

2024 考研 301

# 数学

## 复习笔记

wjl

CC BY-NC 4.0

2023 年 12 月 8 日

# 目录

<b>1</b>	<b>一元函数</b>	<b>2</b>
1.1	函数极限与连续	2
1.2	一元函数微分学	2
1.3	一元函数积分学	2
1.4	中值定理	3
<b>2</b>	<b>多元函数</b>	<b>5</b>
2.1	多元函数微分学	5
2.2	空间解析几何	5
2.3	多元函数积分学	6
<b>3</b>	<b>微分方程</b>	<b>9</b>
3.1	一阶微分方程	9
3.2	二阶可降阶的微分方程	9
3.3	高阶常系数线性微分方程	9
3.4	$n$ 阶常系数齐次线性微分方程的解	9
<b>4</b>	<b>无穷级数</b>	<b>10</b>
4.1	判敛法	10
4.2	幂级数	10
4.3	傅里叶级数	10
<b>5</b>	<b>线性代数</b>	<b>11</b>
5.1	行列式和矩阵	11
5.2	向量组	11
5.3	线性方程组	11
5.4	相似矩阵	12
5.5	特征值与特征向量	12
5.6	二次型	13
<b>6</b>	<b>概率论与数理统计</b>	<b>14</b>
6.1	随机变量	14
6.2	大数定理与中心极限定理	15
6.3	统计量及其分布	15
6.4	参数估计与假设检验	16

# 1 一元函数

## 1.1 函数极限与连续

1. 等价无穷小:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 \sim -\frac{e}{2}x \quad (x \rightarrow 0^+), \quad 1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0), \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. 变上限积分: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \sim ax^m, g(x) \sim bx^n, ab \neq 0, m, n$  为正整数, 则  $F(x)$  是  $x$  的  $n(m+1)$  阶无穷小:  $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt \sim \int_0^{bx^n} at^m dt \sim Cx^{n(m+1)}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2}(n+1) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \sum_{k=1}^n \left[ \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right] - \frac{1}{2}(n+1) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

## 1.2 一元函数微分学

1. 反函数的导数:  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad x' = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}, \quad x'' = -\frac{y''}{(y')^3}.$

2. 曲率和曲率半径: 曲率  $k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ , 曲率半径  $R = \frac{1}{k}$ .

## 1.3 一元函数积分学

1. 反常积分: **2010-03, 2016-01**

比较判别法:  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 0 < p < 1, & \text{收敛,} \\ p \geq 1, & \text{发散.} \end{cases} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散.} \end{cases}$

1) 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq g(x), a \leq x \leq +\infty$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛; 当  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散.

2) 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$  (有限或  $\infty$ ), 则

- 当  $\lambda \neq 0$  时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  有相同的敛散性;
- 当  $\lambda = 0$  时, 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛;
- 当  $\lambda = \infty$  时, 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也发散.

2. 常用公式:

1) 区间再现公式:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx.$$

2) 华里士公式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于1的奇数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数.} \end{cases}$$

3) 对数-三角公式:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin bx)' \\ e^{ax} & \sin bx \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} + C, \quad \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos bx)' \\ e^{ax} & \cos bx \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} + C.$$

3.  $\Gamma$  函数:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{x=t^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt (x, t > 0).$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^\alpha d(e^{-x}) = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \Gamma(\alpha).$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(2) = 1, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!.$$

4. 极坐标表示的曲线在直角坐标系下的切线和法线:

**24 超越 4-12** 曲线  $r = 1 + \cos \theta$  在点  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  处的法线方程:  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

$$\begin{cases} x|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{4}, \\ y|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases} \text{ 则 } \frac{dx}{dy} \Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = \frac{dx/d\theta}{dy/d\theta} \Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

## 5. 旋转体体积:

1) 平面曲线绕定直线旋转: 设平面曲线  $L: y = f(x), a \leq x \leq b$ , 且  $f(x)$  可导, 定直线  $L_0: Ax + By + C = 0$ , 且过  $L_0$  的任一条垂线与  $L$  至多有 1 个交点, 则  $L$  绕  $L_0$  旋转一周所得旋转体体积为:

$$V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + By + C]^2 |Af'(x) - B| dx.$$

2) 平面曲边梯形绕  $x$  轴旋转:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

3) 平面曲边梯形绕  $y$  轴旋转:

$$V = 2\pi \int_a^b x |f^2(x)| dx.$$

4) 平面图形  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta] \in [0, \pi]\}$  绕极轴旋转:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta.$$

