

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

UNESP - Campus de Bauru/SP
Departamento de Engenharia Civil

2117 - ESTRUTURAS DE CONCRETO I

FLEXÃO NORMAL SIMPLES - VIGAS

Prof. Dr. PAULO SÉRGIO BASTOS

(wwwp.feb.unesp.br/pbastos)

Bauru/SP
Dez/2020

APRESENTAÇÃO

Este texto tem como objetivo servir como notas de aula na disciplina Estruturas de Concreto I, do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Bauru/SP.

As informações apresentadas estão de acordo com as prescrições contidas na norma NBR 6118/2014 (*“Projeto de estruturas de concreto – Procedimento”*), para o projeto e dimensionamento de estruturas de Concreto Armado e Concreto Protendido.

O texto apresenta o estudo das seções retangulares com armaduras simples e dupla e das seções T com armadura simples, para solicitação de Flexão Simples. Visando iniciar o cálculo prático de vigas de edificações, são introduzidos alguns tópicos adicionais, como o cálculo de cargas verticais sobre vigas e algumas prescrições da norma para vigas simples e contínuas.

O texto não inclui todos os tópicos relativos ao projeto de vigas, como o dimensionamento à força cortante e ao momento de torção, ancoragem nos apoios, etc. Esses temas são abordados em outras publicações, especialmente na disciplina Estruturas de Concreto II.

Críticas e sugestões serão bem-vindas.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	DEFINIÇÃO DE VIGA	1
3.	COMPORTAMENTO RESISTENTE DE VIGAS SOB FLEXÃO SIMPLES	1
4.	COMPARAÇÃO DOS DOMÍNIOS 2, 3 E 4.....	4
5.	PREScrições PARA AS VIGAS	6
5.1	Vão Efetivo.....	6
5.2	Definição da Altura e da Largura	6
5.3	Cargas Verticais nas Vigas	7
5.3.1	Peso Próprio.....	7
5.3.2	Paredes	7
5.3.3	Lajes.....	7
5.3.4	Outras Vigas	8
5.4	Disposições Construtivas de Armaduras	8
5.4.1	Armadura Longitudinal Mínima de Tração	8
	1. 8	
5.4.2	Armadura Longitudinal Máxima	9
5.4.3	Armadura de Pele.....	9
5.4.4	Armaduras de Ligação Mesa-alma	9
5.4.5	Espaçamento Livre entre as Faces das Barras Longitudinais	10
5.4.6	Condição para a Posição da Força Resultante na Armadura	11
6.	HIPÓTESES BÁSICAS	11
7.	SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA SIMPLES	12
7.1	Equações de Equilíbrio.....	13
7.2	Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K.....	16
7.3	Exemplos Numéricos.....	17
8.	SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA DUPLA	32
8.1	Equações de Equilíbrio.....	32
8.2	Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K.....	35
8.3	Exemplos Numéricos.....	36
9.	SEÇÃO T.....	42
9.1	Largura Colaborante	47
9.2	Seção T com Armadura Simples	50
9.2.1	$0,8x \leq h_f$	50
9.2.2	$0,8x > h_f$	51
9.2.3	Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K.....	53
9.2.4	Exemplos Numéricos.....	54
10.	EXERCÍCIOS PROPOSTOS	63
	REFERÊNCIAS	68
	BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	68
	TABELAS ANEXAS.....	69

1. INTRODUÇÃO

A **Flexão Simples** é definida como a flexão sem força normal. Quando a flexão ocorre com a atuação de força normal tem-se a **Flexão Composta**.

Solicitação normal é aquela cujo esforço solicitante produz tensões normais (perpendiculares) às seções transversais do elemento estrutural. O esforço que pode provocar tensões normais é o momento fletor (M) ou a força normal (N).

Nas estruturas de Concreto Armado são três os elementos estruturais mais importantes: as lajes, as vigas e os pilares. E dois desses elementos, as lajes e as vigas, são submetidos à Flexão Normal Simples, embora possam também, eventualmente, estarem submetidos à flexão composta. Por isso, o dimensionamento de seções retangulares e seções T sob flexão normal simples é a atividade diária mais comum aos engenheiros projetistas de estruturas de Concreto Armado (SANTOS, 1983).

O estudo da **Flexão Normal Simples** tem como objetivo proporcionar ao estudante o correto entendimento dos mecanismos resistentes proporcionados pelo concreto sob compressão e pelo aço sob tração, em seções retangulares e T, visando levá-lo a bem dimensionar ou verificar a resistência dessas seções.

O equacionamento para a resolução dos problemas da **Flexão Simples** é deduzido em função de duas equações de equilíbrio da estática, e que proporciona as aqui chamadas “equações teóricas”, que podem ser facilmente implementadas para uso em programas computacionais. Também é apresentado o equacionamento com base em coeficientes tabelados tipo K, largamente utilizado no Brasil.

É importante esclarecer o estudante que neste texto ele aprenderá a dimensionar as seções transversais das vigas aos momentos fletores máximos, e fazer o detalhamento das armaduras de flexão apenas na seção transversal correspondente. Nesta disciplina o estudo das vigas está apenas iniciando. O estudo completo das vigas simples ou contínuas, com dimensionamentos às forças cortantes e momentos torçores, bem como o detalhamento completo e ancoragem das armaduras, será alcançado ao término da disciplina 2123 - Estruturas de Concreto II.¹

2. DEFINIÇÃO DE VIGA

Vigas são “*elementos lineares em que a flexão é preponderante*” (NBR 6118/14², item 14.4.1.1). Elemento linear é aquele em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal, sendo também denominado barra.

3. COMPORTAMENTO RESISTENTE DE VIGAS SOB FLEXÃO SIMPLES

Considere uma viga de concreto armado biapoiada (Figura 1), submetida a duas forças concentradas P crescentes e de igual intensidade. A armadura é composta por armadura longitudinal, resistente às tensões de tração provenientes da flexão, e armadura transversal, dimensionada para resistir aos esforços cortantes, composta por estribos verticais no lado esquerdo da viga e estribos e barras dobradas no lado direito da viga.

A Figura 2a mostra as trajetórias das tensões principais de tração e de compressão da viga ainda no Estádio I. Observe que no trecho de flexão pura as trajetórias das tensões de compressão e de tração são paralelas ao eixo longitudinal da viga. Nos demais trechos as trajetórias das tensões são inclinadas devido à influência dos esforços cortantes.

Enquanto a resistência à tração do concreto é superior às tensões principais de tração, não surgem fissuras na viga. As primeiras fissuras de flexão só surgem na região de máximos momentos fletores, no instante que as tensões de tração atuantes igualam e superam a resistência do concreto à tração na flexão (Figura 2b). Para este nível de carregamento a viga apresenta trechos fissurados, no Estádio II, e trechos não fissurados, no Estádio I. Note que a direção ou inclinação das fissuras é aproximadamente perpendicular à direção das tensões principais de tração, ou seja, a inclinação das fissuras depende da inclinação das tensões principais de tração. Por esta razão, na região de flexão pura, as fissuras são verticais.

A Figura 2c mostra os diagramas de deformações e de tensões nas seções **a** e **b** da viga, nos Estádios I e II, respectivamente. No Estádio I a máxima tensão de compressão (σ_c) ainda pode ser avaliada de acordo com a Lei de Hooke, o mesmo não valendo para o Estádio II.

¹ Outros tópicos relativos às vigas, como fissuração e flecha, serão estudados na disciplina 2158 – Estruturas de Concreto IV.

² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238p.

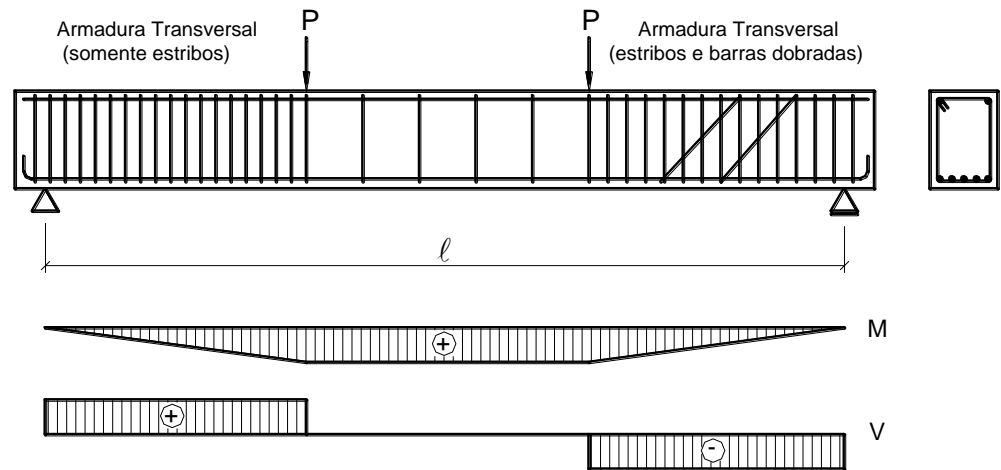


Figura 1 – Viga biapoiada e diagramas de esforços solicitantes.
(LEONHARDT e MÖNNIG - 1982).

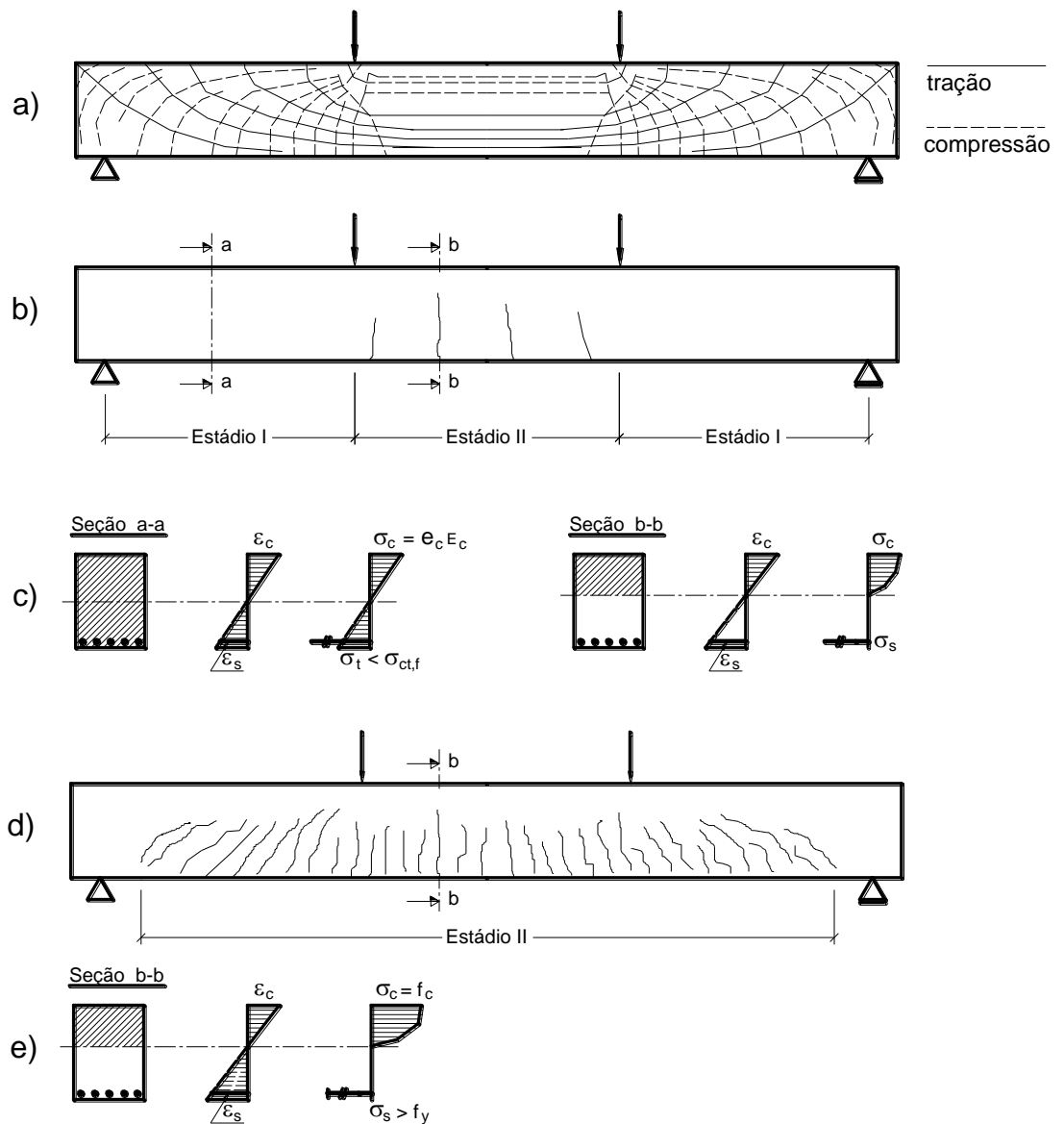


Figura 2 - Comportamento resistente de uma viga biapoiada (LEONHARDT e MÖNNIG - 1982).

Com o carregamento num patamar superior começam a surgir fissuras inclinadas nas proximidades dos apoios, por influência das forças cortantes atuando em conjunto com os momentos fletores. Essas fissuras inclinadas são chamadas de fissuras de cisalhamento (Figura 2d), que não é um termo adequado porque tensões de cisalhamento não ocorrem por ação exclusiva de força cortante. Sugerimos fissura de “flexão com cortante”. Com carga elevada, a viga, em quase toda a sua extensão, apresenta-se no Estádio II. Apenas nas proximidades dos apoios a viga permanece no Estádio I.

No caso de uma viga biapoiada sob carregamento uniformemente distribuído, no Estádio I, as tensões principais na altura da linha neutra (a meia altura da viga) apresentam inclinação de 45° (ou 135°) em relação ao eixo longitudinal da viga, como mostrado na Figura 3. Observe que nas regiões próximas aos apoios as trajetórias das tensões principais inclinam-se por influência das forças cortantes, mantendo, no entanto, a perpendicularidade entre as trajetórias.

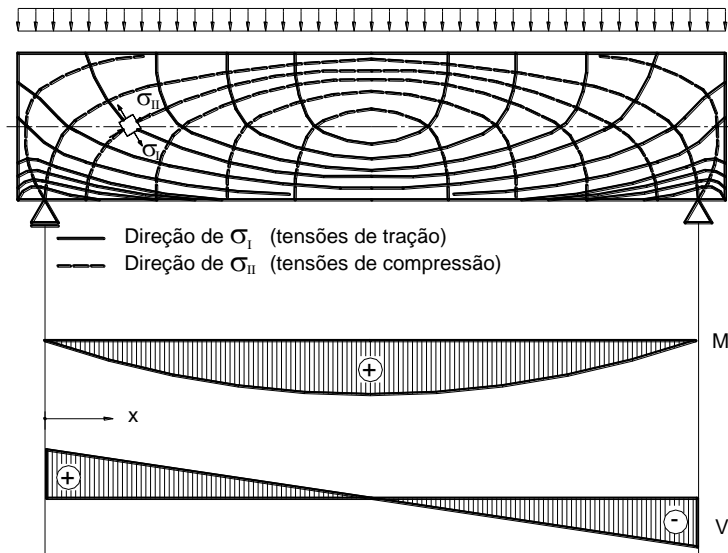


Figura 3 - Trajetória das tensões principais de uma viga biapoiada no Estádio I sob carregamento uniformemente distribuído (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

O carregamento induz o surgimento de diferentes estados de tensão nos infinitos pontos que compõem a viga, e que podem ser representados por um conjunto de diferentes componentes, em função da orientação do sistema de eixos considerados. Como exemplo, a Figura 4 mostra a representação dos estados de tensão em dois pontos da viga, conforme os eixos coordenados x-y e os eixos principais. O estado de tensão segundo os eixos x-y define as tensões normais σ_x , as tensões σ_y e as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} . O estado de tensão segundo os eixos principais definem as tensões principais de tração σ_I e de compressão σ_{II} .

A tensão σ_y pode ser em geral desprezada, tendo importância apenas nos trechos próximos à introdução de cargas. O dimensionamento das estruturas de concreto armado toma como base normalmente as tensões σ_x e τ_{xy} .

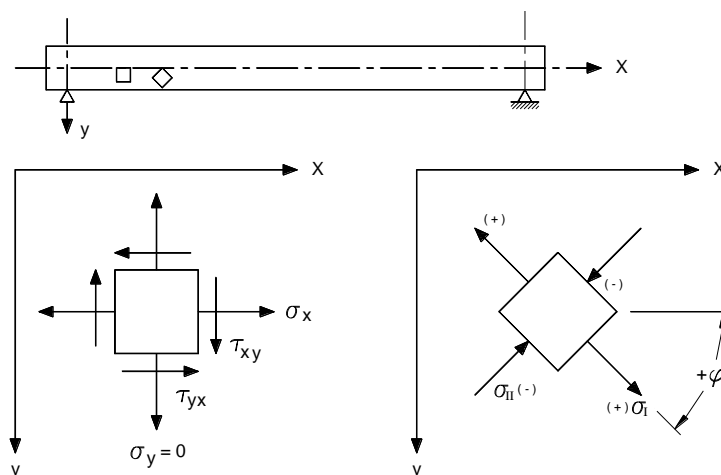


Figura 4 – Componentes de tensão segundo os estados de tensão relativos aos eixos principais e aos eixos nas direções x e y (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

4. COMPARAÇÃO DOS DOMÍNIOS 2, 3 E 4

As deformações nos materiais componentes das vigas de Concreto Armado submetidas à Flexão Simples encontram-se nos domínios de deformações 2, 3 ou 4, conforme definidos na NBR 6118 (item 17.2.2). A análise da Figura 5 e da Figura 6 permite fazer as seguintes considerações das vigas à flexão simples em relação aos domínios 2, 3 e 4:

a) Domínio 2

No domínio 2 a deformação de alongamento (ϵ_{sd}) na armadura tracionada (A_s) é fixa e igual a 10 ‰, e a deformação de encurtamento (ϵ_{cd}) na fibra mais comprimida de concreto varia entre zero e ϵ_{cu} , considerando que, para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa), ϵ_{cu} assume o valor de 3,5 ‰. Sob a deformação de 10 ‰ a tensão na armadura corresponde à máxima permitida no aço (f_{yd}), como se pode verificar no diagrama $\sigma \times \epsilon$ do aço mostrado na Figura 6. No domínio 2, portanto, a armadura tracionada é econômica, isto é, a máxima tensão possível no aço pode ser implementada nessa armadura.

Na questão relativa à segurança, no caso de vir a ocorrer a ruptura, ou seja, o colapso da viga, será com “*aviso prévio*”, porque como a armadura continuará escoando além dos 10 ‰, a fissuração na viga será mais visível e ocorrerá antes de uma possível ruptura por esmagamento do concreto na região comprimida. A maior fissuração funcionará como um aviso aos usuários de que a viga apresenta um problema sério, alertando-os, de modo que sejam tomadas medidas visando a evacuação do local, antes que a ruptura venha a ocorrer.

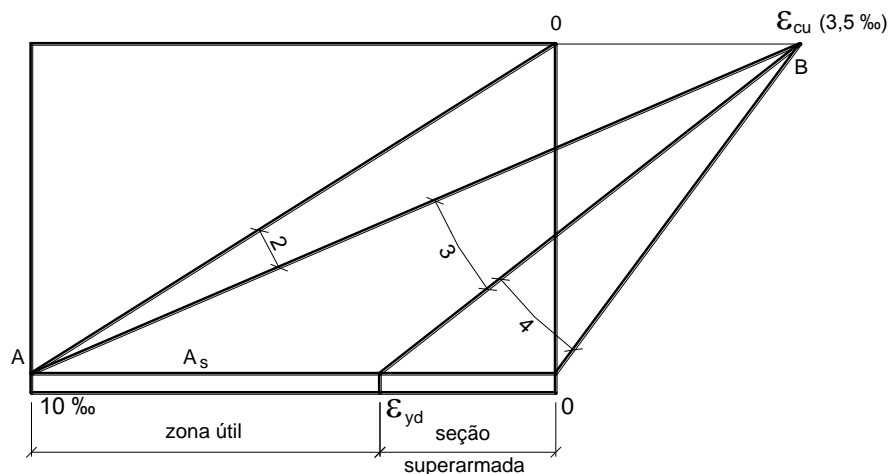


Figura 5 – Diagrama de deformações dos domínios 2, 3 e 4, para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa), onde $\epsilon_{cu} = 3,5$ ‰.

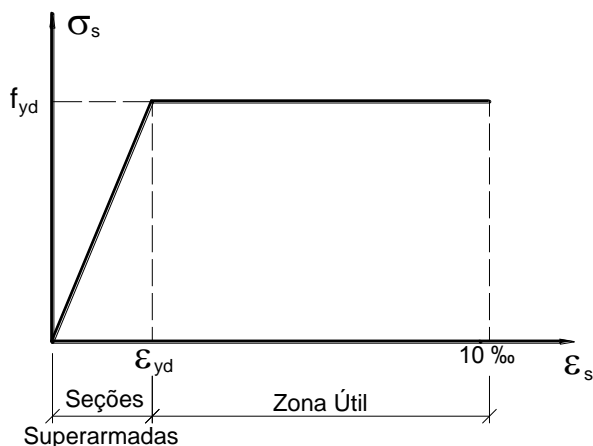


Figura 6 - Zonas de dimensionamento em função da deformação no aço.

b) Domínio 3

No domínio 3 a deformação de encurtamento na fibra mais comprimida corresponde ao valor último (ϵ_{cu}), de 3,5 ‰ para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa). A deformação de alongamento na armadura tracionada varia entre ϵ_{yd} (deformação de início de escoamento do aço) e 10 ‰, o que significa que a armadura escoou um certo valor. Verifica-se na Figura 6 que a tensão na armadura é a máxima permitida, igual à f_{yd} , pois qualquer que seja a deformação entre ϵ_{yd} e 10 ‰ (zona útil), a tensão será f_{yd} . Isso implica que, assim como no domínio 2, a armadura também é econômica no domínio 3.

Neste domínio, portanto, tanto o concreto comprimido quanto o aço tracionado são aproveitados ao máximo, diferentemente do domínio 2, onde o concreto tem deformações de encurtamento menores que a máxima (ϵ_{cu}).

A ruptura no domínio 3 é também chamada com “*aviso prévio*”, pois a armadura, ao escoar, acarretará fissuras visíveis na viga, antes que o concreto alcance a ruptura por esmagamento.

Quando a viga tem as deformações últimas, de ϵ_{cu} no concreto e 10 ‰ na armadura, alcançadas simultaneamente, diz-se que a seção é *normalmente armada*. A linha neutra coincide com o x_{2lim} , e a seção está no limite entre os domínios 2 e 3. A NBR 6118 (17.2.2) indica que a seção dimensionada à Flexão Simples no domínio 3 é *subarmada*, um termo que parece inadequado por passar a falsa impressão de que a armadura é menor que a necessária.

Na Tabela 1 constam os valores da deformação de início de escoamento do aço (ϵ_{yd}), o limite da posição da linha neutra entre os domínios 3 e 4 (x_{3lim}) e β_{x3lim} ($\beta_x = x/d$), para os diferentes tipos de aço e para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

Tabela 1 - Valores de ϵ_{yd} , x_{3lim} e β_{x3lim} para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa) e em função da categoria do aço.

Aço	ϵ_{yd} (‰)	x_{3lim}	β_{x3lim}
CA-25	1,04	0,77 d	0,77
CA-50	2,07	0,63 d	0,63
CA-60	2,48	0,59 d	0,59

c) Domínio 4

No domínio 4 a deformação de encurtamento na fibra mais comprimida está com o valor máximo de ϵ_{cu} , e a armadura tracionada não está escoando, pois sua deformação é menor que a de início de escoamento (ϵ_{yd}). Neste caso, conforme se pode notar no diagrama $\sigma \times \epsilon$ do aço mostrado na Figura 6, a tensão na armadura é menor que a máxima permitida (f_{yd}). A armadura resulta, portanto, antieconômica, pois não aproveita a máxima capacidade resistente do aço. Diz-se então que a armadura está “folgada” e a seção é chamada *superarmada* na Flexão Simples (NBR 6118, 17.2.2), como mostrado na Figura 5 e na Figura 6.

