01

Fuzzy Set Theory

Bibliography

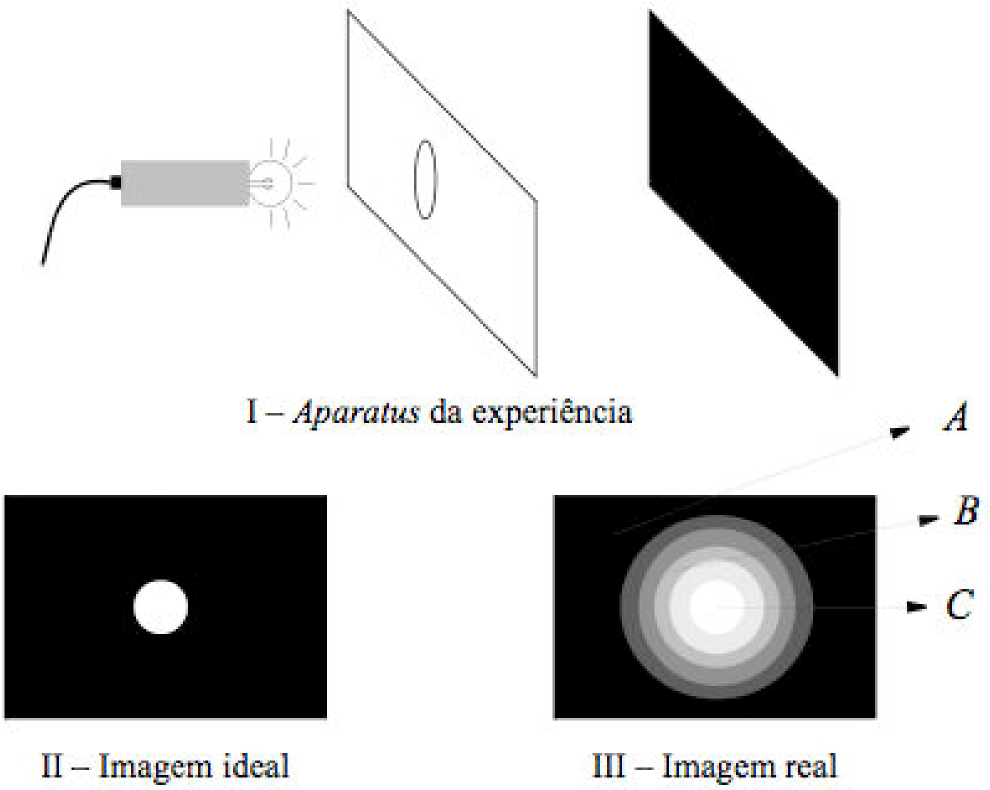
- **Klir, G. J. & Folger, T. A. (1992). Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information**
-

Table of Contents

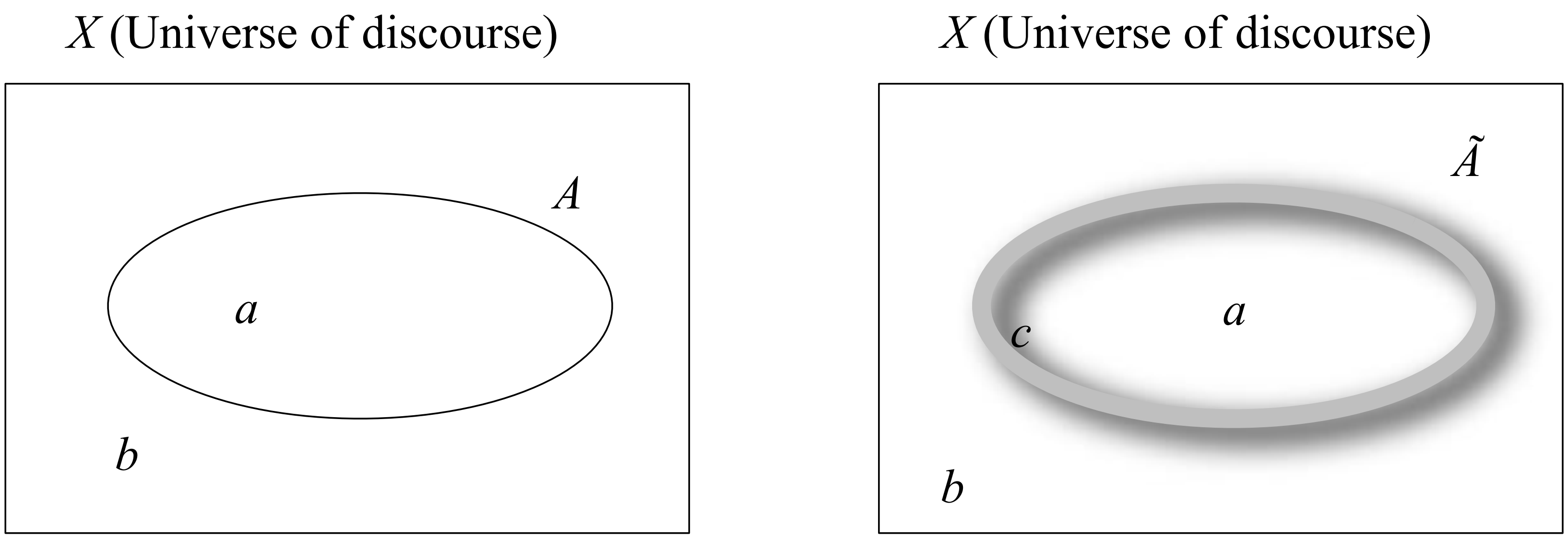
- **Introduction**
- **Fuzzy Sets**
- **Mathematical extensions of Fuzzy Sets**
- **Possibility Theory**

Introduction

An experiment



Crisp set boundary and fuzzy set boundary



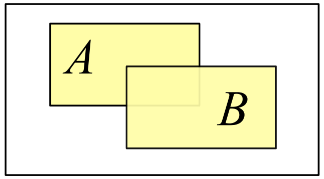
Classical Sets

- For crisp sets A and B consisting of collections of some elements in X (universe of discourse)
  - $x \in X$ *x belongs do X*
  - $x \in A$ *x belongs do A*
  - $x \notin A$ *x does not belongs do X*
  - $A \subset B$ *A is fully contained in B (if $x \in A$ then $x \in B$)*
  - $A \subseteq B$ *A is contained in or is equivalent to B*
  - $A \leftrightarrow B$ *$A \subseteq B$ and $B \subseteq A$ (A is equivalent to B)*

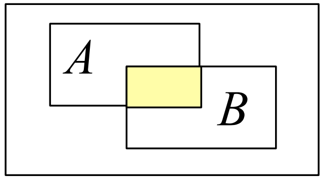
Operation on Classical Sets

- Let A and B be two sets on the universe X

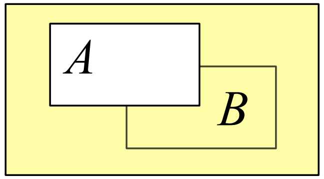
  - *Union:* $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$



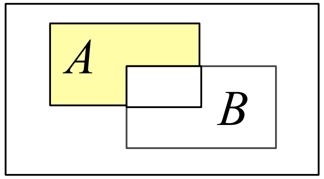
  - *Intersection:* $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$



  - *Complement:* $\neg A = \{x \in X \mid x \notin A\}$



  - *Difference:* $A \mid B = \{x \in X \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$



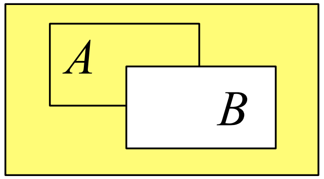
Properties of Classical Sets

- Let A, B and C be sets on the universe X
  - *Associativity:*
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - *Distributivity:*
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - *Idempotency:*
    - $A \cup A = A$
    - $A \cap A = A$
  - *Identity:*
    - $A \cup \varnothing = A$
    - $A \cap X = A$
    - $A \cap \varnothing = \varnothing$
    - $A \cup X = X$

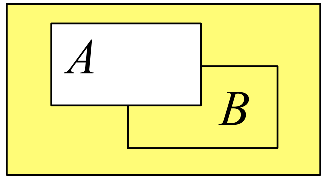
Properties of Classical Sets (cont)

- Let A, B and C be sets on the universe X
  - *Transitivity:*
    - if $A \subseteq B$ and $C \subseteq D$ then $A \subseteq D$
  - *Involution:*
    - $\neg\neg A = A$
  - *Axiom of the exclude middle:*
    - $A \cup \neg A = X$
  - *Axiom of the contradiction*
    - $A \cap \neg A = \varnothing$
  - *De Morgans's Principles*
    - $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$
    - $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

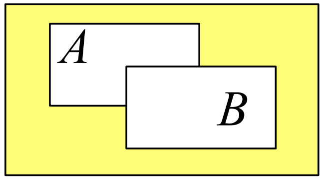
$\neg(B)$



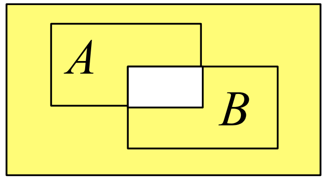
$\neg(A)$



$\neg(A \cup B)$



$\neg(A \cap B)$



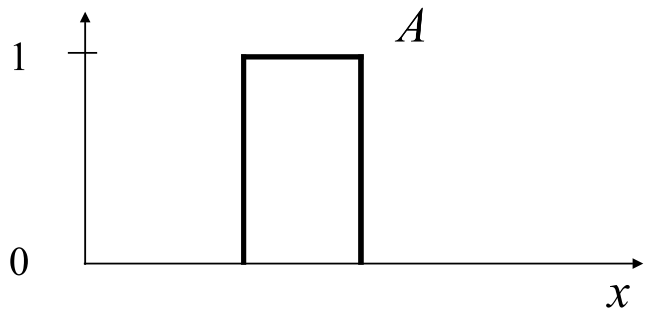
Mapping Classical Sets as Functions

- The characteristic function X_A is defined by

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

and X_A express the *membership* in the set *A* for the element x in the universe.

Each member *x* of *X* is mapped into one of the two elements of {0, 1}.