5. 旋转曲面的面积 (侧面积):

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

## 1.4 中值定理

1. 乘积求导公式  $(uv)' = u'v + uv'$  的逆用:

$$[f^2(x)]' = 2f(x) \cdot f'(x). \quad [f(x) \cdot f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x).$$

$$[f(x)e^{\varphi(x)}]' = f'(x)e^{\varphi(x)} + f(x)e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = [f'(x) + f(x)\varphi'(x)] e^{\varphi(x)}.$$

2. 商的求导公式  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  的逆用:

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}, \quad \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad [\ln f(x)]'' = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

3. 中值定理和不等式:

1) 积分中值定理: 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .

2) 柯西积分不等式:  $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$ .

曲线  $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$  的渐近线:

设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = b$ , 等式变形为  $1 + (\frac{y}{x})^3 = \frac{3a}{x} \cdot \frac{y}{x}$ , 两边取极限, 得  $k = -1$ .

则  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x)$ , 又  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ , 等式变形为  $x + y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3a \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2}$ ,

两边取极限, 得  $b = -a$ , 即渐近线为  $y = -x - a$ .

## 2 多元函数

### 2.1 多元函数微分学

1. 全微分: 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的某邻域内有定义, 若函数在点  $(x, y)$  处的全增量  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  可表示为  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ , 其中  $A$  和  $B$  不依赖于  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 而仅与  $x$  和  $y$  有关,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微分, 而  $A\Delta x + B\Delta y$  称为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的全微分, 记作  $dz$ , 即  $dz = A\Delta x + B\Delta y$ .

函数在  $z = f(x, y)$  点  $(x_0, y_0)$  处可微等价于

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

2. 偏导数连续的判断: 判断函数  $z = f(x, y)$  在特殊点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数是否连续:

1) 用定义法求  $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ ; 用公式法求  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ .

2) 计算  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y), \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x, y)$ , 看  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0), \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$  是否成立, 若成立, 则  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数是连续的.

3. 隐函数求导: 设  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$  当满足  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$  时, 可确定  $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$  且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

4. 二元函数的二阶泰勒公式: 22 李林 4-3-14

$f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的二阶泰勒公式为:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + o(\rho^2). \end{aligned}$$

其中  $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ .

### 2.2 空间解析几何

1. 空间曲线的切线与法平面:

曲线:  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$  当  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$  时, 取  $\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = (A, B, C)$ .

切线方程:  $\frac{x-x_0}{A} + \frac{y-y_0}{B} + \frac{z-z_0}{C} = 0$ . 法平面方程:  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ .

2. 旋转曲面: 曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕直线  $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  旋转一周形成的一个旋转曲面:

设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 方向向量  $\mathbf{s} = (m, n, p)$ . 在母线  $\Gamma$  上任取一点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , 则过  $M_1$  的纬圆上的任意一点  $P(x, y, z)$  满足条件  $\overrightarrow{M_1P} \perp \mathbf{s}, |\overrightarrow{M_0P}| = |\overrightarrow{M_0M_1}|$ , 即

$$\text{联立} \begin{cases} m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0, \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2, \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases} \quad \text{即得旋转曲面的方程。}$$

## 3. 场论:

1) 方向导数: 设三元函数  $u = u(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的某空间邻域  $U \subset \mathbf{R}^3$  内有定义,  $l$  为从点  $P_0$  出发的射线,  $P(x, y, z)$  为  $l$  上且在  $U$  内的任一点, 则

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = t \cos \alpha, \\ y - y_0 = \Delta y = t \cos \beta, \\ z - z_0 = \Delta z = t \cos \gamma. \end{cases} \text{ 以 } t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \text{ 表示 } P \text{ 与 } P_0 \text{ 之间的距离.}$$

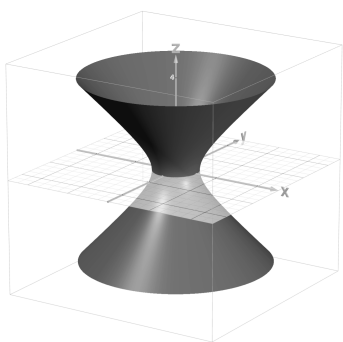
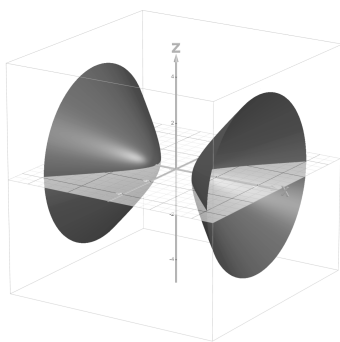
若极限  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$  存在, 则称此极限为函数  $u = u(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处沿方向  $l$  的方向导数, 记作  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0}$ .