As vigas não podem ser projetadas à Flexão Simples no domínio 4, pois além da questão econômica, a ruptura, se ocorrer, será do tipo “*frágil*”, ou “*sem aviso prévio*”, onde o concreto rompe (esmaga) por compressão ($\epsilon_{cd} > \epsilon_{cu}$), causando o colapso da viga antes da intensa fissuração provocada pelo aumento do alongamento na armadura tracionada. Segundo a NBR 6118 (17.2.2), a “*ruptura frágil está associada a posições da linha neutra no domínio 4, com ou sem armadura de compressão.*”

d) Conclusão

Como conclusão pode-se afirmar: **as vigas devem ser projetadas à flexão simples nos domínios 2 ou 3, e não podem ser projetadas no domínio 4.**

Para complementar essa análise, é importante observar que a NBR 6118 (item 14.6.4.3) apresenta limites para a posição da linha neutra que visam dotar as vigas e lajes de ductilidade, afirmando que quanto menor for a relação x/d (x = posição da linha neutra, d = altura útil da viga), maior será a ductilidade. Os limites são: $x/d \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa e $x/d \leq 0,35$ para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa.

Considerando os concretos do Grupo I de resistência ($\epsilon_{cu} = 3,5$ ‰) e o aço mais comum (CA-50), no limite entre os domínios 3 e 4 a relação x/d para a linha neutra é 0,63d e a deformação no aço é a deformação de início de escoamento (ϵ_{yd}) de 2,07 ‰, o limite máximo de $x/d = 0,45$ corresponde à deformação de alongamento de 4,3 ‰, o que significa que a norma está impondo uma deformação maior àquela de início de

escoamento, visando vigas mais seguras. Portanto, o dimensionamento no domínio 3 não é permitido ao longo de toda a faixa possível de variação da posição da linha neutra, e sim somente até o limite $x = 0,45d$.

5. PRESCRIÇÕES PARA AS VIGAS

5.1 Vão Efetivo

O vão efetivo (NBR 6118, item 14.6.2.4) pode ser calculado pela expressão:

$$\ell_{ef} = \ell_o + a_1 + a_2 \quad \text{Eq. 1}$$

com:

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1/2 \\ 0,3 h \end{cases} \quad \text{e} \quad a_2 \leq \begin{cases} t_2/2 \\ 0,3 h \end{cases} \quad \text{Eq. 2}$$

As dimensões ℓ_o , t_1 , t_2 e h estão indicadas na Figura 7.

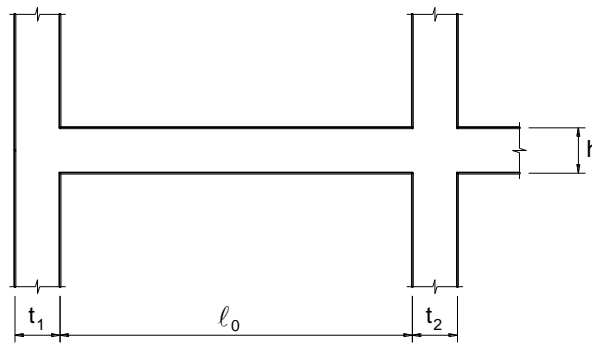


Figura 7 – Dimensões consideradas no cálculo do vão efetivo das vigas.

5.2 Definição da Altura e da Largura

De modo geral, a preferência dos engenheiros e arquitetos é que as vigas fiquem embutidas nas paredes de vedação, de tal forma que não possam ser percebidas visualmente. Para que isso ocorra, a largura das vigas deve ser escolhida em função da espessura final da parede, a qual depende basicamente das dimensões e da posição de assentamento das unidades de alvenaria (tijolo maciço, bloco furado, etc.). Devem também ser consideradas as espessuras das argamassas de revestimento (emboço, reboco, etc.), nos dois lados da parede. Os revestimentos de argamassa no interior do Estado de São Paulo têm usualmente a espessura total de 1,5 cm a 2,0 cm.

Existe no comércio uma infinidade de unidades de alvenaria, com as dimensões as mais variadas, tanto para os blocos cerâmicos de seis como para os de oito furos, como também para os tijolos maciços cerâmicos. Antes de se definir a largura da viga é necessário, portanto, definir o tipo e as dimensões da unidade de alvenaria, levando-se em consideração a posição em que a unidade será assentada.

No caso de construções de pequeno porte, como casas, sobrados, barracões, etc., onde é usual se construir primeiramente as paredes de alvenaria, para em seguida serem construídos os pilares, as vigas e as lajes, é interessante escolher a largura das vigas igual à largura da parede sem os revestimentos, ou seja, igual à dimensão da unidade que resulta na largura da parede.

A altura das vigas depende de diversos fatores, sendo os mais importantes o vão, o carregamento e a resistência do concreto. A altura deve ser suficiente para proporcionar resistência mecânica e baixa deformabilidade (flecha). Considerando por exemplo o esquema de uma viga como mostrado na Figura 8, para concretos do tipo C-20 e C-25 e construções de pequeno porte, uma indicação prática para a estimativa da altura das vigas de concreto armado é dividir o vão efetivo por doze, isto é:

$$h_1 = \frac{\ell_{ef,1}}{12} \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{\ell_{ef,2}}{12} \quad \text{Eq. 3}$$

Na estimativa da altura de vigas com concretos de resistência superior devem ser considerados valores maiores que doze na Eq. 3. Vigas para edifícios de vários pavimentos, onde as ações horizontais do vento

impliquem esforços solicitantes consideráveis sobre a estrutura devem ter a altura definida em função dos esforços a que estarão submetidas.

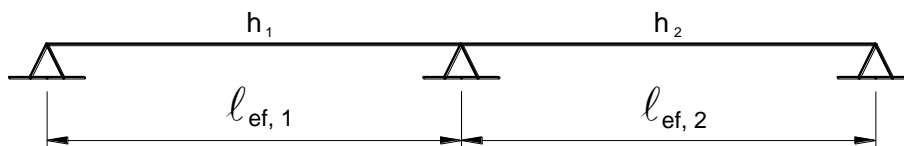


Figura 8 – Valores práticos para estimativa da altura das vigas.

A altura das vigas deve ser preferencialmente modulada de 5 em 5 cm, ou de 10 em 10 cm. A altura mínima indicada é de 25 cm. Vigas contínuas devem ter a altura dos vãos obedecendo uma certa padronização, a fim de evitar várias alturas diferentes.

5.3 Cargas Verticais nas Vigas

Normalmente, as cargas (ações) atuantes nas vigas são provenientes de paredes, de lajes, de outras vigas, de pilares e, sempre o peso próprio da viga.

As cargas nas vigas devem ser analisadas e calculadas em cada vão da viga, trecho por trecho do vão se este conter trechos de carga diferentes.

Nos próximos itens são detalhados esses tipos de cargas verticais nas vigas.

5.3.1 Peso Próprio

O peso próprio de vigas com seção transversal constante é uma carga considerada uniformemente distribuída ao longo do comprimento da viga, e deve sempre ser obrigatoriamente considerado. O seu valor é:

$$g_{pp} = b_w h \gamma_{conc} \quad \text{Eq. 4}$$

g_{pp} = kN/m;
 γ_{conc} = 25 kN/m³;
 b_w = largura da seção (m);
 h = altura da seção (m).

5.3.2 Paredes

Geralmente as paredes têm espessura e altura constantes, quando então a carga da parede pode ser considerada uniformemente distribuída ao longo do seu comprimento. Seu valor é:

$$g_{par} = e h \gamma_{alv} \quad \text{Eq. 5}$$

g_{par} = kN/m;
 γ_{alv} = peso específico da parede (kN/m³);
 e = espessura final da parede (m);
 h = altura da parede (m).

De acordo com a NBR 6120, o peso específico é de 18 kN/m³ para o tijolo maciço e 13 kN/m³ para o bloco cerâmico furado. Aberturas de portas geralmente não são consideradas como trechos de carga. No caso de vitros, janelas e outros tipos de esquadrias, devem ser verificados os valores de carga por metro quadrado a serem considerados. Para janelas com vidros podem ser consideradas as cargas de 0,5 a 1,0 kN/m².

5.3.3 Lajes

As reações das lajes sobre as vigas de apoio devem ser conhecidas. Importante é verificar se uma ou duas lajes descarregam a sua carga sobre a viga. As reações das lajes nas vigas de borda serão estudadas posteriormente nesta disciplina.

5.3.4 Outras Vigas

Quando é possível definir claramente qual viga serve de apoio e qual viga está apoiada em outra, a carga concentrada na viga que serve de apoio é igual a reação de apoio daquela que está apoiada.

Em determinados pavimentos, a escolha de qual viga apoia-se sobre qual fica muito difícil. A escolha errada pode se tornar perigosa. Para contornar este problema, pode-se calcular os esforços e deslocamentos de todas as vigas por meio de uma grelha, com o auxílio de um programa de computador. Desse modo, os resultados são excelentes e muito próximos aos reais.

5.4 Disposições Construtivas de Armaduras

No item 18.3 a NBR 6118 estabelece diversas prescrições relativas às armaduras, e referem-se às vigas isostáticas com relação $\ell/h \geq 2,0$ e às vigas contínuas com relação $\ell/h \geq 3,0$, em que ℓ é o comprimento do vão efetivo (ou o dobro do comprimento efetivo, no caso de balanço) e h é a altura total da viga. Vigas com relações ℓ/h menores devem ser tratadas como vigas-parede.

5.4.1 Armadura Longitudinal Mínima de Tração

No item 17.3.5 a NBR 6118 estabelece como princípio básico que “A ruptura frágil das seções transversais, quando da formação da primeira fissura, deve ser evitada considerando-se, para o cálculo das armaduras, um momento mínimo dado pelo valor correspondente ao que produziria a ruptura da seção de concreto simples, supondo que a resistência à tração do concreto seja dada por $f_{ctk,sup}$, devendo também obedecer às condições relativas ao controle da abertura de fissuras dadas em 17.3.3.”

“A armadura mínima de tração, em elementos estruturais armados ou protendidos deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela expressão a seguir, respeitada a taxa mínima absoluta 0,15 %” (NBR 6118, 17.3.5.2.1):

$$M_{d,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \quad \text{Eq. 6}$$

W_0 = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$ = resistência característica superior do concreto à tração:

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \quad \text{Eq. 7}$$

$$\text{com: } f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (\text{MPa}) \quad \text{Eq. 8}$$

Alternativamente, a armadura mínima pode ser considerada atendida se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura da Tabela 2.

Tabela 2 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{(a)}$ (%)														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256
(a) Os valores de ρ_{min} estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $d/h = 0,8$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, ρ_{min} deve ser recalculado. $\rho_{min} = A_{s,min}/A_c$															

“Em elementos estruturais, exceto elementos em balanço, cujas armaduras sejam calculadas com um momento fletor igual ou maior ao dobro de M_d , não é necessário atender à armadura mínima. Neste caso, a determinação dos esforços solicitantes deve considerar de forma rigorosa todas as combinações possíveis de carregamento, assim como os efeitos de temperatura, deformações diferidas e recalques de apoio. Deve-se ter ainda especial cuidado com o diâmetro e espaçamento das armaduras de limitação de fissuração.”

No item 17.3.5.2.2 a NBR 6118 ainda estabelece “Valores mínimos para a armadura de tração sob deformações impostas”.

5.4.2 Armadura Longitudinal Máxima

“A especificação de valores máximos para as armaduras decorre da necessidade de se assegurar condições de ductilidade e de se respeitar o campo de validade dos ensaios que deram origem às prescrições de funcionamento do conjunto aço-concreto.” (NBR 6118, 17.3.5).

“A soma das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A'_s$) não pode ter valor maior que 4 % A_c , calculada na região fora da zona de emendas, devendo ser garantidas as condições de ductilidade requeridas em 14.6.4.3.” (NBR 6118, 17.3.5.2.4).

5.4.3 Armadura de Pele

Segundo a NBR 6118 (17.3.5.2.3), nas vigas com $h > 60$ cm deve ser colocada uma armadura lateral, chamada *armadura de pele* (Figura 9), composta por barras de CA-50 ou CA-60, com espaçamento não maior que 20 cm e devidamente ancorada nos apoios, com área mínima em cada face da alma da viga igual a:

$$A_{sp,face} = 0,10 \% A_{c,alma} = 0,0010 b_w \cdot h \quad \text{Eq. 9}$$

Em vigas com altura igual ou inferior a 60 cm, pode ser dispensada a utilização da armadura de pele. As armaduras principais de tração e de compressão não podem ser computadas no cálculo da armadura de pele.”

Embora a norma indique a disposição de armadura de pele somente em vigas com alturas superiores a 60 cm, recomendamos a sua aplicação em vigas com altura a partir de 50 cm, para evitar o aparecimento de fissuras superficiais por retração nas faces laterais verticais, e que acarretam preocupações aos executores da obra. Nesses casos, a armadura de pele pode ser adotada igual à da Eq. 9, ou uma quantidade menor, como aquela que era indicada na NB 1 de 1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h \quad , \text{ por face.}$$

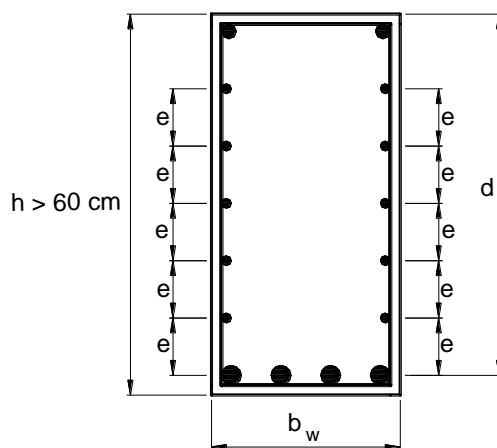


Figura 9 – Disposição da armadura de pele A_{sp} em cada face e com espaçamento $e \leq 20$ cm na seção transversal de vigas com $h > 60$ cm.

5.4.4 Armaduras de Ligação Mesa-alma

Conforme o item 18.3.7 da NBR 6118: “Os planos de ligação entre mesas e almas ou talões e almas de vigas devem ser verificados com relação aos efeitos tangenciais decorrentes das variações de tensões normais ao longo do comprimento da viga, tanto sob o aspecto de resistência do concreto, quanto das armaduras necessárias para resistir às trações decorrentes desses efeitos. As armaduras de flexão da laje, existentes no plano de ligação, podem ser consideradas parte da armadura de ligação, quando devidamente ancoradas, complementando-se a diferença entre ambas, se necessário. A seção transversal mínima dessa armadura, estendendo-se por toda a largura útil e adequadamente ancorada, deve ser de $1,5 \text{ cm}^2$ por metro.”, como indicado na Figura 10.

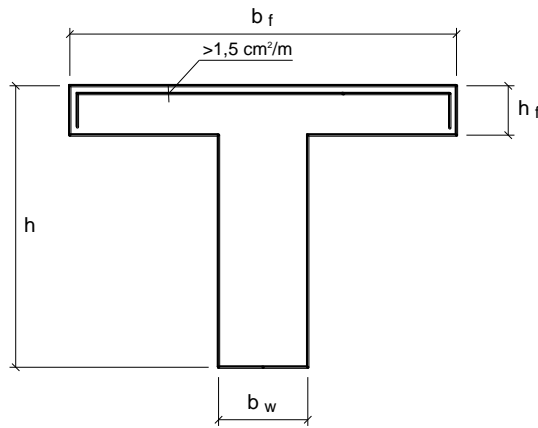


Figura 10 – Armadura transversal à alma em seções transversais com mesa.

5.4.5 Espaçamento Livre entre as Faces das Barras Longitudinais

A fim de garantir que o concreto penetre com facilidade dentro da fôrma e envolva completamente as barras de aço das armaduras, a NBR 6118 (18.3.2.2) estabelece os seguintes espaçamentos livres mínimos entre as faces das barras longitudinais (Figura 11) (NBR 6118, 18.3.2.2):

- na direção horizontal (a_h):

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2 d_{\text{máx,agr}} \end{cases} \quad \text{Eq. 10}$$

- na direção vertical (a_v):

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 0,5 d_{\text{máx,agr}} \end{cases} \quad \text{Eq. 11}$$

$a_{h,\min}$ = espaçamento livre horizontal mínimo entre as faces de duas barras da mesma camada;
 $a_{v,\min}$ = espaçamento livre vertical mínimo entre as faces de duas barras de camadas adjacentes;
 $d_{\text{máx,agr}}$ = dimensão máxima característica do agregado graúdo utilizado no concreto;
 ϕ_ℓ = diâmetro da barra, do feixe ou da luva.

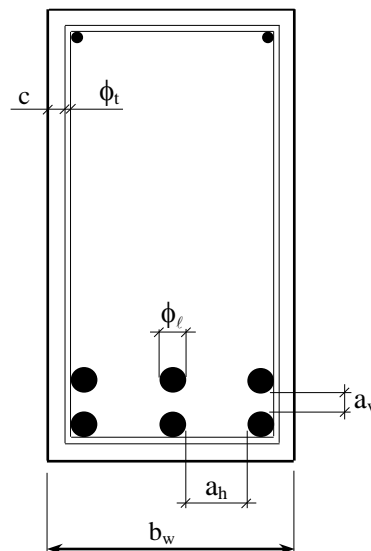


Figura 11 – Espaçamentos livres mínimos entre as faces das barras de aço longitudinais.

5.4.6 Condição para a Posição da Força Resultante na Armadura

Tanto para armaduras ativas e passivas a NBR 6118 (17.2.4.1) especifica que “Os esforços nas armaduras podem ser considerados concentrados no centro de gravidade correspondente, se a distância deste centro de gravidade ao centro da armadura mais afastada, medida normalmente à linha neutra, for menor que 10 % de h . A Figura 12 ilustra a condição.”³

As armaduras laterais de vigas podem ser consideradas no cálculo dos esforços resistentes, desde que estejam convenientemente ancoradas e emendadas.”

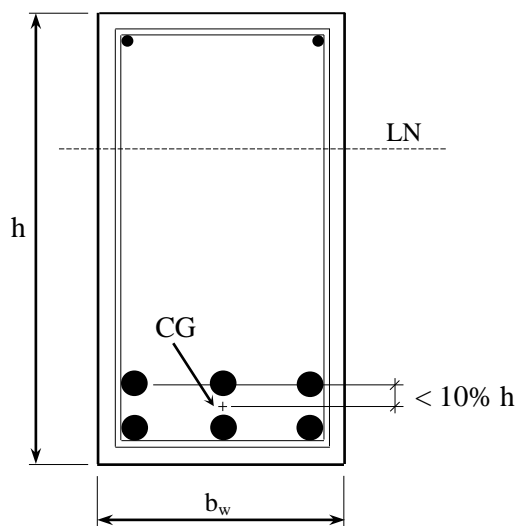


Figura 12 – Posição da força resultante na armadura.

6. HIPÓTESES BÁSICAS

As hipóteses descritas a seguir são válidas para elementos lineares sujeitos a solicitações normais no Estado-Limite Último (ELU), que possibilitam estabelecer critérios para a determinação de esforços resistentes de seções de elementos como vigas, pilares e tirantes, submetidos à força normal e momentos fletores (NBR 6118, item 17.2).

- as seções transversais permanecem planas após a deformação (distribuição linear de deformações na seção);
- a deformação em cada barra de aço é a mesma do concreto no seu entorno. Essa propriedade ocorre desde que haja aderência entre o concreto e a barra de aço;
- no Estado-Limite Último (ELU) despreza-se obrigatoriamente a resistência do concreto à tração;
- o ELU é caracterizado segundo os domínios de deformação;
- o alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração é de 10 ‰, a fim de prevenir deformações plásticas excessivas. A tensão nas armaduras deve ser obtida conforme o diagrama tensão-deformação de cálculo do aço (ver Figura 6);
- a distribuição de tensões de compressão no concreto é feita de acordo com o diagrama tensão-deformação *parábola-retângulo*, com tensão máxima σ_{cd} (Figura 13). Esse diagrama pode ser substituído por um retangular, simplificado, com profundidade $y = \lambda x$, onde:

$$y = 0,8x \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa});$$

$$y = [0,8 - (f_{ck} - 50)/400] x \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

Eq. 12

³ Esta condição dificilmente não é atendida em vigas correntes.

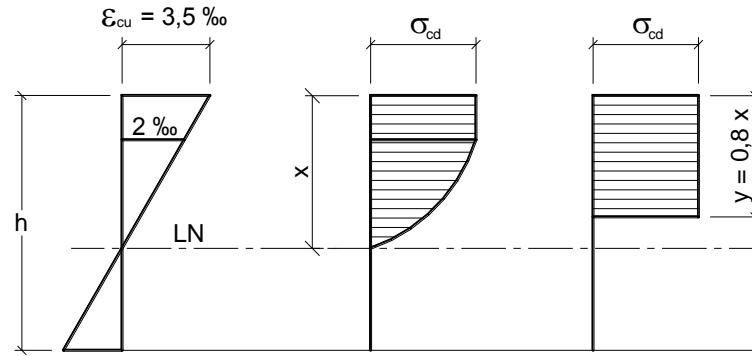


Figura 13 – Diagramas $\sigma \times \varepsilon$ parábola-retângulo e retangular simplificado para distribuição de tensões de compressão no concreto, para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

A tensão de compressão no concreto (σ_{cd}) pode ser tomada como:

f1) no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir da linha neutra em direção à borda comprimida (Figura 14), a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} = \frac{0,85f_{ck}}{\gamma_c} \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 13}$$

$$\sigma_{cd} = [1 - (f_{ck} - 50/200)] 0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

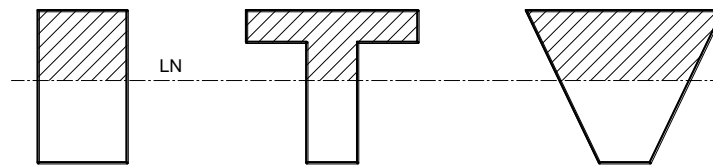


Figura 14 - Seções onde a largura não diminui da linha neutra em direção à borda comprimida.

f2) em caso contrário, isto é, quando a seção diminui (Figura 15), a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot 0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 14}$$

$$\sigma_{cd} = 0,9[1 - (f_{ck} - 50/200)] 0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

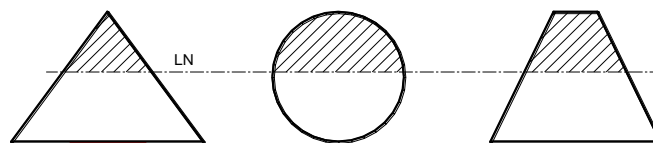


Figura 15 - Seções onde a largura diminui da linha neutra em direção à borda comprimida.

7. SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA SIMPLES

Embora as vigas possam ter a seção transversal com qualquer forma geométrica, a seção retangular é a mais comum.

Define-se **viga com armadura simples** a seção que necessita apenas de uma armadura longitudinal resistente tracionada. No entanto, por questões construtivas são colocadas barras longitudinais também na região comprimida, para a amarração dos estribos, não sendo esta armadura considerada no cálculo de flexão como armadura resistente, ou seja, na seção com armadura simples as tensões de compressão são resistidas unicamente pelo concreto.

No item 8 será estudada a **seção com armadura dupla**, que é aquela que necessita também de uma armadura resistente comprimida, além da armadura tracionada.

Na sequência são deduzidas as equações válidas apenas para a seção retangular, e para os concretos do Grupo I. As equações para outras formas geométricas da seção transversal podem ser deduzidas de modo semelhante à dedução seguinte.

7.1 Equações de Equilíbrio

A formulação dos esforços internos resistentes da seção é feita com base nas equações de equilíbrio das forças normais e dos momentos fletores:

$$\sum N = 0 \quad ; \quad \sum M = 0$$

A Figura 16 mostra a seção transversal de uma viga sob Flexão Simples, de forma retangular e solicitada por momento fletor positivo, com largura b_w e altura h , armadura A_s e área A'_c de concreto comprimido, delimitada pela linha neutra (LN). A linha neutra é demarcada pela distância x , contada a partir da fibra mais comprimida da seção transversal. A altura útil é d , considerada da fibra mais comprimida até o centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada.

