

## TASAS DE INTERES COMPUESTO

### ESTRUCTURA DE UNA TASA DE INTERES COMPUESTO

Toda tasa de interés compuesto presenta la siguiente estructura:

$$X\% \text{ PERIODO}_1, \left\{ \begin{array}{c} \text{COMPUESTA} \\ \text{CAPITALIZABLE} \\ \text{CONVERTIBLE} \end{array} \right\} \text{PERIODO}_2$$

donde:

PERIODO<sub>1</sub>: es el periodo sobre el cual actúa la tasa de interés

PERIODO<sub>2</sub>: es el periodo de capitalización de la tasa de interés

Ejemplos:

- 10% anual, capitalizable anualmente
- 12% anual, convertible mensualmente
- 2% mensual, compuesta anualmente
- 2% mensual, capitalizable mensualmente

### TASA EFECTIVA (i)

Cuando el periodo de la tasa de interés de la operación está dado en las mismas unidades de tiempo que el periodo de capitalización ( $P_1 = P_2$ ) se la llama **tasa efectiva** a interés compuesto.

**Ejemplos:**

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{c} \text{periodo de la tasa} \\ 7\% \text{ mensual} \end{array} \begin{array}{c} \text{periodo de capitalización} \\ \text{capitalizable mensualmente} \end{array} & \equiv & i_{\text{efectiva mensual}} = 7\% \\ \begin{array}{c} \text{periodo de la tasa} \\ 4\% \text{ trimestral} \end{array} \begin{array}{c} \text{periodo de capitalización} \\ \text{convertible trimestralmente} \end{array} & \equiv & i_{\text{efectiva trimestral}} = 4\% \\ \begin{array}{c} \text{periodo de la tasa} \\ 3\% \text{ anual} \end{array} \begin{array}{c} \text{periodo de capitalización} \\ \text{compuesta anualmente} \end{array} & \equiv & i_{\text{efectiva anual}} = 3\% \end{array}$$

Si la tasa de interés es efectiva se puede omitir la palabra capitalizable y el Periodo<sub>2</sub>

**Ejemplos:**

- 2% bimestral = 12% bimestral, capitalizable bimestralmente
- 5% cuatrimestral = 5% cuatrimestral, convertible cuatrimestralmente

Si la tasa de interés es efectiva y anual, se puede omitir también el Periodo<sub>1</sub>

### Ejemplo:

- 8% = 8% anual, capitalizable anualmente

## TASA NOMINAL (j)

Cuando el periodo de la tasa de interés está dado en unidades de tiempo distintas a las del periodo de capitalización ( $P_1 \neq P_2$ ), se la denomina **tasa nominal** a interés compuesto

### Ejemplos:

$$\begin{array}{l} j = 20\% \quad \overbrace{\text{trimestral}}^{\text{periodo de la tasa}} \quad \overbrace{\text{capitalizable bimestralmente}}^{\text{periodo de capitalización}} \\ j = 12\% \quad \overbrace{\text{mensual}}^{\text{periodo de la tasa}} \quad \overbrace{\text{convertible semestralmente}}^{\text{periodo de capitalización}} \\ j = 8\% \quad \overbrace{\text{anual}}^{\text{periodo de la tasa}} \quad \overbrace{\text{compuesto tetra - anualmente}}^{\text{periodo de capitalización}} \end{array}$$

Las tasas nominales siempre llevan la palabra capitalizable y el Periodo<sub>2</sub>, solo cuando el Periodo<sub>1</sub> es anual se lo puede omitir

### Ejemplos:

- 10% capitalizable semestralmente = 10% anual, capitalizable semestralmente

## TASAS EQUIVALENTES

Son aquellas que en condiciones diferentes ( $P_1$  y  $P_2$ ) producen la mismo Valor Futuro a partir de un mismo Capital y en el mismo plazo de la operación.