Mapping Classical Sets as Functions - Operations

$$\wedge - \min$$

$$\vee - \max$$

- Let A and B be two sets on the universe X
  - *Union:* $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$

$$X_{A\cup B}(x) = X_A(x) \vee X_B(x) = \max(X_A(x), X_B(x))$$

  - *Intersection:* $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

$$X_{A\cap B}(x) = X_A(x) \wedge X_B(x) = \min(X_A(x), X_B(x))$$

  - *Complement:* $\neg A = \{x \in X \mid x \notin A\}$

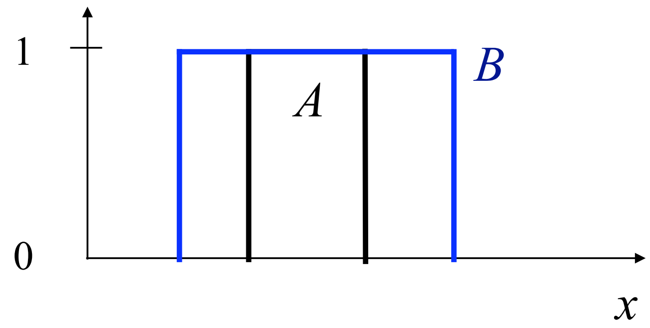
$$X_{\neg A}(x) = 1 - X_A(x)$$

  - *Difference:* $A \mid B = \{x \in X \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

$$X_{A|B}(x) = X_A(x) \wedge X_{\neg B}(x) = \min(X_A(x), 1 - X_B(x))$$

Mapping Classical Sets as Functions - Operations

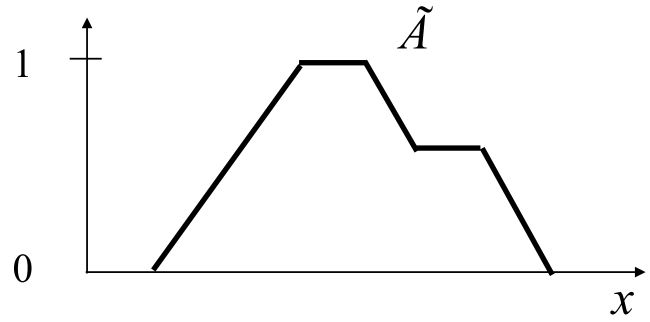
- Let A and B be two sets on the universe X
  - *Containment:*
    - $A \subseteq B \rightarrow X_A(x) \leq X_B(x)$



Fuzzy Sets

Fuzzy Sets

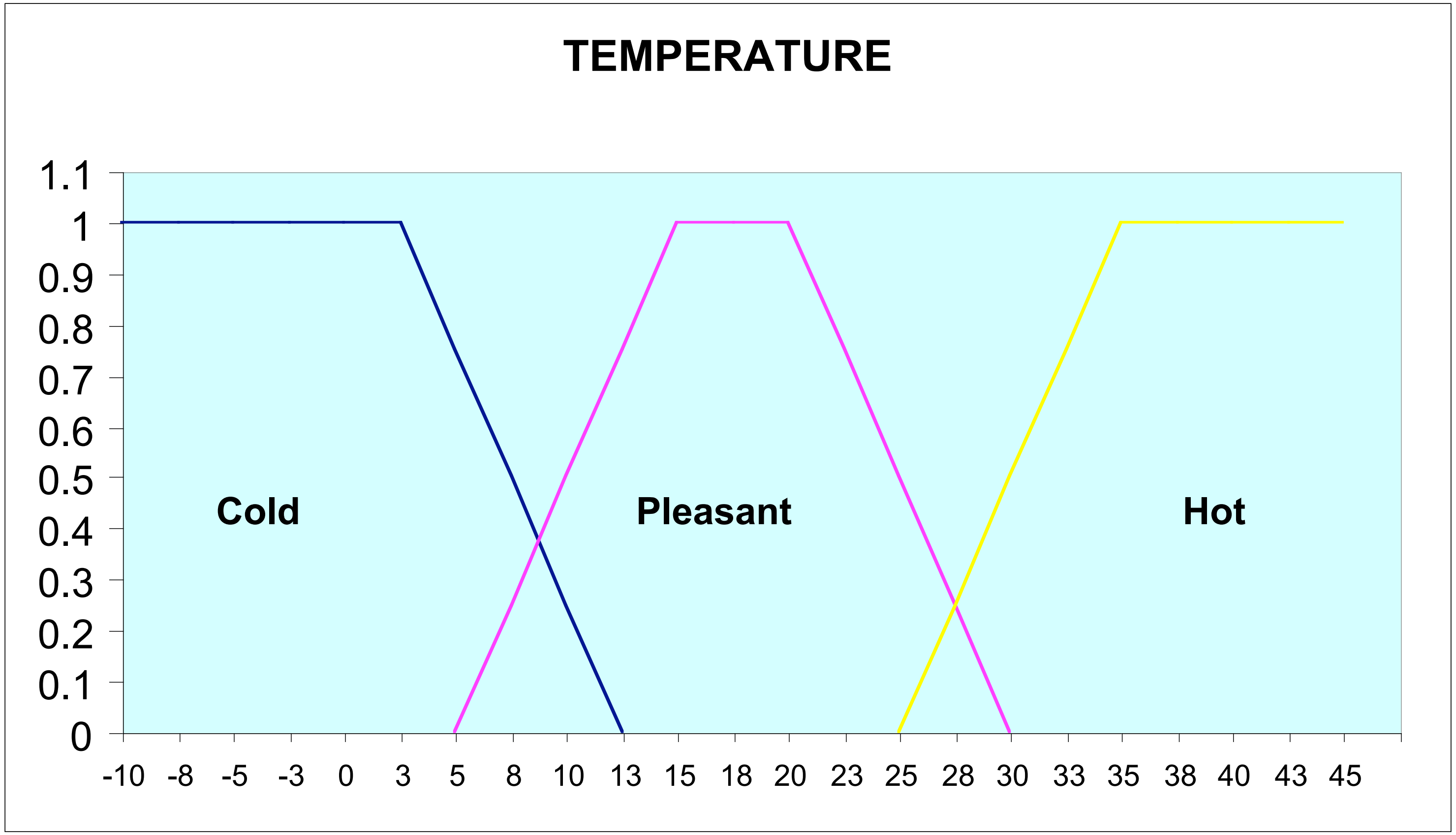
- For crisp sets the transition for an element in the universe between *membership* and *non-membership* in a given set is abrupt.
- For an element in a universe that contains fuzzy set this **transition can be gradual.**
  - This transition among various degrees of memberships can be thought as a conforming to the fact that the boundaries of the fuzzy set are vague and ambiguous.
  - A fuzzy set is a set containing elements that have varying degrees of membership in the set.



Fuzzy Sets - Notation

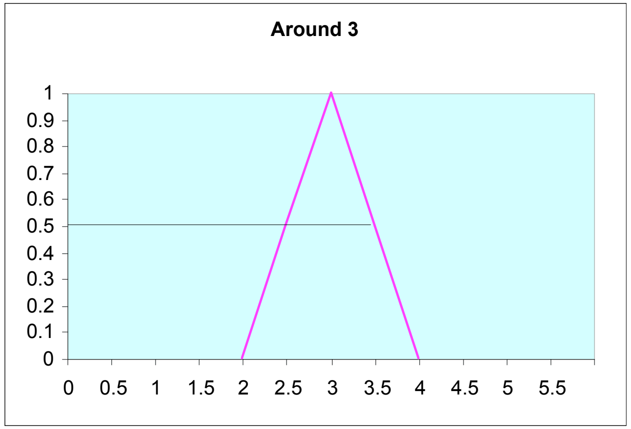
- When the universe is discrete and finite
  - $$\tilde{A} = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots\} = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i$$
- When the universe is continuous and infinite
  - $$\tilde{A} = \int \mu_A(x)/x$$

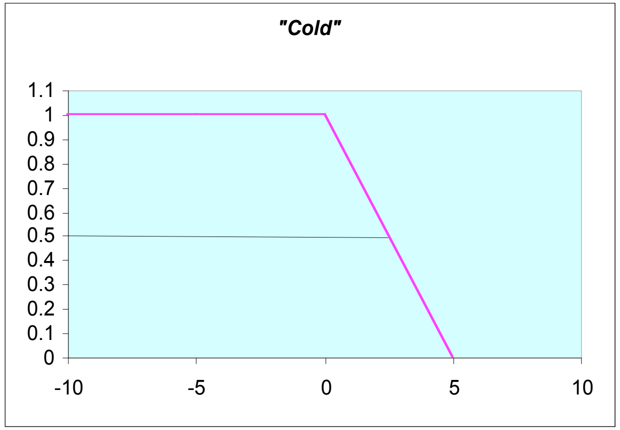
Fuzzy Sets - Examples



Fuzzy Sets - Examples

Continuous universe $\tilde{A} = \int \mu_A(x)/x$





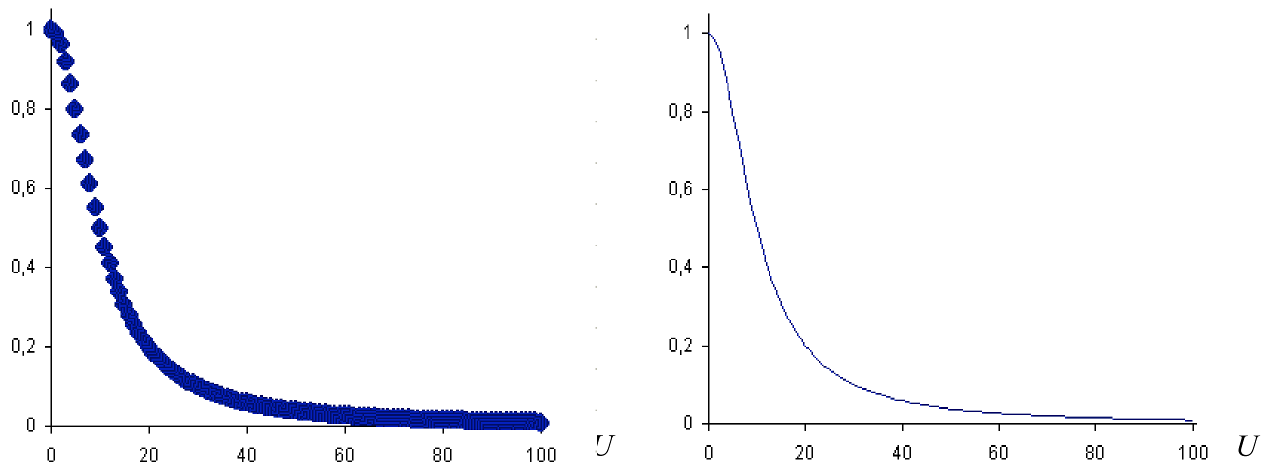
Corresponding Discrete Fuzzy Sets

Around3={2.1/0.1,..., 3/1,...,3.9/0.1}

Cold={-10/1,...0/1,...,5/0}

Fuzzy Sets - Examples

Small $\left[\left(\frac{u}{10}\right)^{2}\right] / u$

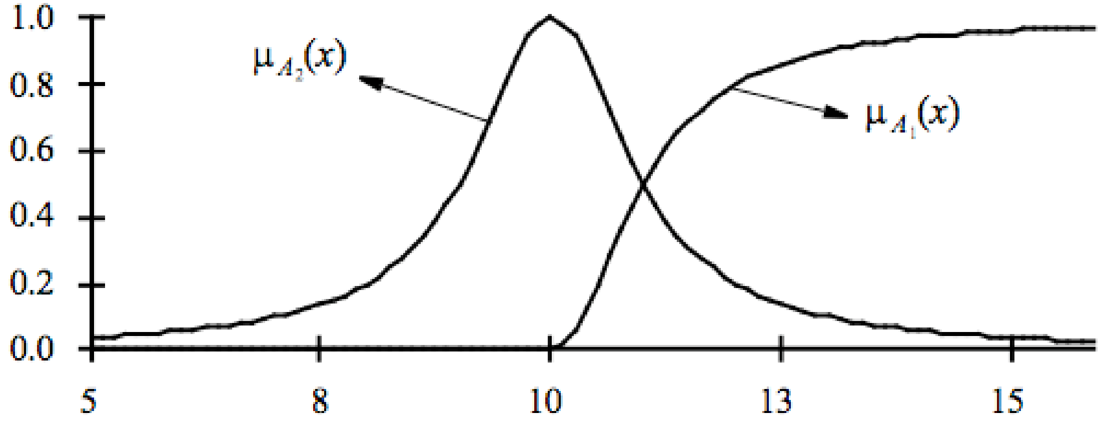


a. Discrete b. Continuous

Fuzzy Sets - Examples

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ \dfrac{1}{1+(x-10)^{-2}} & x \geq 10 \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}$$



