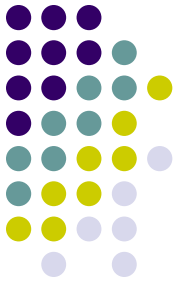


# **Análisis de Redes Eléctricas**

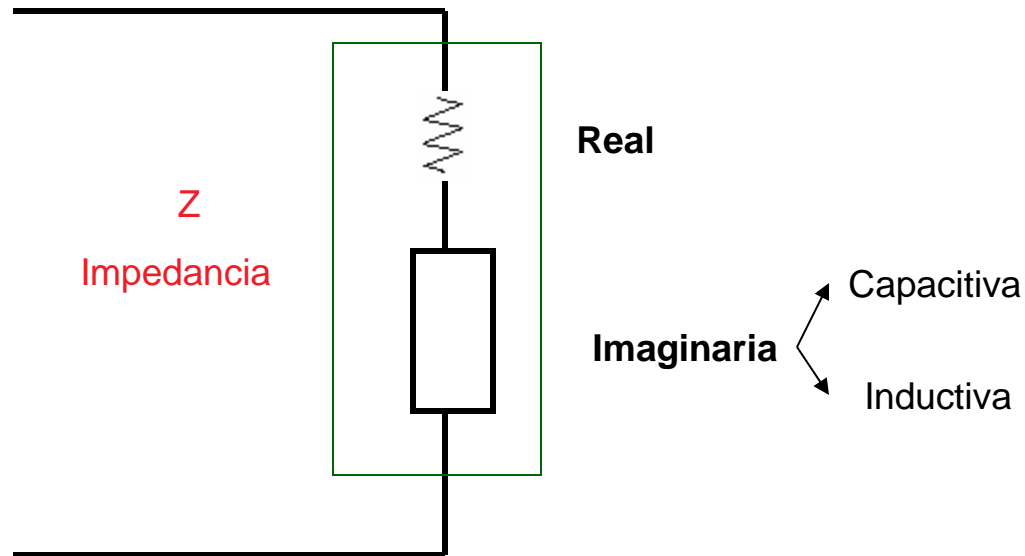
## **I**

### **2do Parcial**

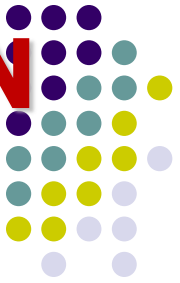
# CORRIENTE ALTERNA



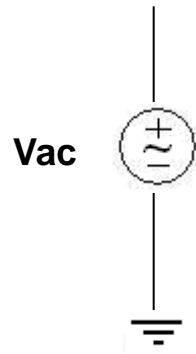
## Generalidades



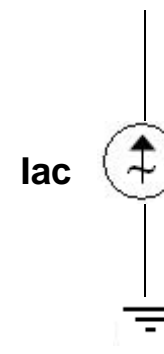
# FUENTES INDEPENDIENTES EN CORRIENTE ALTERNA



Fuente de Voltaje AC

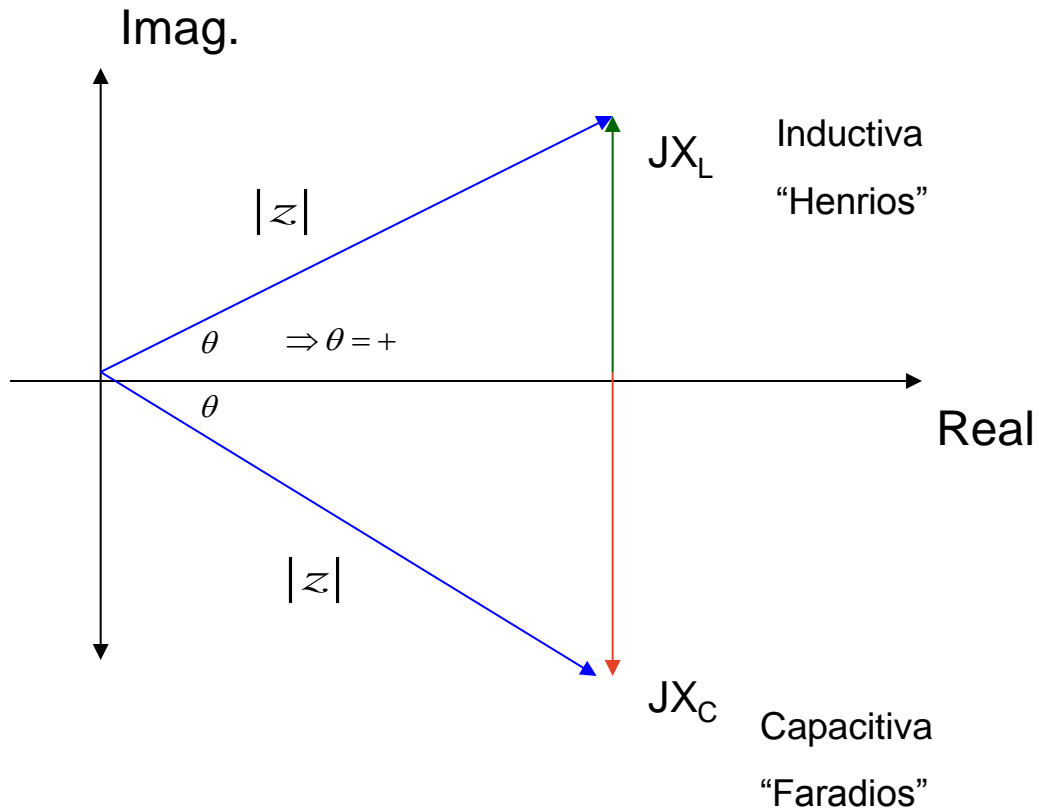
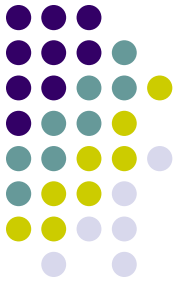