### Ejemplo:

Dada la tasa  $i_{\text{efectiva trimestral}} = 3\%$ , encontrar la tasa efectiva equivalente mensual.

### Desarrollo

Para calcular una tasa efectiva equivalente a otra dada, se considera que con el mismo capital y después de un mismo intervalo de tiempo, ambas tasas deben producir el mismo Valor Futuro, así:

$$M_1 = C(1 + i_{trimestral})^{n_1} \quad n_2 = \text{número de cap trimestrales}$$

$$M_2 = C(1 + i_{mensual})^{n_2} \quad n_1 = \text{número de cap mensuales}$$

$$M_1 = M_2$$

$$C(1 + i_{mensual})^{n_2} = C(1 + i_{trimestral})^{n_1}$$

$$(1 + i_{mensual})^{n_2} = (1 + i_{trimestral})^{n_1}$$

$$(1 + i_{mensual}) = (1 + i_{trimestral})^{n_1/n_2}$$

$$i_{mensual} = (1 + i_{trimestral})^{n_1/n_2} - 1$$

$$i_{mensual} = (1 + 0,03)^{4/12} - 1$$

$$i_{mensual} = (1 + 0,03)^{1/3} - 1$$

$$i_{mensual} = 0,99 \%$$

## CONVERSIÓN DE TASAS EN INTERÉS COMPUESTO

Recordemos la estructura de una tasa de interés compuesto:

$$X\% \text{ Periodo}_1, \text{capitalizable Periodo}_2$$

**Periodo 1:** Periodo sobre el cual actúa la tasa de interés compuesto

**Periodo 2:** Periodo para la capitalización de intereses

**m** = cantidad de Periodos<sub>2</sub> contenidos en un Periodo<sub>1</sub>

Si periodo 1 > periodo 2, entonces  $m > 1$ , cabe varias veces

Si periodo 1 < periodo 2, entonces  $m < 1$ , no cabe una unidad, sino fracciones

## DE NOMINAL A EFECTIVA

Dada una tasa nominal  $X\% \text{ Periodo}_1, \text{capitalizable Periodo}_2$ , se encuentra una tasa efectiva equivalente para el  $\text{Periodo}_2$  (Periodo de capitalización) mediante la siguiente fórmula:

$$j\% \text{ Periodo}_1 \text{ capitalizable } \overbrace{\text{Periodo}_2}^{\text{será siempre el periodo de la tasa efectiva.}}$$

$$i_{\underbrace{\text{ef del Periodo}_2}_{\text{periodo de la tasa efectiva}}} = \frac{j}{m}$$

donde  $m$  = número de Periodos<sub>2</sub>, contenidos en el Periodo<sub>1</sub>

### Ejemplo:

Dada una tasa del 24% anual capitalizable mensualmente, encontrar una tasa efectiva equivalente.

#### Desarrollo

$j = 24\%$  anual capitalizable mensualmente

La única tasas efectiva que podemos encontrar con la formula anterior es la tasa efectiva mensual, que corresponde al periodo de capitalización ( $P_2$ )

Periodo<sub>1</sub> = años

Periodo<sub>2</sub> = meses

$m$  = número de meses que caben en un año = 12

$$i_{\text{ef.mensual}} = \frac{0,24}{12};$$

$$i_{\text{ef.mensual}} = 0,02$$

**Respuesta:**  $i_{\text{ef.mensual}} = 2\%$

### Ejemplo:

Dada una tasa del 6% trimestral capitalizable anualmente, encontrar una tasa efectiva equivalente.

#### Desarrollo

$j = 6\%$  trimestral capitalizable anualmente

Periodo<sub>1</sub> = trimestral

Periodo<sub>2</sub> = anual

$m$  = número de años que caben en un trimestre = 1/4

$$i_{ef. anual} = \frac{0,06}{1/4};$$

$$i_{ef. anual} = 0,24$$

**Respuesta:**  $i_{ef. anual} = 24\%$

### Ejemplo:

Dada una tasa del 6% semestral capitalizable bianualmente, hallar una tasa efectiva equivalente.

