Intro al Modelado Continuo
Guia de Ejercicios

WM

Contents

Chapter 1

Guia 1

Ejercicio

1. Un médico forense es llamado a la escena de un asesinato. La temperatura del cuerpo al momento de hallarlo es de 24°C y una hora más tarde la temperatura cayó a 21°C. Si la temperatura en el cuarto en la que el cuerpo fue encontrado estuvo constantemente a 20°C, ¿cuánto tiempo pasó desde el asesinato hasta que el cuerpo fue hayado? Suponer que el cuerpo obedece la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_R)$$

donde T es la temperatura del cuerpo, β es una constante y T_R es la temperatura del cuarto.

Solucion ejercicio 1:

$$\begin{cases} T' = \beta(T - T_R) \\ T(0) = T_i, T(t_h) = 24, T(t_h + 1) = 21, \end{cases}$$

siendo $T(0)$ la temperatura del cuerpo al momento del asesinato y t_h el tiempo que paso hasta ser hallado.

$$\frac{1}{\beta}\log(T - T_R) = t + c$$

Usamos los datos iniciales que tenemos:

$$\begin{cases} \log(4) = t_h\beta + c \\ 0 = (t_h + 1)\beta + c \end{cases}$$

Restando, queda lo siguiente:

$$-\log(4) = \beta$$

Ademas:

$$c = \log(T_i - T_R)\frac{1}{-\log(4)}$$

Juntando todo:

$$t_h = \frac{\log(4) - c}{\beta},$$

expresion que depende de c, β, T_R (valores que ya conocemos), y T_i (valor desconocido pero que podria estimarse).

☺

Ejercicio

2. La ecuación diferencial usada para modelar la concentración de glucosa en sagre, digamos $g(t)$ cuando se administra por vía intravenosa en el cuerpo es dada por

$$\frac{dg}{dt} + kg = \frac{G}{100V},$$

donde k es una constante, G es la tasa a la cual la glucosa es administrada y V es el volumen de la $s$angre en el cuerpo.
Resolver la ecuación diferencial y discutir los resultados obtenidos.

Solucion ejercicio 2:

$$g' + kg = \frac{G}{100V}$$

Uso factor integrante e^{kt}.

$$\begin{aligned}
e^{kt}(g' + kg) &= e^{kt}\frac{G}{100V} \\
(g(t)e^{kt})' &= e^{kt}\frac{G}{100V} \\
ge^{kt} &= \frac{G}{100Vk}e^{kt} + c \\
g(t) &= \frac{G}{100Vk} + ce^{-kt}
\end{aligned}$$

😄

Ejercicio

3. Dos tanques A y B, ambos con volumen V, están llenos con agua a tiempo $t = 0$. Para $t > 0$, una solución de volumen v conteniendo un soluto de masa m fluye hacia el tanque A por segundo; la mezcla fluye del tanque A al tanque B a la misma tasa; y la mezcla resultante fluye hacia afuera del tanque B a la misma tasa. La ecuación diferencial usada para modelar este sistema viene dada por

$$\frac{d\sigma_A}{dt} + \frac{v}{V}\sigma_A = \frac{m}{V}, \quad \frac{d\sigma_B}{dt} + \frac{v}{V}\sigma_B = \frac{v}{V}\sigma_A,$$

donde $\sigma_{A,B}$ son las concentraciones del soluto en los tanques A y B respectivamente. Mostrar que la masa del soluto en el tanque B viene dada por

$$\frac{mV}{v}\left(1 - e^{-vt/V}\right) - mte^{-vt/V}$$

Solucion ejercicio 3:

Empezamos resolviendo la primera ecuacion diferencial:

$$\sigma_A' + \frac{v}{V}\sigma_A = \frac{m}{V} \iff \sigma_A(t) = \frac{m}{v} + ce^{-vt/V}$$

Usando la condicion inicial de que la concentracion en $t_0 = 0$, queda que

$$\sigma_A(t) = \frac{m}{v} - \frac{m}{v}e^{-vt/V}$$

Pasamos a la segunda ecuacion, reemplazando la incognita σ_A por el valor encontrado:

$$\sigma_B' + \frac{v}{V}\sigma_B = \frac{m}{V}(1 - e^{-vt/V})$$

Factor integrante $e^{vt/V}$.