Fuzzy Sets - Operations

- Let $\tilde{A}$, B and C be fuzzy sets on the universe X. For a given element x, of the universe, the following function-theoretic operations for the set-theoretic operations of union, intersections, and complement are defined for $\tilde{A}$, B and C on X:
  - *Union*:

$$X_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = X_{\tilde{A}}(x) \vee X_{\tilde{B}}(x)$$

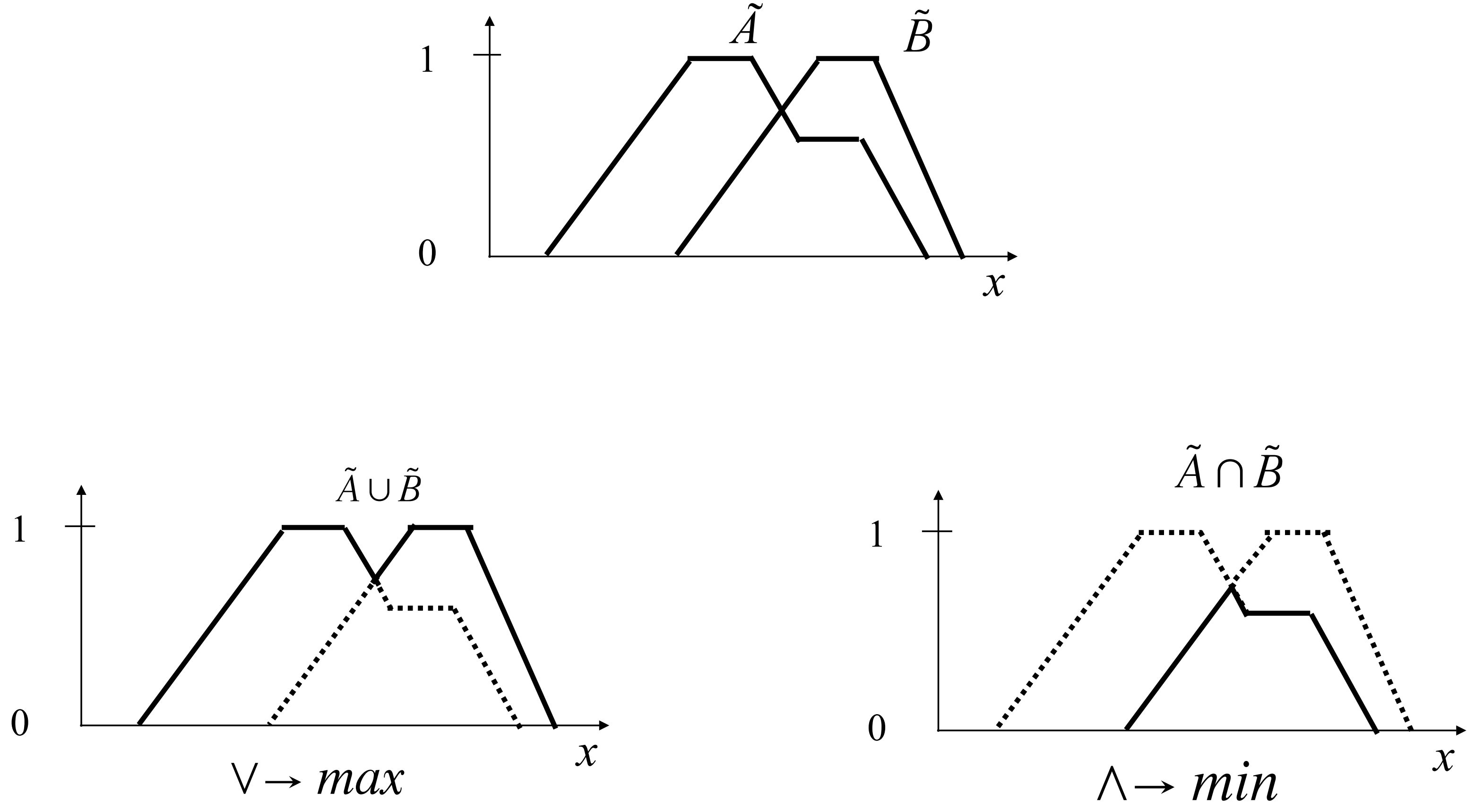
  - *Intersection*:

$$X_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = X_{\tilde{A}}(x) \wedge X_{\tilde{B}}(x)$$

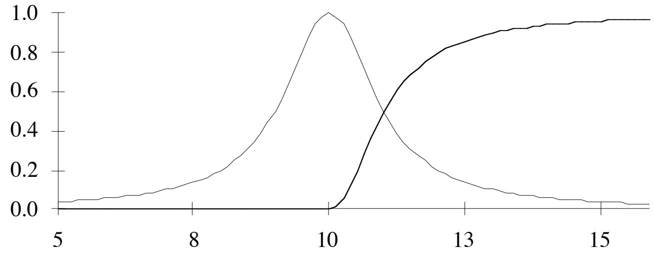
  - *Complement*:

$$X_{\neg\tilde{A}}(x) = 1 - X_{\tilde{A}}(x)$$

Fuzzy Sets - Operations

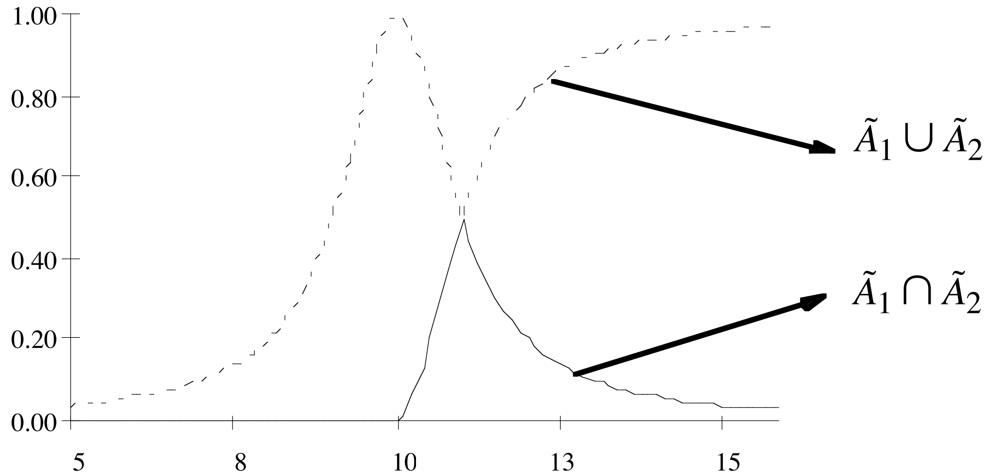


Fuzzy Sets - Operations

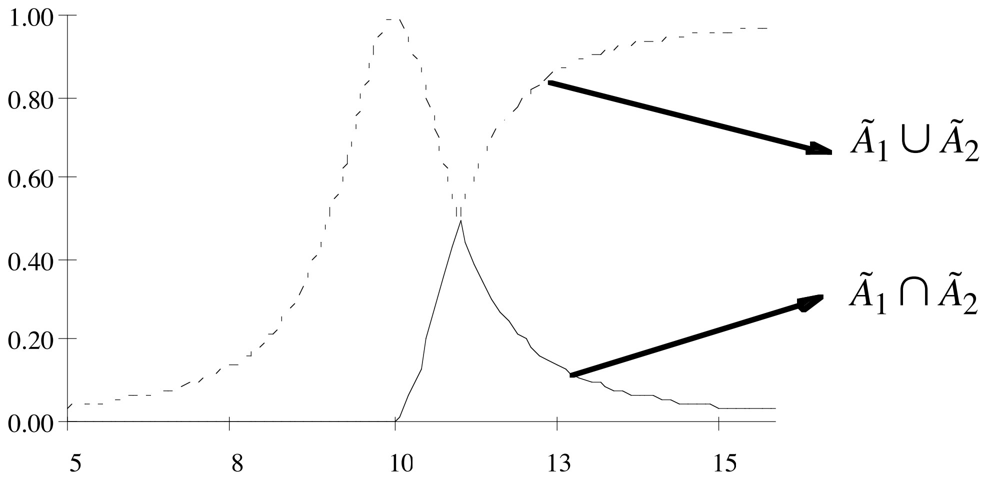


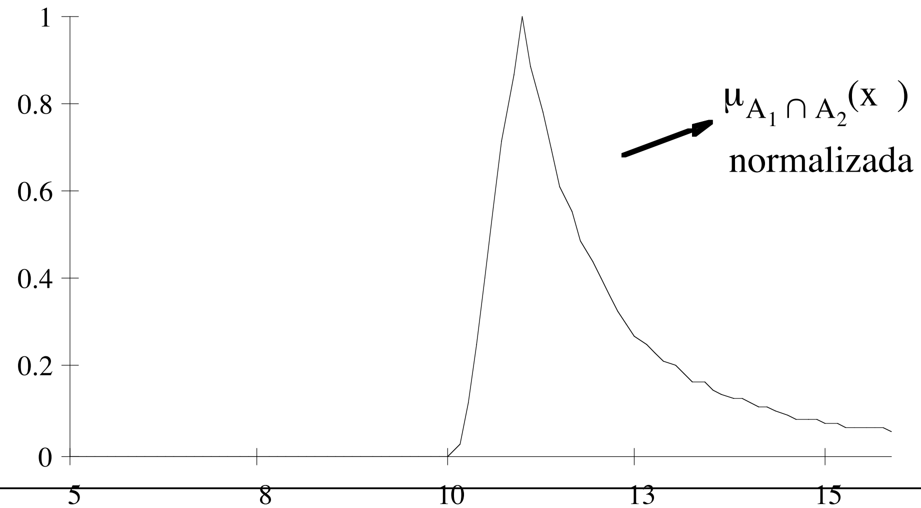
$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ \dfrac{1}{1+(x-10)^{-2}} & x \geq 10 \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}$$

