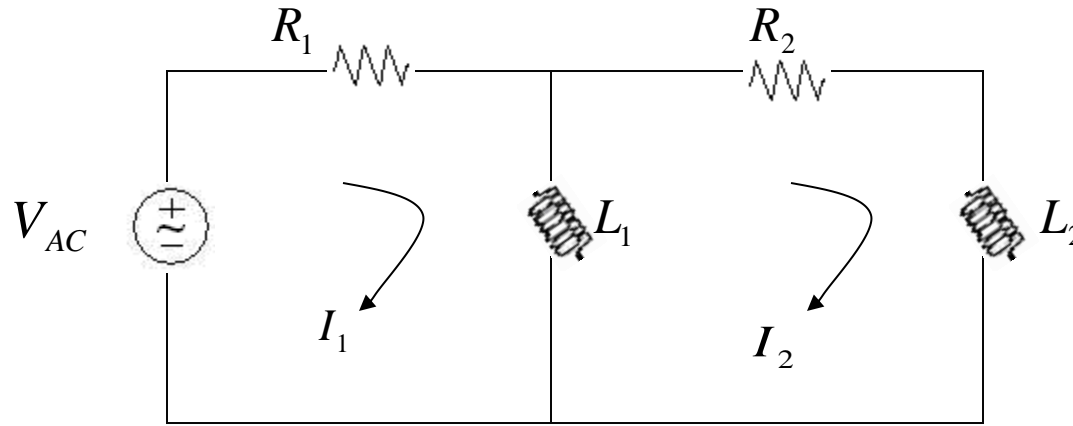
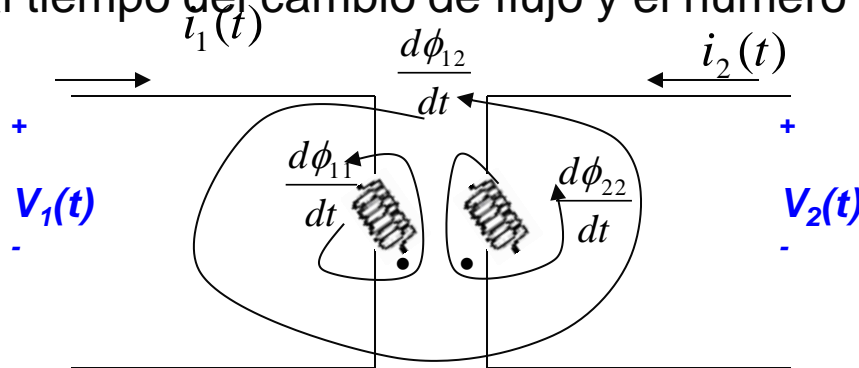


# Redes Acopladas Magnéticamente



## Ley de Faraday

El voltaje inducido en una bobina es proporcional a la razón con respecto al tiempo del cambio de flujo y el número de vueltas  $N$  en la bobina.



$$V_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt}$$

$$V_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt}$$

del circuito anterior :

$$V_1(t) = N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

$\phi_{11}$  : Flujo de la bobina 1 producido por la corriente 1

$\phi_{12}$  : Flujo de la bobina 1 producido por la corriente 2

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= N_1 P_{11} i_1(t) & V_1(t) &= \underbrace{N_1^2 P_{11} \frac{di_1}{dt}}_{\text{Auto inductancia } L_{11}} + \underbrace{N_1 N_2 \frac{d\vec{i}_2}{dt}}_{\text{Inductancia Mutua } L_{12}} \\ \phi_{12} &= N_2 P_{12} i_2(t) \end{aligned}$$

P es una constante que depende de la trayectoria magnética

$$\begin{aligned} & \Rightarrow V_1(t) = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ & V_2(t) = L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

# Consideraciones:

1.- El medio a través del cual pasa el flujo magnético es lineal, entonces se puede considerar que:  $L_{12}=L_{21}=M$ .