Fuente de Corriente AC



En estado estable el Capacitor se comporta como un circuito es abierto

# IMPEDANCIA



$$z = R \pm jX \begin{cases} X_L = \omega L \\ X_C = \frac{1}{\omega C} \end{cases}$$

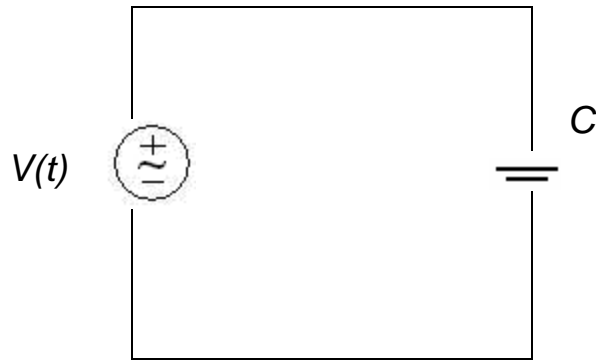
$$|z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) \begin{cases} \text{Inductiva} \Rightarrow \theta = + \\ \text{Capacitiva} \Rightarrow \theta = - \end{cases}$$

# Capacitor



Es un elemento de un circuito que consiste en dos superficies conductoras separadas por un material no conductor o dieléctrico



$$P(t) = V(t)i(t)$$

$$P(t) = V(t)c \frac{dV}{dt}$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} c V^2$$

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}$$

$$q = cV$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(cV)$$

$$i(t) = c \frac{dV}{dt}$$

$$\int dV = \frac{1}{c} \int i(t) dt$$

$$V_{Cap} = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

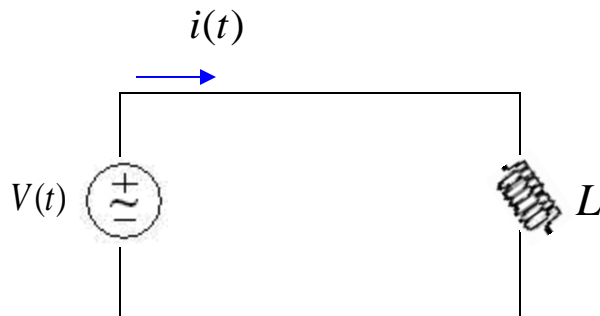
$$V_{Cap} = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t_o} i(t) dt + \frac{1}{c} \int_{t_o}^t i(t) dt$$

$$V_{Cap} = V(t_o) + \frac{1}{c} \int_{t_o}^t i(t) dt$$

# Inductor



Es una bobina que consiste en un alambre conductor de forma de rollo o carrete. Aquí nos interesa la corriente que pasa por el inductor.



$$P(t) = V(t)i(t)$$

$$P(t) = \left[ L \frac{di}{dt} \right] i(t)$$

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

$$V = L \frac{di}{dt}$$

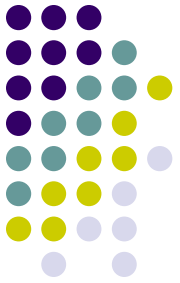
$$\int di = \frac{1}{L} \int V dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V(t) dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{to} V(to) dt + \frac{1}{L} \int_{to}^t V(t) dt$$

$$i(t) = i(to) + \frac{1}{L} \int_{to}^t V(t) dt$$

# Relación dual para:

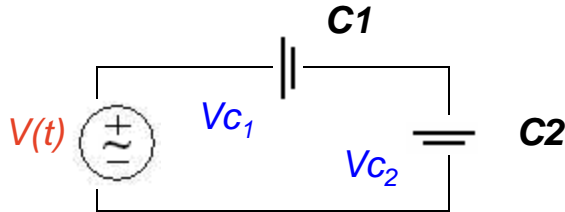


Capacitor	Inductor
$i(t) = c \frac{dV}{dt}$	$V(t) = L \frac{di}{dt}$
$V(t) = V(t_0) + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t i(t) dt$	$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(t) dt$
$P(t) = cV(t) \frac{dV}{dt}$	$P(t) = Li(t) \frac{di}{dt}$
$W = \frac{1}{2} cV^2$	$W = \frac{1}{2} Li^2$