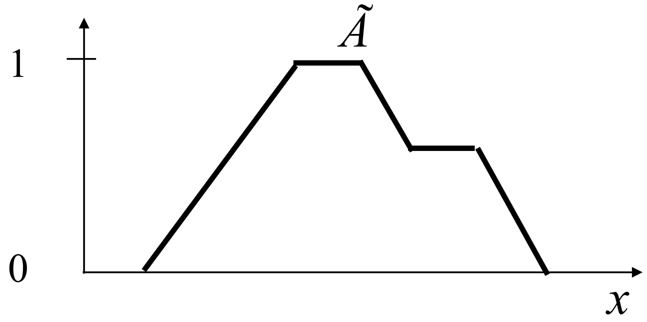


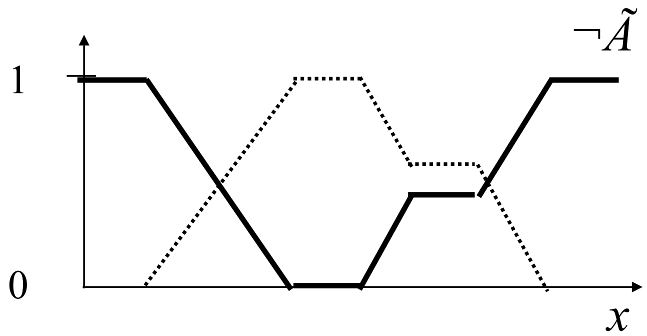
Fuzzy Sets - Operations





Fuzzy Sets - Operations





$$\neg \rightarrow 1 - .$$

Fuzzy Sets - Properties

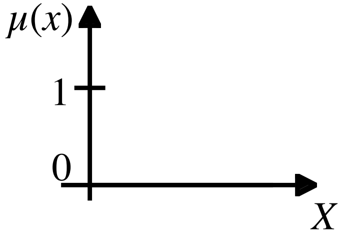
- *Containment*

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x_1)$$

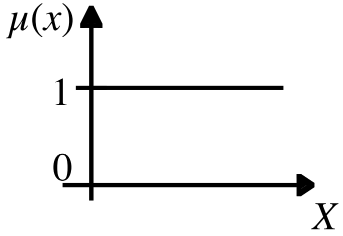
- *Associativity, Distributivity, Idempotency, Identity, De Morgans's Principles*

- *The Axiom of the exclude middle and the axiom of contradiction do not hold on fuzzy sets*

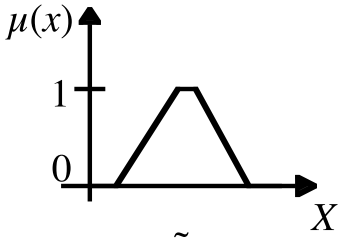
Fuzzy Sets - exclude middle and contradiction



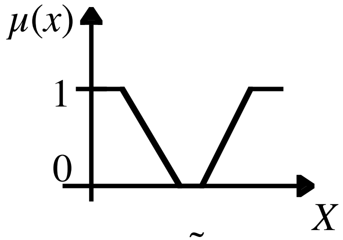
conjunto vazio



conjunto universal

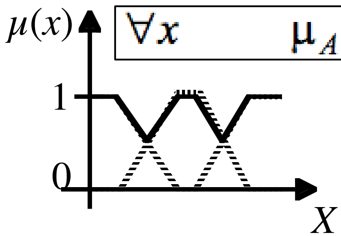


$\tilde{A}$



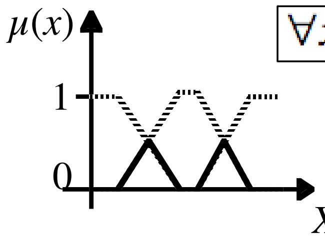
$\neg\,\tilde{A}$

$\forall x \qquad \mu_{A \cup \neg A}(x) \geq 1/2$



$\tilde{A} \cup \neg \tilde{A} \neq X$

$\forall x \qquad \mu_{A \cap \neg A}(x) \leq 1/2$



$\tilde{A} \cap \neg \tilde{A} \neq \varnothing$

Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

- **T-norms**: T: [0, 1] x [0, 1] → [0, 1] INTERSECTION
  - T(0, 0)=0; T(a, 1)=T(1,a)=a;
  - T(a,b) ≤ T(c, d) if a ≤ c e b ≤ d;
  - T(a,b)=T(b, a);
  - T(T(a,b),c)=T(a, T(b, c)).
- Furthermore any T-norm satisfies

$$\mathbf{T}_w(a, b) \leq \mathbf{T}(a, b) \leq max(a, b)$$

where

$$\mathbf{T}_w(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 1 \\ b & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

- **co-norms**: S: [0, 1] x [0, 1] → [0, 1] UNION
  - S(1, 1)=1; S(a, 0)=S(0, a)=a;
  - S(a,b) ≤ S(c, d) if a ≤ c and b ≤ d;
  - S(a,b) = S(b, a);
  - S(S(a,b),c) = S(a, S(b, c)).
- Furthermore any S-norm satisfies

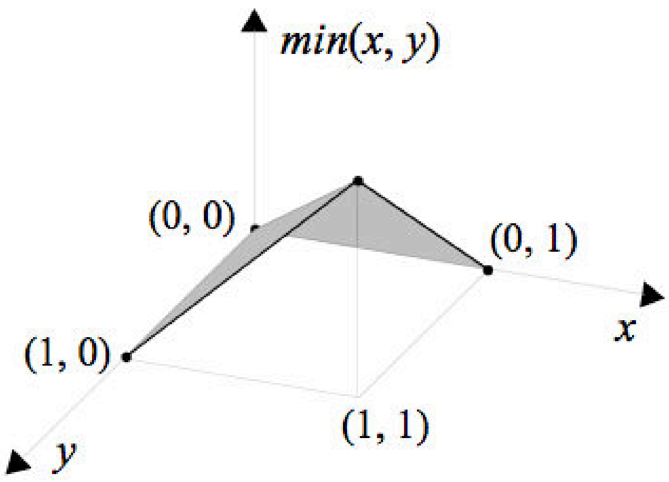
$$max(a, b) \le \mathbf{S}(a, b) \le \mathbf{S}_w(a, b)$$

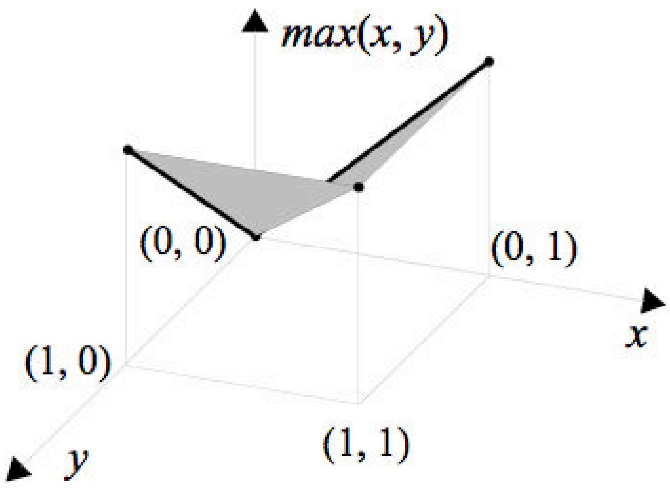
where

$$\mathbf{S}_w(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 1 \\ b & \text{se } a = 1 \\ 1 & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

- Any T-norm is bounded-up by the min, i.e., min is the largest T-norm
- Any S-norm is bounded-down by max, i.e., max is the smallest S-norm





Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

INTERSECTION (AND)

- **T-norms (e.g. min, product, drastic product...)**
- **Compensatory (e.g. Hammaker, Dubois&Prade, Yager...)**

UNION (OR)

- **T-conorms (e.g. Max, sum, drastic sum...)**
- **Compensatory (e.g. Dubois & Prade...)**

Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

- Probabilistic operators

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$$

$$\mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

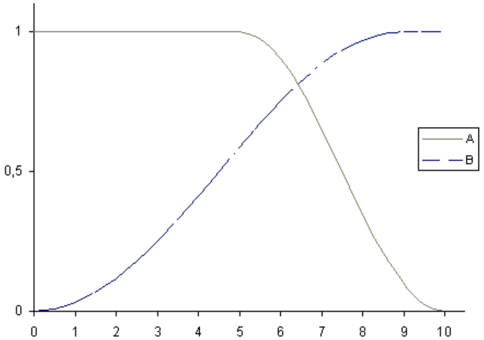
- Reinforced operators

$$\mu_{A \odot B}(x) = max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$$

$$\mu_{A \cup\!\!\cdot\, B}(x) = min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$$

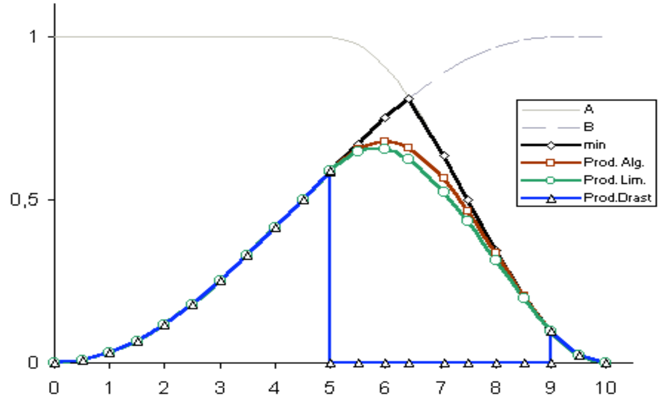
Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