2.- Por conveniencia:  $L_{11}=L_1$

$$L_{22}=L_2$$

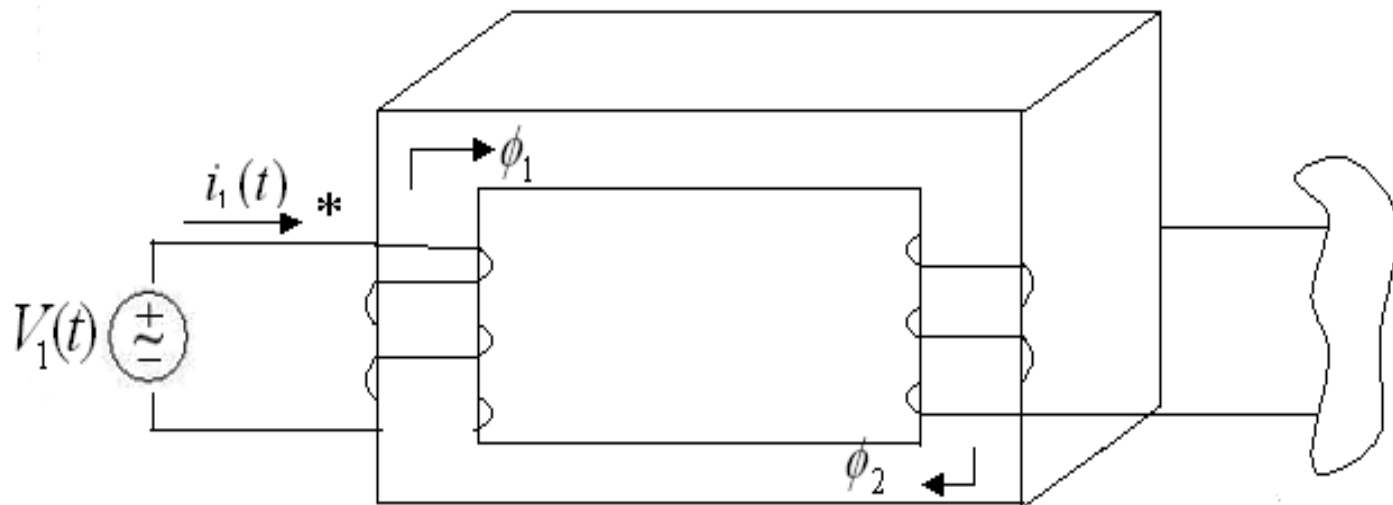
3.- Al fin de indicar la relación física de las bobinas y por consiguiente simplificar la convención de los signos para los términos mutuos, empleamos lo que comúnmente se conoce con el nombre de convención de puntos ó marcas.

## Convención de Marcas

1.- Se colocan marcas al lado de cada bobina de modo que si entran corrientes en ambas terminales con marcas ó salen de ambos terminales con marcas, los flujos producidos por esas corrientes se suman.

2.- Para colocar las marcas en un par de bobinas acopladas, arbitrariamente seleccionamos una terminal de cada bobina y colocamos una marca en dicho lugar.

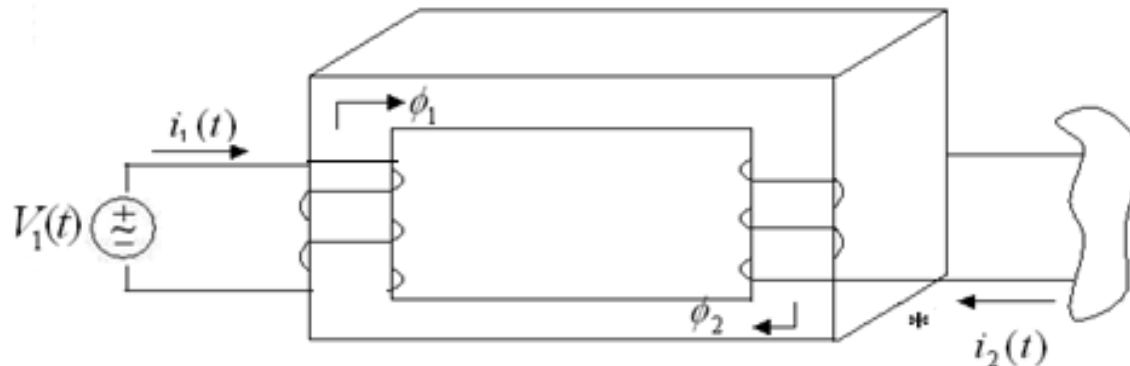
**3.-** Usando la regla de la mano derecha determinamos la dirección del flujo producido por esa bobina cuando la corriente está entrando a dicho terminal.

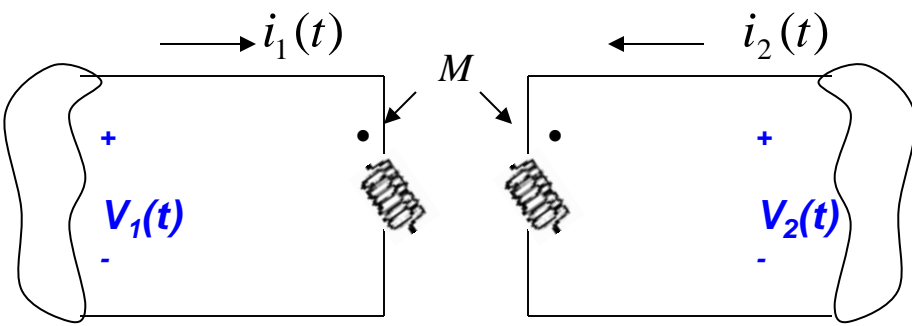


4.- Examinamos la bobina 2 para determinar a que terminal deberá entrar la corriente para encontrar un flujo que se sumará al flujo producido por la primera bobina. Se coloca entonces una marca en dicho terminal.

5.- Cuando se escriben las ecuaciones para los voltajes terminales, las marcas pueden utilizarse para definir el signo de los voltajes mutuamente inducidos.