O diagrama de deformações ao longo da altura da seção, com as deformações notáveis ϵ_{cd} (máxima deformação de encurtamento do concreto comprimido) e ϵ_{sd} (deformação de alongamento na armadura tracionada) e o diagrama retangular simplificado de distribuição de tensões de compressão, com altura $y = 0,8x$ (Eq. 12), e as respectivas resultantes de tensão (R_{cc} e R_{st}) estão também mostrados na Figura 16. Observe que a altura do diagrama ($y = 0,8x$) e a tensão de compressão no concreto (σ_{cd}) são valores válidos para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa). Para os concretos do Grupo II esses valores são diferentes. A Figura 17 também é válida apenas para os concretos do Grupo I.

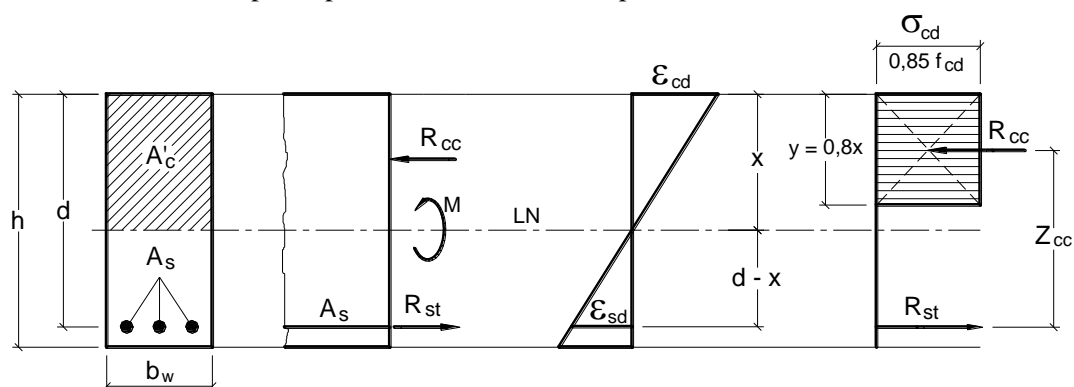


Figura 16 – Distribuição de tensões e deformações em viga de seção retangular com armadura simples, para concretos do Grupo I.

Para ilustrar melhor a forma de distribuição das tensões de compressão na seção, a Figura 17 mostra a seção transversal em perspectiva, com os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado, como apresentados no item 5. O equacionamento apresentado a seguir será feito segundo o diagrama retangular simplificado, que conduz a equações mais simples e com resultados muito próximos àqueles obtidos com o diagrama parábola-retângulo.

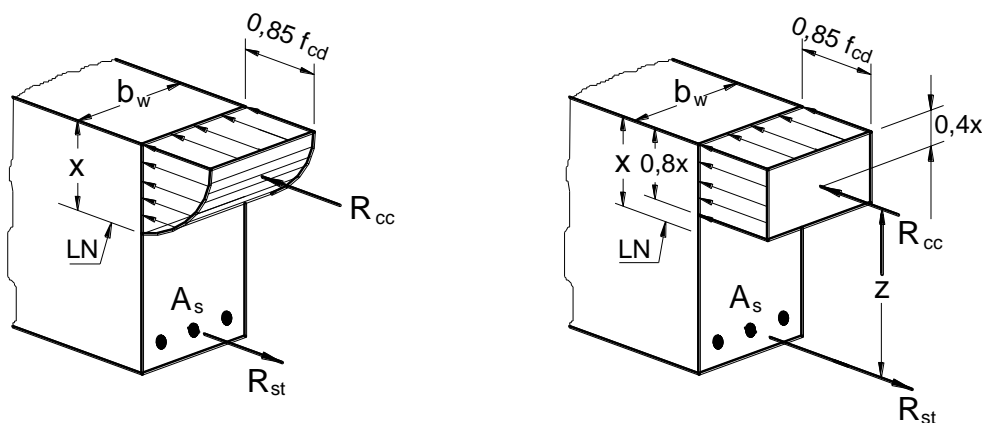


Figura 17 – Distribuição de tensões de compressão segundo os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado, para concretos do Grupo I.

a) Equilíbrio de Forças Normais

Considerando que na Flexão Simples não ocorrem forças normais solicitantes, e que a força resultante das tensões de compressão no concreto deve estar em equilíbrio com a força resultante das tensões de tração na armadura A_s , como indicadas na Figura 16, pode-se escrever:

$$R_{cc} = R_{st} \quad \text{Eq. 15}$$

Tomando da Resistência dos Materiais que $\sigma = R/A$, a força resultante das tensões de compressão no concreto, considerando o diagrama retangular simplificado, pode ser escrita como:

$$R_{cc} = \sigma_{cd} A'_c$$

Considerando a área de concreto comprimido (A'_c) correspondente ao diagrama retangular simplificado com altura $0,8x$ fica:

$$R_{cc} = 0,85f_{cd} 0,8x b_w$$

$$R_{cc} = 0,68b_w x f_{cd} \quad \text{Eq. 16}$$

e a força resultante das tensões de tração na armadura tracionada:

$$R_{st} = \sigma_{sd} A_s \quad \text{Eq. 17}$$

σ_{sd} = tensão de cálculo na armadura tracionada;

A_s = área de aço da armadura tracionada.

b) Equilíbrio de Momentos Fletores

Considerando o equilíbrio de momentos fletores na seção, o momento fletor solicitante (M_{solic}) deve ser equilibrado por um momento fletor resistente (M_{resist}), proporcionado pelo concreto comprimido e pela armadura tracionada. Assumindo valores de cálculo, por simplicidade de notação ambos os momentos fletores devem ser iguais ao momento fletor de cálculo M_d , tal que:

$$M_{solic} = M_{resist} = M_d$$

As forças resistentes internas, proporcionadas pelo concreto comprimido e pela armadura tracionada, formam um binário oposto ao momento fletor solicitante, podendo-se escrever:

$$M_d = R_{cc} \cdot z_{cc} \quad \text{Eq. 18}$$

$$M_d = R_{st} \cdot z_{cc} \quad \text{Eq. 19}$$

$R_{cc} \cdot z_{cc}$ = momento fletor interno resistente, proporcionado pelo concreto comprimido;

$R_{st} \cdot z_{cc}$ = momento fletor interno resistente, proporcionado pela armadura tracionada.

Com $z_{cc} = d - 0,4x$ e aplicando a Eq. 16 na Eq. 18 fica:

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd} (d - 0,4x) \quad \text{Eq. 20}$$

b_w = largura da seção;

x = posição da linha neutra;

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão;

d = altura útil.

M_d é definido como o momento fletor interno resistente proporcionado pelo concreto comprimido, e **deve ser considerado em valor absoluto** na Eq. 20, bem como nas demais equações.

Substituindo a Eq. 17 na Eq. 19 define-se o momento fletor interno resistente proporcionado pela armadura tracionada:

$$M_d = \sigma_{sd} A_s (d - 0,4x) \quad \text{Eq. 21}$$

Isolando a área de armadura tracionada:

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} \quad \text{Eq. 22}$$

As Eq. 20 e Eq. 22 proporcionam o dimensionamento de **seções retangulares com armadura simples**. Nota-se que são sete as variáveis contidas nas duas equações, o que leva, portanto, à necessidade de adotar um valor para cada uma das outras cinco variáveis. De modo geral, nos problemas da prática escolhem-se os materiais (concreto e aço) e as dimensões da seção transversal (b_w e h), e sendo o momento fletor solicitante conhecido (M_d), ficam como incógnitas apenas a posição da linha neutra (x) e a área de armadura de flexão (A_s). É o chamado problema de dimensionamento.

Complementando: com a Eq. 20 determina-se a posição x para a linha neutra, e comparando x com os valores x_{2lim} e x_{3lim} define-se qual o domínio em que a viga se encontra (2, 3 ou 4). Nos domínios 2 ou 3 a tensão na armadura tracionada (σ_{sd}) é igual à máxima tensão possível, isto é, f_{yd} (ver diagramas nas Figura 5 e Figura 6). Definidos x e σ_{sd} calcula-se a área de armadura tracionada (A_s) com a Eq. 22.

No entanto, deve ser analisada a relação entre a posição da linha neutra e a altura útil (x/d), de modo a obedecer limites impostos pela norma para esta relação. No item 14.6.4.3 a NBR 6118 apresenta limites para redistribuição de momentos fletores e condições de ductilidade, afirmando que “a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for x/d , tanto maior será essa capacidade”. E para “proporcionar o adequado comportamento dútil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

a) $x/d \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;

b) $x/d \leq 0,35$ para concretos com $50 < f_{ck} \leq 90$ MPa.

Eq. 23

“Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como, por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões.”

Portanto, se resultar o domínio 4 ou o 3 com x/d maior que o valor limite, alguma alteração deve ser feita de modo a diminuir x/d . Conforme a Eq. 20 verifica-se que podem ser soluções:

- diminuir o valor do momento fletor solicitante (M_d);
- aumentar a resistência do concreto;
- aumentar a largura, ou a altura da viga (e consequentemente maior d).

Dessas possibilidades, geralmente a solução mais viável de ser implementada na prática é o aumento da altura da viga (h). Mas neste caso deve-se sempre verificar se o projeto arquitetônico permite. E quando nenhuma alteração pode ser feita, resta estudar a possibilidade de dimensionar a seção com armadura dupla, como será visto no item 8.

A versão anterior da NBR 6118, de 2003, indicava os limites da Eq. 23 para os casos de seções transversais no apoio ou na ligação de viga com outros elementos estruturais. Na versão de 2014, embora de maneira não explícita, foi introduzida uma alteração, isto é, os limites da Eq. 23 passaram a ser válidos também para seções sob momentos fletores positivos. Como no caso de vigas simples biapoiadas, por exemplo.

c) Permanência da Seção Plana

Do diagrama de deformações mostrado na Figura 16 define-se a relação entre as deformações de cálculo na armadura (ε_{sd}) e no concreto correspondente à fibra mais comprimida:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{sd}} = \frac{x}{d - x} \quad \text{Eq. 24}$$

Considerando-se a variável β_x , que relaciona a posição da linha neutra com a altura útil d , tem-se:

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad \text{Eq. 25}$$

Substituindo x por $\beta_x \cdot d$ na Eq. 24 fica:

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{sd}} \quad \text{Eq. 26}$$

7.2 Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K

Com o intuito de facilitar o cálculo manual, há muitos anos vem se ensinando no Brasil o dimensionamento de vigas com a utilização de tabelas com coeficientes K. Para diferentes posições da linha neutra, expressa pela relação $\beta_x = x/d$, são tabelados coeficientes K_c e K_s , relativos à resistência do concreto e à tensão na armadura tracionada.

Os coeficientes K_c e K_s encontram-se apresentados na Tabela A-1 e na Tabela A-2, constantes do Anexo no final desta apostila. A Tabela A-1 é para apenas o aço CA-50 e a Tabela A-2 é para todos os tipos de aço aplicados no Concreto Armado. Ambas as tabelas são válidas apenas para os concretos do Grupo I ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

Considerando a Eq. 20 ($M_d = 0,68b_w \times f_{cd} (d - 0,4x)$), substituindo x por $\beta_x \cdot d$ encontra-se:

$$M_d = 0,68b_w \beta_x d f_{cd} (d - 0,4\beta_x d)$$

$$M_d = 0,68b_w \beta_x d^2 f_{cd} (1 - 0,4\beta_x)$$

Introduzindo o coeficiente K_c :

$$M_d = \frac{b_w d^2}{K_c}, \text{ com:}$$

$$\frac{1}{K_c} = 0,68\beta_x f_{cd}(1 - 0,4\beta_x) \quad \text{Eq. 27}$$

Isolando o coeficiente K_c tem-se:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} \quad \text{Eq. 28}$$

O coeficiente K_c está apresentado na Tabela A-1 e Tabela A-2. Observe na Eq. 27 que K_c depende da resistência do concreto à compressão (f_{cd}) e da posição da linha neutra, expressa pela variável β_x .

O coeficiente tabelado K_s é definido substituindo-se x por $\beta_x \cdot d$ na Eq. 22:

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} \rightarrow A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(1 - 0,4\beta_x)d}$$

com:

$$K_s = \frac{1}{\sigma_{sd}(1 - 0,4\beta_x)} \quad \text{Eq. 29}$$

a área de armadura tracionada A_s , em função do coeficiente K_s é:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} \quad \text{Eq. 30}$$

O coeficiente K_s está apresentado na Tabela A-1 e na Tabela A-2. Observe que K_s depende da tensão na armadura tracionada (σ_{sd}) e da posição da linha neutra, expressa por β_x .

É muito importante observar que os coeficientes K foram calculados considerando as unidades de kN e cm, de modo que as variáveis mostradas na Eq. 28 e na Eq. 30 (b_w , d , M_d) devem ter essas unidades.

7.3 Exemplos Numéricos

As vigas têm basicamente dois tipos de problemas para serem resolvidos: de dimensionamento e de verificação. O **dimensionamento** consiste em se determinar qual a armadura necessária para uma viga, sendo previamente conhecidos: os materiais, a seção transversal e o momento fletor solicitante. Esse tipo de cálculo normalmente é feito durante a fase de projeto das estruturas, para a sua futura construção. Nos problemas de **verificação** a incógnita principal é o máximo momento fletor que a seção pode resistir. Problemas de verificação normalmente ocorrem quando a viga pertence a uma construção já executada e em utilização, e se deseja conhecer a capacidade de carga de uma viga. Para isso é necessário conhecer os materiais que compõem a viga, como a classe do concreto (f_{ck}), o tipo de aço, a quantidade de armadura e o seu posicionamento na seção transversal, as dimensões da seção transversal, etc.

Na grande maioria dos casos da prática os problemas são de **dimensionamento**, e esporadicamente ocorrem os problemas de verificação. Na sequência, os três primeiros exemplos numéricos são de dimensionamento, e os dois últimos de verificação. Após o estudo dos exemplos o estudante pode iniciar os exercícios propostos no item 10.

1º) Para a viga biapoiada indicada na Figura 18, calcular a área de armadura longitudinal de flexão e as deformações na fibra de concreto mais comprimida e na armadura de flexão tracionada. São conhecidos:

$$M_{k,máx} = + 10.000 \text{ kN.cm}$$

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4 \quad ; \quad \gamma_s = 1,15$$

concreto C20 ($f_{ck} = 20 \text{ MPa}$, Grupo I)

aço CA-50

$\phi_t = 5 \text{ mm}$ (diâmetro do estribo)

concreto com brita 1 ($d_{máx} = 19 \text{ mm}$), sem brita 2

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$d = 47 \text{ cm (altura útil)}$$

$$c = 2,0 \text{ cm (cobrimento nominal)}$$

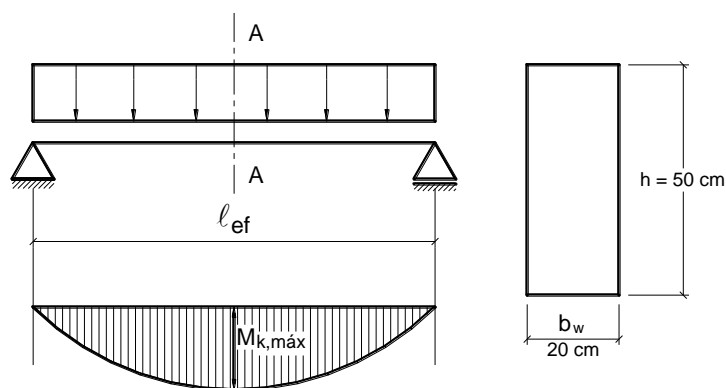


Figura 18 - Viga biapoiada.

RESOLUÇÃO

O problema é de dimensionamento, aquele que mais ocorre no dia a dia do engenheiro estrutural. A incógnita principal é a área de armadura tracionada (A_s), além da posição da linha neutra, dada pela variável x , que deve ser determinada primeiramente. A resolução será feita segundo as equações teóricas deduzidas do equilíbrio da seção (Eq. 20 e Eq. 22), e também com aplicação das equações com coeficientes K tabelados (Eq. 28 e Eq. 30).

O momento fletor de cálculo máximo para a viga é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_{k,máx} = 1,4 \cdot 10000 = 14.000 \text{ kN.cm}$$

sendo γ_f o coeficiente de ponderação que majora os esforços solicitantes.

O valor $x_{2\text{lim}}$ delimita os domínios 2 e 3, e para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa) é fixo e igual a $0,26d$:

$$x_{2\text{lim}} = 0,26d = 0,26 \cdot 47 = 12,2 \text{ cm}$$

O valor $x_{3\text{lim}}$ delimita os domínios 3 e 4, e para os concretos do Grupo I e aço CA-50, $x_{3\text{lim}}$ é igual a $0,63d$ (ver Tabela 1):

$$x_{3\text{lim}} = 0,63d = 0,63 \cdot 47 = 29,6 \text{ cm}$$

a) Resolução com Equações Teóricas

Com a Eq. 20 determina-se a posição (x) da linha neutra para a seção, sendo $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$:

$$M_d = 0,68b_w \times f_{cd}(d - 0,4x) \rightarrow 14.000 = 0,68 \cdot 20 \times \frac{2,0}{1,4}(47 - 0,4x)$$

$$x^2 - 117,5x + 18018 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 99,4 \text{ cm} \\ x_2 = 18,1 \text{ cm} \end{cases}$$

A primeira raiz não interessa, pois $99,4 \text{ cm} > h = 50 \text{ cm}$. Portanto, $x = 18,1 \text{ cm}$, como mostrado na Figura 19. Como o momento fletor solicitante tem sinal positivo, a posição da linha neutra deve ser medida a partir da borda superior comprimida.

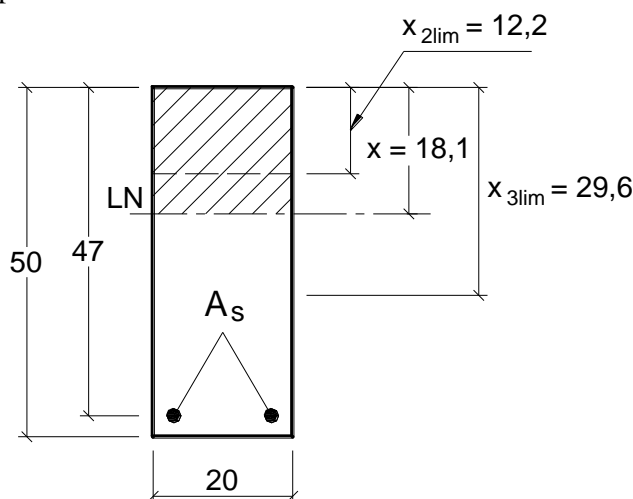


Figura 19 - Posição da linha neutra na seção transversal e limites entre os domínios 2, 3 e 4.

Observe que as unidades adotadas para as variáveis da Eq. 20 foram o kN e o cm. Se outras unidades diferentes forem adotadas deve-se tomar o cuidado de mantê-las em todas as variáveis. É importante também observar que o momento fletor deve ser colocado na equação sempre com o seu valor absoluto.⁴

Comparando a posição da linha neutra (x) com os limites $x_{2\text{lim}}$ e $x_{3\text{lim}}$ determina-se o domínio no qual a viga se encontra:

$$x_{2\text{lim}} = 12,2 \text{ cm} < x = 18,1 \text{ cm} < x_{3\text{lim}} = 29,6 \text{ cm}$$

Como a linha neutra está no intervalo entre $x_{2\text{lim}}$ e $x_{3\text{lim}}$ (ver a Figura 19), verifica-se que a viga está no domínio 3. Conforme os limites estabelecidos na Eq. 23 e para o concreto C20 ($f_{ck} = 20$ MPa), tem-se:

$$\frac{x}{d} = \frac{18,1}{47} = 0,39 \leq 0,45 \rightarrow \text{ok!}$$

como o valor limite foi atendido, nenhuma alteração é necessária e a viga pode ter a armadura determinada.

⁴ O momento fletor positivo traciona a parte inferior da viga, e para resistir a ele é colocada uma armadura longitudinal chamada “armadura positiva”. No caso de momento fletor negativo é colocada a “armadura negativa”, próxima à borda superior da viga.

No domínio 3 a deformação na armadura varia de ε_{yd} (início de escoamento do aço) a 10 ‰ (ver Figura 5). Conforme o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço (Figura 6), a tensão nesta faixa de deformação é $\sigma_{sd} = f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ (para o aço CA-50, $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2 = 500 \text{ MPa}$). A área de armadura é calculada com a Eq. 22:

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} \rightarrow A_s = \frac{14.000}{\frac{50}{1,15}(47 - 0,4 \cdot 18,1)} = 8,10 \text{ cm}^2$$

A armadura calculada ($A_s = 8,10 \text{ cm}^2$) deve ser comparada à armadura mínima de flexão preconizada pela NBR 6118. Conforme a Tabela 2, para concreto C20 e seção retangular, a armadura mínima de flexão é:

$$A_{s,\min} = \rho_{\min} A_c = 0,15 \% b_w h = 0,0015 \cdot 20 \cdot 50 = 1,50 \text{ cm}^2$$

Verifica-se que a armadura calculada de $8,10 \text{ cm}^2$ é maior que a armadura mínima ($1,50 \text{ cm}^2$). Quando a armadura calculada for menor que a armadura mínima, deve ser disposta a área da armadura mínima na seção transversal da viga.

b) Resolução com Equações com Coeficientes K

Nas equações com coeficientes K devem ser obrigatoriamente consideradas as unidades de kN e cm para as variáveis. Primeiramente deve-se determinar o coeficiente K_c (Eq. 28):

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{20 \cdot 47^2}{14.000} = 3,2$$

com $K_c = 3,2$, concreto C20 e aço CA-50, na Tabela A-1 determinam-se os coeficientes $\beta_x = 0,38$, $K_s = 0,027$ e domínio 3. A posição da linha neutra fica determinada com a Eq. 25:

$$\beta_x = \frac{x}{d} \rightarrow x = \beta_x \cdot d = 0,38 \cdot 47 = 17,9 \text{ cm}$$

Como $\beta_x = x/d = 0,38$ é menor que o valor limite de 0,45, para concreto C20 e conforme a Eq. 23, nenhuma alteração é necessária e a armadura pode ser calculada, com a Eq. 30:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,027 \frac{14.000}{47} = 8,04 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,50 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok!}$$

Comparando os resultados obtidos segundo as duas formulações verifica-se que os valores são muito próximos.⁵

c) Detalhamento da armadura na seção transversal

A área de aço a ser escolhida deve atender à área de armadura calculada, preferencialmente com uma pequena folga.⁶ A escolha do diâmetro e do número de barras para atender à área de armadura calculada admite diversas possibilidades. Um ou mais diâmetros diferentes podem ser escolhidos, e neste caso preferencialmente diâmetros próximos entre si. O número de barras deve ser aquele que não resulte em uma fissuração significativa na viga e nem dificuldades adicionais durante a confecção e montagem da armadura.⁷

Com auxílio da Tabela A-3 ou da Tabela A-4, podem ser enumerados os seguintes arranjos de barras para a área de armadura calculada neste exemplo, de $8,10 \text{ cm}^2$.⁸

⁵ Pequenas diferenças entre os valores calculados segundo as duas formulações podem ocorrer porque os valores apresentados na Tabela A-1 são aproximados, mas não conduzem a diferenças importantes.

⁶ Como nossa sugestão, admitimos como área a ser escolhida o valor mínimo $0,95A_s$, ou seja, uma área até 5 % inferior à armadura calculada.

⁷ A fissuração é diminuída quanto mais barras de menor diâmetro são utilizadas. Porém, deve-se cuidar para não ocorrer exageros e aumentar o trabalho de montagem da armadura.

⁸ Outras combinações de número de barras e de diâmetros podem ser enumeradas.

Arranjo	16 ϕ 8	10 ϕ 10	7 ϕ 12,5	4 ϕ 16	3 ϕ 16 + 2 ϕ 12,5	3 ϕ 20	2 ϕ 20 + 1 ϕ 16	2 ϕ 20 + 2 ϕ 12,5
Área (cm ²)	8,00	8,00	8,75	8,00	8,50	9,45	8,30	8,80
Diâmetros ϕ em mm								

A escolha de uma das combinações apresentadas deve levar em conta os seguintes fatores: menor fissuração, facilidade de execução da armadura, porte da obra, número de camadas de barras, exequibilidade (largura da viga principalmente), custo, entre outros.

