Metoda Różnic Skończonych

1 Aproksymacja pierwszej pochodnej - różnice rzędu pierwszego

Z definicji:

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Dla "wystarczająco" małego h:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

jest różnicą prawostronną (w przód, forward difference). Możemy też zbliżać się do punktu x z lewej strony, wtedy:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{3}$$

Jest to różnica lewostronna (w tył, backward difference). Gdy zbliżamy się do punktu x z obu stron to dostajemy różnicę centralną (central difference).

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{4}$$

Metoda różnicy centralnej jest najszybciej zbieżna. Wynika to z szeregu Taylora:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \tag{5}$$

Wyznaczając stąd $f'(x)$ dostajemy

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{h} \left(\frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \right) \tag{6}$$

Stąd błąd aproksymacji różnicą prawostronną wynosi

$$\epsilon_p = \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots = O(h) \tag{7}$$

Możemy powiedzieć, że błąd jest rzędu h, lub

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \tag{8}$$

Jeżeli w szeregu Taylora zastąpimy h przez $-h$ to:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \tag{9}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots\right) \tag{10}$$

Stąd błąd aproksymacji różnicą lewostronną wynosi

$$\epsilon_l = \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots = O(h) \tag{11}$$

Odejmując stronami równania (5) i (9) dostajemy schemat różnicy centralnej:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x) + \dots \tag{12}$$

Stąd

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \dots \tag{13}$$

$$\epsilon_c = \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots = O(h^2) \tag{14}$$

Czyli metody oparte na różnicy lewostronnej i prawostronnej są $O(h)$, metody oparte na różnicy centralnej są $O(h^2)$. Oznacza to, że np. dwukrotne zmniejszenie kroku h powoduje również dwukrotne zmniejszenie błędu aproksymacji dla metody prawostronnej i lewostronnej, natomiast czterokrotne zmniejszenie tego błędu dla różnicy centralnej.

1.1 Przykład

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 18x^2 - 4$$
$$f'(1) = 18 - 4 = 14$$

Aproksymacja różnicami prawostronnymi:

h	(f(1 + h) - f(1))/h	błąd
1	(f(2) - f(1))/1 = 38	24
0.1	(f(1.1) - f(1))/0.1 = 15.86	1.86
0.01	(f(1.01) - f(1))/0.01 = 14.1806	0.1806

Aproksymacja róznicami lewostronnymi:

h	(f(1) - f(1 - h))/h	błąd
1	(f(1) - f(0))/1 = 2	12
0.1	(f(1) - f(0.9))/0.1 = 12.26	1.74
0.01	(f(1) - f(0.99))/0.01 = 13.8206	0.1794

Aproksymacja róznicami centralnymi:

h	(f(1 + h) - f(1 - h))/2h	błąd
1	(f(2) - f(0))/2 = 20	6
0.1	(f(1.1) - f(0.9))/0.2 = 14.06	0.06
0.01	(f(1.01) - f(0.99))/0.02 = 14.0006	0.0006

2 Aproksymacja drugiej pochodnej

Dodając stronami równania (5) i (9) dostajemy

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x) \dots \tag{15}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \tag{16}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2) \tag{17}$$

Jest to druga różnica centralna.

2.1 Przykład

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 18x^2 - 4$$
$$f''(x) = 36x$$
$$f''(1) = 36$$

Niech $h = 1$, wtedy:

$$f''(1) = \frac{f(2) + f(0) - 2f(1)}{1^2} = 42 + 2 - 8 = 36$$

Wynik jest dokładny, ponieważ $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n \geqslant 4$ a błąd aproksymacji zależy jedynie od pochodnych rzędu czwartego i wyższych.