- Intersection



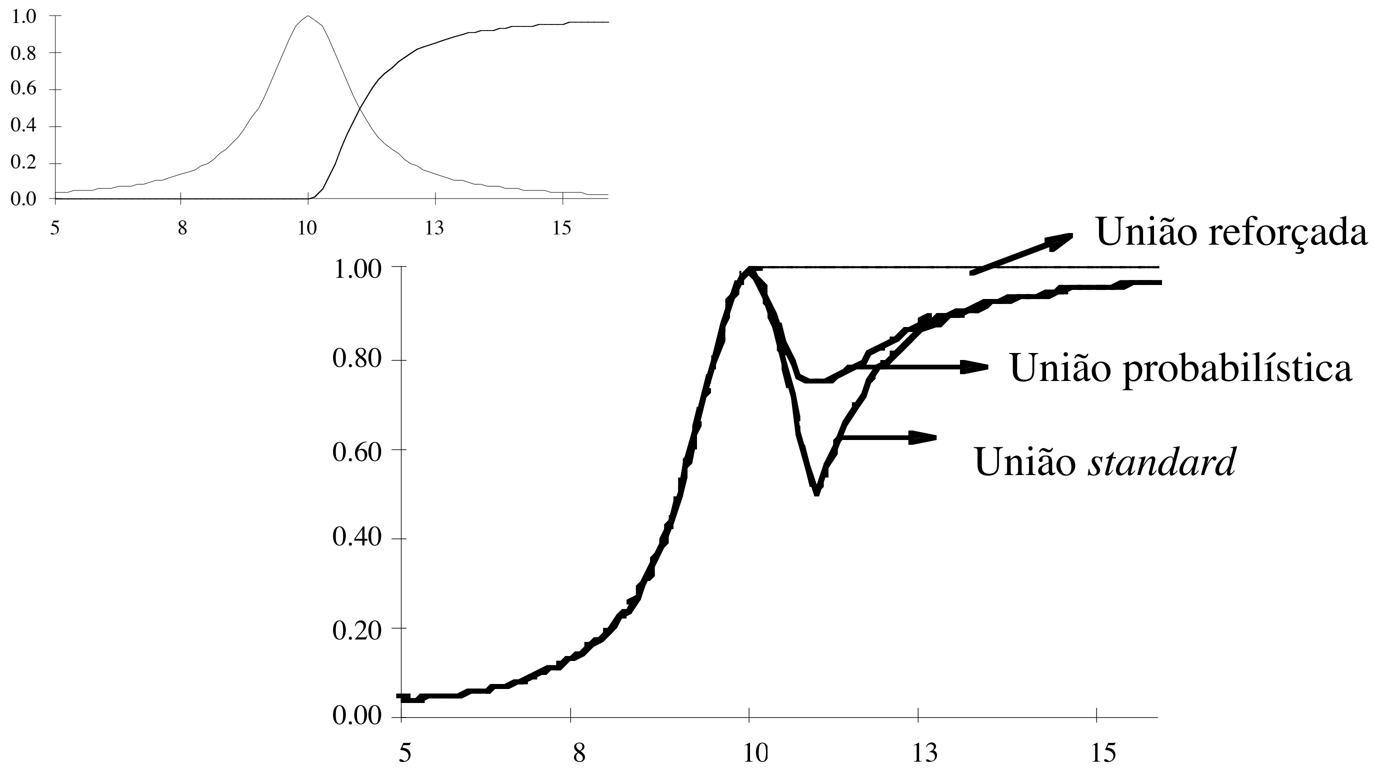
Example:
Lets consider 2 fuzzy sets, A and B

Some intersections are:



Fuzzy Sets - alternative set operations definitions

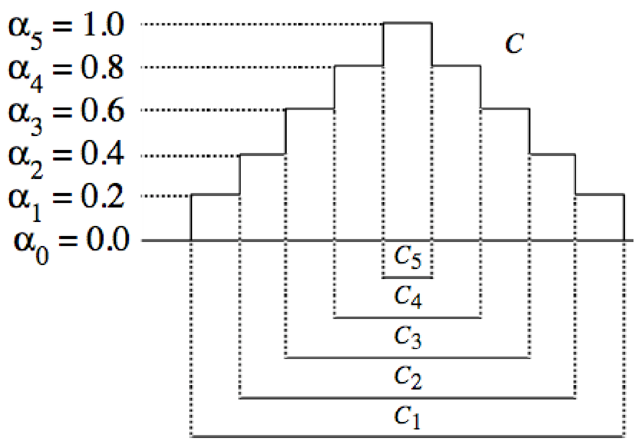
- Union



Fuzzy Sets viewed as a collection of crisp sets

- alfa-cuts
  - α-cut of fuzzy set *A* at level α, denoted by (*A*)α, is the crisp set formed by the elements of X satisfying A at least at level α,

$$(\tilde{A})_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

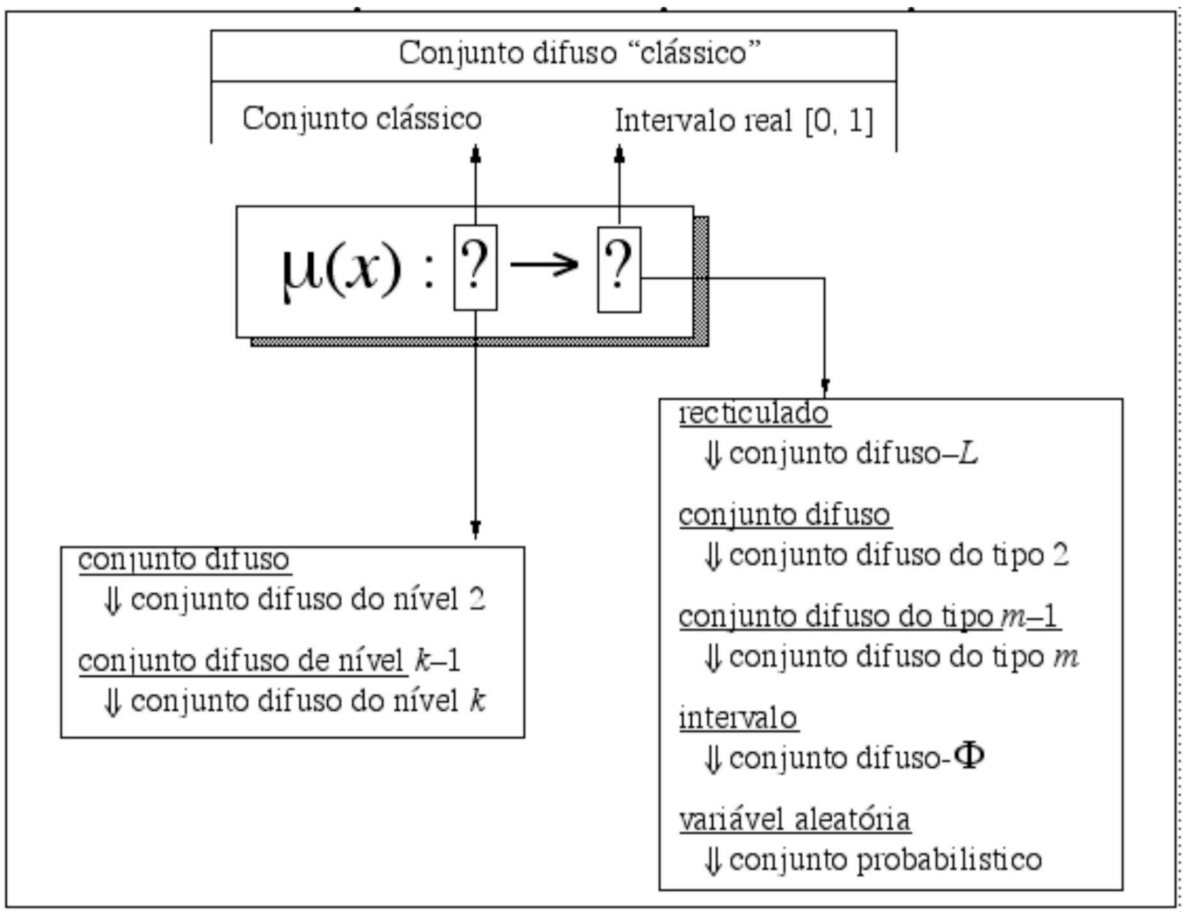


  - The **support** of a fuzzy set is denoted by **Support**(*A*) and is the α-cut of level greater than 0.
  - The core of a fuzzy set *A* is denoted by **Core**(*A*) and is its α-cut of level 1.

Fuzzy Sets - Cardinality

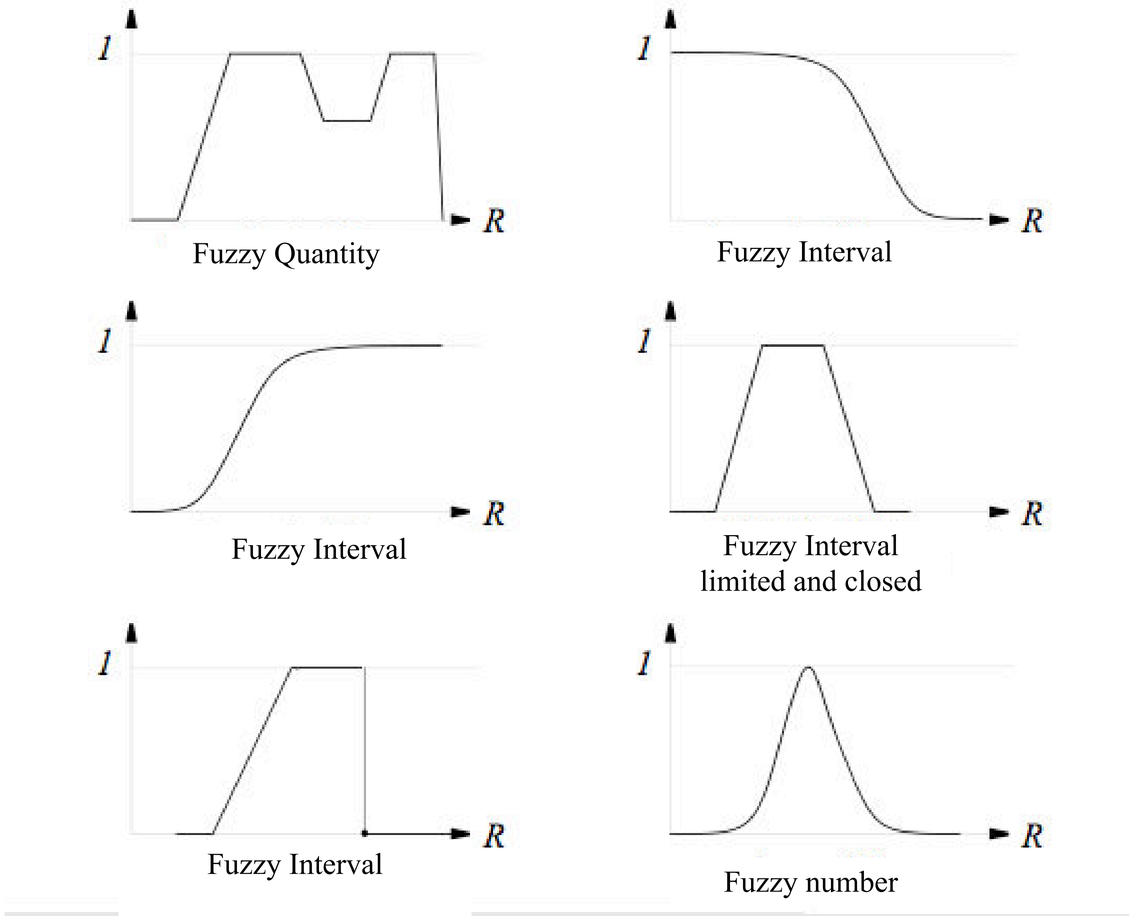
- The (scalar) *cardinality* of fuzzy set $\tilde{A}$ which support *$S(\tilde{A}) \subseteq X$ is defined by*
  - $$|\tilde{A}| = \sum_{x \in S(X)} \mu_A(x)$$
- The fuzzy cardinality of a fuzzy set $\tilde{A}$ is the fuzzy number,
  - $$\|\tilde{A}\| = \sum \alpha / |(\tilde{A})_\alpha|$$

