

Raport z laboratoriów 5 – równania różniczkowe 2 rzędu

➔ Uwagi wstępne:

Celem programu jest rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu z wykorzystaniem metody Rungego-Kutty do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

➔ Działanie programu:

W zadaniu otrzymujemy równanie różniczkowe 2 rzędu na położenie wahadła w funkcji czasu. Żeby móc skorzystać z metody Rungego-Kutty potrzebowałem zamienić wyjściowe równanie na układ 2 równań niższego rzędu. Poniżej przedstawiam swoje obliczenia (być może trochę „na oko”, ale to jest sposób, w który ja rozumiem zagadnienie):

Handwritten mathematical derivation showing the conversion of a second-order differential equation for a pendulum into a system of two first-order equations:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \sin \alpha, \quad \alpha = \alpha(t), \\ \alpha(t_0) &= \alpha_0, \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \omega_0 \end{aligned}$$

K wiadomości z wyliczeń wprowadzam sobie zmienne pomocnicze x_1, x_2

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha(t) \\ x_2(t) &= \alpha'(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1'(t) &= x_2 \\ x_2'(t) &= \alpha''(t) \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha' = \omega \\ x_2' &= -\frac{g}{l} \sin \alpha \end{aligned} \quad \text{ostatecznie} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin \alpha \end{aligned}$$

Teraz mogę już przystąpić do omawiania działania programu. Z racji takiej, że jest dużo zmiennych, wszystkie parametry należy zmieniać ręcznie w kodzie. Na początku wprowadzam wartości początkowe dla prędkości kątowej ω_0 [s^{-1}] oraz kąta wychylenia z położenia równowagi α_0 [rad]. Również przed funkcją *main* jako wartości globalne wprowadzam długość wahadła l [m], czas t_0 od którego program zacznie wyliczać rozwiązania, czas t_k , do którego program będzie liczył oraz krok całkowania h . Należy również zdefiniować dwuelementowy wektor (ponieważ rozważam 2 równania) y_0 , który będzie przechowywał aktualne wartości: kąta wychylenia – pierwszy element wektora – i prędkość kątową – drugi element wektora. Żeby funkcja *vrk4* działała poprawnie należy również obliczać wartości elementów wektora f , który jest równy wartościom prawych stron kolejnych równań liniowych różniczkowych pierwszego rzędu do jakich sprowadziliśmy nasze wyjściowe równanie 2 rzędu dla zadanego czasu i wartości kąta oraz prędkości kątowej w poprzednim kroku iteracyjnym. Za obliczenie wektora f dla każdego kroku całkowania odpowiada funkcja *fun*. Działanie tego programu jest bardzo podobne do działania programu wykonującego laboratorium4 z wyjątkiem tego, że w tym przypadku rozwiązujemy 2 równania liniowe pierwszego rzędu równoległe (jednocześnie).

Oto kilka wyników programu dla różnych danych:

F:\WOJTEK\STUDIA\SEM2\informatyka 2\lab5\Debug\lab5.exe

t0=0.000000, tk=10.000000, h=0.100000, l=1.000000, m=4.000000 omega0=1.500000, alfa0=1.571000,