$$\sigma_B(t)e^{vt/V} = \frac{m}{v}e^{vt/V} - \frac{mt}{V} + c\frac{m}{V}$$
$$\sigma_B(t) = \frac{m}{v} - \frac{mt}{V}e^{-vt/V} + c\frac{m}{V}e^{-vt/V}$$
$$c = -\frac{V}{v}$$

Multiplicando todo por V:

$$m_B(t) = \frac{mV}{v}(1 - e^{-vt/V}) - mte^{-vt/V}$$

☺

Ejercicio

5. En un estudio experimental de dinámica poblacional de crustáceos (*Daphnia Magna*) de 1963 los autores encontraron que sus mediciones no coincidían con las predicciones del modelo logístico. Usando la variable M (la masa de la población) como un indicador de su tamaño, los autores propusieron el modelo

$$\dot{M} = rM\left(\frac{K-M}{K+aM}\right),$$

donde r, K y a son constantes positivas. Hallar los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad.

Solucion ejercicio 5:

Sabemos que los puntos de equilibrio se encuentran igualando el campo vectorial al vector nulo ($\vec{0}$):

$$rM(\frac{K-M}{K+aM}) = \vec{0} \iff M = K, M = 0$$
$$\frac{d}{dM}f = -\frac{aM^2 + 2KM - K^2}{(aM+K)^2}$$

Evaluamos esta expresion en los puntos de equilibrio obtenidos:

$$f'(K) = -\frac{a+1}{(a+1)^2} = -\frac{1}{a+1} < 0$$
$$f'(0) = 1 > 0$$

Por lo tanto, $M = K$ es un punto estable y $M = 0$ es inestable.

☺

Ejercicio

6. Una reacción química simple se describe como

$$A + B \xrightarrow{k} C$$

lo que indica que los reactantes A y B se combinan para producir C a una tasa k Para modelar reacciones químicas se puede usar la $Ley\ de$ acción $de\ masa$. La misma dice:
Ley de acción de masa: La tasa de cambio de una reacción química elemental es proporcional al producto de las concentraciones de los reactantes.
Escribir las ecuaciones diferenciales que modelan las siguientes reacciones y resolverlas analíticamente o con la ayuda de la computadora.

$$A + B \xrightharpoonup{k} C, \quad A + B \overset{k_1}{\rightleftharpoons} C, \quad S + E \overset{k_1}{\rightleftharpoons} C \quad \text{y} \quad C \xrightharpoonup{k_2} P + E.$$

Solucion ejercicio 6:

Hago el primero:

$$\begin{cases} C'(t) = kAB \\ B(0) = B_0 \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

Ademas, la concentracion $A(t)$ esta dada por la diferencia entre la concentracion inicial A_0 y la concentracion en el instante t de C (idem para $B(t)$):

$$C' = k(A_0 - C)(B_0 - C)$$
$$\frac{C'}{(A_0 - C)(B_0 - C)} = k$$
$$\frac{C't}{A_0 - C} + \frac{C's}{B_0 - C} = k$$

Busco s, t tal que $s(A_0 - C) + t(B_0 - C) = 1$.

$$sA_0 + tB_0 - C(s + t) = 1 \implies s = \frac{1}{A_0 - B_0}, t = \frac{-1}{A_0 - B_0}$$

Queda lo siguiente:

$$\frac{\log(A_0 - C)}{A_0 - B_0} - \frac{\log(B_0 - C)}{A_0 - B_0} = kt + c$$
$$(\frac{A_0 - C}{B_0 - C})^{-A_0 - B_0} = e^{kt + c},$$

con $c = (\frac{A_0}{B_0})^{-(A_0 + B_0)}$.

😆

Ejercicio

7. Un oscilador mecánico simple puede ser modelado usandø la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + 25x = 0$$

donde x mide el desplazamiento del equilibrio.
1. Reescribir la ecuación como un sistema lineal de primer orden.
2. Esbozar un diagrama de fases para los valores $\mu = -8, \mu = 8$ y $\mu = 26$.
3. Describir el comportamiento dinámico en cada caso supque $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$.
Graficar las soluciones en el plano tx.