# Combinación entre capacitores



## Serie

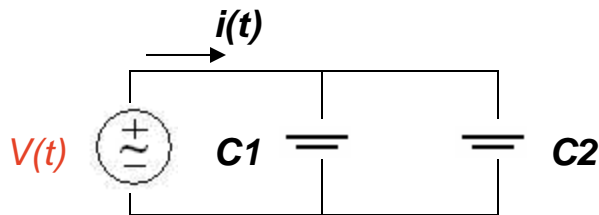


$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V(t) = V_{C1} + V_{C2}$$

$$i(t) = i_1 = i_2$$

## Paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$V(t) = V_1 = V_2$$

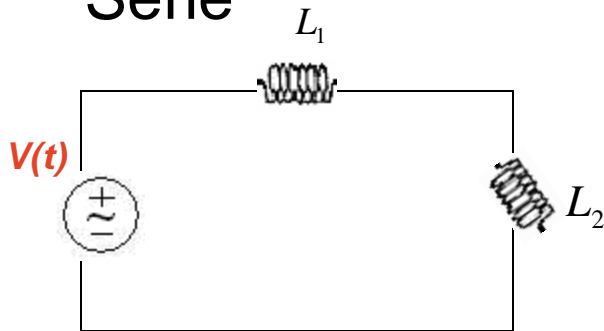
$$i(t) = i_1 + i_2$$



# Combinación entre bobinas



Serie

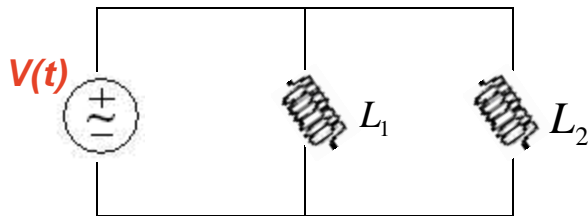


$$\underline{L_{eq} = L_1 + L_2}$$

$$\underline{i(t) = i_1 = i_2}$$

$$\underline{V(t) = V_{L1} + V_{L2}}$$

Paralelo



$$\underline{L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}$$

$$\underline{V(t) = V_1 = V_2}$$

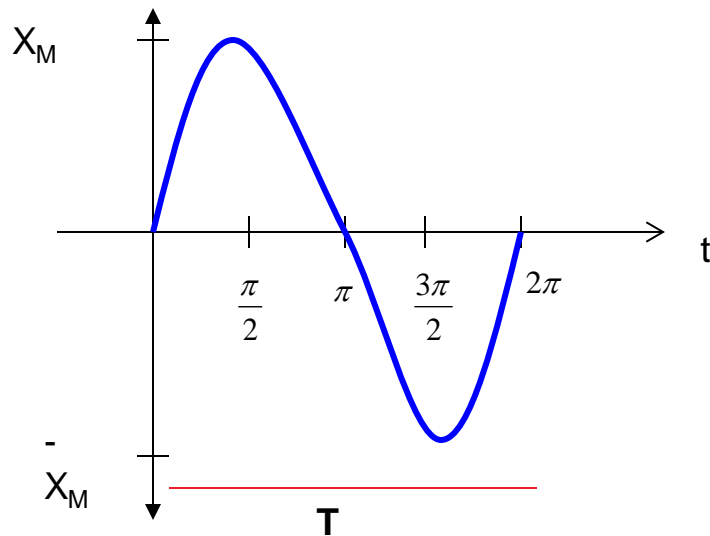
$$\underline{i(t) = i_{L1} + i_{L2}}$$



# **Análisis de Corriente Alterna en Estado Estable**

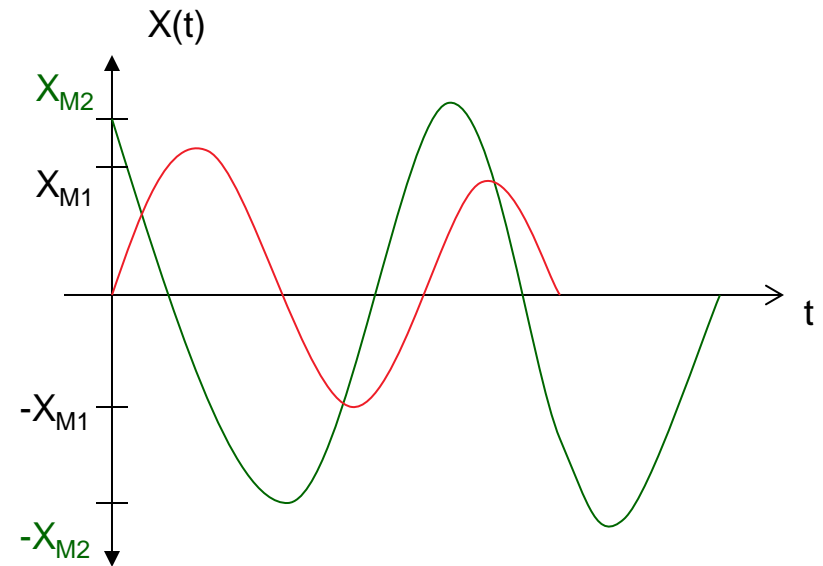


# Senoidales



$$T = \text{Período(seg)} = \frac{1}{f} \text{ donde } f = \text{frecuencia}$$

$$W = \text{Velocidad Angular} = 2\pi f [\text{rad / seg}]$$

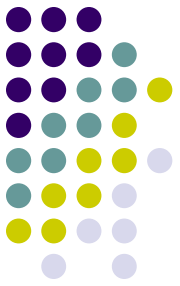


$$X_1(t) = X_{M1} \cdot \text{sen } \omega t$$

$$X_2(t) = X_{M2} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$$

$\phi \rightarrow \text{ángulo} - \text{desfasamiento}$

# Condiciones para que dos señales estén en fase



Existen 3 condiciones para que dos señales estén en fase:

- Las dos ondas alternen la misma frecuencia.
- Que las dos ondas sean bien senos o bien cosenos.
- Que las dos ondas estén determinadas como positivas.