Fuzzy Sets - extensions to the basic theory



Mathematical extensions of Fuzzy Sets

Fuzzy Numbers and fuzzy arithmetic



Numbers L-R

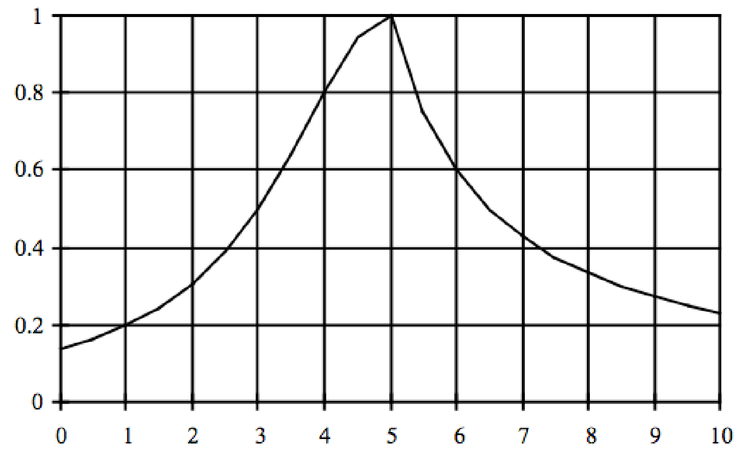
Let $L(x)$ and $R(x)$ be two reference functions

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

then, the fuzzy-number L-R with $m = 5$, $\alpha = 2$ and $\beta = 3$, has a membership function defined by

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{5-x}{2}\right)^2} & \text{para } (x \le m) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) = \dfrac{1}{1+2\left|\frac{(x-5)}{3}\right|} & \textbf{for } (x \ge m) \end{cases}$$

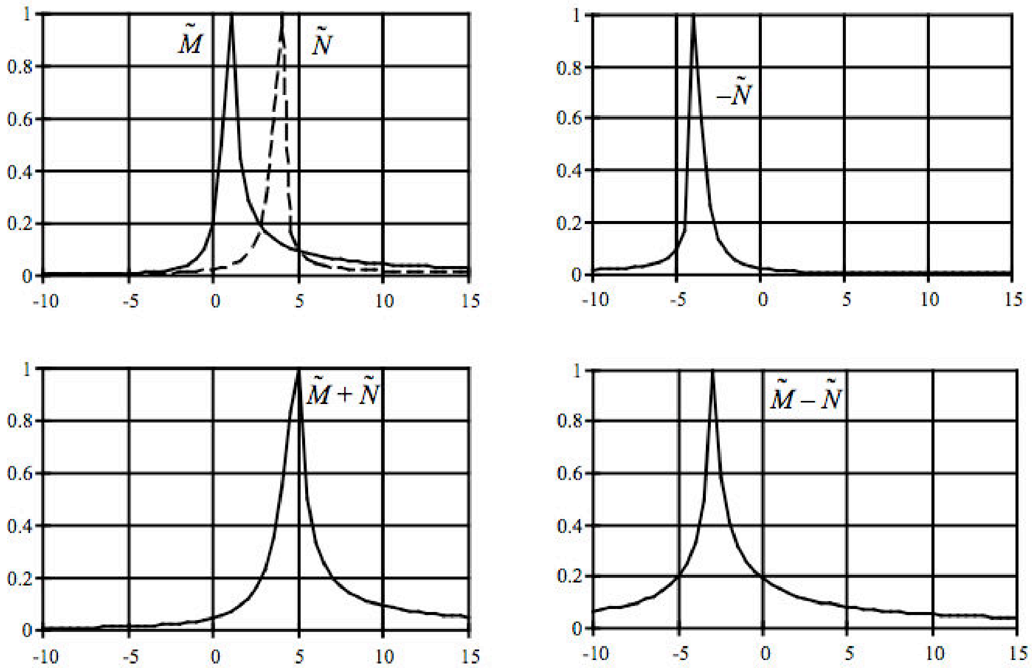


Numbers L-R

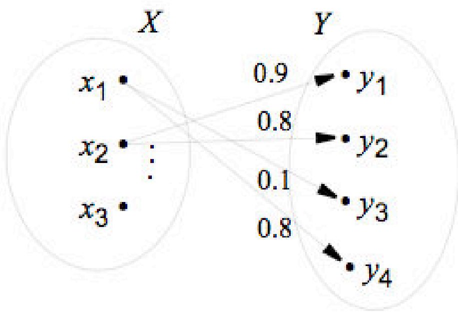
Let $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ e $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ **two L-R fuzzy numbers, then**

1. $(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$
2. $-(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$
3. $(m, \alpha, \beta)_{LR} - (n, \gamma, \delta)_{RL} = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{LR}$

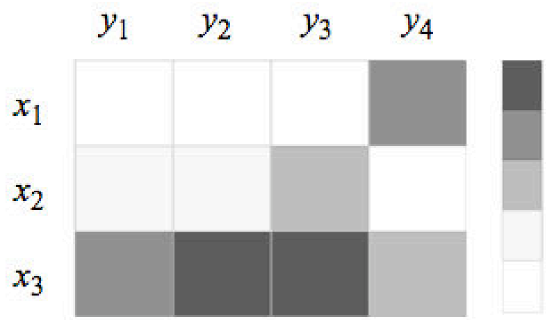
$\tilde{M} = (1, 0.5, 0.8)_{LR}$ $\tilde{N} = (4, 0.6, 0.2)_{LR}$



Fuzzy Relations



	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.0	0.0	0.1	0.8
x_2	0.3	0.4	0.6	0.2
x_3	0.8	0.9	1.0	0.5



Fuzzy Relations - cylindrical projection

Let $\tilde{R}(X \times Y) = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)) \mid ((x, y) \in X \times Y)\}$ **be a binary fuzzy relation**

The first projection of the relation is denoted by $\tilde{R}^{(1)}$ **and is defined by**

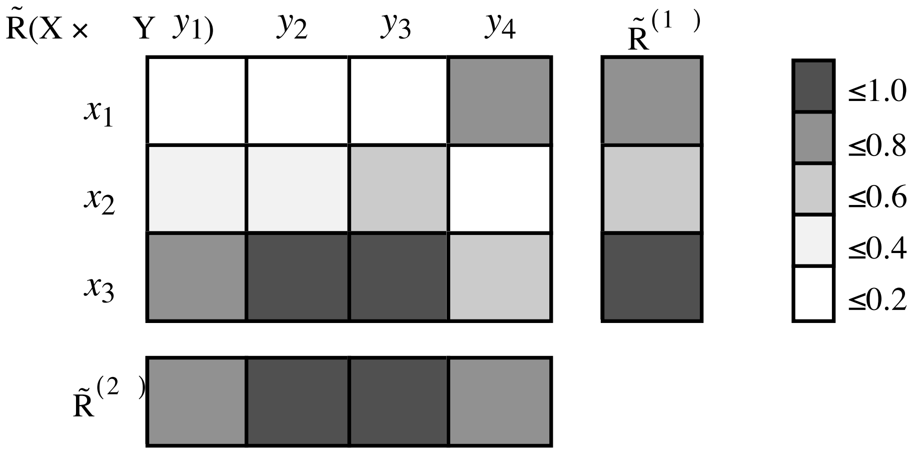
$$\tilde{R}^{(1)} = \{(x, \max_{y} (\mu_{\tilde{R}}(x, y))) \mid ((x, y) \in X \times Y)\}$$

The second projection of the relation is denoted by $\cdot\ \tilde{R}^{(2)}$ **and is defined by**

$$\tilde{R}^{(2)} = \{(y, \max_{x} (\mu_{\tilde{R}}(x, y))) \mid ((x, y) \in X \times Y)\}$$

Fuzzy Relations - cylindrical projection

$\tilde{R}(X \times Y)$	y_1	y_2	y_3	y_4	$\tilde{R}^{(1)}$
x_1	0.0	0.0	0.1	0.8	0.8
x_2	0.3	0.4	0.6	0.2	0.6
x_3	0.8	0.9	1.0	0.5	1.0
$\tilde{R}^{(2)}$	0.8	0.9	1.0	0.8	



Fuzzy Relations - cylindrical extension

Seja uma relação difusa $\tilde{R}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$; a sua *extensão cilíndrica* em $X_1 \times \ldots \times X_n$ denota-se por $c(R)$ e é uma relação definida em $X_1 \times \ldots \times X_n$ tal que:

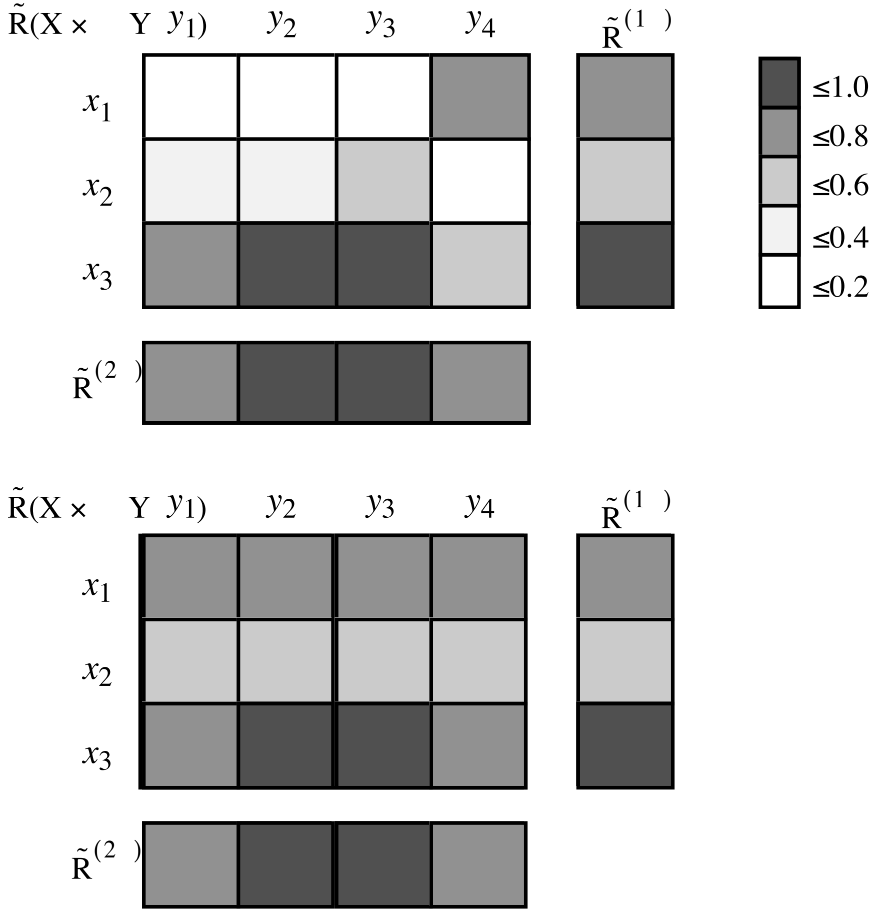
$$\{((x_1, \ldots, x_n), \mu_R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})) \mid ((x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n)\} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Enquanto que na projecção a ideia consiste em "projectar a sombra da função de pertença sobre um parte dos eixos onde ela se encontra definida", na extensão cilíndrica "estendem-se os valores da função de pertença definida em alguns eixos a novos eixos". Para a relação binária que se apresentou na Figura 4.17, mostram-se na Figura 4.18 as extensões cilíndricas de cada uma das suas projecções $\tilde{R}^{(1)}$ e $\tilde{R}^{(2)}$.