czas	alfa	omega	energia calkowita
0.000000	1.571000	1.500000	43.747992
0.100000	1.672017	0.521182	43.748390
0.200000	1.675388	-0.453712	43.748400
0.300000	1.581138	-1.432173	43.748030
0.400000	1.388962	-2.408652	43.747296
0.500000	1.100921	-3.337175	43.746578
0.600000	0.726549	-4.113246	43.746804
0.700000	0.288322	-4.589559	43.747840
0.800000	-0.177092	-4.644006	43.747295
0.900000	-0.625664	-4.260973	43.744830
1.000000	-1.018022	-3.543037	43.743263
1.100000	-1.328120	-2.639401	43.743431
1.200000	-1.543736	-1.668209	43.744146
1.300000	-1.661548	-0.688627	43.744611
1.400000	-1.681639	0.286477	43.744685
1.500000	-1.604160	1.264010	43.744382
1.600000	-1.428749	2.242644	43.743701
1.700000	-1.156755	3.185096	43.742923
1.800000	-0.796007	3.997116	43.742931
1.900000	-0.366491	4.535309	43.743960
2.000000	0.097310	4.666808	43.743840
2.100000	0.551823	4.354144	43.741526
2.200000	0.956066	3.683128	43.739650
2.300000	1.281446	2.801421	43.739589
2.400000	1.513643	1.835996	43.740292
2.500000	1.648230	0.855966	43.740820
2.600000	1.685019	-0.119617	43.740961
2.700000	1.624267	-1.096255	43.740723
2.800000	1.465620	-2.076007	43.740101
2.900000	1.209859	-3.029601	43.739291
3.000000	0.863290	-3.873163	43.739097

F:\WOJTEK\STUDIA\SEM2\informatyka 2\lab5\Debug\lab5.exe

t0=0.000000, tk=5.000000, h=0.200000, l=0.800000, m=2.500000 omega0=0.000000, alfa0=1.571000,

czas	alfa	omega	energia calkowita
0.000000	1.571000	0.000000	19.623996
0.200000	1.326362	-2.434171	19.611959
0.400000	0.620840	-4.462903	19.595293
0.600000	-0.341916	-4.800504	19.571594
0.800000	-1.157183	-3.120883	19.526250
1.000000	-1.545286	-0.725903	19.541087
1.200000	-1.445567	1.720024	19.536195
1.400000	-0.867605	3.965689	19.513970
1.600000	0.055122	4.934743	19.511150
1.800000	0.952775	3.740555	19.445114
2.000000	1.477966	1.438117	19.455821
2.200000	1.521004	-1.008981	19.457909
2.400000	1.078017	-3.372519	19.437340
2.600000	0.227977	-4.864124	19.435417
2.800000	-0.719356	-4.259122	19.373340
3.000000	-1.371363	-2.131641	19.368115
3.200000	-1.554532	0.307982	19.376788
3.400000	-1.248961	2.726668	19.361799
3.600000	-0.496399	4.607316	19.349958
3.800000	0.465056	4.640746	19.312929
4.000000	1.228351	2.795034	19.281545
4.200000	1.548315	0.381031	19.295092
4.400000	1.379769	-2.059122	19.286775
4.600000	0.741235	-4.201044	19.266615
4.800000	-0.199274	-4.856343	19.255521
5.000000	-1.052481	-3.409331	19.198750

Natomiast dla względnie dużego kroku całkowania $h=0.7$ energia całkowita zaczyna się wyraźnie zmieniać – oznacza to, że jest zauważalny błąd metody.

```
FAWOJTEK\STUDIA\SEM2\informatyka 2\lab5\Debug\lab5.exe
t0=0.000000, tk=10.000000, h=0.700000, l=2.700000, m=6.000000 omega0=1.000000, alfa0=0.000000,
czas      alfa      omega      energia calkowita
0.000000  0.000000  1.000000  21.870000
0.700000  0.496509  0.255574  20.618215
1.400000  0.261589  -0.802053  19.475227
2.100000  -0.331199  -0.663708  18.270802
2.800000  -0.420157  0.405170  17.412503
3.500000  0.094702  0.847239  16.410704
4.200000  0.445054  0.049166  15.533856
4.900000  0.140068  -0.772990  14.624031
5.600000  -0.347044  -0.440314  13.714639
6.300000  -0.310104  0.497327  12.989484
7.000000  0.168878  0.674832  12.220388
7.700000  0.378231  -0.126834  11.584546
8.400000  0.032599  -0.703207  10.899155
9.100000  -0.339364  -0.232247  10.243487
9.800000  -0.202138  0.541707  9.653392
10.500000  0.217579  0.493067  9.063819
```

➔ Uwagi końcowe:
Dodatkowe komentarze do programu są zawarte w kodzie.