# Ejemplo 1



$$V_1(t) = 100\cos(377t - 40^\circ)$$

$$V_2(t) = 60\cos(377t - 90^\circ)$$

Si la alimentación no tiene la misma frecuencia, para resolver el problema se debería utilizar el método de superposición

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = -40 - (-90) = 50^\circ$$

$V_1(t)$  se adelantará  $50^\circ$  a  $V_2(t)$

$V_2(t)$  se atrasa  $50^\circ$  a  $V_1(t)$

Ejm. 2

$$I_1(t) = 12\text{sen}(1000t + 60)$$

$$I_2(t) = -6\cos(1000t + 30)$$

Primero vamos hacer  $I_2$  positiva

$$I_2(t) = -6\cos(1000t + 30 + 180)$$

$$I_2(t) = 6\cos(1000t + 210^\circ)$$



Ahora lo llevamos a senos.

$$I_2(t) = 6\text{sen}(1000t + 210 + 90^\circ)$$

$$I_2(t) = 6\text{sen}(1000t + 300^\circ)[A]$$

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 60 - 300 = -240^\circ$$

Ahora es mejor tener el ángulo positivo

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

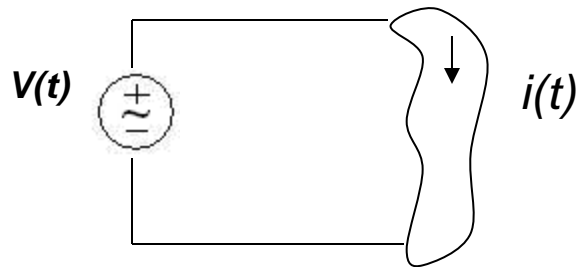
$I_1(t)$  se adelantará  $120^\circ$  a  $I_2(t)$

$I_2(t)$  se atrasa  $120^\circ$  a  $I_1(t)$

# Funciones forzantes senoidales

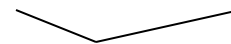


Si aplicamos una función forzante senoidal a una red lineal los voltajes y corrientes de estado estable en la red también serán senoidales, es decir, si un voltaje de rama es una senoide de alguna frecuencia los otros voltajes de rama deben ser también senoides de la misma frecuencia.



$$V(t) = A \text{sen}(\omega t + \theta) [V]$$

$$i(t) = \beta \text{sen}(\omega t + \phi) [A]$$

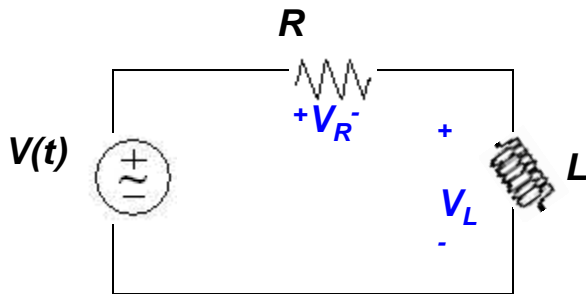


No conocemos



Ejm.

Encontrar una expresión para  $i(t)$



$$V(t) = V_m \cos \omega t$$

LVK :

$$V(t) = V_R + V_L$$

$$V_R = IR$$

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$V_m \cos \omega t = IR + L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left[ \omega t - \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right] [A]$$

---



# Ecuación de Euler



$$e^{J\omega t} = \cos \omega t + J \sin \omega t$$

$$V(t) = V_m e^{J\omega t}$$

$$V(t) = \underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Parte real}} + \underbrace{JV_m \sin \omega t}_{\text{Parte imaginaria}}$$

$$e^{J\phi} = \cos \phi + J \sin \phi$$

$$i(t) = I_M e^{J(\omega t + \phi)}$$

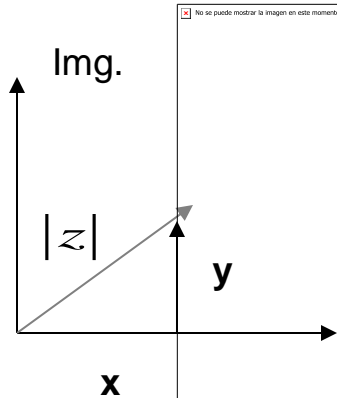
$$i(t) = \underbrace{I_M \cos(\omega t + \phi)}_{\text{Parte real}} + \underbrace{JI_M \sin(\omega t + \phi)}_{\text{Parte imaginaria}}$$

Parte real

Parte imaginaria



# Números Complejos



•Rectangular:  $x + jy$

•Polar  $\begin{cases} \text{Magnitud} & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{Ángulo} & \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$

$$\bar{z} = |z| \angle \theta$$

Para convertir de polar a rectangular

$$z \cos \theta = x \quad (\text{Real})$$

$$z \sin \theta = y \quad (\text{Imaginarios})$$

•Para sumar o restar deben estar en rectangulares.

•Para multiplicar o dividir deben estar en polares

$$(z_1 \angle \theta_1)(z_2 \angle \theta_2) = z_1 z_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{(z_1 \angle \theta_1)}{(z_2 \angle \theta_2)} = \frac{z_1}{z_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$



Dominio del tiempo	Dominio de la Frecuencia
$A \cos(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta$
$A \text{sen}(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta - \frac{\pi}{2}$

Convertir a fasores

$$v(t) = 24 \cos(377t - 45^\circ) [V]$$

$$i(t) = 12 \text{sen}(377t + 120) [A]$$

$$\bar{V} = 24 \angle -45^\circ$$

$$\bar{I} = 12 \angle 120^\circ - 90^\circ$$

# Ejemplo



Convertir los fasores:

$$\bar{V} = 16\angle 20^\circ$$

$$\bar{I} = 10\angle -75^\circ$$

del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo si la frecuencia es de 1k Hz.