3 Problem 1

Dane jest następujące równanie konwekcji-dyfuzji

$$c\frac{du(x)}{dx} - \frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x) \tag{18}$$

oraz warunki brzegowe Dirichleta

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

Szukana funkcja $[0, 1] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$ Stała c jest dana (np. $c = 0.5$) Funkcja $[0, 1] \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$ jest dana (np. $f(x) = 2x + 10$)

1. Dzielimy przedział $[0, 1]$ na n podprzedziałów

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] \text{ gdzie } h = \frac{1}{n}, x_i = ih, x_{i+1} = x_i + h \tag{19}$$

2. Zapisujemy równanie konwekcji-dyfuzji w punktach x_i

$$cu'(x_i) - u''(x_i) = f(x_i) \tag{20}$$

$$u(x_0) = u(0) = 0, u(x_1) = u(1) = 0$$

3. Przybliżamy pochodne

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} \tag{21}$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \tag{22}$$

4. Wstawiamy wzory przybliżające pochodne do równania i wyprowadzamy układ równań na $u(x_i)$

$$c\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{2h} - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i) \tag{23}$$

$$u(x_{i-1}) \left[-\frac{c}{2h} - \frac{1}{h^2}\right] + u(x_i) \left[\frac{2}{h^2}\right] + u(x_{i+1}) \left[\frac{c}{2h} - \frac{1}{h^2}\right] = f(x_i) \tag{24}$$

5. Zapisujemy układ równań w postaci macierzowej

3.1 Obliczenia numeryczne

Następnie prezentowany i omawiany jest program w MATLABie, rozwiązujący powyższy uklad równań

Listing 1: Kod szkieletu

```
function KonwekcjaDyfuzja (c,n)

% obliczamy odleglosc pomiedzy kolejnymi punktami
h=1/n;

% obliczamy wartosci odpowiednio znajdujace sie
% nad przekatna (P1), na przekatnej (P2), pod przekatna (P3)
P1 = (c/2*h)-(1/h^2);
P2 =  2 / (h^2);
P3 = (-c/2*h)-(1/h^2);

% tworzymy rzadka tablice o rozmiarze (n-1)x(n-1)
macierz = sparse(n-1,n-1);
% tworzymy wektor funkcji o rozmiarze (n-1)
wektor_pr = zeros(n-1,1);
% wypelnianie macierzy
macierz(1,1) = P2;
macierz(1,2) = P1;
for k = 2:n-2
    macierz(k,k-1) = P3;
    macierz(k,k) = P2;
    macierz(k,k+1) = P1;
end
macierz(n-1,n-2) = P3;
macierz(n-1,n-1) = P2;
% wypelniamy wektor prawej strony
for k = 1:n-1
    wektor_pr(k,1) = 2 + 10*(k/n);
end
% eliminacja gausa dla macierzy (n-1)x(n-1)
% i wektora prawej strony
% uzywamy optymalnego solwera dla macierzy rzadkich - operator \
wynik = macierz\wektor_pr;

% tworzymy wektor punktow
punkty = [0:1/n:1];
% oraz wartosci u(xn)
wartosci = zeros(1,n+1);
for k = 2:n
    wartosci(k)=wynik(k-1);
end
p = 3;
x=punkty;
y=wartosci;
% x, y - wektory wspolrzednych
% p = stopien wielomianu
A(1:p+1,1:p+1)=0;
b(1:p+1)=0;
% petla po punktach
for k=1:n
% petla po wierszach
    for i=1:p+1
% petla po kolumnach
        for j=1:p+1
```

```
            A(i,j)=A(i,j)+x(k)^(i+j-2);
        end
        b(i)=b(i)+y(k)*x(k)^(i-1);
    end
end
a=A\b';
% rysowanie wielomianu aproksymujacego
dokl = 10000;
punkt = [0:1/dokl:1];
% petla po punktach dla ktorych rysujemy wartosci wielomianu
for i=1:dokl+1
% petla po wspolczynnikach wielomianu
    wielomian(i)=0;
    for j=1:p+1
        wielomian(i)=wielomian(i)+a(j)*punkt(i)^(j-1);
    end
end

% rysowanie wyniku
plot(punkt,wielomian);
% zachowanie wykresu dla kolejnego rysowania
hold on
plot(x,y,'rx');
% koniec zachowywania wykresow - kolejne rysowanie nadpisze wykres
hold off
```