3 Filtres sélectifs

3.1 Filtres passe haut de Taylor explicites

On souhaite filtrer les hautes fréquences d'un champ. Soit $u[n] = u(n\Delta x)$ le champ à filter. Soit $h[n]$ la réponde impusionnelle finie du filtre, et soit $h_j = h[j]$ ses coefficients, j=-N...N. La champ filtré est le produit de convolution $u * h[n]$. La réponse fréquentielle du filtre $H(k)$ est donnée par la transformée de Fourier d'un signal discret (TFSD) de $h[n]$:

$$H(k\Delta x) = \sum_{n=-N}^{N} h[n] e^{-jkn\Delta x}$$

où k est le nombre d'onde, avec $-\pi \leq k\Delta x \leq \pi$. Pour avoir une réponse fréquentielle réelle et limiter les risques d'instabilité, on prend:

$$h_{-j} = h_j$$

La réponse fréquentielle devient donc:

$$H(k\Delta x) = h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} h_n \cos(nk\Delta x)$$

Pour faciliter les notations, on note $s = k\Delta x$, avec $-\pi \leq s \leq \pi$, mais la gamme utile se limite en fait à $0 \leq s \leq \pi$ vu que le filtre a une réponse réelle (il y a alors symétrie hermitienne de la réponse fréquentielle). On a alors:

$$H(s) = h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} h_n \cos(ns)$$

Pour avoir un filtre passe haut, on remarque que l'on peut prendre:

$$H(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad H(\pi) = 1$$

La première relation ressort en fait automatiquement des conditions d'ordre données ci-dessous.

Pour $s \to 0$, on peut écrire le développement limité suivant:

$$\cos(ns) = 1 - \frac{(ns)^2}{2!} + \frac{(ns)^4}{4!} - \frac{(ns)^6}{6!} + \frac{(ns)^8}{8!} - ...$$

C'est-à-dire que l'on a le développement de Taylor suivant pour la réponse fréquentielle du filtre:

$$H(s) = \left(h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} h_n\right) - s^2 \left(\frac{2}{2!}\sum_{n=1}^{N} n^2 h_n\right) + s^4 \left(\frac{2}{4!}\sum_{n=1}^{N} n^4 h_n\right) \tag{240}$$

$$- s^6 \left(\frac{2}{6!}\sum_{n=1}^{N} n^6 h_n\right) + s^8 \left(\frac{2}{8!}\sum_{n=1}^{N} n^8 h_n\right) + ... \tag{241}$$

Pour avoir un filtre le meilleur possible dans la limite $s \to 0$ il faut pouvoir annuler le plus grand nombre de termes du développement ci-dessus:

$$h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} h_n = 0 \qquad \text{(à annuler pour avoir ordre 2)} \tag{242}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 h_n = 0 \qquad \text{(à annuler pour avoir ordre 4)} \tag{243}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 h_n = 0 \qquad \text{(à annuler pour avoir ordre 6)} \tag{244}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^6 h_n = 0 \qquad \text{(à annuler pour avoir ordre 8)} \tag{245}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^8 h_n = 0 \qquad \text{(à annuler pour avoir ordre 10)} \tag{246}$$

$$\cdots \tag{247}$$

La première contrainte déjà donnée plus haut assure que $H(0)$=0, première chose à avoir pour un filtre passe-haut. Il ne faut pas oublier la contrainte de normalisation restante:

$$H(\pi) = 1 = h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} (-1)^n h_n$$

Par exemple, pour avoir un filtre d'ordre 8, c'est-à-dire ayant $H(s) \sim O(s^8)$ quand $s \to 0$, il faut:

$$h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} (-1)^n h_n = 1 \tag{248}$$

$$h_0 + 2\sum_{n=1}^{N} h_n = 0 \tag{249}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 h_n = 0 \tag{250}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 h_n = 0 \tag{251}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^6 h_n = 0 \tag{252}$$

Il faut satisfaire 5 relations, le filtre doit donc avoir 5 coefficients indépendents h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, c'est-à-dire que l'on a N=4. Il faut résoudre le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \\ 0 & 1^6 & 2^6 & 3^6 & 4^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{253}$$