$$v(t) = 16 \cos(2000\pi t + 20^\circ)$$

$$i(t) = 10 \cos(2000\pi t - 75^\circ)$$

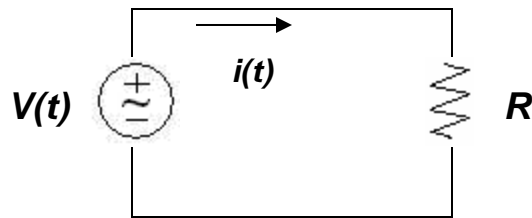
$$\omega = 1\text{kHz}(2\pi)$$

$$\omega = 2000\pi$$

# Relaciones fasoriales para elementos del circuito.



## •Circuito Resistivo Puro



$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = V_m e^{J(\omega t + \phi)}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha) = I_m e^{J(\omega t + \alpha)}$$

$$V(t) = Ri(t)$$

$$V_m e^{J(\omega t + \phi)} = RI_m e^{J(\omega t + \alpha)}$$

$$V_m e^{J\phi} = RI_m e^{J\alpha}$$

$$V_m \angle \phi = RI_m \angle \alpha$$

Fasor  
Voltaje

Fasor  
Corriente

Pero en corriente alterna la impedancia:

$$\bar{z} = \text{Real} + \text{Imag} \quad \nearrow 0$$

$$\bar{z} = R + 0J$$

$$\bar{z} = R \angle 0^\circ$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

$$z \angle \theta \Rightarrow \frac{\bar{V} \angle \phi}{I \angle \alpha}$$

$$\phi = \alpha$$

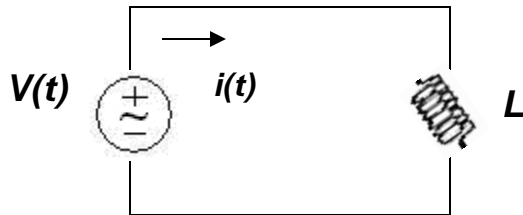
$\Rightarrow$  Voltaje y la corriente  
están en fase

$$\bar{V} = IR$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R$$



# Circuito Inductivo Puro



$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$V_m e^{J(\omega t + \phi)} = L I_m \frac{d}{dt} e^{J(\omega t + \alpha)}$$

$$V_m e^{J(\omega t + \phi)} = J L I_m \omega \left[ e^{J(\omega t + \alpha)} \right]$$

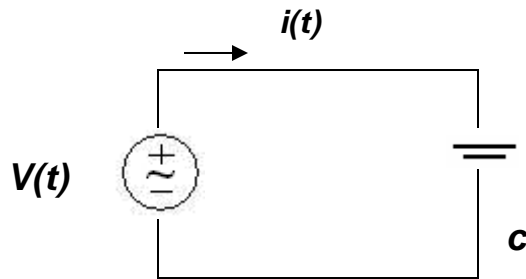
$$V_m e^{J\phi} = J \omega L \left[ I_m e^{J\alpha} \right]$$

$$V_m \angle \phi = J \omega L I_m \angle \alpha$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = J \omega L \therefore X_L = \omega L$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \cancel{\text{Real}} + \cancel{\text{Imag}} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \nearrow X_L \text{ (Reactancia inductiva)} \end{matrix} \\ \bar{z} &= 0 + J X_L \\ \bar{z} &= X_L \angle 90^\circ [\Omega] \end{aligned}$$

# Circuito Capacitivo Puro



$$i(t) = c \frac{dV}{dt}$$

$$I_m e^{J(\omega t + \alpha)} = c \frac{d}{dt} [V_m e^{J(\omega t + \phi)}]$$

$$I_m e^{J(\omega t + \alpha)} = Jc\omega V_m [e^{J(\omega t + \phi)}]$$

$$I_m e^{J\alpha} = J\omega c V_m e^{J\phi}$$

$$I_m \angle \alpha = J\omega c V_m \angle \phi$$

$$\bar{I} = J\omega c \bar{V}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{1}{J\omega c} \therefore X_c = -\frac{J}{\omega c}$$

$$\bar{z} = \text{Real} + \text{Imag}$$

$X_c$  (Reactancia capativa)

$$\bar{z} = 0 - \frac{J}{\omega c}$$

$$\bar{z} = X_c \angle -90^\circ [\Omega]$$

# Ejemplo



$$* R = 3\Omega$$

$$z_R = R \angle 0^\circ$$

$$z_R = 3 \angle 0^\circ$$

---

$$* \omega = 1000$$

$$L = 5mH$$

$$z_L = j\omega L$$

$$z_L = j(1000)(5mH)$$

$$z_L = j5$$

$$z_L = X_L \angle 90^\circ$$

$$z_L = 5 \angle 90^\circ$$

---

$$* \omega = 1000$$

$$C = 125\mu F$$

$$z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$z_C = -\frac{j}{(1000)(125\mu F)}$$