计算:  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos \alpha + u'_y(P_0) \cos \beta + u'_z(P_0) \cos \gamma$ , 其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为方向  $l$  的方向余弦。

2) 梯度: 设三元函数  $u = u(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处具有一阶连续偏导数, 则函数在点  $P_0$  处的梯度为  $\mathbf{grad} u \Big|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$ , 函数在某点处的梯度是一个向量, 它的方向与取得最大方向导数的方向一致, 它的模为方向导数最大值。  $|\mathbf{grad} u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$ .

3) 散度:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ; 旋度:  $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ .

## 4. 双曲面: 注意区分

单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 双叶双曲面  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 

## 2.3 多元函数积分学

换元法: 取  $\begin{cases} x = x(u, v, \omega), \\ y = y(u, v, \omega), \\ z = z(u, v, \omega). \end{cases}$  其中  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix} \neq 0$ , 则

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{uvw}} f[x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} \right| du dv d\omega.$$

## 1. 第一型曲线积分: 边界方程可带入被积函数

1) 空间情形: 空间曲线  $L$  由参数式给出  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), (\alpha \leq t \leq \beta) \\ z = z(t). \end{cases}$  则  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$ , 且

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

2) 平面情形:

a. 平面曲线  $L$  由  $y = y(x) (a \leq x \leq b)$  给出, 则  $ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ , 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

b. 平面曲线  $L$  由参数式  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$  给出, 则  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ , 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

c. 平面曲线由极坐标形式  $r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$  给出, 则  $ds = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$ , 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

**2018-12** 设  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 则  $\oint_L xy ds = -\frac{\pi}{3}$ .

$$\oint_L = \frac{1}{6} \oint_L [(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds.$$

**24 超越 3-2** 曲线  $L: x^2 + y^2 = -2y$ , 则曲线积分  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = 8$ .

**24 李林 6-2-14** 曲线  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y + z = 0, \end{cases}$  则  $I = \int_L (x^2 + 2y + 2z) ds = \int_L x^2 ds = \pi$ .

注意轮换对称性条件

## 2. 第一型曲面积分: 边界方程可带入被积函数

1) 一投: 将曲面  $\Sigma$  投影到某一平面 (如  $xOy$  面) 上  $\Rightarrow$  投影区域为  $D$  (如  $D_{xy}$ );

2) 二代: 将  $z = z(x, y)$  或  $F(x, y, z) = 0$  代入  $f(x, y, z)$ ;

3) 三计算: 计算  $z'_x, z'_y$ , 得  $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$ , 得到

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

## 3. 第二型曲线积分:

1) 化为定积分: 平面有向曲线  $L$  由参数方程  $\begin{cases} x = x(t), (t: \alpha \rightarrow \beta) \\ y = y(t), \end{cases}$  给出, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta \{Px'(t) + Qy'(t)\} dt.$$

2) 格林公式: 设平面有界闭区域  $D$  由分段光滑曲线  $L$  围成, 则

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

a. 曲线封闭且无奇点在内部, 直接用公式;

b. 曲线封闭但有奇点在内部, 且除奇点外  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ , 则换路径;

c. 非封闭曲线且  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ , 则换路径;

d. 非封闭曲线且  $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ , 可补线使其封闭。



**24 张八-1-4** 被积函数为积分区域正向边界时值最大。

积分区域不是单连通区域时,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \int_L Pdx + Qdy$  与路径无关。

3) 两类曲线积分的关系: 其中  $(\cos \alpha, \sin \beta)$  为  $L$  上点  $(x, y)$  处与  $L$  同向的单位切向量:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \beta) ds.$$

4) 空间问题:

a. 直接计算: 设  $\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t: \alpha \rightarrow \beta, \\ z = z(t). \end{cases}$  则有  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt$ .

b. 斯托克斯公式: 设  $\Omega$  为某空间区域,  $\Sigma$  为  $\Omega$  内的分片光滑有向曲面片,  $\Gamma$  为逐段光滑的  $\Sigma$  的边界, 则有

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (\text{第二型曲面积分形式})$$

若  $\text{rot} \mathbf{F} = 0$ , 可换路径。

4. 第二型曲面积分:

1) 化为二重积分: 拆成三个积分

2) 转换投影法: 若  $\Sigma$  投影到  $xOy$  平面上不是一条线, 并且  $\Sigma$  上任意两点到  $xOy$  平面上的投影不重合, 则可将  $\Sigma$  投影到  $xOy$  平面, 设投影域为  $D_{xy}$ , 曲面方程写成  $z = z(x, y)$  的形式, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} \left[ P \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \right) + Q \left( -\frac{\partial z}{\partial y} \right) + R \right] dxdy.$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xz}} \left[ P \left( -\frac{\partial y}{\partial x} \right) + Q + R \left( -\frac{\partial y}{\partial z} \right) \right] dzdx.$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{yz}} \left[ P + Q \left( -\frac{\partial x}{\partial y} \right) + R \left( -\frac{\partial x}{\partial z} \right) \right] dydz.$$

3) 高斯公式: 设空间有界闭区域  $\Omega$  由分段光滑曲面  $\Sigma$  围成, 则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

a. 封闭曲面且内部无奇点, 直接用公式;

b. 封闭曲面, 有奇点在内部, 且除奇点外  $\text{div} \mathbf{F} = 0$ , 换个面积分;

c. 非封闭曲面, 且  $\text{div} \mathbf{F} = 0$ , 换个面积分;

d. 非封闭曲面, 且  $\text{div} \mathbf{F} \neq 0$ , 补面使其封闭。

4) 两类曲面积分的关系: 其中  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处与  $\Sigma$  同侧的单位法向量。

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

5. 应用:

1) 弧长:  $l = \int_L ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ .

2) 曲面面积:  $S = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$ .

3) 曲顶柱体体积:  $V = \iint_{D_{xy}} |z(x, y)| d\sigma$ .

4) 转动惯量: 空间物体  $\Omega$ , 对  $x$  轴、原点  $O$  的转动惯量:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv, \quad I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv.$$

### 3 微分方程

#### 3.1 一阶微分方程

$$1. y' + p(x)y = q(x), \text{ 则 } y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right].$$

$$2. \text{伯努利方程: } y' + p(x)y = q(x)y^n, \text{ 令 } z = y^{1-n}, \text{ 得 } \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } \frac{1}{n-1} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

#### 3.2 二阶可降阶的微分方程

$$1. y'' = f(x, y'): \text{ 令 } y' = p, y'' = p', \text{ 则 } \frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

$$2. y'' = f(y, y'): \text{ 令 } y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p, \text{ 则 } p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

#### 3.3 高阶常系数线性微分方程

$$1. y'' + py' + qy = f(x) \text{ 特解}$$

$$\text{微分算子: } y^* = \frac{1}{F(D)} f(x)$$

$$1) \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x}:$$

$$\text{若 } F(D)|_{D=\alpha} \neq 0, \text{ 有 } y^* = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{F(D)|_{D=\alpha}} e^{\alpha x}.$$

$$\text{若 } F(D)|_{D=\alpha} = 0, \text{ 而 } F'(D)|_{D=\alpha} \neq 0, \text{ 有 } y^* = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = x \frac{1}{F'(D)|_{D=\alpha}} e^{\alpha x}.$$

$$\text{若 } F(D)|_{D=\alpha} = F'(D)|_{D=\alpha} = 0, \text{ 而 } F''(D)|_{D=\alpha} \neq 0, \text{ 有 } y^* = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = x^2 \frac{1}{F''(D)|_{D=\alpha}} e^{\alpha x}.$$

$$2) \frac{1}{F(D^2)} \cos \beta x \text{ 或 } \frac{1}{F(D^2)} \sin \beta x:$$

$$\text{若 } F(D^2)|_{D=\beta i} \neq 0, \text{ 有 } y^* = \frac{1}{F(D^2)} \cos \beta x = \frac{1}{F(D^2)|_{D=\beta i}} \cos \beta x.$$

$$\text{若 } F(D^2)|_{D=\beta i} = 0, \text{ 有 } y^* = \frac{1}{F(D^2)} \cos \beta x = x \frac{1}{[F(D^2)]'} \cos \beta x.$$

$$3) \frac{1}{F(D)} (x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k): y^* = Q_k(D) (x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k).$$

$$4) \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} v(x): y^* = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{F(D+\alpha)} v(x).$$

$$2. \text{欧拉方程: } x^2 y'' + pxy' + qy = f(x), x < 0 \text{ 时, 令 } x = -e^t.$$

$$x > 0 \text{ 时, 令 } x = e^t, \text{ 则 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \text{ 即 } \frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t).$$