Define-se como camada as barras que encontram-se em uma mesma linha paralela à linha de borda inferior ou superior da seção transversal. O menor número possível de camadas deve ser um dos objetivos no detalhamento. Detalhamentos com uma única camada de barras resultam seções mais resistentes que seções com duas ou mais camadas, pois quanto mais próximo o centro de gravidade da armadura estiver da borda tracionada, maior será a resistência da seção.

Das combinações listadas na tabela, 16 ϕ 8 mm e 10 ϕ 10 mm devem ser descartadas, porque o número de barras é excessivo neste exemplo, e acarreta consequentemente um aumento de trabalho do “**Armador**” (pessoa responsável pela confecção das armaduras nas construções). Por outro lado, as três últimas combinações, com diâmetro de 20 mm, não são ideais para a fissuração, além de que barras de 20 mm representam dificuldades maiores no manuseio, confecção de ganchos, etc. Entre os diferentes arranjos, os melhores são 7 ϕ 12,5 mm e 4 ϕ 16 mm, sendo o primeiro melhor quanto à questão de menor fissuração. No entanto, o segundo arranjo não deverá resultar em fissuração inaceitável, conforme os critérios estabelecidos na NBR 6118.⁹

Na escolha entre 7 ϕ 12,5 e 4 ϕ 16 mm deve-se também considerar o porte da obra. Construções de pequeno porte devem ter especificados diâmetros preferencialmente até 12,5 mm, pois a maioria delas não têm máquinas elétricas de corte de barras, que são cortadas com serras ou guilhotinas manuais (comumente com capacidade de corte de barras até 12,5 mm).¹⁰ Além disso, as armaduras não são cortadas e montadas por Armadores profissionais. E muitas vezes não existem bancadas de trabalho adequadas para o dobramento de barras. De modo que recomendamos diâmetros até 12,5 mm para obras de pequeno porte, e acima de 12,5 mm somente para obras de médio e grande porte, com existência de Armadores profissionais.¹¹

Como o momento fletor solicitante tem sinal positivo, é extremamente importante que a armadura A_s calculada seja disposta próxima à borda inferior da viga. A posição correta da armadura deve ser uma preocupação tanto no projeto quanto na execução, a fim de evitar falhas graves.¹²

A disposição das barras entre os ramos verticais dos estribos deve proporcionar uma distância livre entre as barras suficiente para a passagem do concreto, a fim de evitar o surgimento de nichos de concretagem, chamados na prática de “bicheira”. Para isso, conforme apresentado na Eq. 10, o espaçamento livre horizontal mínimo entre as barras é dado por:

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2 d_{\max,agr} \end{cases}$$

Quando as barras de uma camada têm um mesmo diâmetro, a verificação da Eq. 10 pode ser feita com auxílio da Tabela A-4, que mostra a “**Largura b_w mínima**” para um dado cobrimento nominal (c). Determina-se a largura mínima na intersecção entre a coluna com o número de barras e a linha com o diâmetro das barras, considerando concreto com brita 1 apenas ou concreto com brita 2 também.¹³ Quando as barras de uma mesma camada têm diâmetros diferentes, a Tabela A-4 não pode ser aplicada, e neste caso a distância livre entre as barras deve ser calculada e comparada à distância livre mínima ($a_{h,\min}$) dada na Eq. 10.

A Figura 20 mostra o detalhamento da armadura na seção transversal da viga, onde foi adotada a combinação 4 ϕ 16 mm (a combinação 7 ϕ 12,5 mm deve ser feita como atividade do estudante). Para 4 ϕ 16 mm, na Tabela A-4 encontra-se a largura mínima de 19 cm para concreto com brita 1 e cobrimento de 2,0

⁹ O estudo da fissuração em vigas será apresentado em outra disciplina.

¹⁰ Guilhotinas maiores não são comuns em obras de pequeno porte.

¹¹ Pode ser verificada a possibilidade de existência de empresas especializadas em confecção e montagem de armaduras prontas para a obra.

¹² Erros grosseiros no posicionamento das armaduras, como a inversão entre as bordas inferior e superior, podem resultar sérios comprometimentos para a viga em serviço, inclusive com o colapso imediato após a retirada de escoramentos. Vigas e lajes em balanço devem ter atenção redobrada.

¹³ O valor da largura mínima b_w depende do diâmetro máximo da brita de maior dimensão utilizada no concreto.

cm.¹⁴ Como a largura da viga é 20 cm, maior que a largura mínima, é possível alojar as quatro barras em uma única camada, atendendo portanto ao espaçamento livre mínimo.

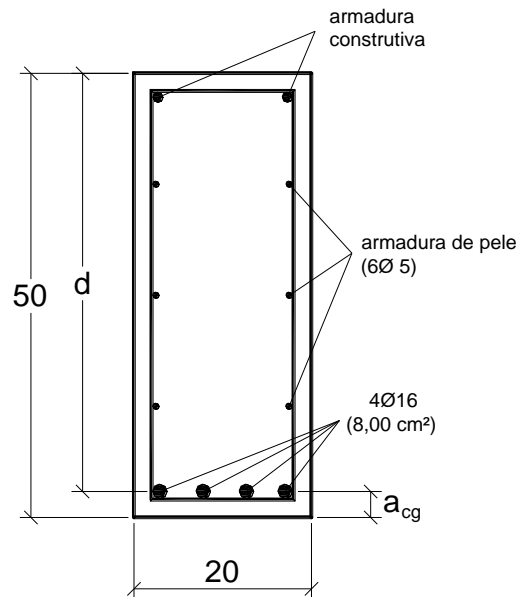


Figura 20 – Detalhamento da armadura longitudinal A_s na seção transversal.

A distância a_{cg} , medida entre o centro de gravidade da armadura A_s e a fibra mais tracionada da seção transversal, é dada neste caso pela soma do cobrimento ($c = 2,0$ cm) com o diâmetro do estribo ($\phi_t = 5$ mm) e metade do diâmetro da barra da armadura A_s :

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_s/2 = 2,0 + 0,5 + 1,6/2 = 3,3 \text{ cm}$$

A altura útil d , definida como a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada A_s à fibra mais comprimida da seção transversal, conforme o detalhamento da Figura 20, é:

$$d = h - a_{cg} = 50 - 3,3 = 46,7 \text{ cm}$$

O valor inicialmente adotado para a altura útil d foi 47 cm. Existe, portanto, uma pequena diferença de 0,3 cm entre o valor inicialmente adotado e o valor real calculado em função do detalhamento escolhido. Em vigas de seções transversais correntes em obras, pequenas diferenças de até 1,5 cm entre a altura útil adotada no cálculo e a resultante do detalhamento da armadura na seção, podem ser desconsideradas, não havendo a necessidade de se recalculer a armadura, pois as diferenças geralmente são pequenas.¹⁵

Embora a norma indique a armadura de pele para vigas somente com $h > 60$ cm (ver Eq. 9), recomendamos a sua aplicação quando $h \geq 50$ cm, para evitar o aparecimento de fissuras por efeito de retração do concreto, com área igual àquela indicada na antiga NB1 de 1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h = 0,0005 \cdot 20 \cdot 50 = 0,50 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,60 \text{ cm}^2 \text{ em cada face vertical})$$

Além da armadura tracionada A_s devem ser dispostas também no mínimo duas barras na borda superior da seção, barras construtivas chamadas “porta-estribos”, que servem para a amarração dos estribos da viga.¹⁶

d) Deformações na fibra mais comprimida de concreto e na armadura tracionada

¹⁴ Observar na parte inferior da tabela que a largura mínima depende do cobrimento c , devendo ser aumentada quando c for maior que 2,0 cm. Notar que a tabela foi desenvolvida com diâmetro de 6,3 mm para o estribo.

¹⁵ Quando não houver certeza quanto à pequena e desprezível diferença, a armadura pode ser recalculada com a altura útil resultante do detalhamento.

¹⁶ Armaduras construtivas são muito comuns nos elementos estruturais de Concreto Armado, e embora não sejam levadas em conta nos cálculos, colaboram com a resistência dos elementos e auxiliam na confecção e montagem das armaduras.

No domínio 3 a deformação de encurtamento na fibra de concreto mais comprimida é fixa e igual a 3,5 ‰ para os concretos do Grupo I. A deformação na armadura A_s varia de ϵ_{yd} (2,07 ‰ para o aço CA-50) a 10 ‰, podendo ser calculada com a Eq. 24. Considerando $d = 46,7$ cm conforme determinado no detalhamento mostrado na Figura 20:

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{sd}} = \frac{x}{d-x} \Rightarrow \frac{3,5}{\epsilon_{sd}} = \frac{18,1}{46,7-18,1} \rightarrow \epsilon_{sd} = 5,5 \text{ ‰} \quad (\text{ver Figura 21})$$

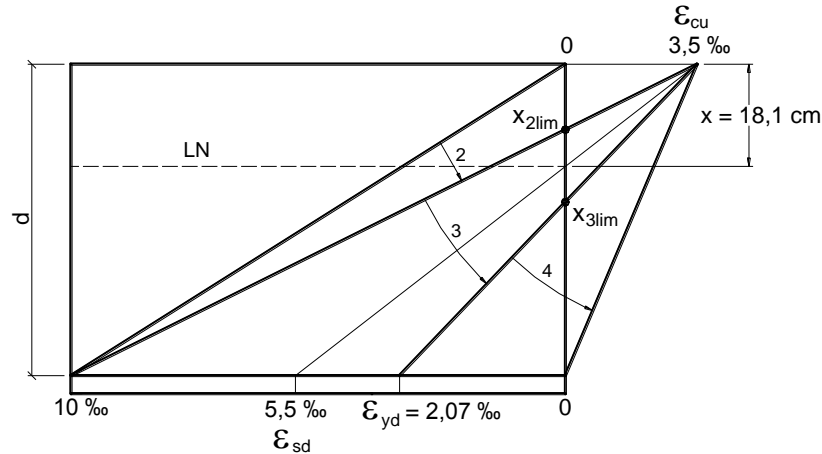


Figura 21 – Domínios 2, 3 e 4 e deformações ϵ_{cd} e ϵ_{sd} para a viga em estudo, com aço CA-50 e concreto do Grupo I.

2º) Calcular a altura útil (**d**) e a armadura longitudinal de flexão (**A_s**), para o máximo momento fletor positivo da viga de seção retangular, mostrada na Figura 22. Dados:

concreto C25

aço CA-50

$b_w = 20$ cm

$M_{k,máx} = + 12.570$ kN.cm

$\phi_t = 5$ mm (diâmetro do estribo)

$c = 2,5$ cm

concreto com brita 1

$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$; $\gamma_s = 1,15$

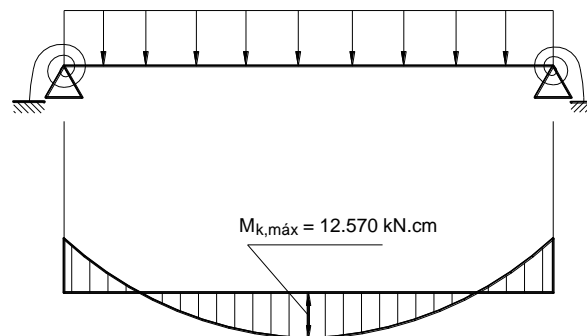


Figura 22 – Esquema estático e diagrama de momentos fletores.

RESOLUÇÃO

Como a altura da viga não está fixada, dado que a altura útil **d** é uma incógnita, o problema admite infinitas soluções, tanto no domínio 2 como no domínio 3, desde que no domínio 3 sejam obedecidos os limites estabelecidos na Eq. 23. No domínio 4 não se admite o dimensionamento, mesmo porque os limites da Eq. 23 seriam ultrapassados.

O problema é resolvido fixando-se a posição da linha neutra, isto é, adotando-se um valor para **x**. Para cada **x** adotado resulta um par **d** e **A_s**. Conforme a Eq. 23, a posição da linha neutra pode variar de zero até o limite $\beta_x = x/d = 0,45$ (para o concreto C25, pertencente ao Grupo I), dentro do domínio 3. Com o objetivo de mostrar duas soluções entre as infinitas existentes, o exemplo será resolvido com a linha neutra fixada nas seguintes posições: no limite entre os domínios 2 e 3 ($x = x_{2lim}$) e no valor máximo $x/d = 0,45$. Ambas as soluções visam dimensionar a viga com **armadura simples**, pois outras soluções possíveis com armadura dupla não serão apresentadas neste exemplo.

A resolução será feita segundo as equações do tipo K, ficando a resolução com as equações teóricas como tarefa para o estudante. O cálculo com as equações teóricas (Eq. 20 e Eq. 22) faz-se arbitrando valores para x na Eq. 20, donde se obtém um valor correspondente para d . A área de armadura é calculada então com a Eq. 22, tendo todas as suas variáveis conhecidas.

O momento fletor máximo de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_{k,\max} = 1,4 \cdot 12570 = 17.598 \text{ kN.cm}$$

a) *Linha neutra em $x_{2\lim}$*

Com a linha neutra em $x_{2\lim}$ implica que $\beta_x = \beta_{x_{2\lim}} = 0,26$ (para os concretos do Grupo I de resistência), e na Tabela A-1 para concreto C25 e aço CA-50 encontram-se:

$$\begin{cases} K_c = 3,5 \\ K_s = 0,026 \end{cases}$$

Com a Eq. 28 calcula-se a altura útil d :

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{K_c M_d}{b_w}} = \sqrt{\frac{3,5 \cdot 17598}{20}} = 55,5 \text{ cm}$$

A área de armadura A_s (Eq. 30) resulta:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,026 \frac{17598}{55,5} = 8,24 \text{ cm}^2$$

Um arranjo possível de barras para a área calculada é $3 \phi 16 \text{ mm} + 2 \phi 12,5 \text{ mm}$ ($8,50 \text{ cm}^2$). Há várias outras combinações ou arranjos possíveis. A posição da linha neutra (x) pode ser obtida com a Eq. 25:

$$\beta_x = \frac{x}{d} \rightarrow x = x_{2\lim} = \beta_{x_{2\lim}} d = 0,26 \cdot 55,5 = 14,4 \text{ cm}$$

A Figura 23 mostra a posição da linha neutra, os domínios 2 e 3 e o diagrama de deformações para a seção em análise. Observe que, com a linha neutra passando por $x_{2\lim}$, a deformação de encurtamento no concreto comprimido (ϵ_{cd}) é igual a 3,5 ‰ (concretos do Grupo I), e a deformação de alongamento na armadura (ϵ_{sd}) é igual a 10,0 ‰, ambas iguais aos valores máximos permitidos pela NBR 6118.

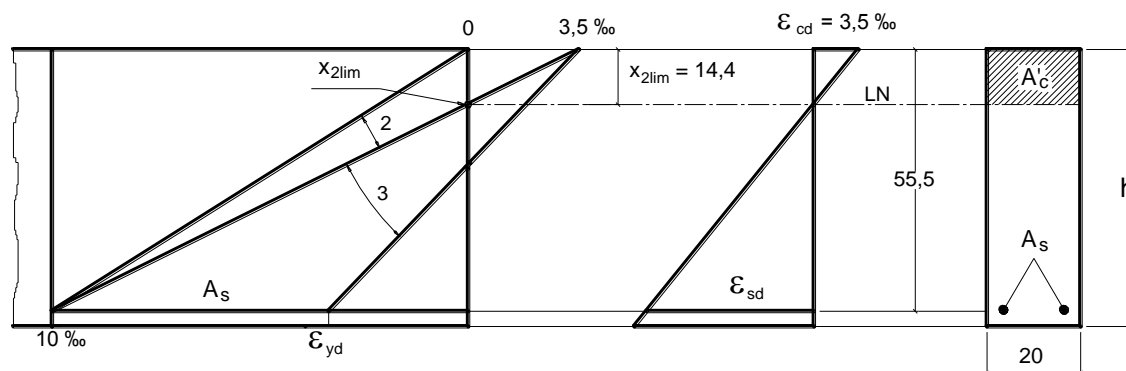


Figura 23 – Diagrama de domínios 2 e 3 e deformações nos materiais com a linha neutra passando em $x_{2\lim}$.

A Figura 24 mostra o detalhamento da armadura na seção transversal. Como já observado no exemplo anterior, é extremamente importante posicionar corretamente a armadura A_s , dispondo-a próxima à face tracionada da seção (face inferior neste caso), pois a viga está solicitada por momento fletor positivo. Inicialmente, deve-se tentar colocar as cinco barras na primeira camada. Como foram escolhidos dois diâmetros diferentes para a armadura, não é possível utilizar a Tabela A-4 para verificar a possibilidade de alojar as cinco barras em uma única camada. Neste caso, a verificação deve ser feita comparando o espaçamento livre real entre as barras com o espaçamento mínimo preconizado pela NBR 6118 (Eq. 10).

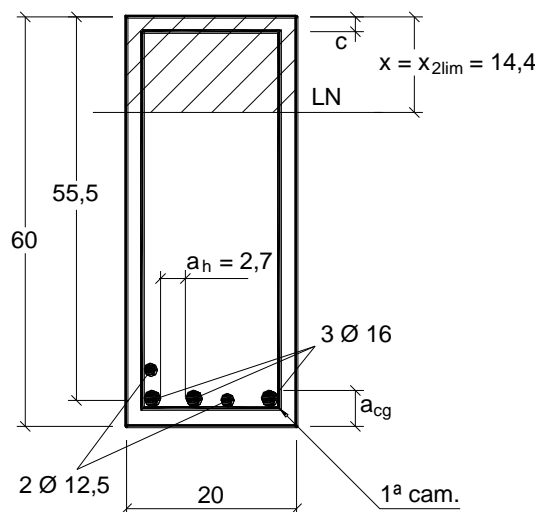


Figura 24 – Detalhamento da armadura na seção transversal e posição da linha neutra em $x = x_{2lim}$.

Considerando o maior diâmetro e concreto com brita 1 ($d_{máx,agr} = 19$ mm), o espaçamento livre mínimo entre as barras é (Eq. 10):

$$a_{h,min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 1,2d_{máx,agr} = 1,2 \cdot 1,9 = 2,3 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{h,min} = 2,3 \text{ cm}$$

O espaçamento livre real entre as barras, considerando a hipótese das cinco barras em uma única camada é:

$$a_h = \frac{20 - [2(2,5 + 0,5 + 1,25) + 3 \cdot 1,6]}{4} = 1,7 \text{ cm}$$

Como $a_h = 1,7 \text{ cm} < a_{h,min} = 2,3 \text{ cm}$, as cinco barras não podem ser alojadas em uma única camada. Como uma segunda tentativa, uma barra $\phi 12,5$ deve ser deslocada para a segunda camada (acima da primeira), o que resulta para a_h :

$$a_h = \frac{20 - [2(2,5 + 0,5) + 3 \cdot 1,6 + 1,25]}{3} = 2,7 \text{ cm}$$

Como $a_h = 2,7 \text{ cm} > a_{h,min} = 2,3 \text{ cm}$, podem ser alojadas quatro barras na primeira camada. A barra $\phi 12,5$ da segunda camada fica amarrada em um dos ramos verticais do estribo, não importando qual ramo (Figura 24).

Não há necessidade de determinar a posição exata do centro de gravidade da armadura A_s , pois uma posição aproximada é suficiente, não conduzindo a erro significativo. No exemplo, o centro de gravidade pode ser tomado na linha que passa na face superior das barras $\phi 16$ mm da primeira camada. A distância (a_{cg}) entre o centro de gravidade (CG) da armadura A_s à fibra mais tracionada da seção neste caso é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell = 2,5 + 0,5 + 1,6 = 4,6 \text{ cm}$$

A altura da viga é a soma da altura útil d com a distância a_{cg} :

$$h = d + a_{cg} = 55,5 + 4,6 = 60,1 \text{ cm} \approx 60 \text{ cm}^{17}$$

A armadura mínima de flexão, para concreto C25 e conforme a Tabela 2, é:

¹⁷ Para as vigas recomenda-se adotar a altura com valores múltiplos de 5 ou 10 cm.

$$A_{s,\min} = 0,15\% b_w h = 0,0015 \cdot 20 \cdot 60 = 1,80 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 8,24 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,80 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{confirma a armadura calculada}$$

Embora a norma indique a armadura de pele somente quando $h > 60 \text{ cm}$ (Eq. 9), recomendamos a sua aplicação para $h \geq 50 \text{ cm}$, com área da antiga NB 1/1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h = 0,0005 \cdot 20 \cdot 60 = 0,6 \text{ cm}^2$$

(3 ϕ 5 mm \rightarrow 0,60 cm² em cada face vertical. Esta armadura de pele não está indicada na Figura 24).

b) *Linha neutra no limite $x/d = 0,45$*

Neste caso, $\beta_x = x/d = 0,45$ e na Tabela A-1 para concreto C25 e aço CA-50, encontram-se:

$$\begin{cases} K_c = 2,2 \\ K_s = 0,028 \end{cases}$$

Com a Eq. 28 calcula-se a altura útil **d**:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{K_c M_d}{b_w}} = \sqrt{\frac{2,2 \cdot 17598}{20}} = 44,0 \text{ cm}$$

A área de armadura A_s (Eq. 30) resulta:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,028 \frac{17598}{44} = 11,20 \text{ cm}^2$$

Um arranjo de barras possível é composto por 6 ϕ 16 mm (12,00 cm²). Outros arranjos podem ser utilizados. A posição da linha neutra (x) é:

$$\beta_x = \frac{x}{d} = 0,45 \rightarrow x = 0,45 \cdot 44 = 19,8 \text{ cm}$$

A Figura 25 mostra a posição da linha neutra, os domínios 2 e 3 e o diagrama de deformações para a seção em análise. Observe que, com a linha neutra passando por $x = 0,45d$, o domínio é o 3, e a deformação de encurtamento no concreto comprimido (ϵ_{cd}) é igual a 3,5 ‰ (para concretos do Grupo I), e a deformação de alongamento na armadura (ϵ_{sd}) é (Eq. 24):

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{sd}} = \frac{x}{d-x} \Rightarrow \frac{3,5}{\epsilon_{sd}} = \frac{19,8}{44-19,8} \rightarrow \epsilon_{sd} = 4,3 \text{ ‰}, \text{ e como esperado, maior que } \epsilon_{yd} (2,07 \text{ ‰})$$

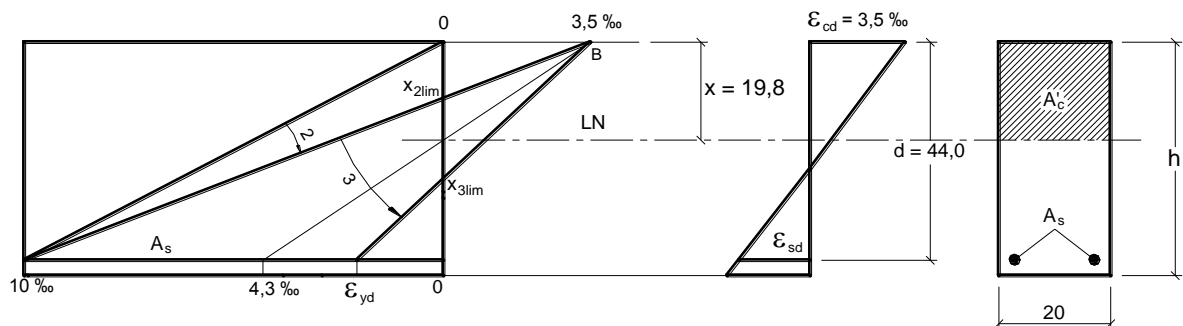


Figura 25 – Diagrama de domínios 2 e 3 e deformações nos materiais com a linha neutra passando por $x = 0,45d$.

