\ln a, \dfrac{d\ln L}{da}=\dfrac{2}{a}-\dfrac{6}{2-3a}=0 \Rightarrow \hat{a}=\dfrac{1}{3}, \hat{b}=1.$

3. **估计量的评价**:
1）无偏性：$E\hat{\theta}=\theta$.
2）有效性：$E\hat{\theta_1}=\theta, E\hat{\theta_2}=\theta$，**即均是无偏估计量**，当 $D\hat{\theta_1}<D\hat{\theta_2}=\theta$ 时，$\hat{\theta_1}$ 更有效.
3）一致性（相合性）：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta| \geqslant \varepsilon\}=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$.

4. **区间估计**：单个正态总体均值和方差的置信区间：设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,...,X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2。

1）σ^2 已知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

2）σ^2 未知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

3）μ 已知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$.

4）μ 未知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

5. **假设检验**：正态总体下的六大检验及拒绝域：

1）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$.

2)σ^2 未知,μ 未知,$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$,拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\cup\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$.

3）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为 $\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty\right)$.

4）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu\geqslant\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right]$.

5）σ^2 未知，μ 未知，$H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为 $\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right)$.

6）σ^2 未知，μ 未知，$H_0:\mu\geqslant\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right]$.

6. **两类错误**：

第一类错误（弃真）：$\alpha=P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}$；第二类错误（取伪）：$\beta=P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\}$.