#### 3.4 n 阶常系数齐次线性微分方程的解

$$1. \lambda \text{ 为单实根, } Ce^{\lambda x}.$$

$$2. \lambda \text{ 为重实根, } (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}.$$

$$3. \lambda \text{ 为单复根 } \alpha + \beta i, e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

$$4. \lambda \text{ 为二重复根 } \alpha + \beta i, e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 x \cos \beta x + C_4 x \sin \beta x).$$

$$\text{24 李林 6-2-17 } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}.$$

## 4 无穷级数

### 4.1 判敛法

1. 比较判别法:  $p$  级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛, } p > 1, \\ \text{发散, } p \leq 1. \end{cases}$  广义  $p$  级数:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} \text{收敛, } p > 1, \\ \text{发散, } p \leq 1. \end{cases}$
2. 积分判别法: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 若存在  $[1, +\infty)$  上单调减少的非负连续函数  $f(x)$ , 使得  $u_n = f(n)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  的敛散性相同。
3. 常用结论: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) \text{ 收敛,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) \text{ 不定.} \end{cases} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1}) \text{ 收敛,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1}) \text{ 收敛.} \end{cases}$

### 4.2 幂级数

1. 收敛域: 比值法和根值法只是计算幂级数收敛半径的充分条件, 而不是必要条件。

记  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  的收敛半径为  $R_1$ , 则  $R_1 \geq R$ . 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散, 则  $|r| \geq R_1 \geq R$ .

2. 和函数:

- 1) 直接套公式、先积后导或先导后积

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1. & e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty. \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 \leq x \leq 1. & e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty. \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty. & \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty. & \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

- 2) 用所给微分方程求和、建立微分方程求和。

### 4.3 傅里叶级数

1. 周期为  $2l$  的傅里叶级数:  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$ .

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$2. \text{狄利克雷收敛定理: } S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点,} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l. \end{cases}$$

3. 只在  $[0, l]$  上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开:

$$1) \text{ 正弦级数: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, x \in [0, l], \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$2) \text{ 余弦级数: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, x \in [0, l], \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx (n=0, 1, 2, \dots).$$

## 5 线性代数

### 5.1 行列式和矩阵

1. 代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , 行列式按某一行(列)展开的展开公式:

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} (i=1, 2, \dots, n), \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} (j=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

2. 矩阵的初等变换: “左行右列”。

1. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵:

1) 若  $r(A) = n$  (列满秩), 则  $r(AB) = r(B)$ ; 若  $r(B) = n$  (行满秩), 则  $r(AB) = r(A)$ .

2)  $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ .

2. 设  $A, B$  为同型矩阵, 则  $r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ,  $r(A, B) = r(A[E, B]) = r(A)$ .

3. 设  $A$  是  $n(n > 2)$  阶方阵, 则  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$ ; 若  $A$  可逆, 则  $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ .

分块矩阵秩的常用结论:

1)  $r(A+B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ,  $r(A+B) \leq r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq r(A) + r(B)$ .

2) 当  $A$  可逆时,  $r \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D)$ .

3)  $r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$ ,  $r \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$ .

4)  $r \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \geq r(A) + r(D)$ ,  $r \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \geq r(A) + r(D)$ .

**2018-06**  $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ .

### 5.2 向量组

1. 基坐标: 向量空间  $V$  中的任一向量  $\xi$  都可由这个基唯一地线性表示:  $\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r$ . 称有序数组  $x_1, x_2, \dots, x_r$  为向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  下的坐标.

2. 过渡矩阵: 设  $V$  的两个基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , 若  $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]C$ . 称  $C$  为由基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵.

**24 张八-2-7**  $n$  维向量组  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  等价, 则

$$r(A) = r(B) = r(A, B) \Rightarrow r(A^T) = r(B^T) = r \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} \Rightarrow A^T x = O, B^T x = O, \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = O \text{ 同解.}$$

### 5.3 线性方程组

1. 公共解: 齐次线性方程组  $A_{m \times n}x = O$  和  $B_{m \times n}x = O$  的公共解是满足方程组  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = O$  的解, 即联立方程的解. 同理可求  $Ax = \alpha$  与  $Bx = \beta$ .

2. 同解方程组: 两个方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  有完全相同的解。

$Ax = O, Bx = O$  是同解方程组  $\Leftrightarrow Ax = O$  的解满足  $Bx = O$ , 且  $Bx = O$  的解满足  $Ax = O$

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$ , 且  $Ax = O$  的解满足  $Bx = O$  (或  $Bx = O$  的解满足  $Ax = O$ )

$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  (三秩相同较方便) .