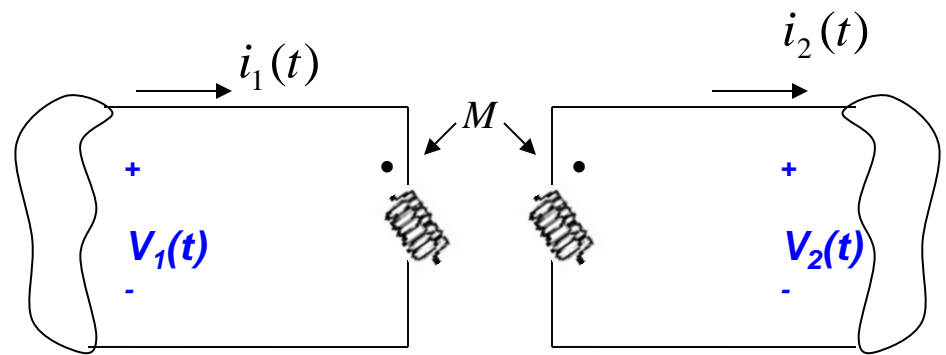
Si ambas corrientes están entrando o saliendo por marca, el signo del voltaje mutuo  $M$ , será el mismo que el del voltaje inducido  $L$ . Si una corriente entra por marca y la otra corriente sale por marca, los términos del voltaje mutuo y el del voltaje inducido tendrán signos opuestos.





$$V_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



$$V_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



# Coeficiente de Acoplamiento

$$0 < k < 1$$

↓  
No hay enlace(acoplamiento)

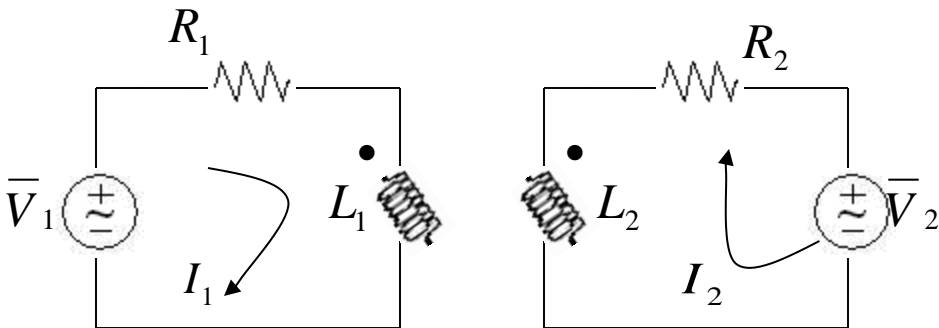
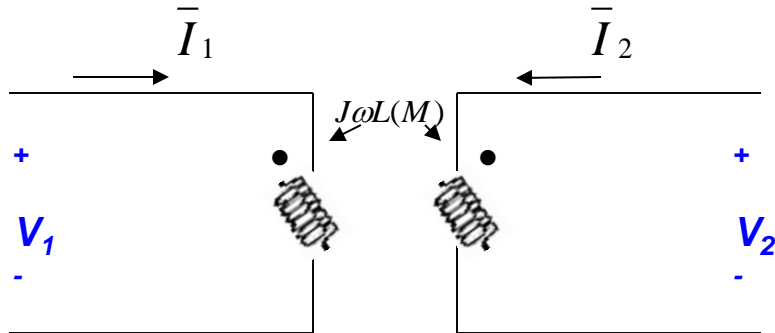
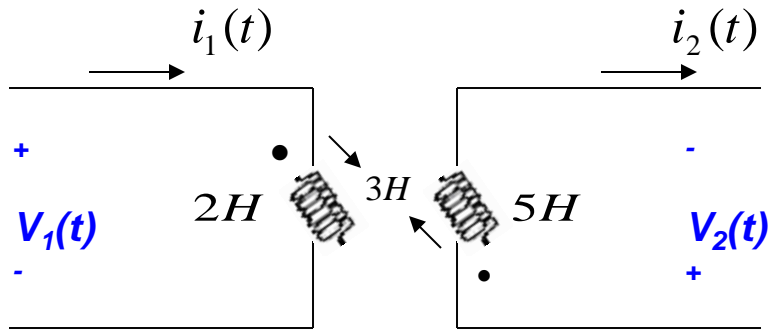
└→  
Ideal(transformadores)

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Los factores que afectan a la intensidad de acoplamiento magnético entre las bobinas son:

- 1.- El medio a través del cual se acoplan las bobinas.
- 2.- La distancia entre los ejes de las bobinas.
- 3.- Orientación que tengan entre sí los ejes de las bobinas.