A Figura 26 mostra o detalhamento da armadura na seção transversal. Na distribuição das seis barras ϕ 16 mm pode-se fazer uso Tabela A-4, para determinar quantas camadas de barras são necessárias. O intuito é alojar o maior número de barras na camada mais inferior (primeira camada). Na Tabela A-4, com $c = 2,5 \text{ cm}$

verifica-se que a largura b_w mínima necessária para alojar 6 ϕ 16 mm é de 27 cm, maior que a largura existente (20 cm), não sendo possível, portanto, alojar as seis barras. Cinco barras também não é possível, já que $b_{w,\min} = 23$ cm supera a largura existente. Mas quatro barras podem ser alojadas em uma única camada, pois na Tabela A-4 tem-se a largura $b_{w,\min}$ de 20 cm, igual à largura da viga. As duas outras barras restantes devem ser dispostas na segunda camada, amarradas nos ramos verticais dos estribos, posicionadas com o espaçamento livre mínimo ($a_{v,\min}$ – ver Figura 26) relativo à face superior das barras da primeira camada, calculado conforme a Eq. 11:

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 0,5d_{\max,agr} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\min} = 2,0 \text{ cm}$$

De modo geral, o espaçamento livre entre camadas resulta igual a 2,0 cm.

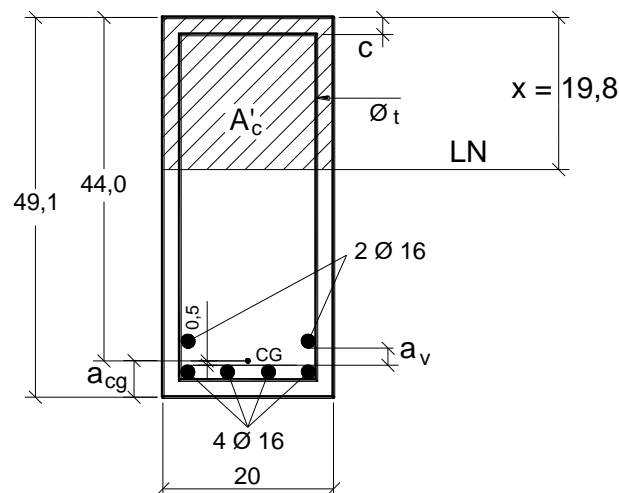


Figura 26 – Detalhamento da armadura A_s na seção transversal e posição da linha neutra em $x = 0,45d$.

Adotando-se a posição do centro de gravidade da armadura de forma aproximada, em uma linha passando a 0,5 cm acima da superfície superior das barras ϕ 16 mm da primeira camada, a distância a_{cg} (distância do centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada (A_s) à fibra mais tracionada da seção) é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + 0,5 = 2,5 + 0,5 + 1,6 + 0,5 = 5,1 \text{ cm}$$

Para a altura da viga resulta:

$$h = d + a_{cg} = 44,0 + 5,1 = 49,1 \text{ cm}$$

A altura calculada para a viga, de 49,1 cm não é uma medida padrão de execução na prática das construções, por isso pode ser adotada a altura de 50 cm.

a3) Comparação dos resultados

Os cálculos efetuados com a linha neutra fixada em x_{2lim} e $x = 0,45d$ forneceram as soluções:

a) x_{2lim} : $h = 60 \text{ cm}$, $A_s = 8,24 \text{ cm}^2$;

b) $x = 0,45d$: $h = 50 \text{ cm}$, $A_s = 11,20 \text{ cm}^2$.

Os resultados permitem tecer as seguintes considerações:

- quanto menor for o valor de x (profundidade da linha neutra dentro da seção transversal), maior será a altura resultante para a viga e menor será a área de armadura tracionada. Com a maior altura

da seção o braço de alavanca z entre as forças resultantes internas é maior, o que leva a menor necessidade de armadura;

- as vigas dimensionadas no domínio 2 resultam vigas com maior altura e menor armadura que as vigas dimensionadas no domínio 3;
- a consideração anterior implica que as vigas dimensionadas no domínio 2 consomem maiores volumes de concreto e maiores quantidades de fôrma, escoramento, mão de obra, etc. Um cálculo de estimativa dos custos envolvidos pode verificar que o dimensionamento no domínio 2 resulta em custo maior que o dimensionamento no domínio 3, apesar do menor consumo de aço;
- outro aspecto importante é que o dimensionamento no domínio 3, por possibilitar menor altura, resulta vigas mais flexíveis e assim sujeitas a flechas maiores.

3º) Calcular a armadura longitudinal de flexão A_s para a seção de apoio de uma viga submetida à Flexão Simples, sendo dados:

concreto C25

$c = 2,5 \text{ cm}$

aço CA-50

$\phi_t = 6,3 \text{ mm}$ (diâmetro do estribo)

$h = 60 \text{ cm}$

concreto com brita 1

$b_w = 22 \text{ cm}$

$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$; $\gamma_s = 1,15$

$M_k = -15.000 \text{ kN.cm}$

RESOLUÇÃO

Neste caso, como todas as variáveis estão fixadas, com exceção da posição da linha neutra (x) e da área de armadura A_s , existe apenas uma solução, dada pelo par $x - A_s$. A resolução é iniciada pela determinação de x e em seguida pelo cálculo de A_s . O exemplo será resolvido utilizando-se as equações teóricas e também com as equações com coeficientes K .

A altura útil d não é conhecida porque não se conhece o arranjo da armadura na seção transversal. É necessário estimar d , fazendo a altura da viga (h) menos a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada e a fibra mais tracionada (a_{cg}). Essa distância depende da armadura A_s , da largura da viga, do diâmetro do estribo e principalmente da espessura do cobrimento de concreto, que, quanto maior, maior a distância a_{cg} . De modo geral, para as vigas correntes, o valor de a_{cg} varia em torno de 3 a 6 cm. A solução é adotar um valor para a_{cg} e depois verificar o valor resultante do detalhamento da armadura na seção transversal. Normalmente não é necessário recalcular a armadura para o valor de a_{cg} resultante do detalhamento, pois a variação de armadura geralmente é pequena. Para a distância a_{cg} deste exemplo será adotado o valor de 5 cm, e d é:

$$d = h - 5 \text{ cm} = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$$

O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f M_k = 1,4 (-15.000) = -21.000 \text{ kN.cm} \quad (\text{o sinal negativo do momento fletor não deve ser considerado nas equações}).$$

Os limites entre os domínios 2, 3 e 4, considerando os concretos do Grupo I de resistência, são:

$$x_{2\text{lim}} = 0,26d = 0,26 \cdot 55 = 14,3 \text{ cm}$$

$$x_{3\text{lim}} = 0,63d = 0,63 \cdot 55 = 34,7 \text{ cm (para o aço CA-50)}$$

a) Resolução com Equações Teóricas

Com a Eq. 20 determina-se a posição da linha neutra para a seção, sendo $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$:

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd}(d - 0,4x) \rightarrow 21.000 = 0,68 \cdot 22 \times \frac{2,5}{1,4}(55 - 0,4x)$$

$$x = 16,2 \text{ cm}$$

Comparando a posição da linha neutra (x) com os limites $x_{2\text{lim}}$ e $x_{3\text{lim}}$ determina-se qual o domínio em que a viga se encontra:

$$x_{2\text{lim}} = 14,3 \text{ cm} < x = 16,2 \text{ cm} < x_{3\text{lim}} = 34,7 \text{ cm} \quad \therefore \text{ a seção está no domínio 3.}$$

Considerando os limites fornecidos na Eq. 23 e o concreto C25, tem-se:

$x/d = 16,2/55 = 0,29 \leq 0,45$ \therefore ok!, e como o limite foi atendido existe solução com armadura simples.

A área de armadura é calculada com a Eq. 22:¹⁸

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} \rightarrow A_s = \frac{21.000}{\frac{50}{1,15}(55 - 0,4 \cdot 16,2)} = 9,95 \text{ cm}^2$$

A armadura mínima para a viga, conforme a Tabela 2, é:

$$A_{s,\min} = 0,15\% b_w h = 0,0015 \cdot 22 \cdot 60 = 1,98 \text{ cm}^2 \rightarrow A_s = 9,95 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,98 \text{ cm}^2$$

b) Resolução com Equações com Coeficientes K

A posição da linha neutra é determinada com o cálculo de K_c (Eq. 28):

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} \Rightarrow K_c = \frac{22 \cdot 55^2}{21.000} = 3,2$$

Observe que o momento fletor de cálculo (M_d) é considerado com valor absoluto no cálculo de K_c . Com $K_c = 3,2$, para concreto C25 e aço CA-50 na Tabela A-1 encontram-se: $K_s = 0,026$, $\beta_x = 0,29$ e domínio 3. Com $\beta_x = x/d = 0,29$, o limite de 0,45 da Eq. 23 (concreto C25) é atendido, pois $\beta_x = 0,29 < 0,45$. Isso significa que a seção pode ser dimensionada com armadura simples, sem necessidade de se fazer qualquer alteração nos dados iniciais. A área de armadura (Eq. 30) resulta:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,026 \frac{21.000}{55} = 9,93 \text{ cm}^2$$

b) Detalhamento da armadura

O detalhamento da armadura na seção transversal está mostrado na Figura 27. Como o momento fletor é negativo, a armadura deve obrigatoriamente ser disposta próxima à face superior tracionada da seção.¹⁹ Um arranjo possível é 5 ϕ 16 mm (10,00 cm²), que atende à área calculada de 9,95 cm².²⁰

Na distribuição das barras da armadura longitudinal negativa nas seções transversais de vigas é importante deixar espaço livre entre as barras suficiente para a passagem da agulha do vibrador. Deve-se ter conhecimento do diâmetro da agulha do vibrador que será utilizado, sendo mais comuns na prática os diâmetros de 25, 35 e 49 mm. De preferência o espaçamento entre as barras deve ser um pouco superior ao diâmetro da agulha, para permitir a sua passagem com facilidade, sem necessidade de exercer força.

Para quatro e três barras na primeira camada os espaçamentos livres horizontais entre as barras são, respectivamente:

$$a_{h,4} = \frac{22 - [2(2,5 + 0,63) + 4 \cdot 1,6]}{3} = 3,1 \text{ cm}$$

$$a_{h,3} = \frac{22 - [2(2,5 + 0,63) + 3 \cdot 1,6]}{2} = 5,5 \text{ cm}$$

¹⁸ Observe que sendo o dimensionamento à Flexão Simples sempre nos domínios 2 ou 3, a tensão na armadura tracionada A_s será sempre $\sigma_{sd} = f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$, igual a 43,48 kN/cm² (50/1,15) para o aço CA-50.

¹⁹ Seria um erro gravíssimo fazer o contrário, colocar a armadura A_s no lado inferior da viga. Tanto no projeto quanto na execução das vigas, especial atenção deve ser dada a esta questão.

²⁰ O estudante pode fazer o detalhamento com outros arranjos, como por exemplo somente com barras de diâmetro 12,5 mm.

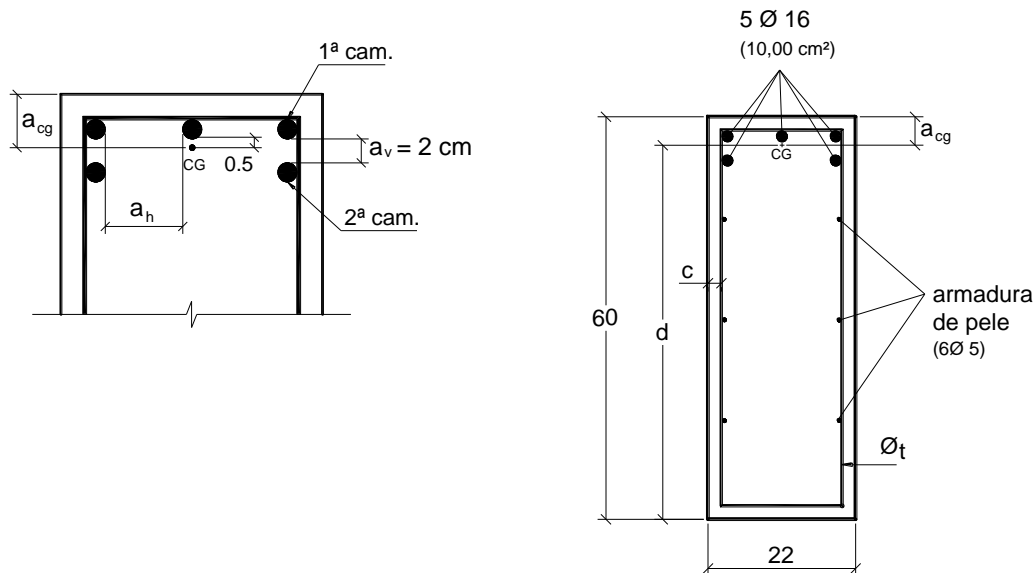


Figura 27 – Detalhamento da armadura negativa na seção transversal.

Verifica-se que com quatro barras na primeira camada o vibrador que pode ser utilizado é com 25 mm de diâmetro, não sendo possível utilizar os diâmetros de 35 e 49 mm. Com três barras na primeira camada todos os diâmetros de agulha podem ser utilizados, inclusive o maior, com 49 mm. No detalhamento da armadura mostrado na Figura 27 está suposto que será utilizado o diâmetro de 49 mm, que aliás é muito comum no adensamento de concretos de vigas e lajes de edifícios de múltiplos pavimentos. As duas barras restantes ficam dispostas na segunda camada, amarradas nos ramos verticais dos estribos.

Os espaçamentos livres mínimos, horizontal (Eq. 10) e vertical (Eq. 11) entre as barras, são:

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 1,2 d_{\max,agr} = 1,2 \cdot 1,9 = 2,3 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$$

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 0,5 d_{\max,agr} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\min} = 2,0 \text{ cm}$$

Verifica-se que as distâncias livres entre as barras da primeira camada (3,1 ou 5,5 cm, para quatro e três barras respectivamente) atendem à distância livre mínima horizontal ($a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$).

A posição do centro de gravidade da armadura foi adotada de forma aproximada, 5 mm abaixo da face inferior das barras da primeira camada.²¹ De modo que a distância entre o centro de gravidade da armadura e a face tracionada da viga é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + 0,5 = 2,5 + 0,63 + 1,6 + 0,5 = 5,2 \text{ cm}$$

Essa distância foi adotada inicialmente como 5 cm, portanto, muito próxima do valor do detalhamento. E conforme a NBR 6118, a viga não necessita de armadura de pele, pois $h = 60 \text{ cm}$ (ver Eq. 9). No entanto, recomendamos a sua aplicação para $h \geq 50 \text{ cm}$, com área indicada na NB 1/1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h = 0,0005 \cdot 22 \cdot 60 = 0,66 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,60 \text{ cm}^2 \text{ em cada face vertical})$$

4º) Dada a seção retangular de uma viga, como mostrada na Figura 28, calcular qual é o momento fletor admissível (de serviço). São conhecidos:

²¹ Para vigas de pequeno porte não há a necessidade de se determinar com rigor a posição exata do centro de gravidade da armadura.

$b_w = 20 \text{ cm}$
 $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$
 $h = 50 \text{ cm}$
 $\gamma_s = 1,15$
 $d = 46 \text{ cm}$
 $A_s = 8,00 \text{ cm}^2$
 concreto C20
 aço CA-50

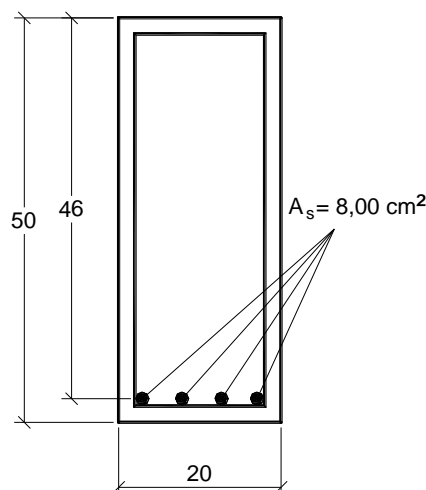


Figura 28– Características da seção transversal.

RESOLUÇÃO

O problema agora não é de dimensionamento, e sim de verificação. As variáveis a serem determinadas são a posição da linha neutra (x) e o momento fletor de serviço ou admissível (M_k). A resolução deve ser feita por meio das equações teóricas. A primeira equação a considerar é a de equilíbrio das forças resultantes na seção transversal (Eq. 15): $R_{cc} = R_{st}$. As resultantes no concreto comprimido e na armadura tracionada são (Eq. 16 e Eq. 17):

$$R_{cc} = 0,68b_w \times f_{cd} \quad \text{e} \quad R_{st} = \sigma_{sd}A_s$$

Inicialmente deve-se supor que a seção foi dimensionada nos domínios 2 ou 3, onde tem-se:

$$\sigma_{sd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15}$$

Aplicando a Eq. 15 determina-se a posição da linha neutra (x):

$$R_{cc} = R_{st} \rightarrow 0,68b_w \times f_{cd} = \sigma_{sd}A_s$$

$$0,68 \cdot 20x \cdot \frac{2,0}{1,4} = \frac{50}{1,15} \cdot 8,00 \Rightarrow x = 17,9 \text{ cm}$$

É necessário verificar se a hipótese inicialmente considerada da viga estar nos domínios 2 ou 3 é verdadeira, o que se faz comparando x com os valores limites x_{2lim} e x_{3lim} . Para o concreto C20 e CA-50:

$$x_{2lim} = 0,26d = 0,26 \cdot 46 = 12,0 \text{ cm}$$

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 46 = 29,0 \text{ cm}$$

$$x_{2lim} = 12,0 < x = 17,9 < x_{3lim} = 29,0 \text{ cm}$$

Verifica-se que a seção encontra-se no domínio 3, e portanto a tensão σ_{sd} é igual a f_{yd} . Verifica-se também o limite apresentado na Eq. 23:

$$\frac{x}{d} = \frac{17,9}{46} = 0,39 \leq 0,45 \rightarrow \text{ok! O dimensionamento foi feito atendendo ao limite.}$$

O momento fletor de serviço pode ser calculado com a Eq. 20 ou Eq. 21:

$$M_d = 0,68b_w \times f_{cd}(d - 0,4x) \quad \text{ou} \quad M_d = A_s \sigma_{sd}(d - 0,4x)$$

$$1,4M_k = 8,00 \frac{50}{1,15} (46 - 0,4 \cdot 17,9) \Rightarrow M_k = 9.650 \text{ kN.cm}$$

Portanto, o momento fletor característico que a seção pode resistir é 9.650 kN.cm (positivo).

5º) Determinar o máximo momento fletor que pode suportar uma viga com a seção mostrada na Figura 29. Dados:

concreto C25
aço CA-50
 $A_s = 9,45 \text{ cm}^2$
 $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$
 $\gamma_s = 1,15$
 $d = 36 \text{ cm}$

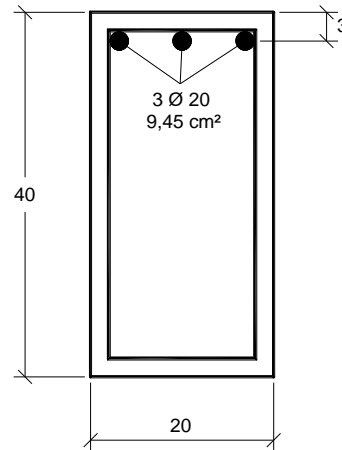


Figura 29 - Seção transversal da viga.

RESOLUÇÃO

Como no exercício anterior, o problema é de verificação e a incógnita principal do problema é o momento fletor característico (M_k) a que a seção transversal pode resistir. Da equação de equilíbrio de forças normais (Eq. 15), tem-se o equilíbrio das forças resultantes: $R_{cc} = R_{st}$. As resultantes no concreto comprimido e na armadura tracionada são (Eq. 16 e Eq. 17):

$$R_{cc} = 0,68b_w \times f_{cd}$$

$$R_{st} = \sigma_{sd} A_s$$

Supondo-se inicialmente que a seção foi dimensionada nos domínios 2 ou 3, a tensão na armadura é:

$$\sigma_{sd} = f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15}$$

Aplicando a Eq. 15 determina-se a posição da linha neutra (x):

$$R_{cc} = R_{st} \rightarrow 0,68b_w \times f_{cd} = \sigma_{sd} A_s$$

$$0,68 \cdot 20x \frac{2,5}{1,4} = \frac{50}{1,15} 9,45 \Rightarrow x = 16,9 \text{ cm}$$

É necessário verificar se a hipótese inicialmente considerada da viga estar nos domínios 2 ou 3 é verdadeira, o que se faz comparando x com os valores limites x_{2lim} e x_{3lim} . Para o concreto C25 (Grupo I) e CA-50, tem-se:

$$x_{2lim} = 0,26d = 0,26 \cdot 36 = 9,4 \text{ cm}$$

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 36 = 22,7 \text{ cm}$$

$$x_{2lim} = 9,4 < x = 16,9 < x_{3lim} = 22,7 \text{ cm}$$

A seção encontra-se no domínio 3, e a tensão σ_{sd} é igual a f_{yd} . Verifica-se o limite da Eq. 23:

$$\frac{x}{d} = \frac{16,9}{36} = 0,47 \leq 0,45 \rightarrow \text{não ok! O dimensionamento foi feito não atendendo ao limite.}$$

O momento fletor de serviço pode ser calculado com a Eq. 20 ou Eq. 21:

$$M_d = 0,68b_w \times f_{cd}(d - 0,4x) \quad \text{ou} \quad M_d = A_s \sigma_{sd}(d - 0,4x)$$

$$1,4M_k = 9,45 \frac{50}{1,15} (36 - 0,4 \cdot 16,9) \Rightarrow M_k = 8.581 \text{ kN.cm}$$

Portanto, o momento fletor característico a que a seção pode resistir é 8.581 kN.cm (negativo).

8. SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA DUPLA

Define-se seção com **armadura dupla** a seção que, além da armadura longitudinal tracionada (A_s), contém também armadura longitudinal (A'_s) na região comprimida, ali colocada para auxiliar o concreto na resistência às tensões normais de compressão.

A **armadura dupla** é um artifício que permite dimensionar as seções que resultam relações x/d maiores que os valores limites estabelecidos na Eq. 23 conforme a NBR 6118 (0,45 para concretos do Grupo I e 0,35 para concretos do Grupo II), sem que haja a necessidade de alterar algum parâmetro inicialmente adotado no dimensionamento da seção da viga. A seção com **armadura dupla** também é uma solução ao dimensionamento antieconômico e contra a segurança do domínio 4 (ruptura frágil e sem aviso prévio), além também de que neste domínio o valor limite para x/d não é atendido.

Na maioria dos casos da prática a necessidade de **armadura dupla** surge nas seções dos apoios internos de vigas contínuas, submetidas a momentos fletores negativos. Como esses momentos fletores são de modo geral muito maiores que os momentos fletores máximos positivos nos vãos, eles requerem seções transversais com alturas maiores do que nos vãos, e isso resulta em aumento do custo de vigas contínuas. Neste caso, uma solução simples é fixar a altura da viga de tal forma que resulte **armadura dupla** nos apoios, ou em algum apoio, e **armadura simples** nos vãos.²²

8.1 Equações de Equilíbrio

A Figura 30 mostra a seção retangular de uma viga com duas armadura longitudinais, tracionada A_s e comprimida A'_s , submetida a momento fletor positivo. O diagrama de distribuição de tensões de compressão no concreto é o retangular simplificado, com profundidade $0,8x$ (Eq. 12) e tensão σ_{cd} de $0,85f_{cd}$ (Eq. 13), sendo ambos os valores válidos para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$).²³

Assim como feito na dedução das equações para seção retangular com **armadura simples**, a formulação toma como base as duas equações de equilíbrio da Estática ($\Sigma N = 0$ e $\Sigma M = 0$).