$A_{m \times n}x = b$  有解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) \Leftrightarrow r(A^T) = r[(A, b)^T] = r \begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} \Leftrightarrow$   
 $A^T x = O$  与  $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} x = O$  的基础解向量个数相等  $\Leftrightarrow A^T x = O$  与  $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} x = O$  同解。

表 1: 线性方程组与空间平面、直线的关系

秩的情况	解的情况	位置关系
$r(A) = 1, r(A b) = 1$	有无穷解	1. 三平面重合
$r(A) = 1, r(A b) = 2$	无解	2. 三平面平行且三平面互异 3. 两平面重合, 第三个平面与之平行
$r(A) = 2, r(A b) = 2$	有无穷解	4. 两平面相交, 第三个平面与其中一个平面重合 5. 三平面互异, 相交于一条直线
$r(A) = 2, r(A b) = 3$	无解	6. 两平面平行, 第三个平面与这两个平面分别相交 7. 三平面互不平行, 两两相交
$r(A) = 3, r(A b) = 3$	有唯一解	8. 三平面相交于一点

## 5.4 相似矩阵

设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵, 若  $A \sim B$ , 则  $A^T \sim B^T, A^* \sim B^*, A^{-1} \sim B^{-1}, A^m \sim B^m, f(A) \sim f(B)$ .  
 若  $A, B$  可逆, 则  $AB \sim BA$ .

## 5.5 特征值与特征向量

- 迹数: 矩阵  $A$  的对角线元素之和, 等于特征值总和。  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .
- 反对称矩阵:  $A^T = -A (a_{ij} = -a_{ji}), r(A_{3 \times 3}) = 2$ .

表 2: 特征值及其对应的特征向量

矩阵	$A$	$kA$	$A^k$	$f(A)$	$A^{-1}$	$A^*$	$P^{-1}AP = B$	$P^{-1}f(A)P = B$
特征值	$\lambda$	$k\lambda$	$\lambda^k$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$	$\lambda$	$f(\lambda)$
对应的特征向量	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$P^{-1}\xi$	$P^{-1}\xi$

$A$  有  $n$  个不同的特征值  $\Leftrightarrow A$  为实对称矩阵



$A$  有  $n$  个线性无关的特征向量

图 1: 相似和特征值之间的关系

## 5.6 二次型

1.  $n$  元二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  正定  $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i > 0 \Leftrightarrow f$  的正惯性指数  $p = n$   
 $\Leftrightarrow \exists \mathbf{D}$  可逆,  $\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A}$  与  $\mathbf{E}$  合同  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的各阶顺序主子式均大于 0.

2. 同阶方阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  合同的判定:

- 1)  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  合同  $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$ .
- 2) 实对称矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的正负惯性指数相同。
- 3) 同阶实对称矩阵相似必合同。

**2008-20**  $\alpha, \beta$  是 3 维列向量,  $\mathbf{A} = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T \Rightarrow r(\mathbf{A}) \leq 2$ .

**2012-13** 设  $\alpha$  为 3 维列向量,  $\mathbf{E}$  为 3 阶单位矩阵, 则矩阵  $\mathbf{E} - \alpha \alpha^T$  的秩为: 2.

取  $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \alpha \alpha^T$ ,  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} = (\mathbf{E} - \alpha \alpha^T)(\mathbf{E} - \alpha \alpha^T) = \mathbf{E} - \alpha \alpha^T = \mathbf{A}$ , 即  $\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{O}$ , 则

$$\begin{cases} r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \geq 3 \\ r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \leq 3 \end{cases}, \text{ 所以 } r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 3, \text{ 又 } r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = r(\alpha \alpha^T) = 1, \text{ 即 } r(\mathbf{E} - \alpha \alpha^T) = 2.$$

或者:  $\begin{cases} (\alpha \alpha^T) \alpha = \alpha \Rightarrow \lambda_1 = 1, \\ r(\alpha \alpha^T) = 1. \end{cases} \Rightarrow \alpha \alpha^T \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{E} - \alpha \alpha^T) \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$

**2017-05**  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $\mathbf{E}$  为  $n$  阶单位矩阵  $\Rightarrow \mathbf{E} - \alpha \alpha^T$  不可逆。