# Ejemplo:



Dominio del tiempo

$$V_1(t) = 2 \frac{di_1}{dt} + 3 \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = 5 \frac{di_2}{dt} + 3 \frac{di_1}{dt}$$

Dominio de la frecuencia

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 M$$

$$\bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega L_1 \bar{I}_1 M$$

Dominio del tiempo

$$V_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

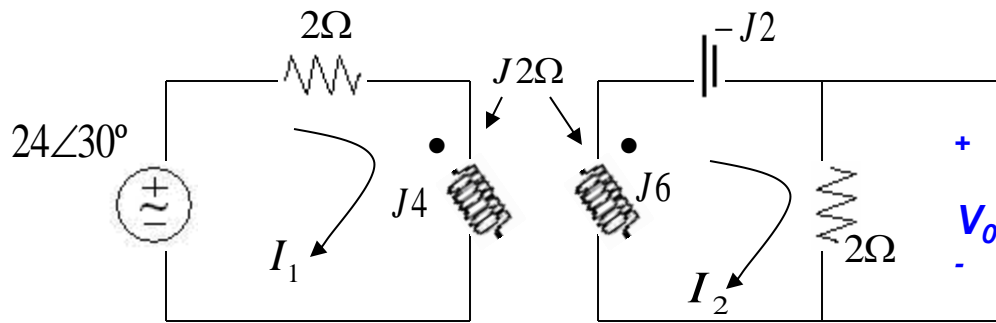


Dominio de la frecuencia

$$\bar{V}_1(t) = (R_1 + J\omega L_1)\bar{I}_1 \pm J\omega M \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2(t) = (R_2 + J\omega L_2)\bar{I}_2 \pm J\omega M \bar{I}_1$$

# Ejemplo:



Calcular  $V_0$

Malla 1

$$24\angle 30^\circ = \bar{I}_1(2 + j4) - j2I_2$$

Malla 2

$$0\angle 0^\circ = -j2\bar{I}_1 + I_2(2 + j4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 + j4 & -j2 \\ -j2 & 2 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \angle 30^\circ \\ 0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_1 = 6 \angle -23.13^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 2.68 \angle 3.44^\circ$$

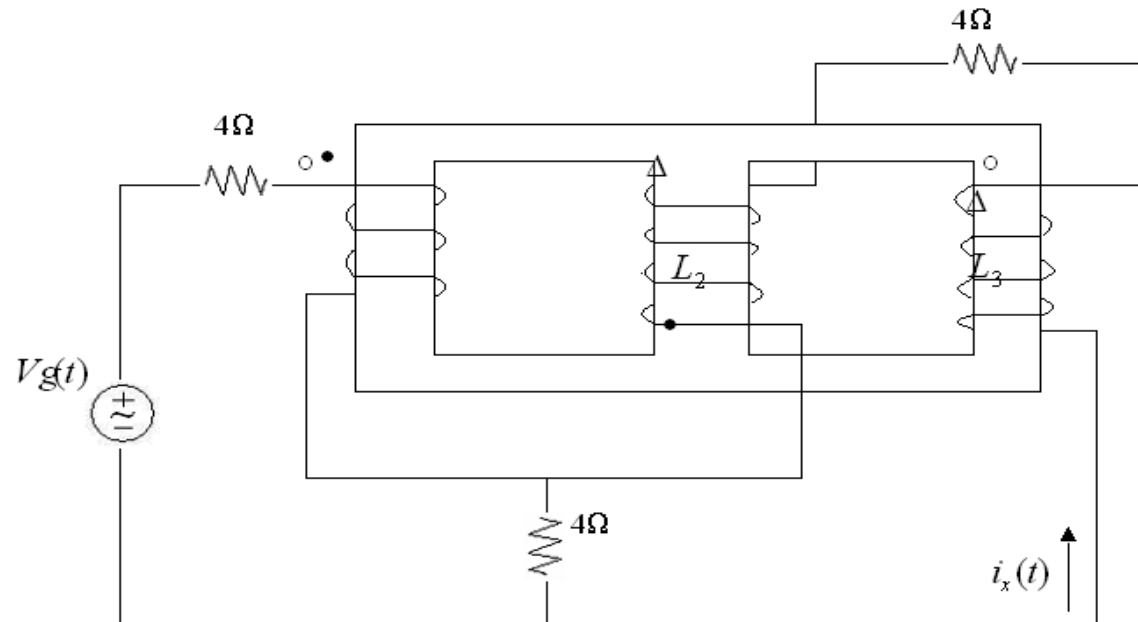
$\Rightarrow$

$$\bar{V}_0 = 2\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_0 = 2(2.68 \angle 3.44^\circ)$$