Fuzzy Relations - cylindrical extension

Segundo [Klir, 1988] uma extensão cilíndrica produz a *maior relação difusa* (maior no sentido dos graus de pertença dos elementos do produto cartesiano estendido), que é compatível com a projecção dada. Tal relação é a menos específica de entre todas as relações compatíveis com a projecção. A extensão cilíndrica então maximiza a *não especificidade*, isto é, maximiza a *imprecisão* na derivação de uma relação de dimensão n a partir de uma das suas projecções de dimensão k, sendo $k < n$. Isto garante que informação que não esteja incluída na projecção não será usada na determinação da relação estendida. É por este motivo que por vezes se diz que a extensão cilíndrica é totalmente *imparcial*.

Fuzzy Relations - cylindrical extension



fecho cilíndrico a partir de $\tilde{R}^{(1)}$ e $\tilde{R}^{(2)}$

Cartesian product and co-product - Crisp case

Em termos de conjuntos não difusos, o *produto cartesiano* A_1 x A_2 define-se como:

$$A_1 \text{ x } A_2 = \{ (a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} \quad \textbf{(4.44)}$$

e o *co-produto cartesiano* $A_1 + A_2$ define-se como:

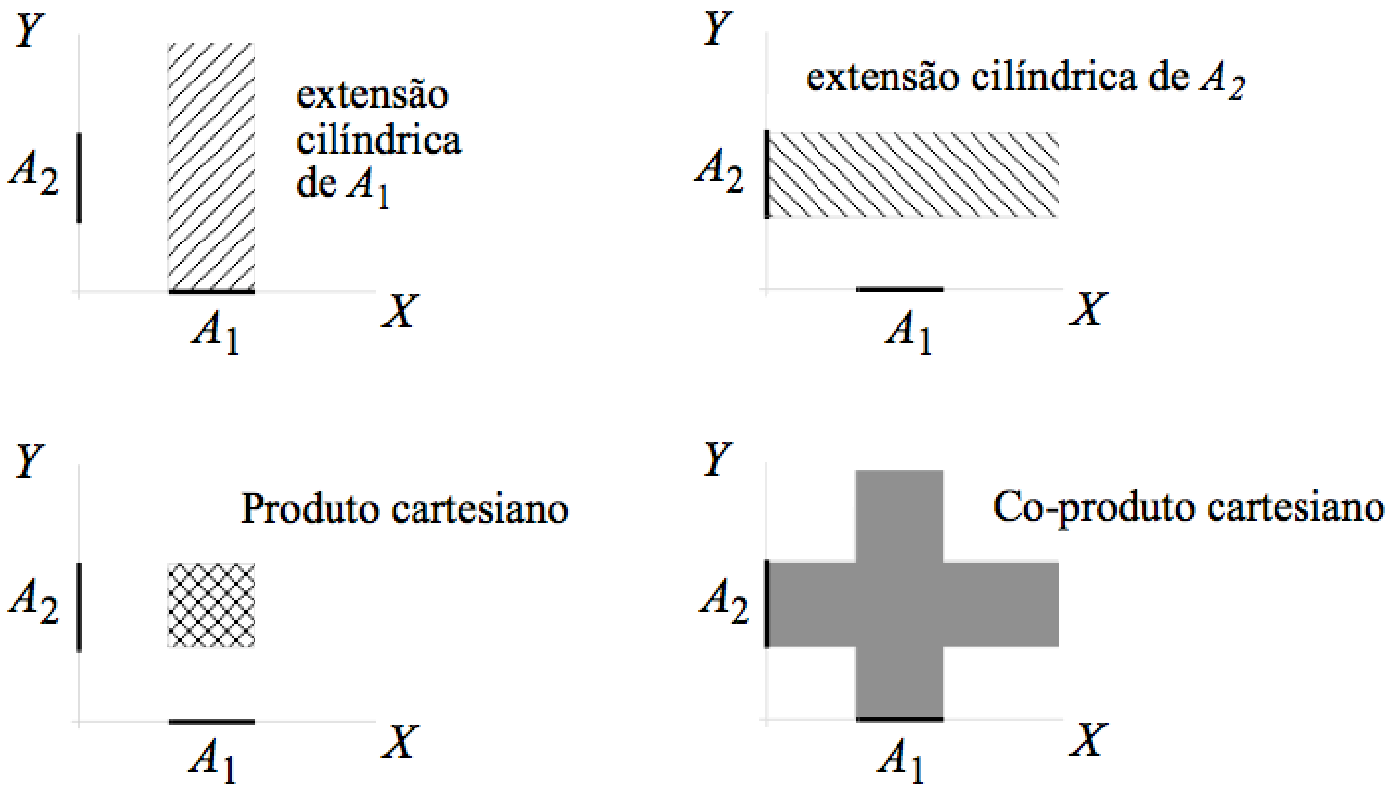
$$A_1 + A_2 = \{ (a_1, y) \mid a_1 \in A_1\} \cup \{ (\text{x}, a_2) \mid a2 \in A_2\} \quad \textbf{(4.45)}$$

O produto cartesiano pode ser expresso como a intersecção das extensões cilíndricas de A_1 e A_2, e o co-produto cartesiano pode ser expresso como a união das extensões cilíndricas, tal como se mostra na Figura 4.19. Denotando por $c(A_1)$ e $c(A_2)$ as respectivas extensões cilíndricas temos:

$$A_1 \text{ x } A_2 = c(A_1) \cap c(A_2) \quad \textbf{(4.46)}$$

$$A_1 + A_2 = c(A_1) \cup c(A_2) \quad \textbf{(4.47)}$$

Cartesian product and co-product - Crisp case



Cartesian product and co-product - fuzzy case

A generalização para conjuntos difusos $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ segue directamente das equações (4.46) e (4.47), isto é, se usarmos o operador *min* para a intersecção e o operador *max* para a união temos:

$$\mu_{A_1 \times A_2}(x, y) = min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y)) \qquad \textbf{(4.48)}$$

$$\mu_{A_1 + A_2}(x, y) = max(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y)) \qquad \textbf{(4.49)}$$

Note-se que o fecho cilíndrico de uma relação difusa é o produto cartesiano das suas projecções. Recordemos que uma relação está sempre incluída no seu fecho cilíndrico, ou seja podemos escrever que (por exemplo, para uma relação binária):

$$\tilde{R}(X \times Y) \subseteq \tilde{R}^{(1)}(X) \times \tilde{R}^{(2)}(Y) \qquad \textbf{(4.50)}$$

Possibility Theory

Fuzzy Measure

Seja X o conjunto universal. Uma medida difusa é uma função $g : P(X) \rightarrow [0, 1]$, onde $P(X)$ é o conjunto potência[3] de X. A função g deve verificar as seguintes propriedades:

1. $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$.
2. Se $A, B \in P(X)$ e $A \subseteq B$ então $g(A) \leq g(B)$.
3. Se $A_n \in P(X)$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$ então $\lim_{n \to \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to \infty} A_n)$.

monotonia no sentido da inclusão

- $g(X) = 1$
  - não significa que se $g(A) = 1$ então A seja um acontecimento certo.
- $g(\emptyset) = 0$
  - não significa que se $g(A) = 0$ então A seja impossível.

Fuzzy Measure -

Consideremos um conjunto universal X e dois subconjuntos A e B. Como qualquer destes dois conjuntos é subconjunto da união $A \cup B$, então pelo segundo axioma da Definição 4.28 podemos escrever que uma medida difusa cumpre

$$g(A \cup B) \geq max(g(A), g(B)) \tag{4.62}$$

Por outro lado, a intersecção $A \cap B$ é um subconjunto de qualquer um dos conjuntos A e B, então pelo segundo axioma da Definição 4.28 podemos escrever que uma medida difusa também cumpre

$$g(A \cap B) \leq min(g(A), g(B)) \tag{4.63}$$

Possibility and Necessity Measures

Quando uma função difusa cumpre a equação (4.62) no caso limite, isto é, quando se cumpre a igualdade então essa função designa-se por *medida de possibilidade* [Zadeh, 1978] e é denotada por Π, e podemos escrever:

$$\Pi(A \cup B) = max(\Pi(A), \Pi(B)) \tag{4.64}$$

O outro caso limite das medidas difusas ocorre quando se cumpre a igualdade da equação (4.63) e obtemos uma classe de funções designadas por *medidas de necessidade* e representadas por N que para quaisquer subconjuntos A e B de X satisfazem

$$N(A \cap B) = min(N(A), N(B)) \tag{4.67}$$

Possibility Measure

- Seja $E \subseteq X$ um acontecimento considerado como certo. Então facilmente definimos uma função Π de valores sobre $\{0, 1\}$ que satisfaça (4.64):

$$\Pi_E(A) = \begin{cases} 1 & A \cap E \neq \varnothing \\ 0 & A \cap E = \varnothing \end{cases} \qquad \textbf{(4.65)}$$

  Neste contexto $\Pi_E(A) = 1$ significa que A é um acontecimento possível.

- Se A e $\neg A$ são dois acontecimentos contrários, isto é, $\neg A$ é o complementar de A em X, então $X = A \cup \neg A$. Como $\Pi(X) = 1$ e usando a equação (4.64), concluímos que uma medida de possibilidade deve verificar a seguinte equação:

$$max(\Pi(A), \Pi(\neg A)) = 1 \qquad \textbf{(4.66)}$$

  Ou seja, de dois acontecimentos complementares pelo menos um deles é possível. Além disso quando um acontecimento é julgado possível não impede que o seu contrário também o seja – o que é coerente com o significado de que julgamentos de possibilidade comprometem pouco o seu autor.