### Desarrollo

$j = 6\%$  semestral capitalizable bianualmente

Periodo<sub>1</sub> = semestral

Periodo<sub>2</sub> = bianual

m = número de bienios que caben en un semestre = (1/4)

$$i_{ef. bianual} = \frac{0,06}{1/4}$$

$$i_{ef. bianual} = 0,24$$

**Respuesta:**  $i_{ef. bianual} = 24\%$

Trabajemos ahora con unidades de tiempo diferentes a las acostumbradas:

### Ejemplo:

Dada una tasa  $j=2,28\%$  (27,2 semanas), capitalizable (0,28 semestres), hallar la tasa efectiva correspondiente

### Desarrollo

Debemos primeramente expresar P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> en una misma unidad de tiempo (cualquiera)

Llevando 27,2 semanas a semestres:  $\frac{27,2semanas}{1} \times \frac{1semestre}{24semanas} = 1,13semestres,$

tenemos ahora que:

Periodo<sub>1</sub> = 27,2 semanas = 1,13 semestres

Periodo<sub>2</sub> = 0,28 semestres

m = cuántos periodos de 0,28 semestres, caben en 1,13 semestres = (1,13/0,28)

**j=2,28% (1,13 semestres), cap (0,28 semestres)**

$$i(0,28\text{semestres}) = \frac{0,0228}{\frac{1,13}{0,28}} = 0,0056329$$

$$i_{ef. 0,28\text{semestres}} = 0,0056329$$

$$i_{ef. 0,28\text{semestres}} = 0,56329\%$$

## DE TASA EFECTIVA A EFECTIVA

Se puede escribir una fórmula general para encontrar a partir de cualquier tasa efectiva desconocida ( $i_{efec1}$ ) otra tasa efectiva conocida ( $i_{efec2}$ ).

$$i_{efec1} = (1 + i_{efec2})^m - 1$$

donde  $m$  = numero de periodos de  $i_{efec2}$  que caben en 1 periodo de  $i_{efec1}$

### RECORDAR:

- $i_{efec1}$  = tasa desconocida, la tasa que busco
- $i_{efec2}$  = tasa conocida
- Escribir la formula en el orden establecido.
- El  $periodo_1$  y el  $periodo_2$  deben expresarse en la misma unida de tiempo.

### Ejemplo:

Dada una tasa efectiva trimestral del 2%, encontrar la tasa efectiva cada nueve meses que sea equivalente a la tasa anterior.

### Desarrollo

$m$  = cuántos periodos de 9 meses, caben en 3 meses (1 trimestre) = 3

$$i_{ef. 9\text{meses}} = (1 + i_{trimestral})^3 - 1$$

$$i_{ef. 9\text{meses}} = (1 + 0.02)^3 - 1$$

$$i_{ef. 9\text{meses}} = 0.061208$$

**Respuesta:**  $i_{ef. 9\text{meses}} = 6.1208\%$

### Ejemplo:

Dada una tasa efectiva cada 3,7 horas del 0,3%, encontrar la tasa efectiva cada 15 días que sea equivalente a la tasa anterior.

### Desarrollo

3,7 horas=0,1541 días

m = cuántos periodos de 15 días, caben en 0,1541 días = (15/0,1541)

$$i_{ef.cada15\text{ días}} = (1 + 0,003)^{\frac{15}{0,1541}} - 1 ;$$

$$i_{ef.cada15\text{ días}} = (1 + 0,003)^{97,29729} - 1$$

$$i_{ef.cada15\text{ días}} = 0,33837$$

**Respuesta:**  $i_{ef.cada15\text{ días}} = 33,84\%$

### DE NOMINAL A EFECTIVA (ESPECÍFICA)

Para encontrar una tasa efectiva específica, que sea equivalente a otra nominal se realiza lo siguiente:

- I. Obtener la tasa efectiva para el  $Periodo_2$  de la tasa nominal conocida.
- II. Encontrar la tasa efectiva específica mediante la conversión de tasa efectiva a efectiva.