$$\underline{\bar{V}_0 = 5.36 \angle 3.44^\circ [V_{RMS}]}$$

# Ejercicio



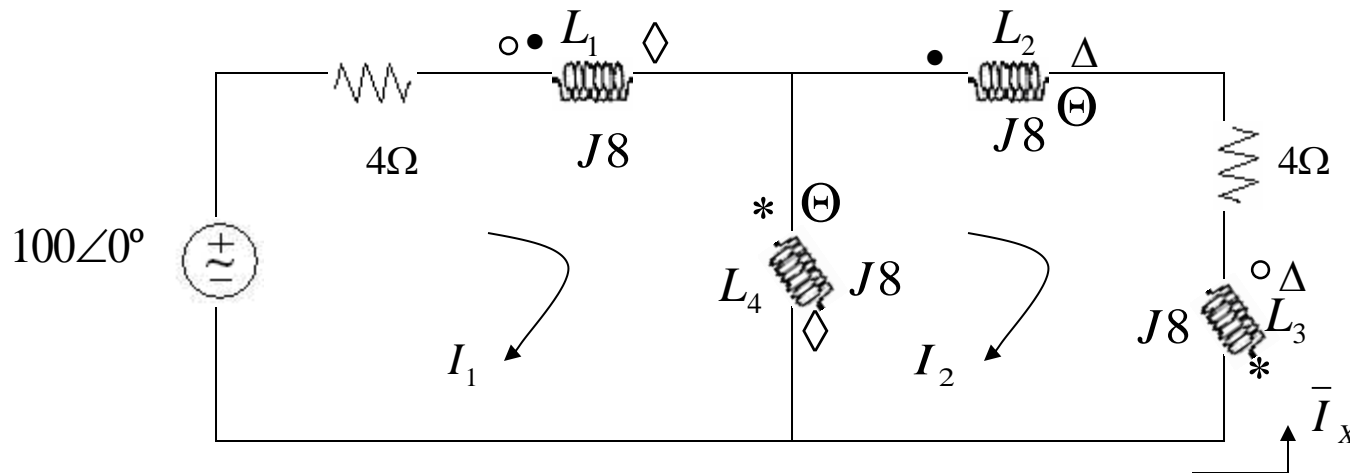
$$L_1 = L_2 = L_3 = 8\text{mH}$$

$$\bullet k_{12} = 0.75 \quad \circ k_{13} = 0.25 \quad \Delta k_{23} = 0.5$$

$$V_g(t) = 141.41 \cos 1000t; \bar{V}_g = 100 \angle 0^\circ$$

Determinar  $i_x(t) = ?$

# SUPONIENDO QUE TENEMOS EL SGTE CIRCUITO EQUIVALENTE



- $M_{12} = J6\Omega$
- $M_{13} = J2\Omega$
- $\Delta M_{23} = kJ4\Omega$
- $\Diamond M_{14} = J3\Omega$
- \*  $M_{34} = J5\Omega$
- $\Theta M_{24} = J6\Omega$

Malla 1

$$100\angle 0^\circ = \bar{I}_1(4 + J16) - \bar{I}_2(J8) + \overbrace{J6\bar{I}_2}^{L_1} + \overbrace{J3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)}^{L_4} + \overbrace{J2\bar{I}_2}^{L_4} - \overbrace{J5\bar{I}_2}^{L_4} - \overbrace{J6\bar{I}_2}^{L_4} + \overbrace{J3\bar{I}_1}^{L_4}$$

Malla 2

$$0\angle 0^\circ = -\bar{I}_1 J8 + \bar{I}_2(4 + J24) + \overbrace{J6\bar{I}_1}^{L_2} - \overbrace{J4\bar{I}_2}^{L_2} + \overbrace{J6(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)}^{L_2} - \overbrace{J4\bar{I}_2}^{L_3} + \overbrace{J2\bar{I}_1}^{L_3} + \overbrace{J5(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)}^{L_3} + \overbrace{J5\bar{I}_2}^{L_4} + \overbrace{J6\bar{I}_2}^{L_4} - \overbrace{J3\bar{I}_1}^{L_4}$$