$$z_C = -8j$$

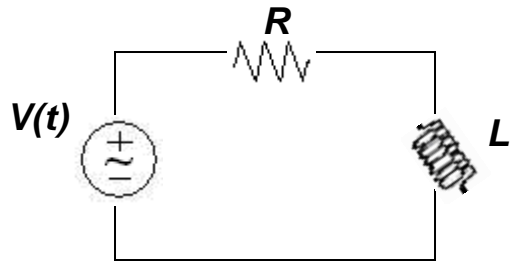
$$z_C = X_C \angle -90^\circ$$

$$z_C = 8 \angle -90^\circ$$

---



# Circuito R-L



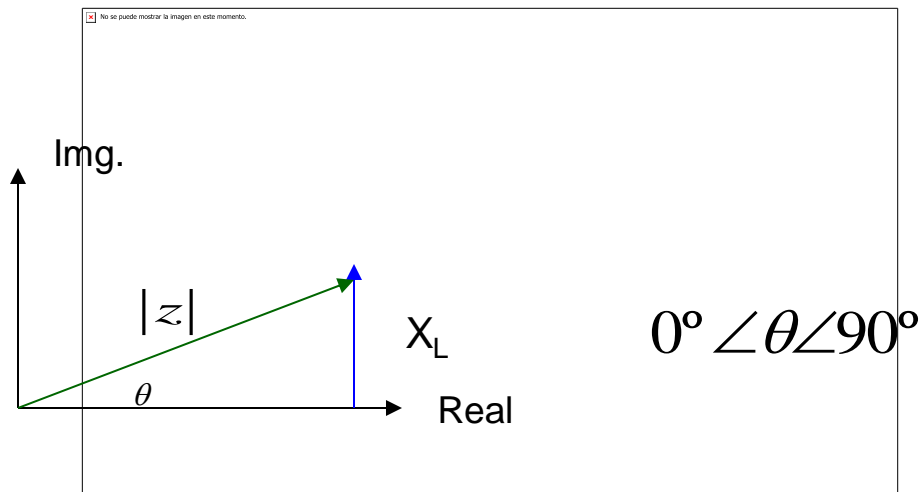
$$\begin{aligned}\bar{z} &= \bar{z}_R + \bar{z}_L \\ \bar{z} &= R + jX_L\end{aligned}$$

$$\theta = \angle \phi - \angle \alpha$$

$$\theta = \angle V - \angle I$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$$



# Ejemplo

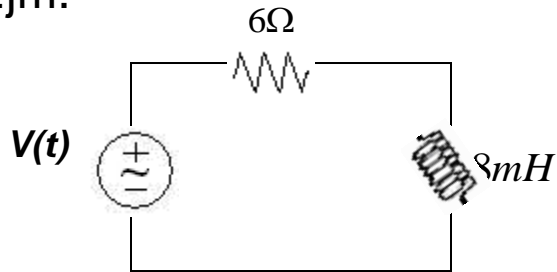


$$* \bar{z} = 10 \angle 45^\circ$$

$$x = 10 \cos 45^\circ$$

$$y = 10 \operatorname{sen} 45^\circ$$

Ejm.



$$V(t) = 200 \cos(1000t + 30^\circ)$$

$$i(t) = ?$$

$$X_L = j\omega L$$

$$X_L = j(8mH)(1000)$$

$$X_L = j8$$

$$z = \operatorname{Real} + \operatorname{Imag}$$

$$z = 6 + j8$$

$$\bar{z} = 10 \angle 53.13^\circ$$

$$\bar{V} = 200 \angle 30^\circ$$

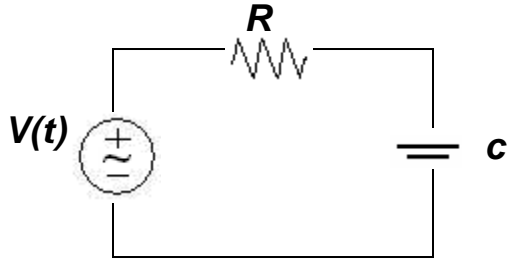
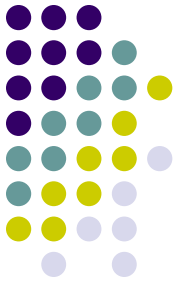
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{z}$$

$$\bar{I} = \frac{200 \angle 30^\circ}{10 \angle 53^\circ}$$

$$\bar{I} = 20 \angle -23.13^\circ [A]$$

$$\underline{i(t) = 20 \cos(1000t - 23.13^\circ) [A]}$$

# Circuito R-C



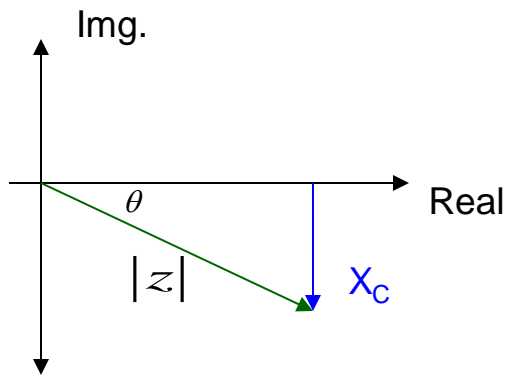
$$z = R + jX$$

$$\underline{z = R - jX_c \therefore X_c = \frac{1}{\omega c}}$$

$$\underline{|z| = \sqrt{R^2 + X_c^2}}$$

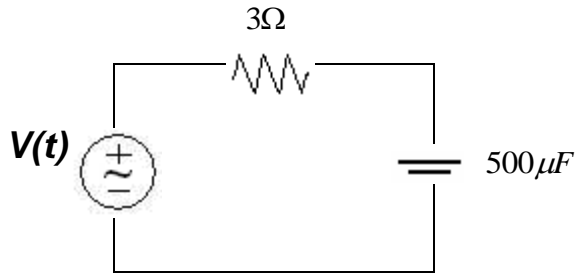
$$\underline{\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{X_c}{R}\right)}$$

$$\underline{\bar{z} = |z| \angle -\theta}$$



$$-90^\circ \angle \theta \angle 0^\circ$$

# Ejemplo



$$V(t) = 160 \cos(500t + 30^\circ) [V]$$

$$i(t) = ?$$

$$z = R + jX$$

$$z = R - \frac{j}{\omega C}$$

$$z = 3 - j4$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{(500)(500 \cdot 10^{-6})}$$