### Ejemplo:

Dada una tasa del 6% semestral capitalizable bianualmente, hallar la tasa efectiva cada 79 días que sea equivalente a la tasa nominal anterior.

### Desarrollo

- I.  $j = 6\%$  semestral capitalizable bianualmente

Periodo<sub>1</sub> = semestral

Periodo<sub>2</sub> = bianual

m = número de bienios que caben en un semestre = (1/4)

$$i_{ef.bianual} = \frac{0,06}{1/4} ;$$

$$i_{ef.bianual} = 0,24$$

×

II. 1 bienio = 720 días

m = número de bienios (720 días) que caben en 79 días = 79/120

$$i_{ef.bianual} = 0,24 \quad i_{ef.cada79\text{ días}} = ?$$

$$i_{ef.cada79\text{ días}} = (1 + i_{ef.bianual})^{79/720} - 1;$$

$$i_{ef.cada79\text{ días}} = (1 + 0,24)^{79/720} - 1 = 0,02388$$

**Respuesta:**  $i_{ef.cada79\text{ días}} = 2,34\%$

### Ejemplo:

Dada una tasa del 23% trimestral capitalizable cada 20 días, hallar la tasa efectiva cada 15 días que sea equivalente a la tasa nominal anterior.

### Desarrollo

I.  $j = 23\%$  trimestral capitalizable cada 20 días

Periodo<sub>1</sub> = trimestral = 90 días

Periodo<sub>2</sub> = cada 20 días

m = cuántos periodos de 20 días, caben en un trimestre (90 días) = 90/20 = 9/2

$$i_{ef.cada20\text{ días}} = \frac{0,23}{9/2};$$

$$i_{ef.cada20\text{ días}} = 0,05111$$

II.  $i_{ef.cada20\text{ días}} = 0,05111 \quad i_{ef.cada15\text{ días}} = ?$

m = cuántos periodos de 20 días, caben en 15 días = 15/20 = 3/4

$$i_{ef.cada15\text{ días}} = (1 + i_{ef.cada20\text{ días}})^{3/4} - 1;$$

$$i_{ef.cada15\text{ días}} = (1 + 0,05111)^{3/4} - 1 = 0,03809$$

**Respuesta:**  $i_{ef.cada15\text{ días}} = 3,81\%$

### Ejemplo:

Dada una tasa del 2,5% cada 1,8 semestres capitalizable cada 4,2 bimestres, hallar la tasa efectiva anual que sea equivalente a la tasa nominal anterior.



## Desarrollo

I.  $j = 2,5\%$  cada 1,8 semestres capitalizable cada 4,2 bimestres

II.

$$\frac{1,8 \text{ semestres}}{1} \times \frac{3 \text{ bimestres}}{1 \text{ semestre}} = 5,4 \text{ bimestres}$$

Periodo<sub>1</sub> = 1,8 semestres = 5,4 bimestres

Periodo<sub>2</sub> = 4,2 bimestres

m = cuántos periodos de 4,2 bimestres, caben en 5,4 bimestres =  $5,4/4,2$

$$i_{ef. \text{ cada } 4,2 \text{ bimestres}} = \frac{0,025}{5,4/4,2};$$

**Respuesta:**  $i_{ef. \text{ cada } 4,2 \text{ bimestres}} = 0,0194$

III.  $i_{ef. \text{ cada } 4,2 \text{ bimestres}} = 0,0194$        $i_{ef. \text{ anual}} = ?$

1 año = 6 bimestres

m = cuántos periodos de 4,2 bimestres, caben en 1 año (6 bimestres) =  $6/4,2$

$$i_{ef. \text{ anual}} = (1 + i_{ef. \text{ cada } 4,2 \text{ bimestres}})^{6/4,2} - 1;$$