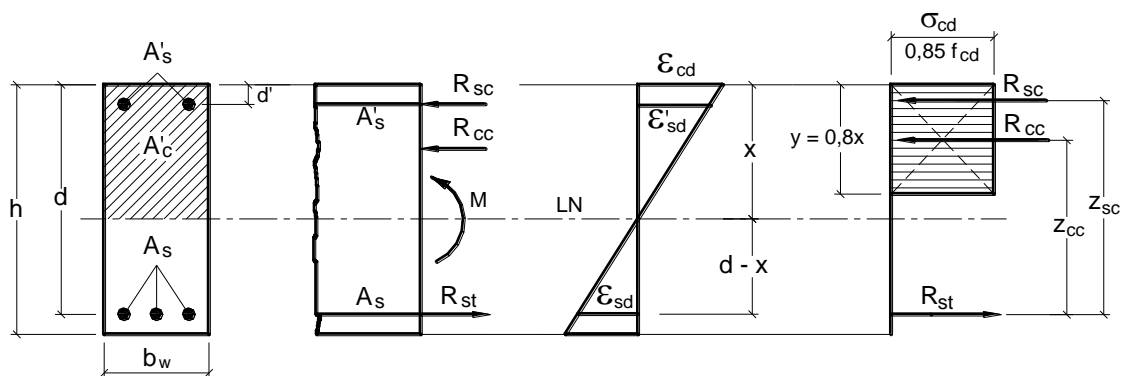


Figura 30 - Seção retangular com armadura dupla para concretos do Grupo I.

a) Equilíbrio de Forças Normais

Na Flexão Simples não ocorre a força normal, de modo que existem apenas as forças resultantes resistentes internas, que devem se equilibrar, e:

²² Em vigas contínuas procura-se fazer todos os tramos (vãos) com a mesma altura, mas no caso de tramos com vãos e cargas muito desiguais, diferentes alturas podem ser adotadas ao longo da viga, em busca da solução mais econômica.

²³ Para os concretos do Grupo II ($50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$) a formulação apresentada deve ser corrigida.

$$R_{cc} + R_{sc} = R_{st} \quad \text{Eq. 31}$$

R_{cc} = força resultante proporcionada pelo concreto comprimido;

R_{sc} = força resultante proporcionada pela armadura comprimida;

R_{st} = força resultante proporcionada pela armadura tracionada;

σ'_{sd} = tensão de cálculo na armadura comprimida;

σ_{sd} = tensão de cálculo na armadura tracionada.

Considerando que $R = \sigma \cdot A$, as forças resultantes são:

$$R_{cc} = 0,85f_{cd} \cdot 0,8x \cdot b_w = 0,68b_w \cdot x \cdot f_{cd} \quad \text{Eq. 32}$$

$$R_{sc} = A'_s \cdot \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 33}$$

$$R_{st} = A_s \cdot \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 34}$$

b) Equilíbrio de Momentos Fletores

O momento fletor solicitante tem que ser equilibrado pelos momentos fletores internos resistentes, proporcionados pelo concreto comprimido e pelas armaduras, a tracionada e a comprimida, e que podem ser representados pelo momento fletor de cálculo M_d , tal que $M_{solic} = M_{resist} = M_d$.

Fazendo o equilíbrio de momentos fletores em torno da linha de ação da força resultante R_{st} , o momento fletor resistente à compressão será dado pelas forças resultantes de compressão multiplicadas pelas suas respectivas distâncias à linha de ação de R_{st} (braços de alavanca z_{cc} e z_{sc}):

$$M_d = R_{cc} \cdot z_{cc} + R_{sc} \cdot z_{sc}$$

Substituindo R_{cc} e R_{sc} pelas Eq. 32 e Eq. 33 fica:

$$M_d = 0,68b_w \cdot x \cdot f_{cd} (z_{cc}) + A'_s \cdot \sigma'_{sd} (z_{sc})$$

Aplicando as distâncias z_{cc} e z_{sc} (ver Figura 30) a equação torna-se:

$$M_d = 0,68b_w \cdot x \cdot f_{cd} (d - 0,4x) + A'_s \cdot \sigma'_{sd} (d - d') \quad \text{Eq. 35}$$

Com o intuito de facilitar o cálculo pode-se decompor o momento fletor M_d em duas parcelas, como indicadas na Figura 31, tal que:

$$M_d = M_{1d} + M_{2d} \quad \text{Eq. 36}$$

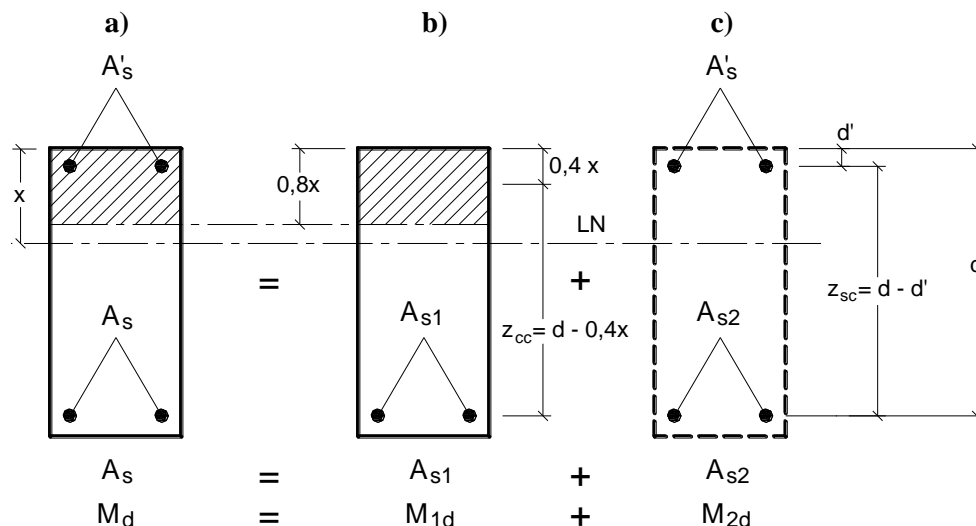


Figura 31 - Decomposição da seção com armadura dupla.

O momento fletor M_{ld} corresponde ao primeiro termo da Eq. 35, cujo significado físico é o de ser o momento fletor interno resistente proporcionado por uma parcela A_{s1} da armadura tracionada e pela área de concreto comprimido com a maior profundidade possível ($0,8x$), conforme esquema mostrado na Figura 31b.

$$M_{ld} = 0,68b_w \times f_{cd} (d - 0,4x) \quad \text{Eq. 37}$$

O valor de x , a ser aplicado na Eq. 37, deve ser adotado conforme o critério da NBR 6118, já apresentado na Eq. 23 e aqui repetida, havendo as seguintes possibilidades:²⁴

- a) $x \leq 0,45d$ para concretos do Grupo I ($f_{ck} \leq 50$ MPa);
 b) $x \leq 0,35d$ para concretos do Grupo II ($50 < f_{ck} \leq 90$ MPa).
- Eq. 38

Determinada a primeira parcela M_{ld} do momento fletor total, pode-se calcular a segunda parcela:

$$M_{2d} = M_d - M_{ld} \quad \text{Eq. 39}$$

A armadura comprimida A'_s equilibra a parcela A_{s2} da armadura tracionada total (A_s), e surge do equilíbrio de momentos fletores na seção da Figura 31c, como a força resultante na armadura comprimida multiplicada pela distância à armadura tracionada:

$M_{2d} = R_{sc} \cdot z_{sc}$, e aplicando a Eq. 33 de R_{sc} fica:

$$M_{2d} = A'_s \sigma'_{sd} z_{sc} = A'_s \sigma'_{sd} (d - d')$$

Isolando a área de armadura comprimida:

$$A'_s = \frac{M_{2d}}{\sigma'_{sd} (d - d')} \quad \text{Eq. 40}$$

A tensão σ'_{sd} na armadura comprimida depende do tipo de aço, da posição da armadura dentro da seção transversal, expressa pela relação d'/d , e da posição x fixada para a linha neutra, geralmente assumida nos valores limites ($0,45d$ ou $0,35d$). Na Tabela A-5 encontram-se os valores de σ'_{sd} , em função de d'/d e do tipo de aço, para concretos do Grupo I de resistência.

As parcelas A_{s1} e A_{s2} da armadura tracionada resultam do equilíbrio de momentos fletores nas seções indicadas na Figura 31b e c. São dadas pelas forças resultantes nas armaduras tracionadas multiplicadas pelos respectivos braços de alavanca, isto é, a distância entre as forças resultantes que se equilibram na seção.

Para a seção da Figura 31b:

$$M_{ld} = A_{s1} \sigma_{sd} z_{cc} = A_{s1} \sigma_{sd} (d - 0,4x)$$

Isolando a parcela A_{s1} da armadura tracionada:

$$A_{s1} = \frac{M_{ld}}{\sigma_{sd} (d - 0,4x)} \quad \text{Eq. 41}$$

Para a seção da Figura 31c:

$$M_{2d} = A_{s2} \sigma_{sd} z_{sc} = A_{s2} \sigma_{sd} (d - d')$$

Isolando a parcela A_{s2} da armadura tracionada:

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{\sigma_{sd} (d - d')} \quad \text{Eq. 42}$$

²⁴ Os valores limites para x devem ser considerados para seções transversais de vigas e lajes, tanto para as seções de apoio como para aquelas ao longo dos vãos, com ou sem redistribuição de momentos fletores.

A armadura total tracionada é a soma das parcelas A_{s1} e A_{s2} :

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad \text{Eq. 43}$$

A_{s1} = parcela da armadura tracionada A_s que equilibra o momento fletor resistente proporcionado pela área de concreto comprimido com profundidade x ;

A_{s2} = parcela da armadura tracionada A_s que equilibra o momento fletor resistente proporcionado pela armadura comprimida A'_s .

c) Permanência das Seções Planas

Conforme o diagrama de deformações mostrado na Figura 30 definem-se as relações entre as deformações de cálculo na armadura tracionada (ε_{sd}) e na armadura comprimida (ε'_{sd}) e no concreto da fibra mais comprimida da seção.

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{sd}} = \frac{x}{d - x} \quad \text{Eq. 44}$$

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{x} = \frac{\varepsilon'_{sd}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{sd}}{d - x} \quad \text{Eq. 45}$$

Assumindo a relação entre a posição da linha neutra e a altura útil d ($\beta_x = x/d$) pode-se escrever:

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{sd}} \quad \text{Eq. 46}$$

8.2 Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K

O cálculo de dimensionamento das vigas à Flexão Simples pode ser feito com equações mais simples, fazendo-se uso dos coeficientes K, como mostrados na Tabela A-1 (ou Tabela A-2). Inicialmente deve-se definir uma posição para a linha neutra na seção transversal. A sugestão é de posicionar a linha neutra com a profundidade máxima possível, no limite estabelecido pela NBR 6118, em função da classe do concreto:

- a) $\beta_x = x/d \leq 0,45$ para concretos do Grupo I ($f_{ck} \leq 50$ MPa);
 b) $\beta_x = x/d \leq 0,35$ para concretos do Grupo II ($50 < f_{ck} \leq 90$ MPa).

Definida a posição da linha neutra (β_x) e conhecendo-se a classe do concreto e a categoria do aço, devem ser determinados os valores K_{clim} e K_{slim} na Tabela A-1 (ou Tabela A-2).²⁵ O momento fletor M_{ld} fica assim determinado:

$$M_{ld} = \frac{b_w d^2}{K_{clim}} \quad \text{Eq. 48}$$

A parcela M_{2d} do momento fletor total também fica determinada:

$$M_{2d} = M_d - M_{ld} \quad \text{Eq. 49}$$

A área total de armadura tracionada fica determinada por:

$$A_s = K_{slim} \frac{M_{ld}}{d} + \frac{M_{2d}}{f_{yd}(d - d')} \quad \text{Eq. 50}$$

A área de armadura comprimida é:

²⁵ Como já observado, os coeficientes K foram calculados considerando as unidades de kN e cm, de modo que as variáveis nas equações devem ter essas unidades.

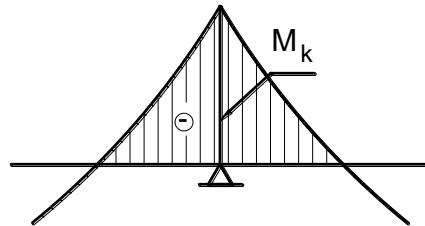
$$A'_s = K'_s \frac{M_{2d}}{d - d'} \quad \text{Eq. 51}$$

O coeficiente K'_s é o inverso da tensão na armadura comprimida ($K'_s = 1/\sigma'_{sd}$), e está apresentado na Tabela A-5 para concretos do Grupo I de resistência, em função da relação d'/d e da posição adotada para a linha neutra.

8.3 Exemplos Numéricos

1º) Dimensionar e detalhar a armadura longitudinal de flexão para o momento fletor negativo no apoio interno de uma viga contínua, considerando os dados a seguir:

$b_w = 20 \text{ cm}$
 $h = 50 \text{ cm}$
 $M_k = -15.700 \text{ kN.cm}$
 concreto C25
 aço CA-50
 $c = 2,0 \text{ cm}$
 $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$
 brita 1



RESOLUÇÃO

O problema em questão é de dimensionamento da área de armadura e as incógnitas são a posição da linha neutra (x) e a área de armadura (A_s). Inicialmente não se conhece o domínio de deformação e nem a relação x/d , o que significa que é uma incógnita se a seção pode ser dimensionada com **armadura simples**. Para essa definição é necessário determinar x e x/d . Com $\gamma_f = 1,4$ o momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-15700) = -21.980 \text{ kN.cm}$$

Como não se conhece o detalhamento da armadura, a altura útil d não é conhecida, de modo que deve ser adotado inicialmente um valor para d , que é igual a altura da viga menos a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada e a face tracionada da seção (a_{cg} – ver Figura 32). Adotando $a_{cg} = 5 \text{ cm}$, d resulta: $d = h - 5 \text{ cm} = 50 - 5 = 45 \text{ cm}$.

Para a distância d' entre o centro de gravidade da armadura comprimida à face comprimida da seção será adotado o valor de 3 cm (ver Figura 32).²⁶ Os limites entre os domínios 2, 3 e 4, considerando aço CA-50 e concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$), são:

$$x_{2lim} = 0,26d = 0,26 \cdot 45 = 11,7 \text{ cm}$$

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 45 = 28,4 \text{ cm} \quad (\text{para o aço CA-50})$$

a) Resolução com Equações Teóricas

A posição da linha neutra (x) é determinada pela Eq. 20, com o valor absoluto de M_d , $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$ e $\gamma_c = 1,4$:

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd}(d - 0,4x)$$

$$21.980 = 0,68 \cdot 20 x \frac{2,5}{1,4} (45 - 0,4x) \quad \rightarrow \quad x = 26,2 \text{ cm}$$

Observe que $x_{2lim} = 11,7 < x = 26,2 \text{ cm} < x_{3lim} = 28,4 \text{ cm}$, o que significa que a seção se encontra no domínio 3.

Conforme a Eq. 38 (ou Eq. 23), a relação x/d deve ser verificada: $x/d = 26,2/45 = 0,58$. Como a relação x/d é maior que o limite ($x/d \leq 0,45$), é necessário estudar o problema e adotar uma solução de modo a

²⁶ Os valores d e d' serão verificados durante o detalhamento das armaduras na seção transversal.

atender o valor limite. Algum dado inicial do problema pode ser alterado e, analisando a Eq. 20, que fornece x , verificam-se as seguintes alternativas:

- diminuir a solicitação (M_d);
- aumentar as dimensões da seção transversal, principalmente a altura (h);
- aumentar a resistência do concreto (f_{ck}).

Das alternativas listadas, de modo geral, a única que resulta exequível é o aumento da altura da seção. Diminuir a solicitação depende de outros fatores, como diminuir o carregamento, o vão, etc., o que geralmente é inviável. Aumentar a largura da seção também não é uma solução prática, pois normalmente as vigas são projetadas para ficarem completamente embutidas nas paredes. Não é usual também fazer os elementos estruturais de um mesmo pavimento com concretos de resistências diferentes. Resta ainda a solução de dimensionar a viga com **armadura dupla**, que é uma solução interessante porque possibilita resolver o problema sem se fazer alterações nos dados iniciais, como mostrado em seguida.

Uma nova posição deve ser assumida para a linha neutra, sendo possível infinitos valores, até o limite de $0,45d$. Geralmente, assume-se o maior valor possível, tal que:

$$x = 0,45d = 0,45 \cdot 45 = 20,25 \text{ cm}$$

Aplicando o novo valor de x na Eq. 37 determina-se o momento fletor resistente M_{ld} :

$$M_{ld} = 0,68b_w \times f_{cd}(d - 0,4x)$$

$$M_{ld} = 0,68 \cdot 20 \cdot 20,25 \frac{2,5}{1,4}(45 - 0,4 \cdot 20,25) = 18.147 \text{ kN.cm}$$

Aplicando a Eq. 39 determina-se o valor da segunda parcela do momento fletor resistente:

$$M_{2d} = M_d - M_{ld} = 21.980 - 18.147 = 3.833 \text{ kN.cm}$$

Para CA-50 e $d'/d = 3/45 = 0,07$, conforme a Tabela A-5 a tensão na armadura comprimida (σ'_{sd}) é $435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$. Do momento fletor M_{2d} , aplicando a Eq. 40, resulta a armadura comprimida:

$$A'_s = \frac{M_{2d}}{\sigma'_{sd}(d - d')} = \frac{3.833}{43,5(45 - 3)} = 2,10 \text{ cm}^2 \quad (2 \phi 12,5 \rightarrow 2,50 \text{ cm}^2)$$

As parcelas A_{s1} e A_{s2} da armadura tracionada total são determinadas com a Eq. 41 e Eq. 42, considerando que no domínio 3 a tensão σ_{sd} na armadura é igual a f_{yd} :²⁷

$$A_{s1} = \frac{M_{ld}}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} = \frac{18.147}{\frac{50}{1,15}(45 - 0,4 \cdot 20,25)} = 11,31 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{\sigma_{sd}(d - d')} = \frac{3.833}{\frac{50}{1,15}(45 - 3)} = 2,10 \text{ cm}^2$$

A área total de armadura tracionada é:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 11,31 + 2,10 = 13,41 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 20 + 2 \phi 16 \rightarrow 13,45 \text{ cm}^2)$$

b) Resolução com Equações com Coeficientes K

O coeficiente K_c é calculado pela Eq. 28:

²⁷ Para a tensão f_{yd} do aço CA-50 pode-se usar simplesmente $43,5 \text{ kN/cm}^2 (\cong 50/1,15)$.

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{20 \cdot 45^2}{21.980} = 1,8$$

Na Tabela A-1, com concreto C25 e aço CA-50, verifica-se que a seção está no domínio 3 e $\beta_x = 0,58 > 0,45$. Neste caso, uma solução entre outras para atender ao limite máximo, como mostrado anteriormente, é dimensionar a seção com **armadura dupla**. Com $\beta_x = 0,45$ conforme a Eq. 38, na Tabela A-1 encontram-se:

$$\begin{cases} K_{c\lim} = 2,2 \\ K_{s\lim} = 0,028 \end{cases}$$

A primeira parcela do momento fletor resistente (Eq. 48) é:

$$M_{1d} = \frac{b_w d^2}{K_{c\lim}} = \frac{20 \cdot 45^2}{2,2} = 18.409 \text{ kN.cm}$$

A segunda parcela do momento fletor resistente (Eq. 49) é:

$$M_{2d} = M_d - M_{1d} = 21.980 - 18.409 = 3.571 \text{ kN.cm}$$

Com $d' = 3 \text{ cm}$, e sendo $d'/d = 3/45 = 0,07$, para o CA-50 na Tabela A-5 tem-se $K'_s = 0,023$. As áreas de armadura comprimida e tracionada (Eq. 51 e Eq. 50) são:

$$A'_s = K'_s \frac{M_{2d}}{d - d'} = 0,023 \frac{3.571}{45 - 3} = 1,96 \text{ cm}^2 \quad (2 \phi 12,5 \text{ mm} \rightarrow 2,50 \text{ cm}^2)$$

$$A_s = K_{s\lim} \frac{M_{1d}}{d} + \frac{M_{2d}}{f_{yd}(d - d')} = 0,028 \frac{18.409}{45} + \frac{3.571}{\frac{50}{1,15}(45 - 3)} = 13,41 \text{ cm}^2$$

c) Detalhamento

O detalhamento das armaduras na seção transversal está mostrado na Figura 32. Outros arranjos de armadura com número de barras e diâmetros diferentes podem ser utilizados. Como já comentado em exemplos numéricos anteriores, é importante posicionar corretamente as armaduras na seção transversal. Como neste exemplo o momento fletor solicitante é negativo, a armadura tracionada A_s deve obrigatoriamente ser posicionada próxima à borda superior da viga, sendo esta chamada “armadura negativa”, e a armadura comprimida (A'_s) deve ser posicionada próxima à borda inferior, que está comprimida pelo momento fletor negativo.

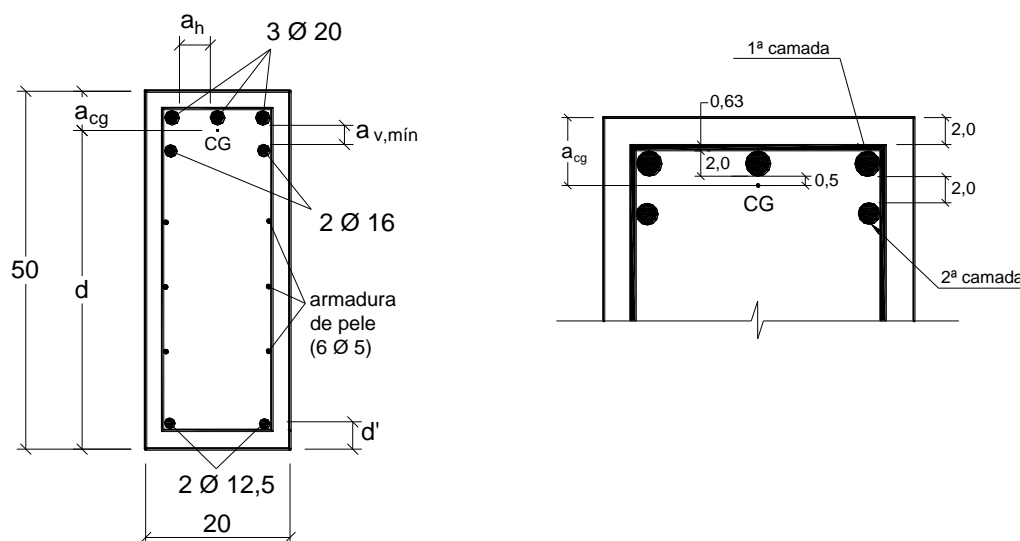


Figura 32 – Detalhamento das armaduras longitudinais de flexão na seção transversal.

Por se tratar de armadura negativa deve-se dispor um número de barras nas camadas que possibilite a passagem da agulha do vibrador. Consideramos aqui agulhas com diâmetros de 25, 35 ou 49 mm.²⁸ Admitindo inicialmente 3 ϕ 20 mm na primeira camada, a distância livre entre as barras é:

$$a_h = \frac{20 - [2(2,0 + 0,63) + 3 \cdot 2,0]}{2} = 4,4 \text{ cm}$$

Essa distância deve atender a distância mínima ($a_{h,\min}$, Eq. 10):

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,0 \text{ cm} \\ 1,2d_{\max,agr} = 1,2 \cdot 1,9 = 2,3 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$$

Portanto, $a_h = 4,4 \text{ cm} > a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$. No entanto, a distância livre de 4,4 cm entre as barras da primeira camada não é suficiente para a passagem do vibrador com diâmetro de 49 mm. Neste caso, pode-se modificar a posição da barra interna, aproximando-a de uma das duas barras dos vértices, obedecendo-se a distância mínima entre faces de barras ($a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$). Desse modo será possível utilizar o vibrador com diâmetro 49 mm. Outra solução é utilizar uma agulha de menor diâmetro, como 25 ou 35 mm.

Considerando para ϕ_ℓ o maior diâmetro entre todas as barras e 19 mm como o diâmetro máximo da brita 1, o espaçamento vertical livre mínimo entre as faces das barras da primeira e da segunda camada da armadura negativa é (Eq. 11):

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,0 \text{ cm} \\ 0,5d_{\max,agr} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\min} = 2,0 \text{ cm}$$

A distância a_{cg} , que definiu a altura útil d , foi adotada inicialmente igual a 5 cm. Considerando que o centro de gravidade da armadura está aproximadamente posicionado 0,5 cm abaixo da face inferior das barras da primeira camada (ver Figura 32), a distância a_{cg} segundo o detalhamento adotado resulta:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + 0,5 \text{ cm} = 2,0 + 0,63 + 2,0 + 0,5 = 5,1 \text{ cm}$$

O valor resultante 5,1 cm é muito próximo do valor previamente adotado para a_{cg} . Para as vigas correntes,²⁹ de modo geral diferenças de até 1,0 ou 1,5 cm entre os valores de a_{cg} não justificam o recálculo das armaduras, porque as diferenças são muito pequenas.³⁰

O valor d' foi inicialmente adotado igual a 3 cm. O seu valor, conforme o detalhamento da armadura mostrado na Figura 32:

$$d' = c + \phi_t + \phi_\ell/2 = 2,0 + 0,63 + 1,25/2 = 3,3 \text{ cm}$$

um valor muito próximo do adotado, de modo que não é necessário recalcular, pois a diferença nos cálculos são desprezíveis.

