Proba y Machine Learning
2024

MW

Contents

Chapter 1

Soluciones

Ejercicio

1) Sea $X \sim N(0,1)$. Probar que para todo $a < 1$ existe $C_a < \infty$ tal que para todo $x > 0$,

$$P(X > x) \leq C_a \frac{e^{-ax^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Se puede probar mas aun, de hecho

$$P(X > x) \leq \frac{1}{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Solucion ejercicio 1:

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_x^{+\infty} (1 + t^{-2}) e^{-t^2/2} dt$$

$$\int_x^{+\infty} (1 + t^{-2}) e^{-t^2/2} dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt - [t^{-1} e^{-t^2/2}]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

Se puede ver que $\frac{e^{-x^2/2}}{x} \leq \frac{e^{-ax^2/2}}{x}, a < 1$. Entonces:

$$P(X > x) \leq \frac{e^{-ax^2/2}}{x}$$

Si $x > \sqrt{2\pi}$, esta claro que la desigualdad vale para $C_a \geq 1$. Si $x \in I = [0, \sqrt{2\pi}]$, habria que buscar C_a tal que la desigualdad valga para todos los x en este intervalo. Para hallarlo, calculamos $\arg\min_{x \in I} \frac{e^{-ax^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\arg\min_{x \in I} \frac{e^{-ax^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$$

Sabiendo que $P(X > x)$ vale a lo sumo $\frac{1}{2}$, entonces:

$$\frac{1}{2} \leq C_a \frac{e^{-a(\sqrt{2\pi})^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$C_a \geq \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-a(\sqrt{2\pi})^2/2}$$

Concluimos que con $C_a = \max\{1, \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-a(\sqrt{2\pi})^2/2}\}$ se satisface la cota pedida.

😄

Ejercicio

2) Calcular

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_1^2+...+x_n^2}{2}}dx$

Solucion ejercicio 2:

a)

$$(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy$$

Usamos coordenadas polares:

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} re^{-r^2/2}d\theta dr$$
$$2\pi\int_{0}^{+\infty} re^{-r^2/2}dr = 2\pi$$

Entonces:

$$(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx)^2 = 2\pi \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$$

☺

Ejercicio

4) Sean $X_1, ..., X_n$ iid con distribucion Normal estandar.

a) Hallar la distribucion de X_1^2
b) Hallar la distribucion de $X_1^2 + ... + X_n^2$

Solucion ejercicio 4:

$$P(X_1^2 < t) = P(|X_1| < \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} < X_1, X_1 < \sqrt{t})$$

Si llamamos φ a la funcion de densidad de X_1, entonces:

$$P(X_1^2 < t) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \varphi(x)dx = 2\int_{0}^{\sqrt{t}} \varphi(x)dx$$

Denotemos a la funcion de distribucion acumulada con Φ :

$$P(X_1^2 < t) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1$$

Entonces:

$$f_{X_1^2}(t) = \frac{\varphi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-t/2}$$

Esta distribucion es Gama $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

☺

Ejercicio

5) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funcion continua. Probar que

$$\lim_{d\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\frac{x_1 + \ldots + x_d}{d}) dx_1 dx_2 \ldots dx_d = f(\frac{1}{2})$$

Solucion ejercicio 5:

Empecemos reescribiendo la expresion a calcular. Tenemos:

$$\lim_{d\to\infty} \int_{[0,1]^d} f(\frac{x_1 + \ldots + x_d}{d}) dx$$

Definamos $\Omega = ([0,1]^d, \mathcal{B}([0,1]^d), \mathcal{L}([0,1]^d))$ espacio de probabilidad. Ademas, tomemos variables aleatorias $X_i(\omega) = \omega_i, 1 \leq i \leq d$. Notar que

$$E[X_i] = \frac{1}{2}, \forall 1 \leq i \leq d,$$

y que, por Ley de los Grandes Numeros, $\exists D \subset \Omega : \mu(D) = 1, \overline{X_d(D)} \longrightarrow \frac{1}{2}$. Entonces:

$$\lim_{d\to\infty} \int_{[0,1]^d} f(\frac{x_1 + \ldots + x_d}{d}) dx = \lim_{d\to\infty} \int_D f(\overline{X_d}) = f(\frac{1}{2})$$

Por si llega a estar mal esta resolucion, planteo una alternativa.