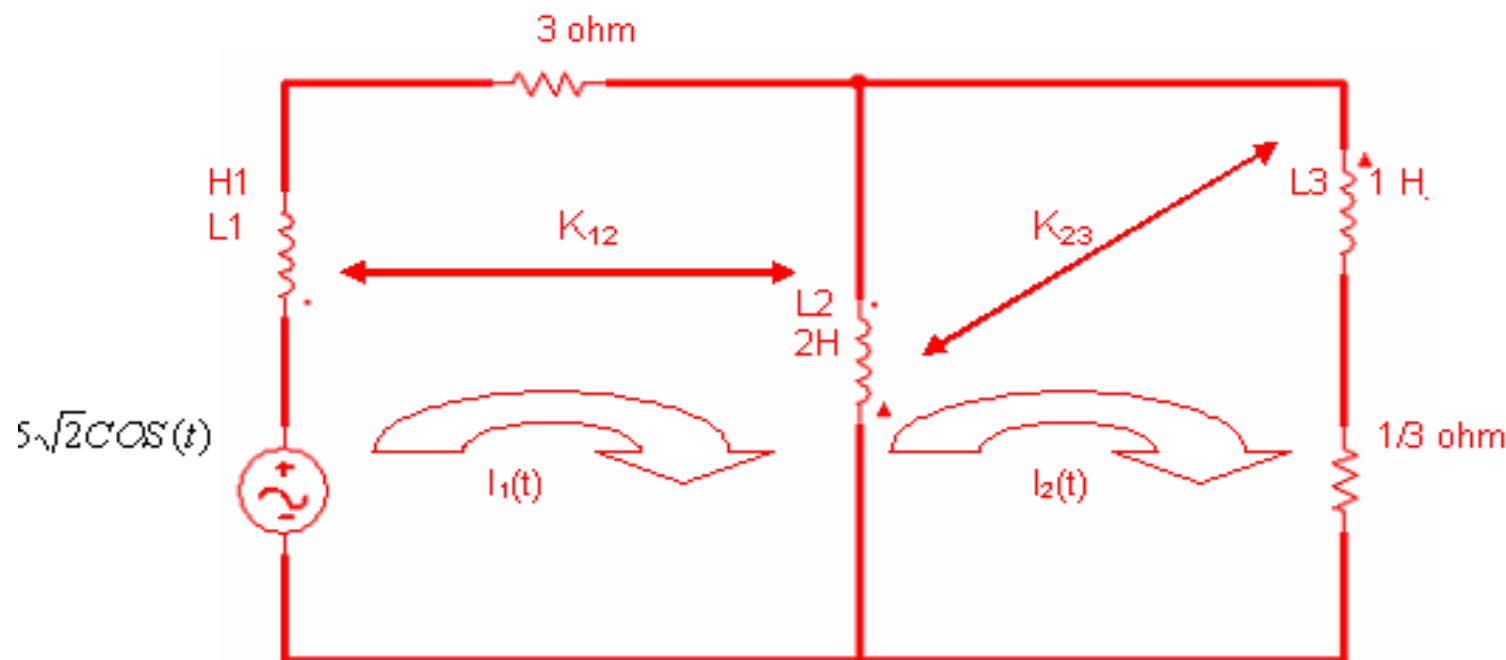
# Ejercicio

En el siguiente circuito con los datos que se indican a continuación se solicita

datos

$\bigcirc K_{12} = 0.5$

$\triangle K_{23} = 0.6$



- Respetando las marcas obtener el circuito en el dominio de la frecuencia
- Valor Fasorial de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$
- Valor de la potencia activa suministrada por la fuente
- Valor de las potencias consumidas por las resistencias presentes en el circuito equivalente con marcas

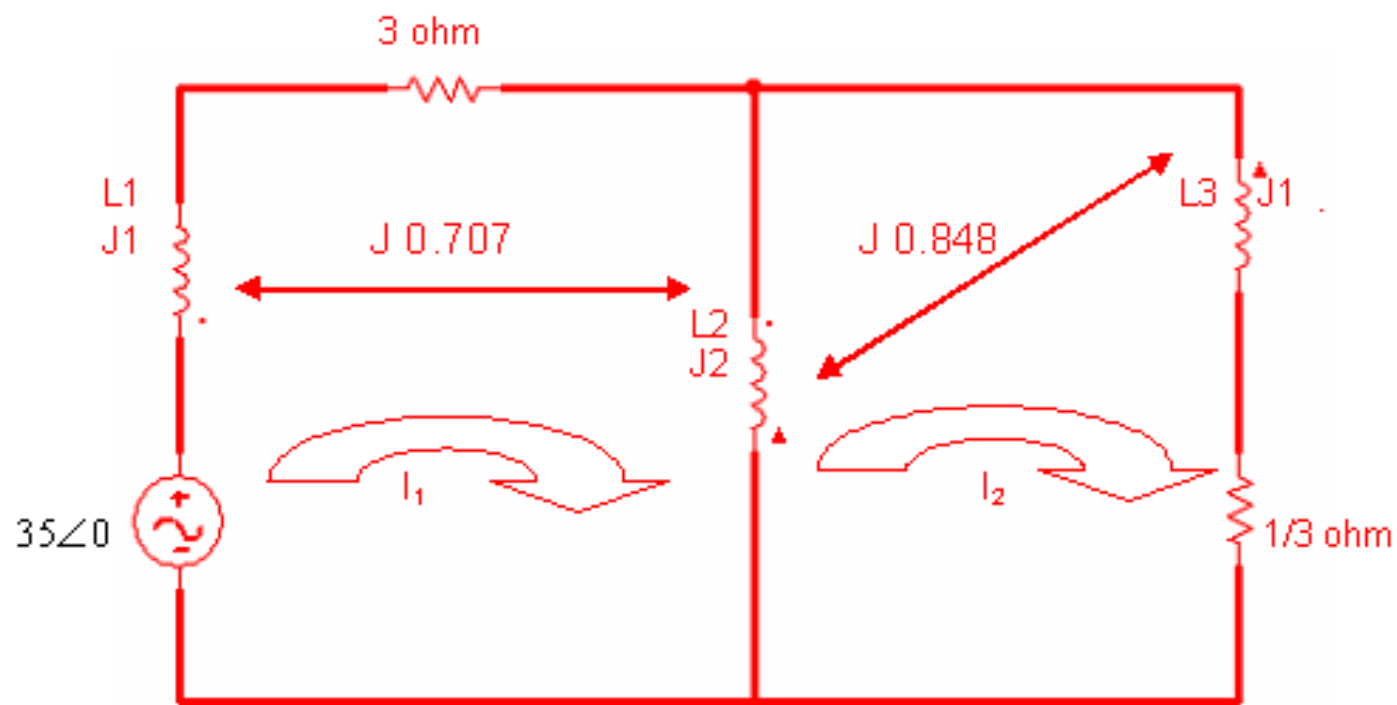
$$\bigcirc M_{12} = 0.5\sqrt{2*1} = 0.707$$