A viga não necessita de armadura de pele, pois $h = 50 \text{ cm}$ (ver Eq. 9). No entanto, recomendamos a sua aplicação para $h \geq 50 \text{ cm}$, com área indicada na NB 1/1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h = (0,05/100) \cdot 20 \cdot 50 = 0,50 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,60 \text{ cm}^2 \text{ em cada face vertical})$$

2º) Calcular e detalhar a armadura longitudinal da seção de apoio de uma viga contínua (Figura 33), considerando:

²⁸ Os diâmetros da agulha dos vibradores de imersão podem variar conforme o fabricante.

²⁹ Vigas correntes são as vigas mais comuns nas edificações, com alturas de até algo em torno de 60 cm.

³⁰ O estudante deve fazer o recálculo em algumas situações, a fim de perceber as diferenças nos resultados (armaduras) em função de pequenas diferenças entre os valores da altura útil previamente adotada e aquele resultante do detalhamento da armadura na seção transversal.

concreto C30
 aço CA-50
 $c = 2,5 \text{ cm}$
 $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$
 brita 1
 $b_w = 14 \text{ cm}$
 $h = 60 \text{ cm}$
 $M_k = -18.500 \text{ kN.cm}$

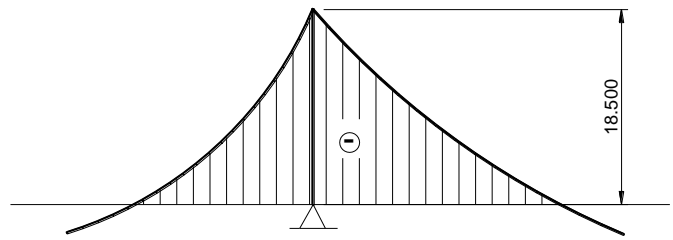


Figura 33 – Valor do momento fletor negativo no apoio da viga contínua.

RESOLUÇÃO

O problema é de dimensionamento como o anterior, onde as incógnitas são a armadura e a posição x da linha neutra. A resolução será feita apenas com as equações com coeficientes tabelados K. Para a distância a_{eg} inicialmente é adotado o valor de 6 cm, o que resulta para a altura útil:

$$d = h - 6 \text{ cm} = 60 - 6 = 54 \text{ cm}$$

O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-18.500) = -25.900 \text{ kN.cm}$$

O coeficiente K_c é calculado pela Eq. 28, com M_d em valor absoluto:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{14 \cdot 54^2}{25.900} = 1,6$$

Na Tabela A-1, com concreto C30 e aço CA-50, verifica-se que a seção está no domínio 3 e, conforme a Eq. 38, $\beta_x = 0,56 > 0,45$. Neste caso, uma solução para atender ao limite máximo, entre outras possíveis, é dimensionar a seção com **armadura dupla**. Com $\beta_x = 0,45$ (valor máximo), na Tabela A-1 encontram-se:

$$\begin{cases} K_{c \text{ lim}} = 1,9 \\ K_{s \text{ lim}} = 0,028 \end{cases}$$

A primeira parcela do momento fletor resistente (Eq. 48) é:

$$M_{1d} = \frac{b_w d^2}{K_{c \text{ lim}}} = \frac{14 \cdot 54^2}{1,9} = 21.486 \text{ kN.cm}$$

A segunda parcela do momento fletor resistente é (Eq. 49):

$$M_{2d} = M_d - M_{1d} = 25.900 - 21.486 = 4.414 \text{ kN.cm}$$

Adotando $d' = 4 \text{ cm}$, e sendo $d'/d = 4/54 = 0,07$, para o aço CA-50 na Tabela A-5 tem-se $K'_s = 0,023$. As áreas de armadura comprimida e tracionada são (Eq. 51 e Eq. 50):

$$A'_s = K'_s \frac{M_{2d}}{d - d'} = 0,023 \frac{4.414}{54 - 4} = 2,03 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \phi 12,5 \text{ mm } (2,50 \text{ cm}^2)$$

$$A_s = K_{s \text{ lim}} \frac{M_{1d}}{d} + \frac{M_{2d}}{f_{yd} (d - d')} = 0,028 \frac{21.486}{54} + \frac{4.414}{\frac{50}{1,15} (54 - 4)} = 13,17 \text{ cm}^2$$

A armadura mínima de tração, de acordo com a Tabela 2, é:

$$A_{s, \text{ mín}} = 0,150 \% b_w h = 0,0015 \cdot 14 \cdot 60 = 1,26 \text{ cm}^2 \rightarrow A_s \gg A_{s, \text{ mín}}$$

Para a armadura tracionada ($13,17 \text{ cm}^2$), entre várias possibilidades de arranjos de barras, pode ser escolhido o arranjo $3 \phi 20 + 2 \phi 16$ ($13,45 \text{ cm}^2$). O detalhamento das armaduras na seção transversal está mostrado na Figura 34. A Tabela A-4 mostra que é possível alojar $2 \phi 20 \text{ mm}$ em uma camada, pois a largura mínima é 13 cm ($12 + 1$), menor que a largura b_w existente (14 cm). No entanto, a distância livre entre as barras deve proporcionar a passagem da agulha do vibrador, e deve ser verificada.

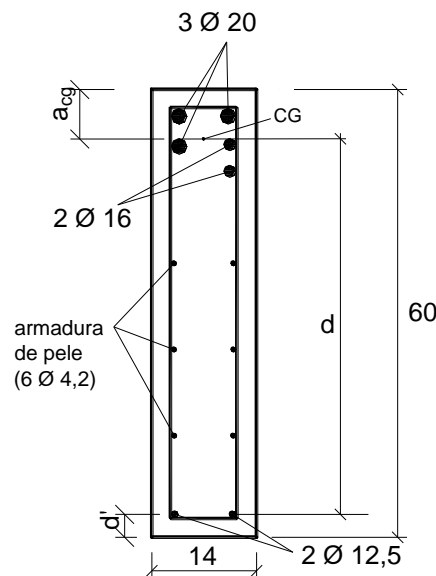


Figura 34 – Detalhamento das armaduras na seção transversal.

A distância livre entre as duas barras da primeira camada é: $a_h = 14 - 2(2,5 + 0,63 + 2,0) = 3,7 \text{ cm}$

A distância livre de $3,7 \text{ cm}$ possibilita a passagem de agulha com diâmetros de 25 e 35 mm . A distância livre vertical entre as camadas é (Eq. 11):

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,0 \text{ cm} \\ 0,5d_{\max,agr} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\min} = 2,0 \text{ cm}$$

Conforme a posição adotada para o CG da armadura tracionada, mostrado na Figura 34, a distância a_{cg} para o detalhamento escolhido é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + a_{v,\min} = 2,5 + 0,63 + 2,0 + 2,0 = 7,1 \text{ cm}$$

A distância a_{cg} inicialmente adotada foi de 6 cm , o que significa uma diferença de $1,1 \text{ cm}$. Como exemplo do que essa diferença implica no dimensionamento, se a viga for recalculada com $d = h - 7,1 \text{ cm} = 60 - 7,1 = 52,9 \text{ cm}$, as novas áreas de armadura resultam: $A_s = 13,39 \text{ cm}^2$ e $A'_s = 2,48 \text{ cm}^2$. Verifica-se que os arranjos escolhidos, $3 \phi 20 + 2 \phi 16$ ($13,45 \text{ cm}^2$) para A_s , e $2 \phi 12,5$ ($2,50 \text{ cm}^2$) para A'_s , atendem as áreas de armadura recalculadas, de modo que o detalhamento mostrado na Figura 34 não necessita ser modificado. Este exemplo mostra que na escolha do arranjo de barras é interessante adotar uma área de armadura um pouco superior à calculada.³¹

A distância d' entre o centro de gravidade da armadura comprimida à face comprimida, adotada inicialmente como 4 cm , é:

$$d' = c + \phi_t + \phi_\ell/2 = 2,5 + 0,63 + 1,25/2 = 3,8 \text{ cm}$$

Com $h = 60 \text{ cm}$, a viga não necessita de armadura de pele (ver Eq. 9), no entanto, a fim de evitar o possível surgimento de fissuras por retração, indicamos colocar uma armadura com área da NB 1/1978:

$$A_{sp,face} = 0,05\% b_w \cdot h = 0,0005 \cdot 14 \cdot 60 = 0,42 \text{ cm}^2 \quad (3 \phi 4,2 \text{ mm} \rightarrow 0,42 \text{ cm}^2 \text{ em cada face vertical})$$

³¹ Neste texto admitimos arranjos com a tolerância de até 5% a menos em relação à área da armadura calculada.

9. SEÇÃO T

Teoricamente, as vigas podem ter qualquer forma geométrica para a seção transversal, porém, as seções mais comuns são a retangular, T e I. No caso de vigas pré-moldadas de concreto, é comum também a seção duplo T (Figura 35).

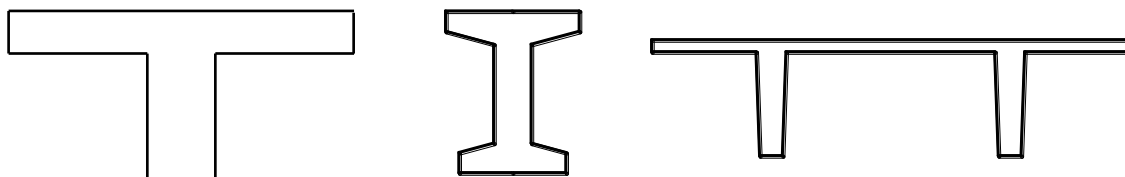


Figura 35 – Seções transversais comuns na pré-moldagem, T, I e duplo T.

A seção T é assim chamada porque a seção transversal da viga tem a forma geométrica da letra T, como mostrada na Figura 36. A seção é composta pela mesa e pela nervura. A mesa deve estar obrigatoriamente comprimida (parcialmente ou totalmente). Podem ser do tipo pré-moldada, quando são fabricadas com a forma de T em uma empresa, ou moldadas no local, quando surgem devido à contribuição de lajes maciças apoiadas sobre vigas de seção retangular, ou seja, quando se considera o trabalho conjunto da viga de apoio com as lajes adjacentes.³²

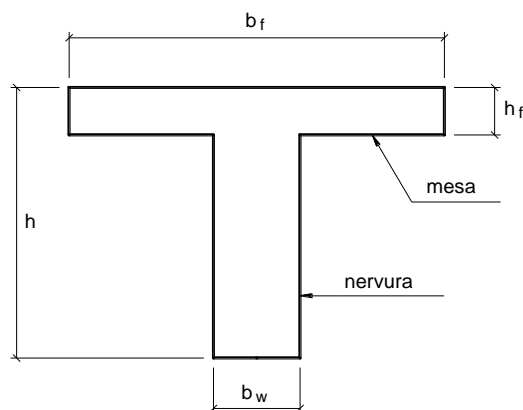


Figura 36 – Notação da viga seção T.

A seção T também pode ser formada em lajes do tipo nervurada, moldada no local ou pré-fabricada (Figura 37), e nas seções celulares da superestrutura de pontes e viadutos (Figura 38).

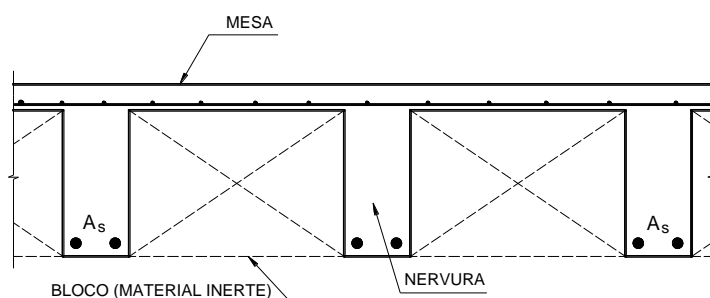


Figura 37 – Seção T proveniente do trabalho conjunto da nervura com a mesa, em laje nervurada moldada no local submetida a momento fletor positivo.

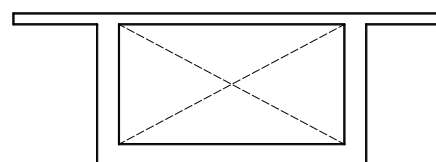


Figura 38 – Seção celular de ponte ou viaduto.

No caso das estruturas com o concreto moldado no local, o trabalho conjunto entre a viga retangular e as lajes maciças vizinhas nela apoiada ocorre porque as tensões normais de compressão, provenientes da flexão, espalham-se também para as lajes vizinhas (ver Figura 48 e Figura 49). Porém, como o concreto contribui apenas na resistência às tensões de compressão, a contribuição da laje para formar a seção T só pode

³² A seção T não fica claramente visível na estrutura neste caso, mas é considerada no dimensionamento da viga.

ser considerada no dimensionamento quando ela encontra-se comprimida pela flexão.³³ Portanto, no esquema mostrado na Figura 39a, que tem as lajes apoiadas na borda superior da viga, a seção T só pode ser considerada no dimensionamento aos momentos fletores positivos. E no esquema mostrado na Figura 39b, que tem as lajes apoiadas na borda inferior da viga, a seção T só pode ser considerada no dimensionamento ao momento fletor negativo, no apoio interno.³⁴

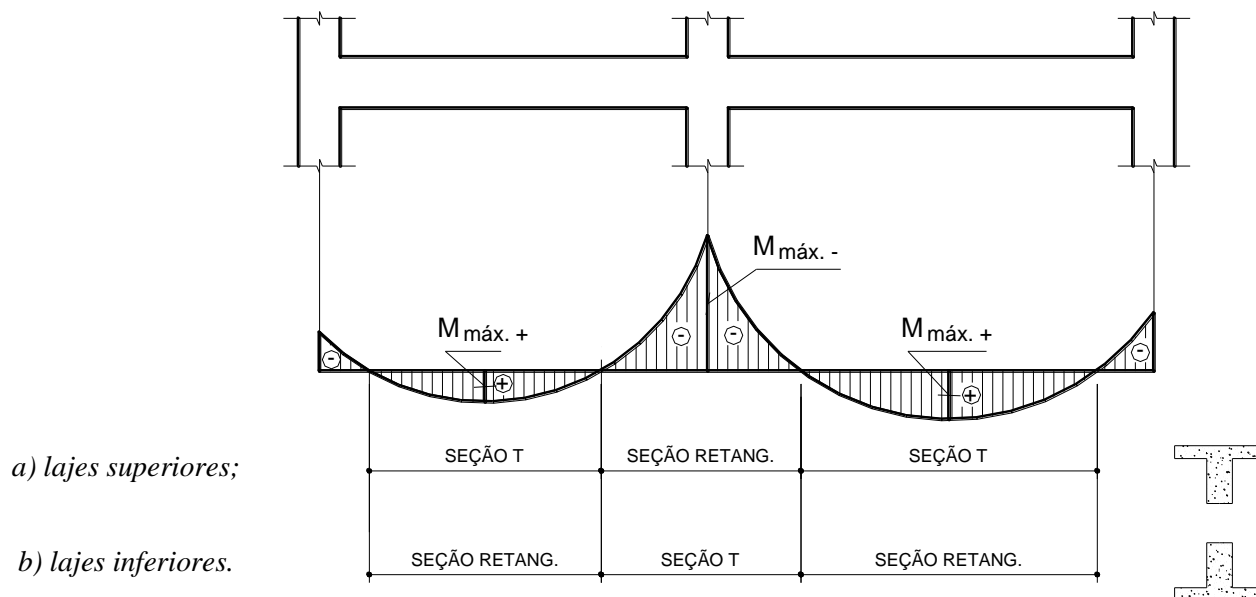


Figura 39 – Consideração de seção retangular ou T, no dimensionamento de viga de dois tramos com lajes vizinhas apoiadas na borda superior ou na borda inferior.

Como na grande maioria dos casos da prática as lajes apoiam-se na borda superior das vigas, a seção T só é formada nos momentos fletores positivos, que comprimem a região superior das vigas. Este não é um aspecto favorável, pois os momentos fletores negativos nos apoios internos são geralmente maiores que os momentos fletores positivos nos vãos. Ainda assim é muito interessante contar com a contribuição das lajes nos momentos fletores positivos, porque a seção T possibilita economia de armadura e flechas menores.

A altura das lajes maciças varia comumente de 8 a 12 cm e, como explicado, podem contribuir para formar seção T. No entanto, no caso de **lajes nervuradas pré-fabricadas**, onde a espessura da mesa (ou capa) é comumente de apenas 3 ou 4 cm, a contribuição da mesa geralmente é desprezada, principalmente quando não existe um controle de qualidade rigoroso na execução da estrutura. Nestas lajes, pode ocorrer uma grande variabilidade na espessura da mesa, e o cálculo das nervuras é feito como seção retangular.

A Figura 40 mostra uma planta de fôrma simples de uma construção de pequeno porte, que possibilita apresentar as diferentes situações que ocorrem, de poder ou não considerar a contribuição das lajes, de modo a formar seções T ou L (quando existe a contribuição de apenas uma laje adjacente à viga).³⁵ A estrutura simples é formada por três lajes maciças e seis vigas, com a laje L2 em balanço e a laje L3 invertida (apoiada nas bordas inferiores das vigas ao longo do seu contorno).

³³ Quando a laje é tracionada pela flexão, a contribuição da laje não ocorre, pois não se considera o trabalho do concreto na resistência às tensões normais de tração.

³⁴ Nos casos em que as lajes encontram-se tracionadas, a seção da viga no dimensionamento é a retangular.

³⁵ A seção L é calculada como uma seção T equivalente.

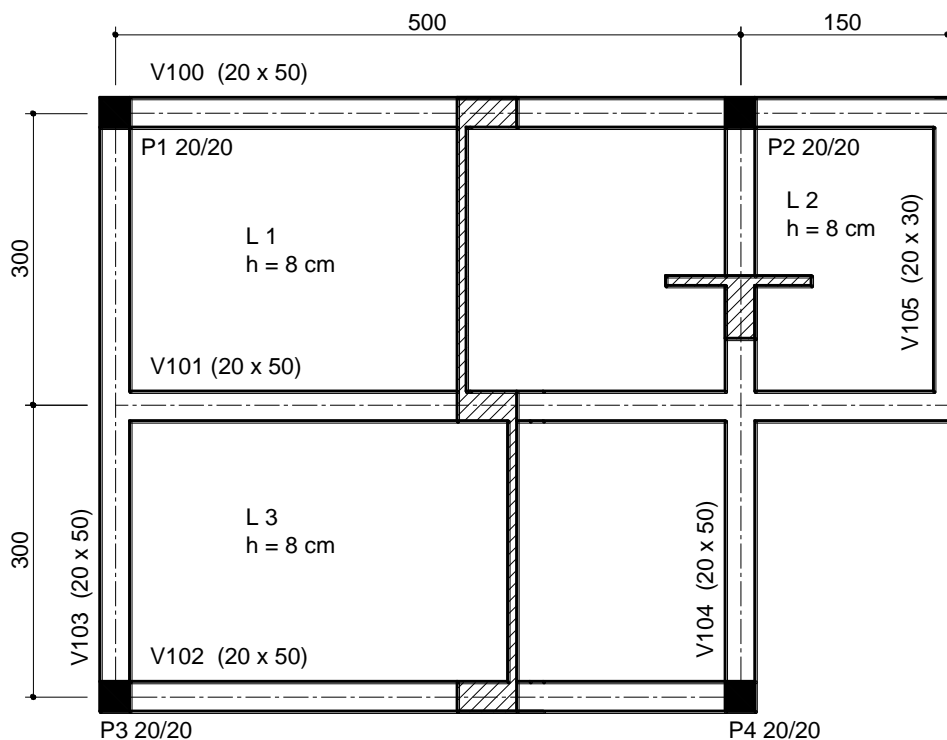


Figura 40 – Planta de fôrma da estrutura.

A forma da seção (R, T ou L) deve ser analisada na posição onde ocorre o momento fletor máximo. E cada momento fletor máximo deve ser analisado individualmente, isto é, momento fletor por momento fletor. Deve-se lembrar da condição básica de que o momento fletor positivo traciona a região inferior das vigas e comprime a região superior, e que o contrário ocorre para o momento fletor negativo. Sendo assim, a pergunta básica que se deve fazer na análise é: para um determinado momento fletor máximo, existe laje apoiada na borda comprimida da viga? Para facilitar o entendimento, na sequência serão analisadas as seis vigas da planta de fôrma da Figura 40.

a) V100

A Figura 41 mostra o esquema estático e o diagrama de momentos fletores da viga V100, com indicação dos valores máximos.³⁶ Na região do momento fletor positivo máximo existe a laje L1 apoiada na borda superior da viga (ver Figura 40), como indicado no corte esquemático mostrado na própria planta de fôrma. Portanto, a laje está submetida a tensões normais de compressão, de modo que pode ser considerada a laje auxiliando a viga na resistência a essas tensões. Como existe apenas a laje L1 apoiada na viga, a seção formada é a L, que pode ser calculada com uma analogia à seção T, segundo o critério mostrado na Figura 42.

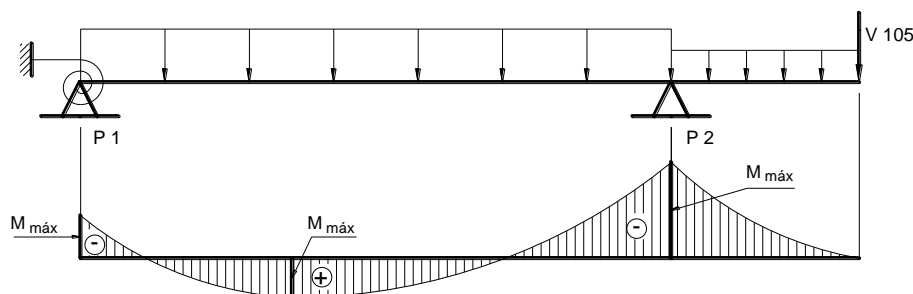


Figura 41 – Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V100.

³⁶ A NBR 6118 especifica que deve ser considerada a ligação da viga com os apoios extremos, por isso o engaste elástico no pilar P1. Quando o apoio extremo é uma viga de seção transversal corrente, o apoio é simples. Mais detalhes sobre este assunto são apresentados no texto disponível em: <https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Vigas.pdf>

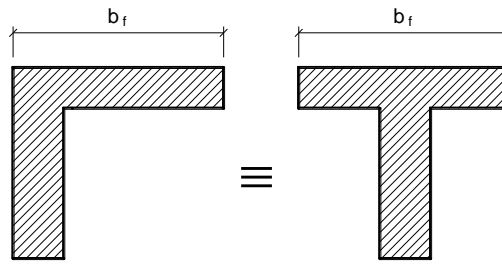


Figura 42 – Analogia de seção L com seção T.

Na região do momento fletor negativo máximo (apoio no pilar P2), que comprime a região inferior da viga, não existem lajes na borda inferior. Portanto, as lajes L1 e L2 estão tracionadas, e não podem ser consideradas. Conclui-se que a seção resistente é apenas a seção retangular da viga (20 x 50).

No caso de momentos fletores negativos que ocorrem em engastes elásticos nos apoios extremos, o dimensionamento deve ser feito considerando a seção (retangular, L ou T), conforme a posição das lajes na região do engaste elástico. No caso particular do momento fletor negativo da viga V100 no pilar P1, a laje L1 encontra-se tracionada pelo momento fletor, e não contribui portanto com a viga.

b) V101

Na região do momento fletor positivo máximo existem as lajes L1 e L3, sendo a L1 comprimida e a L3 tracionada. Portanto, a laje L3 não contribui e a L1 forma uma seção L unida à seção retangular da viga.