- A equação (4.64) é coerente com o significado físico de possibilidade, isto é, para realizar A ou B basta realizar o mais fácil deles, isto é o "mais possível".

Necessity Measure

- Seja $E \subseteq X$ um acontecimento considerado como certo. Então facilmente definimos uma função N de valores sobre {0, 1} que satisfaça (4.67):

$$N_E(A) = \begin{cases} 1 & A \subseteq E \\ 0 & A \supset E \end{cases} \qquad \supseteq \quad \subset \tag{4.68}$$

Neste contexto $N_E(A) = 1$ significa que A é um acontecimento certo, isto é, *necessariamente* verdadeiro.

- É fácil verificar que uma medida difusa N satisfaz a equação (4.67) se e só se a função Π definida por

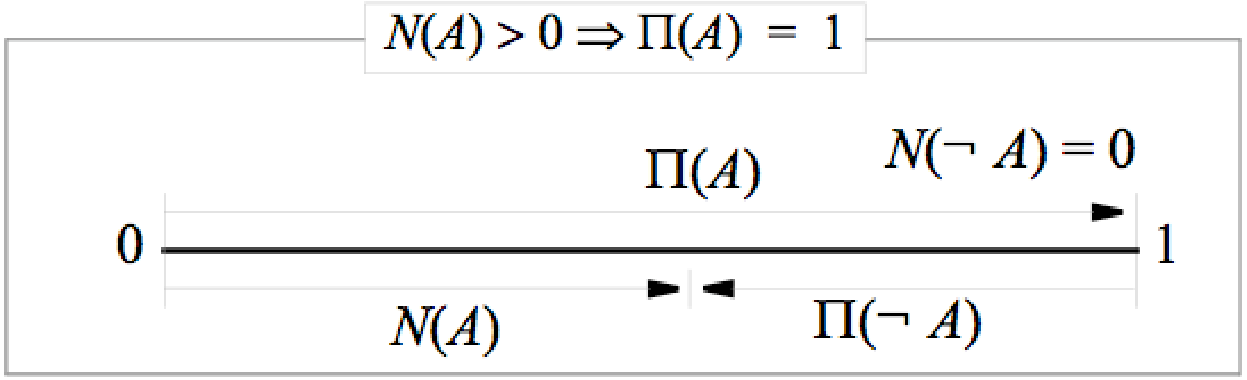
$$\Pi(A) = 1 - N(\neg A) \tag{4.69}$$

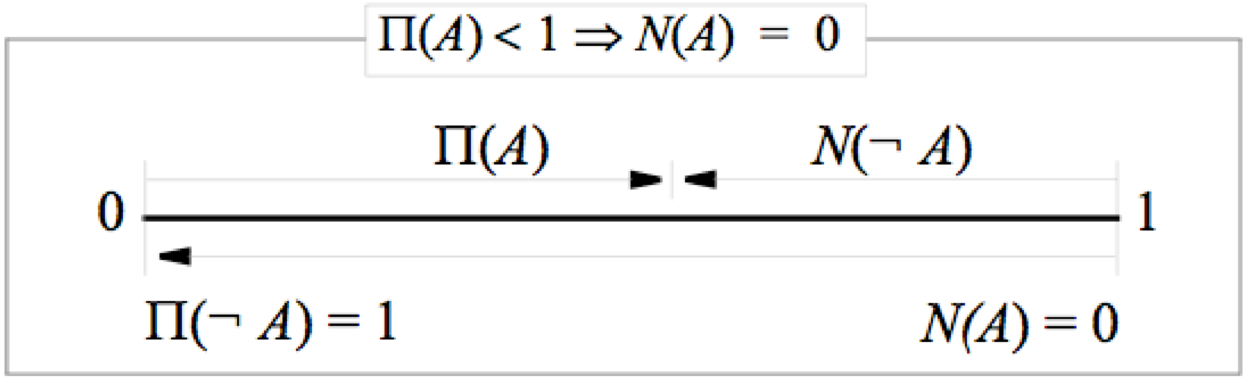
é uma medida de possibilidade. Isto revela a dualidade já referida entre estas duas medidas de possibilidade e necessidade – um acontecimento é necessário quando o acontecimento contrário é impossível.

- O equivalente da equação (4.66) para o caso da medida de necessidade é

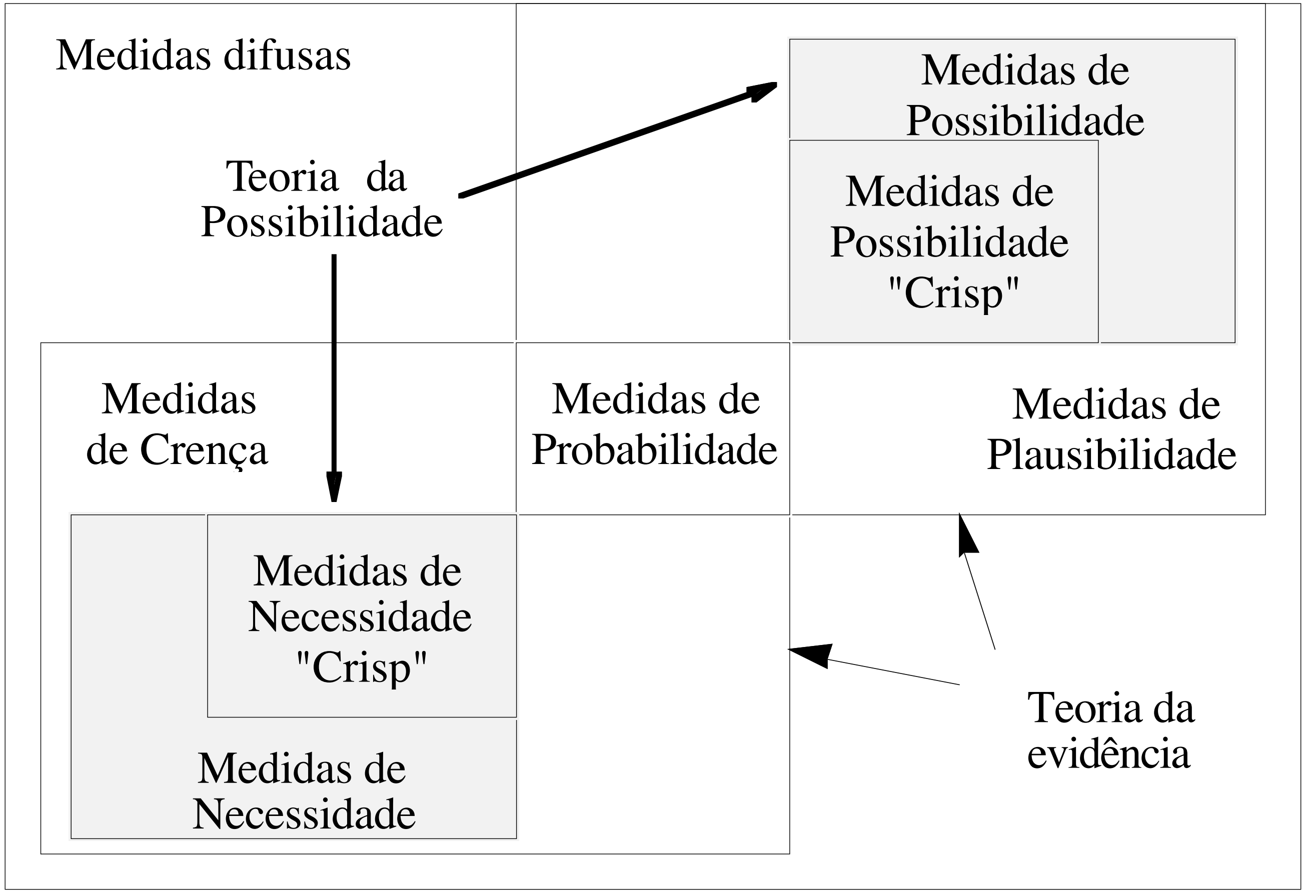
$$min(N(A), N(\neg A)) = 0 \tag{4.70}$$

Possibility and Necessity Measures





Main Fuzzy Measures



Possibility Distribution

Quando o conjunto universal é finito, qualquer medida de possibilidade Π pode ser definida a partir dos seus valores sobre os conjuntos singulares de X:

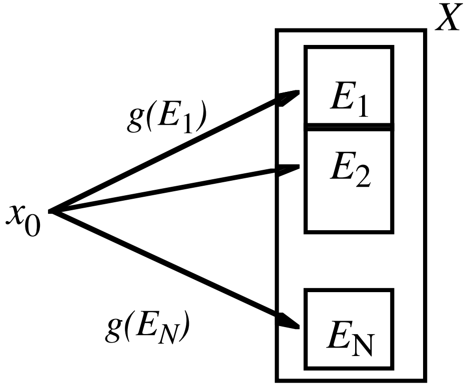
$$\forall(A \subseteq X) \qquad \Pi(A) = sup\{\pi(x) | (x \in A)\} \tag{4.76}$$

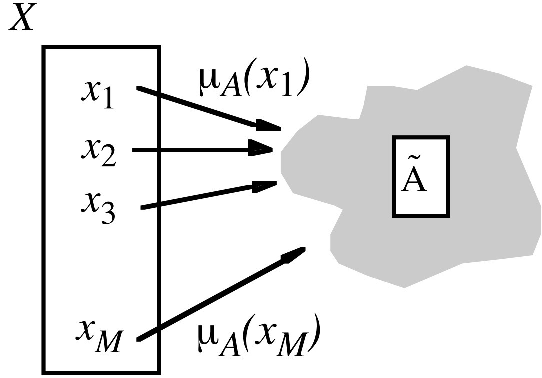
onde π é um aplicação de $X \rightarrow [0, 1]$ e é designada de *distribuição de possibilidade* e $\pi(x) = \Pi(\{x\})$. Esta distribuição está normalizada no sentido em que existe um x tal que $\pi(x) = 1$ (note-se que $\Pi(X) = 1$). Quando π é uma aplicação de $X \rightarrow \{0, 1\}$ é designada de *distribuição de possibilidade exacta*[1].

Main Fuzzy Measures

medida difusa atribui um valor a cada subconjunto Ei do conjunto universal X representando o grau de evidência ou confiança de que um certo elemento x0 de X pertence a cada um dos Ei. Esta definição de medida difusa permite modelar a *incerteza acerca de qual o conjunto a que x0 pertence*.

a cada elemento x do conjunto universal X é atribuído um número que representa o grau com que x pertence a um conjunto particular cujas fronteiras estão mal definidas, isto é um conjunto difuso Ã. Esta definição de conjunto difuso permite *modelar directamente conceitos ou categorias vagas*





"x_0 pertence a Ei"?