$$J_{VM12} = J\ 0.707$$

$$\triangle M_{23} = 0.6\sqrt{2*1} = 0.6\sqrt{2}$$

$$J_{VM23} = J\ 0.848$$

a)

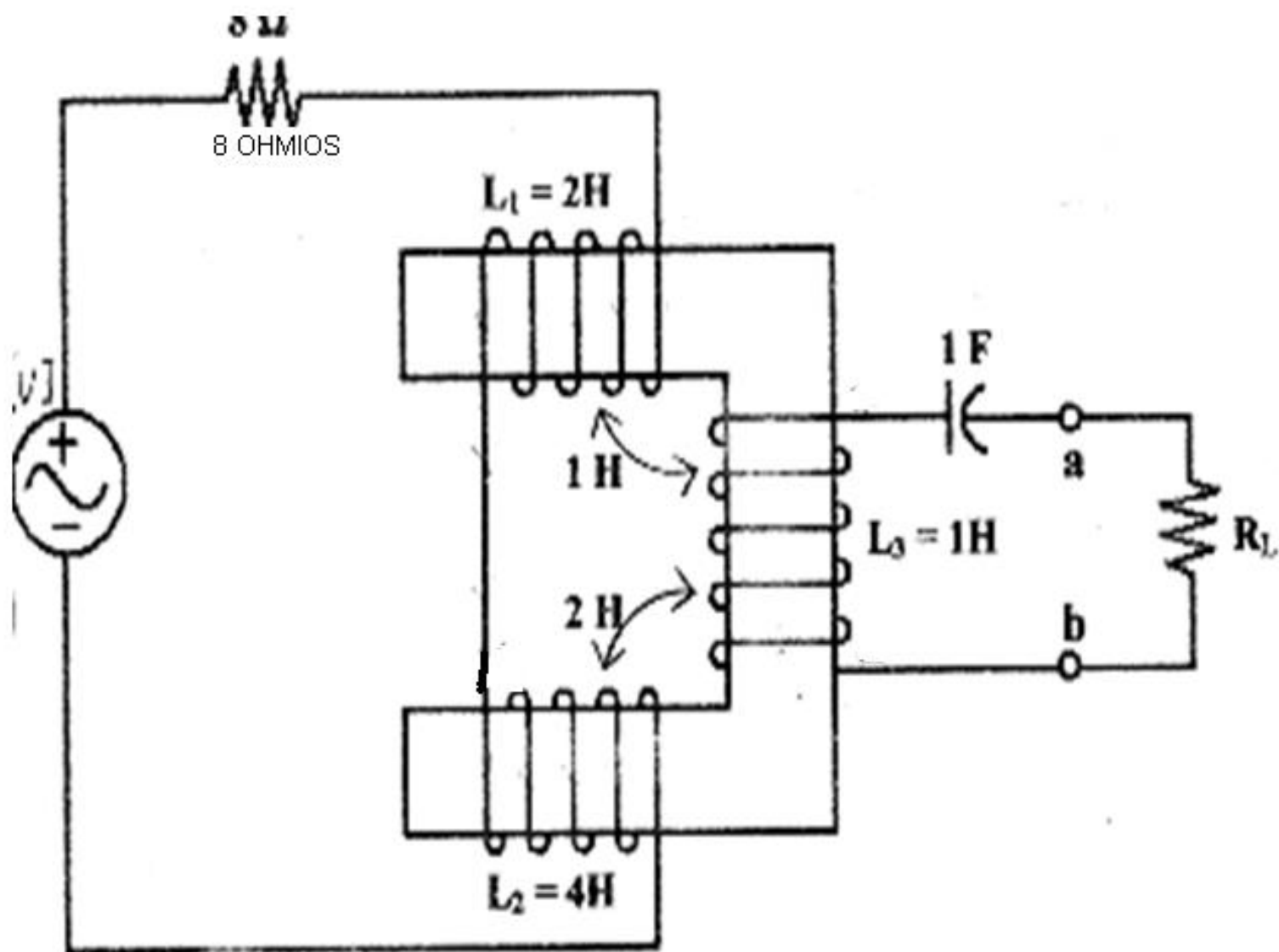


# EJEMPLO

En el circuito de la figura, las bobinas 1 y 3, y las bobinas 2 y 3 están acopladas; se desprecia el acoplamiento entre las bobinas 1 y 2.