$$X_C = 4$$

$$|z| = \sqrt{9 + 16}$$

$$|z| = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\theta = -53.13^\circ$$

$$\bar{z} = 5 \angle -53.13^\circ$$

$$\bar{V} = 160 \angle 30^\circ$$

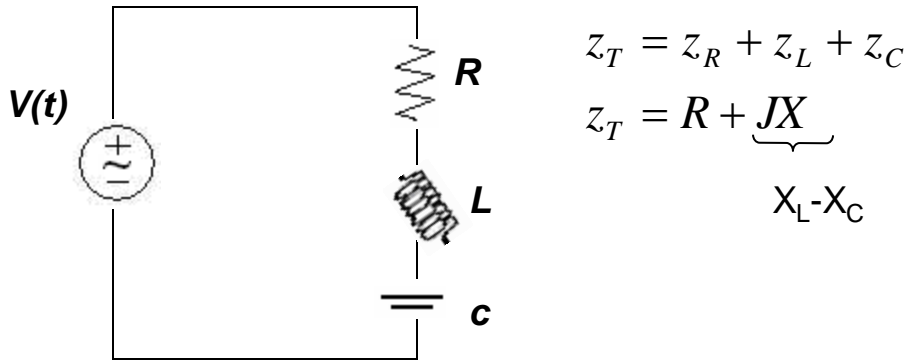
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{z}}$$

$$\bar{I} = \frac{160 \angle 30^\circ}{5 \angle -53.13^\circ}$$

$$\bar{I} = 32 \angle 83.13^\circ$$

$$\underline{i(t) = 32 \cos(500t + 83.13^\circ) [A]}$$

# Circuito R-L-C



1.- $X_L > X_C$ ; predominantemente inductivo

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

La corriente atrasa  $\theta$  al voltaje

2.- $X_L < X_C$ ; predominantemente capacitivo.

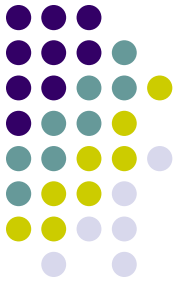
$$-90^\circ < \theta < 0^\circ$$

La corriente adelanta  $\theta$  al voltaje

3.- $X_L = X_C$ ; el circuito entra a resonancia

$$\theta = 0^\circ$$

La corriente y el voltaje están en fase



# Ejemplo



Con :

$$R = 8\Omega$$

$$L = 10mH$$

$$C = 250\mu F$$

$$V(t) = 120\cos 1000t$$

$$i(t) = ?$$

$$X_L = j(10^3)(10 \cdot 10^{-3}) = j10$$

$$X_C = -\frac{j}{(10^3)(250 \cdot 10^{-6})} = -j4$$

$$Z = R + jX$$

$$Z = 8 + j(10 - 4)$$

$$Z = 8 + j6$$

$$\bar{Z} = 10 \angle 36.87^\circ$$

$$\bar{V} = 120 \angle 0^\circ$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$$

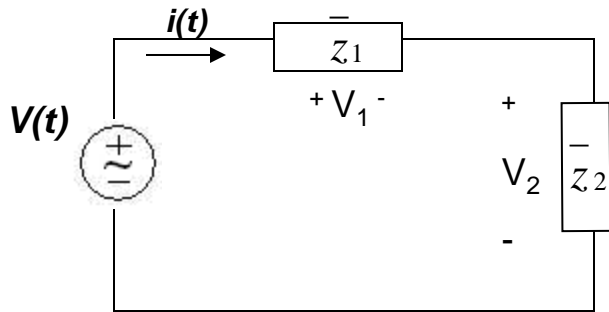
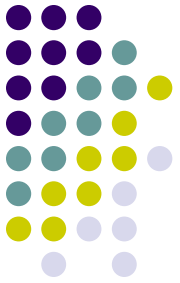
$$\bar{I} = \left( \frac{10 \angle 36.87^\circ}{120 \angle 0^\circ} \right)^{-1}$$

$$\bar{I} = 12 \angle -36.87^\circ$$

$$i(t) = 12 \cos(1000t - 36.87^\circ) [A]$$

---

# Circuitos de una sola malla



$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \rightarrow \text{Suma fasorial}$$

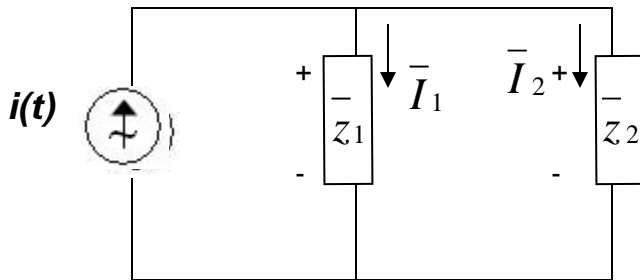
*Divisor – de – voltaje*

$$\bar{V}_2 = \bar{V} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V} \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