Defino $\Omega = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}([0,1]))$ espacio de probabilidad, y $(X_i)_{1\leq i\leq d}$ independientes tal que $X_i(w) : [0,1] \to [0,1]$ es una funcion biyectiva. Notar que

$$E[X_i] = \frac{1}{2}, \forall 1 \leq i \leq d,$$

y que, por LGN, $\exists D \subset \Omega : \mu(D) = 1, \overline{X_d(D)} \longrightarrow \frac{1}{2}$. Entonces:

$$\lim_{d\to\infty} \int_{[0,1]^d} f(\frac{x_1 + \ldots + x_d}{d}) dx = \lim_{d\to\infty} \int_{[0,1]} f(\overline{X_d}) 1_D$$

Intercambios integral y limite:

$$\int_{[0,1]} \lim_{d\to\infty} f(\overline{X_d}) 1_D = \int_{[0,1]} f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$$

☺

Ejercicio

8) Una funcion suave $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice convexa si $\phi''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Probar que si ϕ es convexa, entonces

$$\phi(y) \geq \phi(x) + \phi'(x)(y - x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Probar que

$$\phi(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Antes de pasar a la resolucion del problema, demuestro la siguiente prop que voy a usar para el item b:

Claim 1.0.1

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion suave, y $x, y \in R : y > x$. Si $\frac{\phi(\frac{x+y}{2})-\phi(x)}{\frac{y}{2}-\frac{x}{2}} > \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x}$, entonces hay un intervalo $I \subset [x, y]$ donde ϕ' decrece.

Demostracion: Se puede deducir que bajo estas hipotesis

$$\frac{\phi(y) - \phi(\frac{x}{2})}{y - \frac{x}{2}} < \frac{\phi(\frac{x+y}{2}) - \phi(x)}{\frac{y}{2} - \frac{x}{2}}.$$

Ademas, por el Teorema del Valor Medio, $\exists c \in [x, \frac{x+y}{2}]/\phi'(c) = \frac{\phi(\frac{x+y}{2})-\phi(x)}{\frac{y}{2}-\frac{x}{2}}$, y $\exists c' \in [\frac{x+y}{2}, y]/\phi'(c') = \frac{\phi(y)-\phi(\frac{x+y}{2})}{y-\frac{x+y}{2}}$. Entonces,

$$\phi'(c) > \phi'(c'), c < c',$$

lo que demuestra la prop. 😃

Solucion ejercicio 8:

a)

Consideremos el desarrollo de Taylor de orden 2 de $\phi(y)$ centrado en x:

$$\phi(y) = \phi(x) + \phi'(x)(y - x) + \frac{\phi''(x)}{2}(\eta)^2,$$

donde η es el error. Sabiendo que $\phi''(x) > 0$, entonces:

$$\phi(x) + \phi'(x)(y - x) + \frac{\phi''(x)}{2}(\eta)^2 \geq \phi(x) + \phi'(x)(y - x)$$

Por lo tanto:

$$\phi(y) \geq \phi(x) + \phi'(x)(y - x)$$

b)

Lo encaramos por absurdo: suponemos que $\phi(\frac{x+y}{2}) > \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y)$, y usamos el resultado del item a.

$$\phi(\frac{x+y}{2}) > \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y) = \phi(x) + \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}\frac{y - x}{2}$$
$$\frac{\phi(\frac{x+y}{2}) - \phi(x)}{\frac{y-x}{2}} > \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}$$

Por la prop enunciada, sabemos que $\exists c, c' : c < c', \phi'(c) > \phi'(c')$, pero ϕ' es monotona creciente dado que ϕ convexa. Por lo tanto, llegamos a un absurdo.

😃