- a) Dibuje el circuito (sin núcleo) en el dominio de la frecuencia, indicando las marcas de polaridad.
- b) Calcule el voltaje de Thévenin entre los terminales a (+) y b(-) abiertos, y luego la corriente de cortocircuito ( $I_{ccab}$ ) con los terminales a y b cortocircuitados.
- c) Determine la impedancia equivalente de Thévenin entre a y b.
- d) Determine el valor de la carga  $R_L$  para que exista máxima transferencia de potencia activa a la carga y el valor de la máxima potencia transferida.



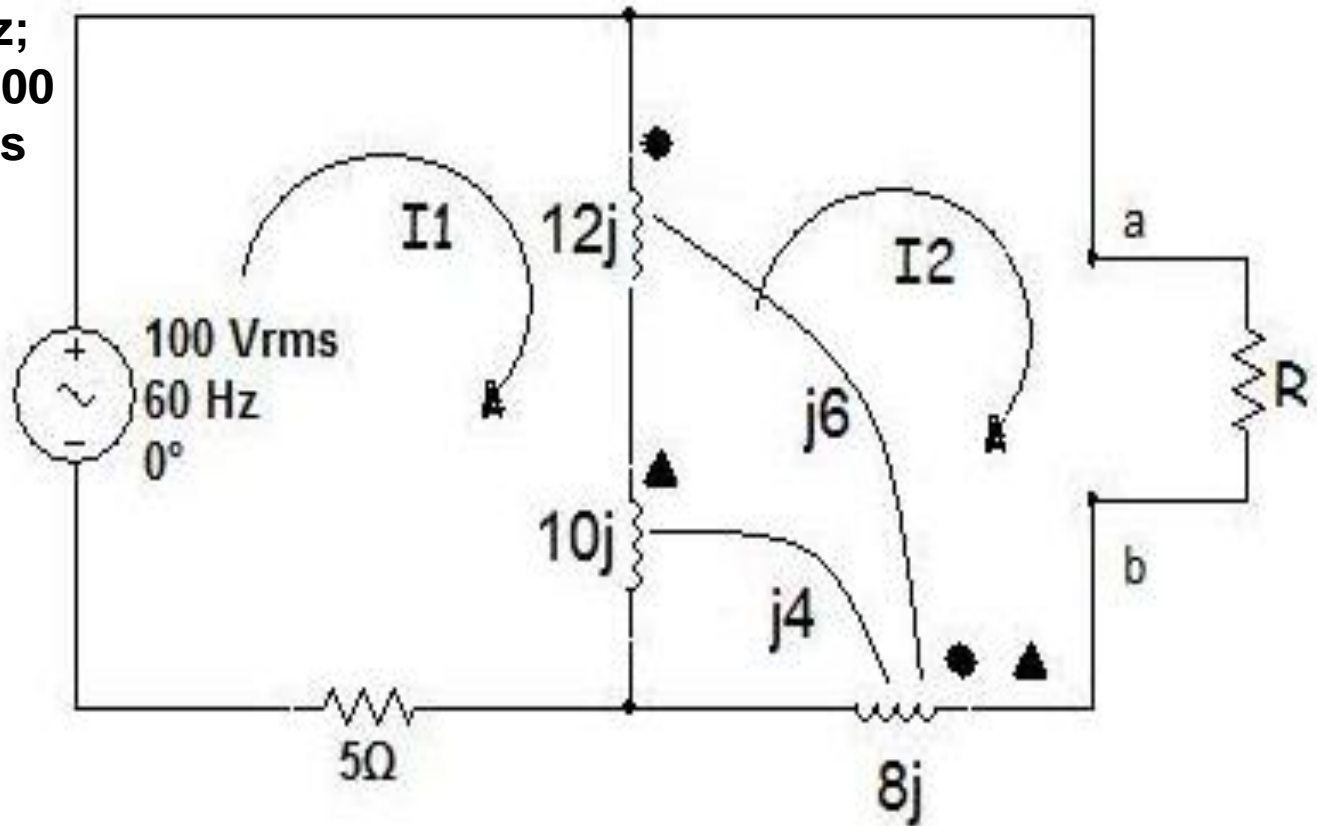


## Ejercicio

3. Para el siguiente circuito:

- a) Valor de  $R$  para que se le transfiera la máxima potencia a dicha carga
  
- b) Valor de la máxima potencia transferida

Con  $\omega = 2 \text{ rad/seg}$ ;  
 Frecuencia = 60 Hz;  
 Voltaje de fuente 100  
 Vrms a cero grados



$$I_{\text{Norton}} = 13,190 \angle -56,659 \text{ [Arms]}$$

$$Z_{\text{th}} = Z_{\text{N}} = 4,048 \angle 69,463 \text{ } [\Omega]$$

$$R_L = 4,048 \text{ } [\Omega] \quad R//$$

$$P_{\text{Max}} = 260,69 \text{ [W]} \quad R//$$