Solucion ejercicio 7:

Queremos resolver

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + 25x = 0$$

Para convertirlo en un sistema lineal de primer orden, introducimos la variable $y = \dot{x}$. Nos queda lo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -25x - \mu y \end{cases}$$

Notar que esto es equivalente a resolver el sistema

$$Z' = AZ,$$

tal que

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -\mu \end{bmatrix},$$

y el polinomio caracteristico de A

$$p(\lambda) := \lambda(\mu + \lambda) + 25$$

Verificamos que para $\mu = -8, 8$ y 26, los autovalores de A son

$$p_{\mu=8}(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \iff \lambda = -4 + 3i, -4 - 3i$$
$$p_{\mu=-8}(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \iff \lambda = 4 + 3i, 4 - 3i$$
$$p_{\mu=26}(\lambda) = \lambda^2 + 26\lambda + 25 = 0 \iff \lambda = -25, -1$$

Cuando $\mu = 8$, las curvas del diagrama de fase van a ser en forma de espiral, acercandose al origen a medida que crece t; cuando $\mu = -8$, la forma de las curvas va a ser la misma, pero alejandose del centro a mayores valores de t. Finalmente, cuando $\mu = 26$ los autovalores son todos negativos, o sea, el origen es asintoticamente estable.

Para el (c), buscamos las soluciones del sistema para $\mu = 8$ (y repito esto para los otros valores que toma):

$$S_{\mu=8}(t) = ce^{(-4+3i)t} \begin{bmatrix} \frac{4+3i}{25} \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$e^{-4t}(c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) \begin{bmatrix} \frac{4}{25} \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-4t}(-c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)) \begin{bmatrix} \frac{3}{25} \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

Uso condiciones iniciales para obtener los valores de c_1, c_2 y grafico la primera componenente de la solucion en funcion de t.

☺

Ejercicio

8. Un circuito eléctrico no lineal capacitor-resistor, puede ser modelado usando la ecuación diferencial

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3 - (a_0 + x)y,$$

donde a_0 es una constante no nula y $x(t)$ representa la corriente del circuito a tiempo t. Esbozar el diagrama de fases cuando $a_0 > 0$ y cuando $a_0 < 0$. Dar una interpretación física de los resultados.

Solucion ejercicio 8:

Dado el sistema $X' = F(t, X)$, busco DF:

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - y - 1 & -(a_0 + x) \end{bmatrix}$$

Ademas, busco puntos de equilibrio:

$$F(t, X) = 0 \forall t \iff X = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$$

Evaluando en DF y sacando autovalores:

$$\lambda(DF(1, 0)) = 2 - a_0, -1$$
$$\lambda(DF(-1, 0)) = -2 - a_0, 1$$

En estos casos es facil ver que pasa para cada $a_0 \neq 2$ y -2, respectivamente. Para el punto de eq. $(0, 0)$, notar que

$$Tr(DF) = -a_0,$$
$$det(DF) = 1$$

La forma del diagrama de fase esta dada por el criterio explicitado aca: TraceDet.pdf.

😆

Ejercicio

9. Una población dependiente de la edad puede ser modelada por la ecuación diferencial

$$\dot{p} = \beta + p(a - bp), \quad \dot{\beta} = \beta(c + (a - bp)),$$

donde p es la población, β es la tasa de nacimientos y a, b y c son constantes positivas. Hallar los puntos críticos del sistema y determinar el comportamiento asintótico de las soluciones.

Solucion ejercicio 9:

Busco puntos criticos.

$$F(t, X) = 0 \iff$$
$$(p, \beta) = (\frac{a + c}{b}, c(\frac{a + c}{b})), (0, \frac{a}{b}), (0, 0)$$

Calculo DF:

$$DF = \begin{bmatrix} a - 2bp & 1 \\ -\beta p & c + a - bp \end{bmatrix}$$

Determino el comportamiento asintotico cerca de c/ pto critico usando el criterio del punto anterior.

😆