$$i_{ef. \text{ anual}} = (1 + 0,0194)^{6/4,2} - 1 = 0,027829$$

**Respuesta:**  $i_{ef. \text{ anual}} = 2,78\%$

## DE EFECTIVA A NOMINAL

Siempre que nos pidan encontrar una tasa nominal debo primeramente escribir la estructura de la tasa solicitada, recordando que:

$$j = X\% \text{ Periodo}_1, \text{ capitalizable Periodo}_2$$

$$j = i_{efecP2} \cdot m$$

donde, m = número de Periodos<sub>2</sub>, contenidos en el Periodo<sub>1</sub>

Esta conversión se la divide en dos pasos:

- I. Encontrar una tasa efectiva para el Periodo<sub>2</sub> de la tasa nominal, por medio de la conversión de tasas efectivas a efectivas.
- II. Multiplicar el resultado anterior por m

### Ejemplo:

Determine la tasa nominal bimestral con capitalizaciones diarias que sea equivalente a la tasa efectiva trimestral del 2%.

### Desarrollo

I.  $j = ?$  bimestral capitalizable diariamente

$$j = i_{\text{diaria}} \times m$$

Periodo<sub>1</sub> = bimestral = 60 días

Periodo<sub>2</sub> = diario

m = número de días que caben en 1 bimestre (60 días) = 60

$$j = i_{\text{diaria}} \cdot 60$$

Ahora encontremos  $i_{\text{diaria}}$  a partir de la  $i_{\text{trimestral}}$  conocida:

m = cuantos trimestres (90 días), caben en un día =  $1/90$

$$i_{\text{diaria}} = (1 + 0.02)^{\frac{1}{90}} - 1 = 0.00020053$$

II. Reemplazando y multiplicando:

$$j = 0.00020053 \times 60$$

**Respuesta:**  $j = 1,32\%$  bimestral capitalizable diariamente

### Ejemplo:

Determine la tasa nominal cuatrimestral capitalizable cada 3,4 semestres que sea equivalente a la tasa efectiva anual del 7%.

### Desarrollo

I.  $j = ?$  cuatrimestral capitalizable cada 3,4 semestres

$$j = i_{3,4\text{semestres}} \times m$$

Periodo<sub>1</sub> = cuatrimestral =  $2/3$  semestre

Periodo<sub>2</sub> = cada 3,4 semestres

m = número de periodos de 3,4 semestres que caben en un cuatrimestre

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{3} \text{ semestres} \right) \\ & = (2/3)/3,4 = 0,196078 \end{aligned}$$

$$j = i_{3,4\text{semestres}} \cdot (0,196078)$$

Ahora, encontremos  $i_{3,4\text{semestres}}$ ;

$m =$  cuántos años (2 semestres) caben en 1 periodo de 3,4 semestres  $= 3,4/2$

$$i_{3,4\text{ semestres}} = (1 + 0,07)^{\frac{3,4}{2}} - 1 = 0,1218955414$$

**II.** Ahora, reemplazando:

$$j = 0,1218955414 \times 0,196078 = 0,0238$$

**Respuesta:**  $j = 2,38\%$  cuatrimestral capitalizable cada 3,4 semestres

## DE NOMINAL A NOMINAL

Esta conversión se puede realizar de la siguiente manera:

1. Estructurar la tasa nominal requerida,  $i_{\text{efecP2}} \times m$
2. Obtener la tasa efectiva del Periodo<sub>2</sub> de la tasa nominal conocida.
3. Encontrar la tasa efectiva específica de acuerdo al Periodo<sub>2</sub> de la tasa nominal a encontrar
4. Reemplazar los resultados en la fórmula del paso 1

### Ejemplo:

Dada una tasa nominal del 8% anual capitalizable mensualmente, encontrar la tasa equivalente trimestral capitalizable semestralmente

a) Resolviendo paso a paso:

1) Para la tasa nominal que busco:

$m =$  número de semestres que caben en un trimestre  $= 1/2$

$$j = i_{\text{semestral}} \times (1/2)$$

2) De la tasa nominal conocida:

$m =$  número de meses que caben en un año  $= 12$

$$i_{\text{mensual}} = (0,08)/12 = 0,00666$$

3) Para las tasas efectivas:

$m =$  número de meses que caben en un semestre  $= 6$

$$i_{\text{semestral}}(1 + 0,00666)^6 - 1 = 0,04067$$

4) Reemplazando en 1)  $j = (0,04067) \times (1/2) = 0,02033 = 2,03\%$  trimestral, capitalizable semestralmente

b) Directamente:

$$j = \left[ \left( 1 + \frac{0,08}{12} \right)^6 - 1 \right] \times \left( \frac{1}{2} \right) = 0,02033$$

### **Ejemplo:**

Determine la tasa nominal cada 7,15 trimestres capitalizables cada 4,3 semestres que sea equivalente a la tasa nominal del 17% cada 55,7 semanas, capitalizable cada 138 días.

### **Desarrollo**

1) Estructurando la tasa nominal que busco:

$j = \% \text{ cada } 7,15 \text{ trimestres capitalizable cada } 4,3 \text{ semestres} = ?$

4,3 semestres = 8,6 trimestres

m = cuantos periodos de 8,6 trimestres, caben en 7,15 trimestres =  $7,15/8,6$

$$j = i_{4,3 \text{ semestres}} \times (7,15/8,6)$$

2) De la tasa nominal conocida:

$j = 17\% \text{ cada } 55,7 \text{ semanas capitalizable cada } 138 \text{ días}$

55,7 semanas = 389,9 días

m = cuántos periodos de 138 días, caben en 389,9 días =  $389,9/138 = 2,82536$

$$i_{138 \text{ días}} = \frac{0.17}{2,82536} = 0.060169$$

3) Para las tasa efectivas

4,3 semestres = 774 días

m = cuántos periodos de 138 días, caben en 774 días =  $774/138$

$$i_{4,3 \text{ semestres}} = (1 + 0.060169)^{\frac{774}{138}} - 1 = 0.38778391$$

4) Reemplazando en 1): 5,60869

$$j = 0.3877839 \times \frac{7,15}{8,6} = 0.32239$$

**Respuesta:**  $j = 32,24\% \text{ cada } 7,15 \text{ trimestres cada } 4,3 \text{ semestres}$

### Ejemplo:

Determine la tasa nominal trimestral capitalizable bianualmente que sea equivalente a la tasa nominal del 29% cada año y medio, capitalizable cada 98 días.

### Desarrollo

1) Estructurando la tasa nominal que busco:

$$j = \% \text{ trimestral capitalizable bianualmente} = ?$$

$$m = \text{cuántos bienios caben en 1 trimestre} = 1/8$$

$$j = i_{\text{bianual}} \times (1/8)$$

2) De la tasa nominal conocida:

$$j = 29\% \text{ cada año y medio capitablizable cada 98 días}$$

$$1 \text{ año y medio} = 540 \text{ días}$$

$$m = \text{cuántos periodos de 98 días, caben en 540 días} = 540/98 = 5,5102$$

$$i_{98 \text{ días}} = \frac{0.29}{5,5102} = 0.052629$$

3) Para las tasa efectivas:

$$1 \text{ bienio} = 720 \text{ días}$$

$$m = \text{cuántos periodos de 98 días, caben en 720 días} = 720/98$$

$$i_{\text{bianual}} = (1 + 0.052629)^{\frac{720}{98}} - 1 = 0.4576639$$

4) Reemplazando en 1):

$$j = 0.4576639 \times \frac{1}{8} = 0.05720$$

**Respuesta:**  $j = 5,72\%$  trimestral capitalizable bianualmente