- Circuitos de un solo par de nodos



$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

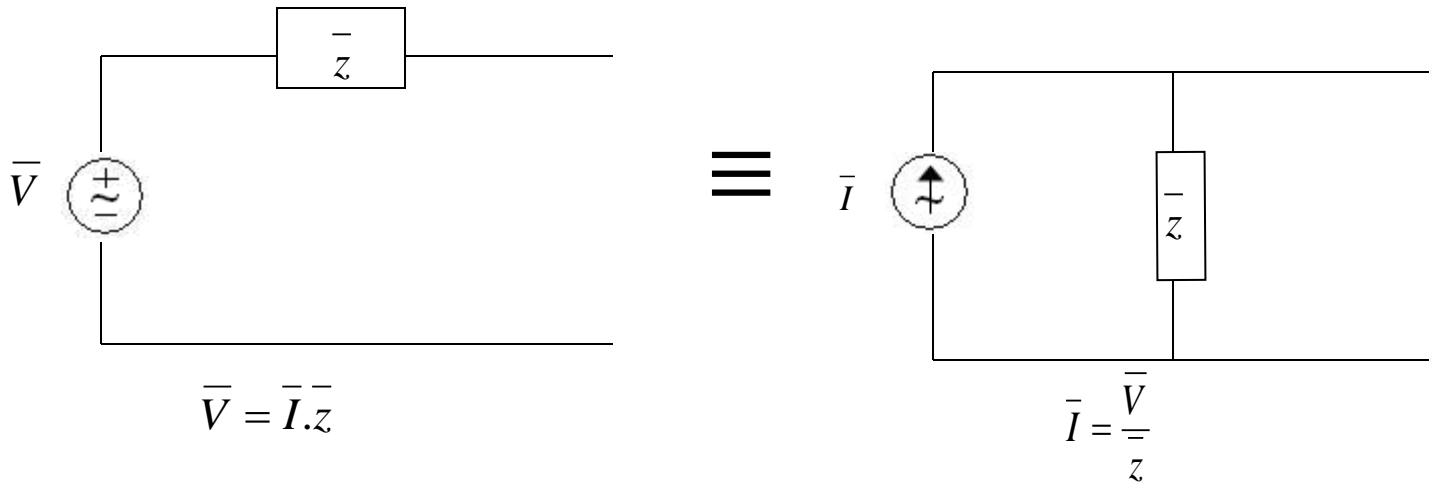
$$\bar{V} = \bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

*Divisor – de – Corriente*

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I} \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$$

# Transformación de Fuentes



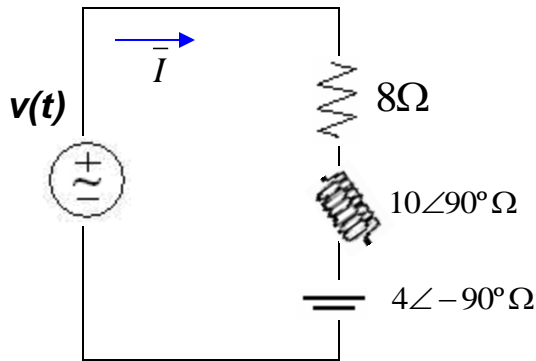
**Además se asume que varias fuentes de corriente conectadas en paralelo se suman fasorialmente (deben alternar la misma frecuencia); también se cumple que varias fuentes de voltaje conectadas en serie se suman fasorialmente.**



# Diagramas Fasoriales



Se conoce con este nombre a los diagramas donde se muestran los diversos fasores de la red. El fasor es un vector en movimiento por lo tanto no mantiene una magnitud rígida.



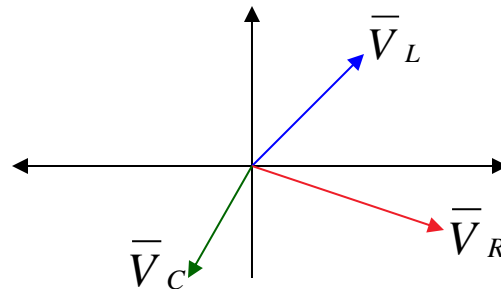
$$v(t) = 120 \cos 1000 t [V]$$

$$\bar{I} = 12 \angle -36.87 [A]$$

$$\bar{V}_R = \bar{I} * \bar{Z}_R = 12 \angle -36.87 (8 \angle 0^\circ) = 96 \angle -36.87^\circ [V]$$

$$\bar{V}_L = \bar{I} * \bar{Z}_L = 12 \angle -36.87 (10 \angle 90^\circ) = 120 \angle 53.13^\circ [V]$$

$$\bar{V}_C = \bar{I} * \bar{Z}_C = 12 \angle -36.87 (4 \angle -90^\circ) = 48 \angle -126.87^\circ [V]$$



# Pasar de una red del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia



1.- En lo que respecta a las fuentes independientes ya sean éstas de voltaje o de corriente deben expresarse por medio de sus expresiones fasoriales. A partir de este momento, el fasor o la magnitud del fasor debe estar en RMS(valores eficaces) es decir:

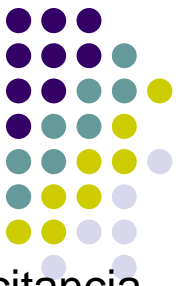
$$V_{RMS} = \frac{V_{MÁX}}{\sqrt{2}}$$



Ejm:

$$V(t) = \underbrace{120\sqrt{2}}_{V_{MÁX}} \cos(1000t + 30^\circ) [V]$$

$$\bar{V} = 120 \angle 30^\circ [V_{RMS}]$$



**2.-** Los elementos pasivos de la red tales como: resistencia, inductancia y capacitancia son representados por sus valores de impedancia o admitancia, según se aplique el método de las mallas o el método de los nodos respectivamente.

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}$$

Fuentes indep. de voltaje	Variables del método	Matriz impedancia
------------------------------	-------------------------	----------------------

$$\mathbf{I} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Y}$$

Fuentes indep. de corriente	Variables del método	Matriz admitancia
--------------------------------	-------------------------	----------------------

**3.-** Las variables de control de las fuentes dependientes se las representa también por medio de sus fasores de voltaje o corriente según sea el caso de la variable de control.