**2017-20** 3 阶矩阵  $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow r(\mathbf{A}) = 2$ .

**$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$**

若  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  满足  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 且  $\mathbf{A}$  有  $n$  个互异特征值, 则  $\mathbf{A}$  的特征向量都是  $\mathbf{B}$  的特征向量。

## 6 概率论与数理统计

### 6.1 随机变量

#### 1. 随机变量概率分布及其数字特征:

表 3: 一维随机变量概率分布及其数字特征

分布	概率密度/概率分布	均值	方差
泊松分布	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, \dots)$	$EX = \lambda$	$DX = \lambda$
几何分布	$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1} (k = 1, 2, \dots)$	$EX = \frac{1}{p}$	$DX = \frac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	$EX = \frac{a+b}{2}$	$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$EX = \frac{1}{\lambda}$	$DX = \frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$EX = \mu, E X - \mu  = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$	$DX = \sigma^2$

1. 分布函数:  $F(x)$  是分布函数  $\Leftrightarrow F(x)$  是  $x$  的单调不减、右连续函数, 且  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .
2. 若随机变量  $X$  分布函数  $F_X(x)$  严格单调增加, 反函数  $F_X^{-1}(y)$  存在, 则  $Y = F_X(X) \sim U(0, 1)$ .
3. 泊松定理: 若  $X \sim B(n, p)$ , 当  $n$  很大,  $p$  很小,  $\lambda = np$  适中时, 二项分布可用泊松分布近似表示, 即  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

设  $X$  为离散型随机变量, 其分布律为  $P\{X = a_i\} = p_i (i = 1, 2, \dots)$ , 则数学期望  $EX$  存在的:

充分条件:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 p_n$  收敛, 必要条件:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n$  收敛.

2. 二维正态分布:  $(X, Y)$  服从参数为  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$  的二维正态分布, 记为  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ .

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}.$$

**24 超越 1-22**  $(X_1, X_2) \sim N, \begin{cases} Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 \\ Y_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 \end{cases}, \text{ 且 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (Y_1, Y_2) \sim N.$

若  $X, Y$  都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则不论  $X, Y$  是否独立, 都有  $P\{\max(X, Y) > \mu\} = P\{\min(X, Y) \leq \mu\}$ .  
 $P\{\max(X, Y) > \mu\} = P\{X > \mu\} \cup P\{Y > \mu\} = P\{X > \mu\} + P\{Y > \mu\} - P\{X > \mu, Y > \mu\}$   
 $= 1 - P\{\min(X, Y) > \mu\} = P\{\min(X, Y) \leq \mu\}.$

3. 卷积公式: 设  $(X, Y) \sim f(x, y)$

- 1)  $Z = X + Y$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

- 2)  $Z = X - Y$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dx \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x-z) dx.$$

3)  $Z = XY$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) dy.$$

4)  $Z = \frac{X}{Y}$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy.$$

4. 切比雪夫不等式: 设随机变量  $X$  的  $EX$  与  $DX$  均存在, 则

$$\forall \varepsilon > 0, P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X - EX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

设随机变量  $X \sim B(n, p), Y = e^X - 2$ , 则  $EY = [(e-1)p + 1]^n - 2$ .

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{k=0}^n (e^k - 2) \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (ep)^k (1-p)^{n-k} - 2 \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (ep + 1 - p)^n - 2(p + 1 - p)^n = (ep + 1 - p)^n - 2 = [(e-1)p + 1]^n - 2. \end{aligned}$$

$Y = aX + b: a > 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 1, a < 0 \Rightarrow \rho_{XY} = -1$ .

**2012-08** 将长度为 1 的木棒随机截成两段, 其中  $X + Y = 1$ , 则两段长度的相关系数为  $\rho_{XY} = -1$ .

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, -X + 1)}{\sqrt{DX} \sqrt{D(-X + 1)}} = \frac{E[X(-X)] - EX \cdot E(-X)}{DX} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

独立和相关性的判断:

1.  $X, Y$  独立  $\Rightarrow X, Y$  不相关, 反之不;  $X, Y$  相关  $\Rightarrow X, Y$  不独立。

2.  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 则  $X, Y$  独立  $\Leftrightarrow X, Y$  不相关。

3.  $X, Y$  均服从 0-1 分布, 则  $X, Y$  独立  $\Leftrightarrow X, Y$  不相关。

**24 超越 5-10** 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho), U = X + Y, V = X - Y$ ,  $U$  与  $V$  独立的充要条件为  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .  $(U, V)$  服从二维正态分布, 则  $U, V$  独立  $\Leftrightarrow U, V$  不相关  $\Leftrightarrow \text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X+Y, X-Y) = DX - DY = 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .

## 6.2 大数定理与中心极限定理

中心极限定理: 设  $X_i$  独立同分布于某一分布, 期望、方差均存在, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{i=1}^n X_i$  服从正态分布, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

## 6.3 统计量及其分布

1.  $\chi^2$  分布: 若随机变量  $X_1, X_1, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从标准正态分布, 则随机变量  $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布.  $P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha, EX = n, DX = 2n$ .



常见分布的可加性:

1. 二项分布:  $X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p) \Rightarrow X + Y \sim B(n + m, p)$ .
2. 泊松分布:  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
3. 正态分布:  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .
4.  $\chi^2$  分布:  $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m) \Rightarrow X + Y \sim \chi^2(n + m)$ .

2.  $t$  分布: 设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ ,  $X$  与  $Y$  相互独立, 则随机变量  $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$  服从自由度为  $n$  的  $t$  分布.  $P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha, Et = 0$ .

3.  $F$  分布: 设随机变量  $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$  服从自由度为  $(n_1, n_2)$  的  $F$  分布.  $P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha, F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ , 若  $t \sim t(n)$ , 则  $t^2 \sim F(1, n)$ .

4. 正态总体下的常用结论: 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}, S^2$  分别是样本均值和样本方差,  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立, 则

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1), \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n).$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1) \Rightarrow \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1).$$

设  $X_1, X_2$  为来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $(X_1 + X_2)^2$  与  $(X_1 - X_2)^2$  相互独立:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad S^2 = (X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2})^2 + (X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2})^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2},$$

$\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立, 故  $(X_1 + X_2)^2$  与  $(X_1 - X_2)^2$  相互独立。

## 6.4 参数估计与假设检验

1. 矩估计:

1) 一个参数, 用一阶矩建方程, 令  $\bar{X} = EX$ , 若一阶矩为  $\theta$ , 用二阶矩建方程, 令  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = E(X^2)$ .

2) 两个参数, 用一阶矩和二阶矩建立两个方程.

2. 最大似然估计: 写似然函数  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$  或  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ .

1) 若似然函数有驻点, 令  $\frac{dL}{d\theta}$  或  $\frac{d \ln L}{d\theta} = 0$ , 解出  $\hat{\theta}$ .

2) 若似然函数无驻点 (单调), 或为常数, 用定义求  $\hat{\theta}$ .

3. 估计量的评价:

1) 无偏性:  $E\hat{\theta} = \theta$ .

2) 有效性:  $E\hat{\theta}_1 = \theta, E\hat{\theta}_2 = \theta$ , 即均是无偏估计量, 当  $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2 = \theta$  时,  $\hat{\theta}_1$  更有效.

3) 一致性 (相合性):  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$ .

4. 区间估计: 单个正态总体均值和方差的置信区间: 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 从总体  $X$  中抽取样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 样本均值为  $\bar{X}$ , 样本方差为  $S^2$ .

1)  $\sigma^2$  已知,  $\mu$  的置信水平是  $1 - \alpha$  的置信区间为:  $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ .

2)  $\sigma^2$  未知,  $\mu$  的置信水平是  $1 - \alpha$  的置信区间为:  $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$ .

3)  $\mu$  已知,  $\sigma^2$  的置信水平是  $1 - \alpha$  的置信区间为:  $\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right)$ .

4)  $\mu$  未知,  $\sigma^2$  的置信水平是  $1 - \alpha$  的置信区间为:  $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right)$ .

5. 假设检验: 正态总体下的六大检验及拒绝域:

- 1)  $\sigma^2$  已知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ , 拒绝域为  $\left(-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$ .
  - 2)  $\sigma^2$  未知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ , 拒绝域为  $\left(-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \cup \left[\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty\right)$ .
  - 3)  $\sigma^2$  已知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ , 拒绝域为  $\left[\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}, +\infty\right)$ .
  - 4)  $\sigma^2$  已知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ , 拒绝域为  $\left(-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right]$ .
  - 5)  $\sigma^2$  未知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ , 拒绝域为  $\left[\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1), +\infty\right)$ .
  - 6)  $\sigma^2$  未知,  $\mu$  未知,  $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ , 拒绝域为  $\left(-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right]$ .
6. 两类错误:
- 第一类错误 (弃真):  $\alpha = P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}$ ; 第二类错误 (取伪):  $\beta = P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\}$ .