No momento fletor negativo máximo, que ocorre no cruzamento com a viga V104, devem ser feitas duas análises, a primeira considerando apenas as lajes L1 e L2 e a segunda considerando apenas a laje L3. As lajes L1 e L2, que estão apoiadas no lado superior da viga, são tracionadas pelo momento fletor negativo, e não devem ser consideradas. Por outro lado, a laje L3, que está no lado inferior, pode ser considerada, pois está comprimida. No entanto, o momento fletor negativo ocorre também à direita da viga V104 (ver diagrama de M_f da V101 – Figura 43), onde não existe laje (ver Figura 40). O que ocorre então é que existe a seção L para os momentos fletores negativos à esquerda da viga V104 e à direita existe apenas a seção retangular (20 x 50). Nesta situação, existirá uma armadura negativa de flexão menor (para a seção L) à esquerda da V104 e outra maior (para a seção retangular) à direita. Como na prática não é usual este tipo de detalhamento de armadura, com mudança brusca de área de armadura negativa no apoio, costuma-se calcular e detalhar apenas a maior armadura (aquela da seção retangular). Portanto, a armadura fica a favor da segurança para o trecho da viga à esquerda da V104.

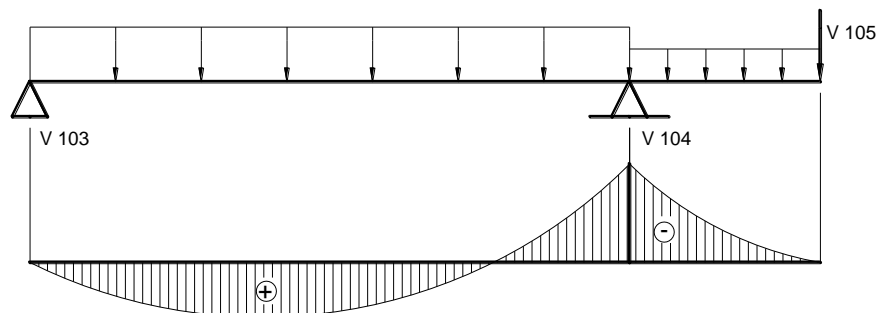


Figura 43 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V101.

c) V102

Na região do momento fletor positivo máximo não existe laje comprimida (ver Figura 40 e Figura 44), pois a laje L3 está apoiada na borda tracionada da viga. A seção a ser considerada, portanto, é a seção retangular 20 x 50. No caso dos momentos fletores negativos nos engastes elásticos dos apoios extremos, a laje L3 é comprimida e contribui para formar a seção L juntamente com a viga retangular.

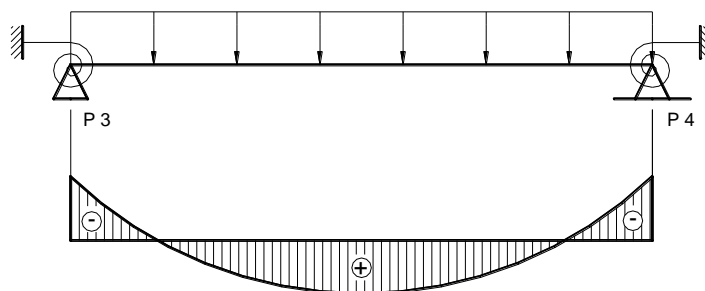


Figura 44 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V102.

d) V103

Nos momentos fletores negativos provenientes dos engastes elásticos nos pilares P1 e P3, a laje L3 contribui na resistência da viga e forma a seção L. No pilar P1 a laje L1 é tracionada pelo momento fletor negativo, e não contribui, resultando portanto a seção retangular.

No momento fletor positivo máximo existente na ligação com a viga V101 ocorrem a seção L e a seção retangular (Figura 45). A laje L3 é tracionada pelo momento fletor positivo, e não pode ser considerada, o que leva à seção retangular. A laje L1, por outro lado, é comprimida pelo momento fletor, e forma, portanto, a seção L. Neste caso, como ocorre a seção retangular à esquerda do momento fletor máximo e a seção L à direita, opta-se pelo cálculo como seção retangular, por conduzir a uma armadura maior.

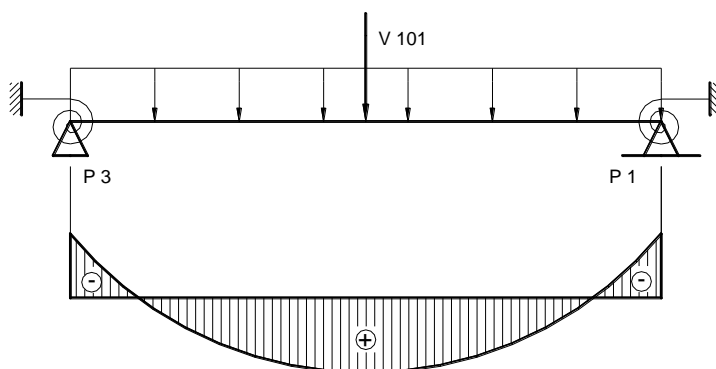


Figura 45 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V103.

e) V104

No caso do momento fletor positivo máximo no vão, a análise da viga V104 é semelhante à análise da viga V103, ou seja, a seção no dimensionamento é a retangular (Figura 46). Nos momentos fletores negativos existentes nos engastes elásticos, a seção é L no pilar P4 (contribuição da laje L3), e retangular no pilar P2 (não contribuição das lajes L1 e L2).

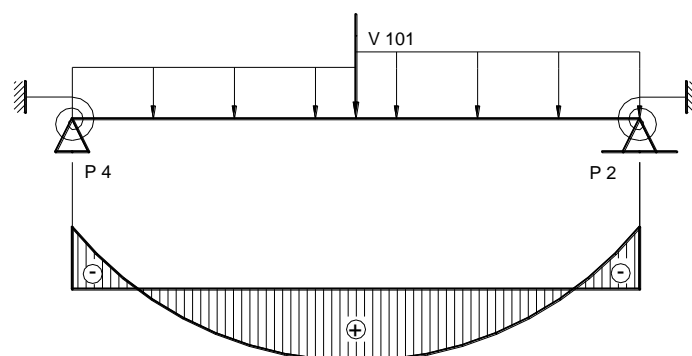


Figura 46 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V104.

f) V105

A seção a ser considerada no momento fletor positivo é a L, pois a laje L2, apoiada na borda superior da viga, é comprimida pelo momento fletor (Figura 47).

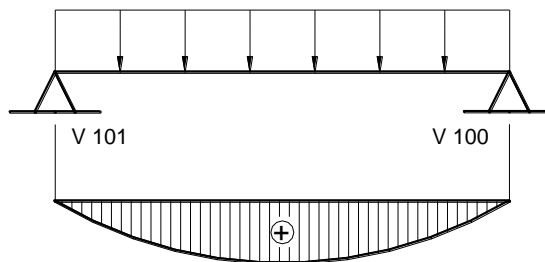


Figura 47 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores da viga V105.

9.1 Largura Colaborante

Define-se como **largura colaborante** a largura da mesa que resiste às tensões normais de compressão, oriundas do momento fletor. A largura colaborante não é constante ao longo do vão e depende de vários fatores: viga simples ou contínua, tipo de carga, vão, tipo de apoios, da relação h_f / h , existência de vigas transversais, etc. A Figura 48 mostra as trajetórias das tensões principais de compressão nas lajes adjacentes à viga.

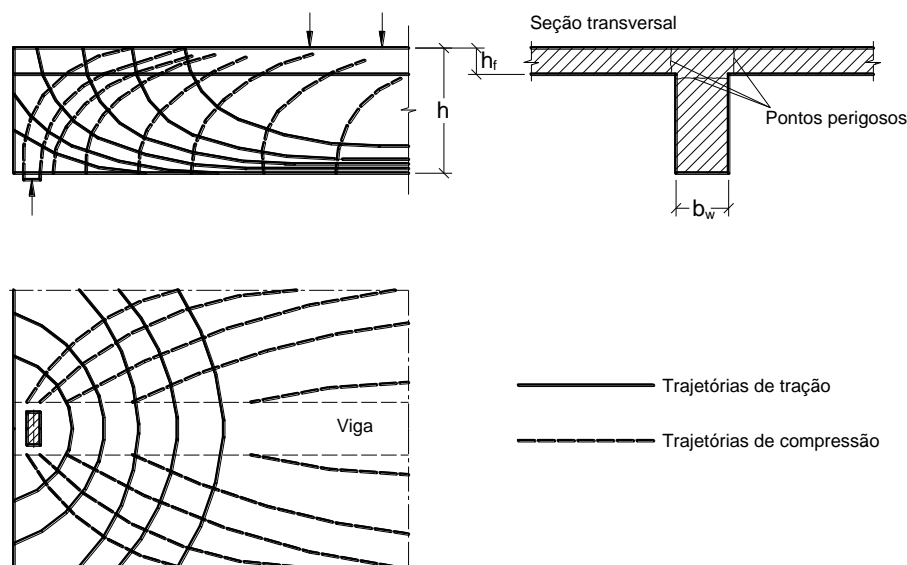
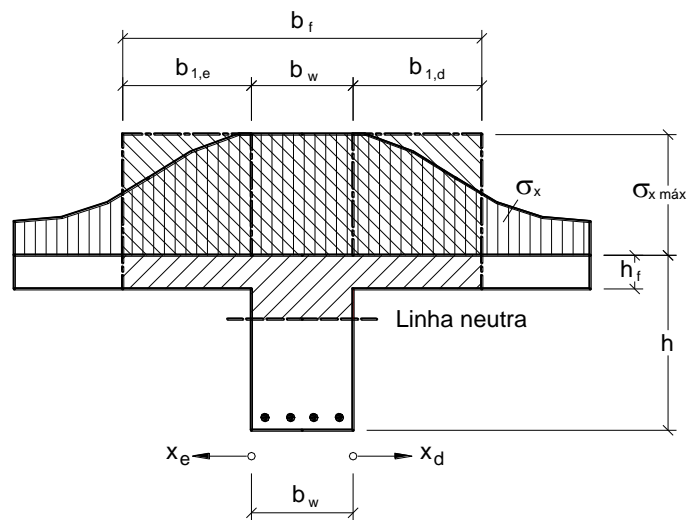


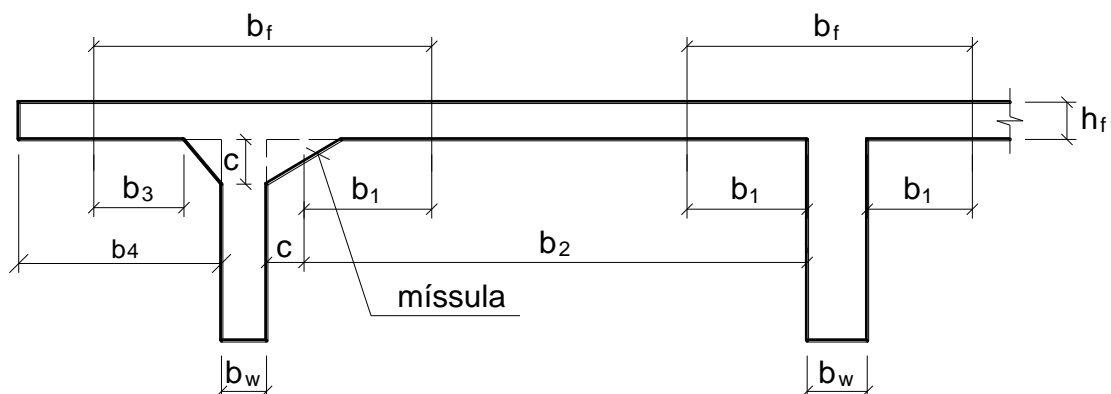
Figura 48 – Trajetórias das tensões principais na viga T (Leonhardt e Mönnig, 1982).

As tensões de compressão σ_x na viga e nas lajes variam de intensidade, diminuindo conforme se afastam da alma da viga (Figura 49). De modo idealizado as tensões são tomadas constantes na largura colaborante ($\sigma_{x,máx}$). Observe que a largura colaborante b_f é composta pela soma das distâncias $b_{l,e}$, b_w e $b_{l,d}$.



Como as lajes se deformam menos que a alma da viga, a linha neutra mostra uma curvatura além da alma (Figura 50), sendo várias as causas para tal curvatura.

Segundo a NBR 6118 (item 14.6.2.2), “Quando a estrutura for modelada sem a consideração automática da ação conjunta de lajes e vigas, esse efeito pode ser considerado mediante a adoção de uma largura colaborante da laje associada à viga, compondo uma seção transversal T. A consideração da seção T pode ser feita para estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos da estrutura, de uma forma mais realista”. A Figura 51 mostra os parâmetros a serem analisados no estudo de seções T.



“A largura colaborante b_f deve ser dada pela largura da viga b_w acrescida de no máximo 10 % da distância a entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que haja laje colaborante”. A distância a pode ser assumida conforme os valores mostrados na Figura 52.

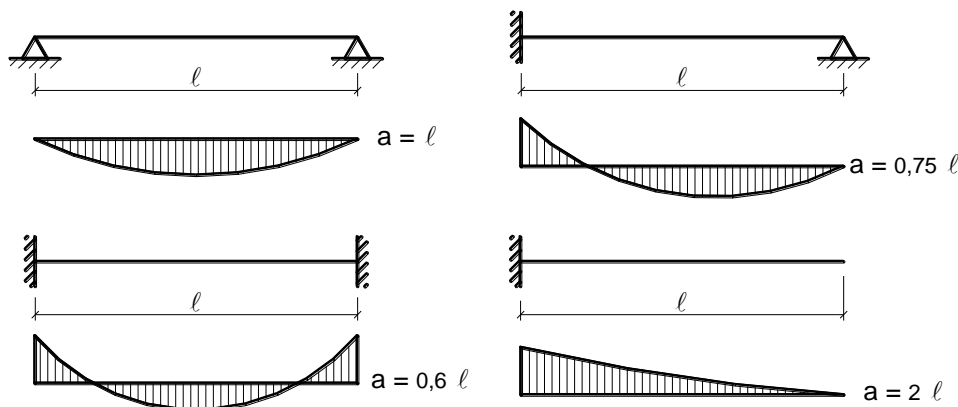


Figura 52 - Valores de a em função dos vínculos da viga nos apoios.

“Alternativamente, o cômputo da distância a pode ser feito ou verificado mediante exame dos diagramas de momentos fletores na estrutura.

No caso de vigas contínuas, permite-se calculá-las com uma largura colaborante única para todas as seções, inclusive nos apoios sob momentos negativos, desde que essa largura seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde a largura resulte mínima.” A largura colaborante é dada pela soma das dimensões b_1 , b_w e b_3 (Figura 51), com b_1 e b_3 dados por:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,1 a \\ 0,5 b_2 \end{cases} \quad b_3 \leq \begin{cases} 0,1 a \\ b_4 \end{cases} \quad \text{Eq. 52}$$

com b_3 sendo a largura colaborante de lajes em balanço.

Nos casos mais comuns da prática, que é a inexistência de mísulas (ver Figura 51), as larguras b_1 e b_3 iniciam-se a partir das faces das vigas. O valor b_2 representa a distância entre a face da viga que se está considerando a seção T, na direção perpendicular, à face da viga mais próxima.

No cálculo de b_1 geralmente o valor **0,1a** é menor que $0,5b_2$, pois a distância b_2 entre as vigas adjacentes normalmente é grande. Por outro lado, nas lajes nervuradas, geralmente a distância b_1 é dada pelo valor $0,5b_2$.

A Figura 53 mostra uma planta de fôrma simples, com o objetivo de mostrar as faixas de contribuição das lajes (b_1 e b_3) que originam as seções T ou L. A contribuição das lajes deve ser analisada viga por viga, vão por vão. Como as lajes estão apoiadas nas bordas superiores das vigas, as lajes só formam seções L ou T para os momentos fletores positivos, pois estes comprimem as lajes. Nos momentos fletores negativos as vigas devem ser consideradas de seção retangular.

No caso da viga V4 por exemplo, a largura colaborante b_f é dada pelos valores b_1 à esquerda e b_1 à direita da V4, que são geralmente iguais, a menos que b_2 interfira na definição dos valores b_1 .

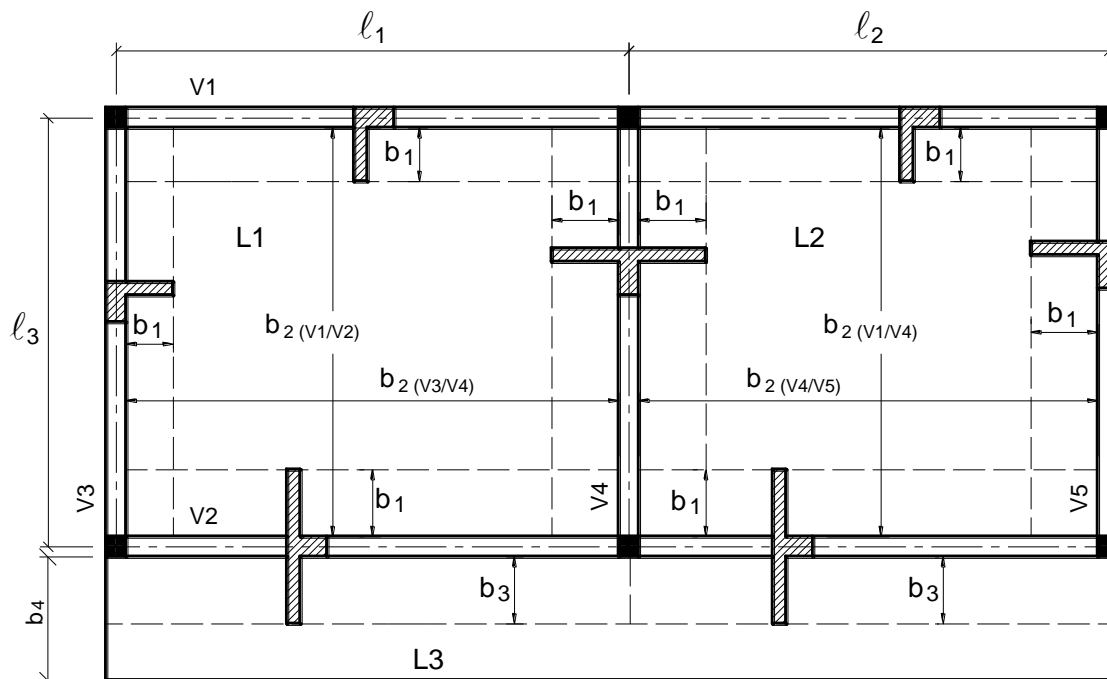
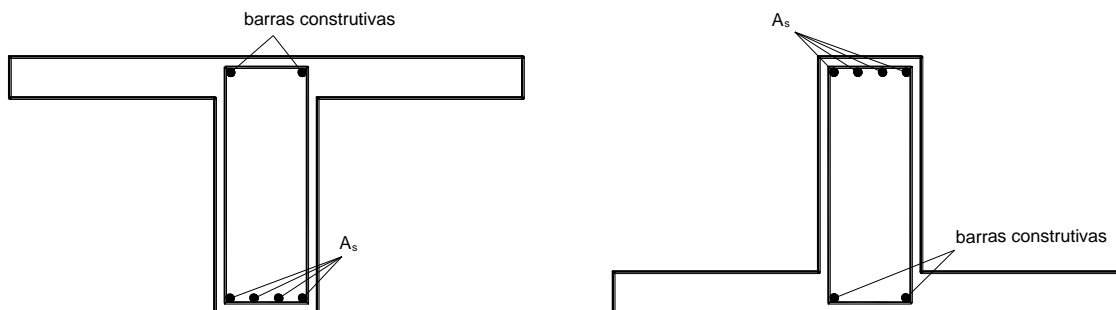


Figura 53 – Planta de fôrma com indicação das dimensões para formar as seções L ou T.

9.2 Seção T com Armadura Simples

Assim como apresentado no estudo da seção retangular, a “seção T com armadura simples” é aquela que tem como armadura de flexão (longitudinal) apenas a armadura tracionada (A_s), e não tem necessidade de armadura longitudinal comprimida (A'_s).³⁷ No entanto, nas proximidades da borda comprimida são dispostas barras longitudinais construtivas (não consideradas como resistentes), com no mínimo duas barras nos vértices dos estribos, como indicadas na Figura 54.



a) para momento fletor positivo;

b) para momento fletor negativo.

Figura 54 – Seção T com armadura simples.

A formulação apresentada a seguir para o dimensionamento de vigas com seção T deve ser aplicada apenas aos concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa), porque os valores da profundidade y (Eq. 12) e da tensão de compressão no concreto (σ_{cd} - Eq. 13), considerados no diagrama retangular simplificado, são aqueles preconizados pela NBR 6118 para esses concretos.

No estudo da seção T com a utilização do diagrama retangular simplificado com profundidade $y = 0,8x$ (ver Figura 13) observa-se a existência de dois casos, em função da posição da linha neutra na seção transversal, com $0,8x \leq h_f$ ou $0,8x > h_f$.

9.2.1 $0,8x \leq h_f$

A Figura 55 mostra uma seção T submetida a momento fletor positivo, com a LN distante x da borda comprimida, e com diagrama retangular simplificado de distribuição de tensões normais de compressão no

³⁷ A seção T com armadura dupla não será objeto de estudo neste texto.

concreto. Quando a altura $0,8x$ do diagrama retangular é menor ou igual à altura da mesa, isto é, $0,8x \leq h_f$, a seção comprimida de concreto (A'_c) é retangular, com área $b_f \cdot 0,8x$, de modo que o dimensionamento pode ser feito como **seção retangular**, mas com largura b_f ao invés de b_w , ou seja, seção $b_f \cdot h$. Neste caso são aplicadas as equações já desenvolvidas para a “seção retangular com armadura simples”.³⁸ Assim pode ser feito porque o concreto da região tracionada não é considerado no dimensionamento, isto é, para a flexão não importa a sua inexistência em parte da área tracionada. A maioria das seções T da prática resulta $0,8x \leq h_f$.

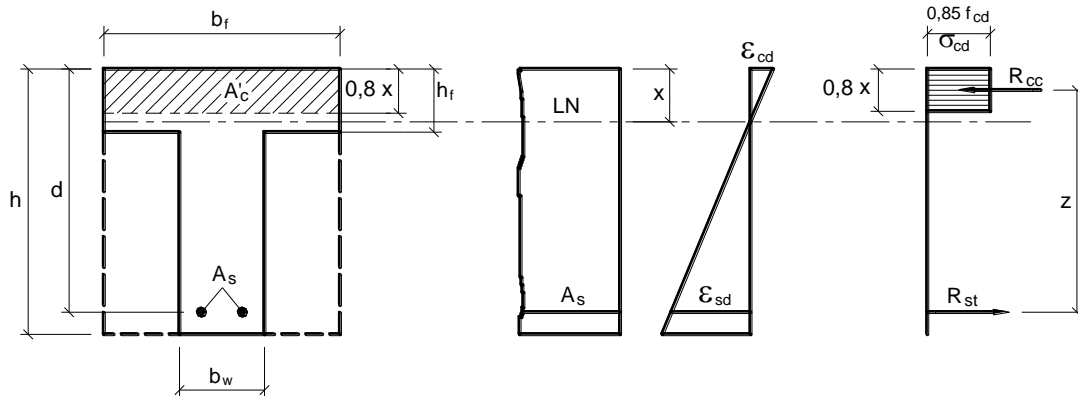


Figura 55 – Seção T com $0,8x \leq h_f$, para concretos do Grupo I.

9.2.2 $0,8x > h_f$

Considerando ainda a seção T da Figura 55, se ocorrer $0,8x$ maior que a altura da mesa (h_f), isto é, $0,8x > h_f$, a área de concreto comprimida (A'_c) não será retangular, mas sim composta pelos retângulos I, II e III mostrados na Figura 56a. Neste caso, a formulação desenvolvida para a seção retangular não pode ser aplicada, sendo necessária uma nova formulação.

A fim de simplificar a dedução das equações para a seção T com $0,8x > h_f$, a seção será subdividida em duas seções equivalentes (Figura 56). Na seção da Figura 56b, o concreto comprimido da mesa é equilibrado por uma parcela A_{s1} da armadura longitudinal tracionada total (A_s). O concreto comprimido da nervura é equilibrado pela segunda parcela A_{s2} da armadura A_s (Figura 56c).

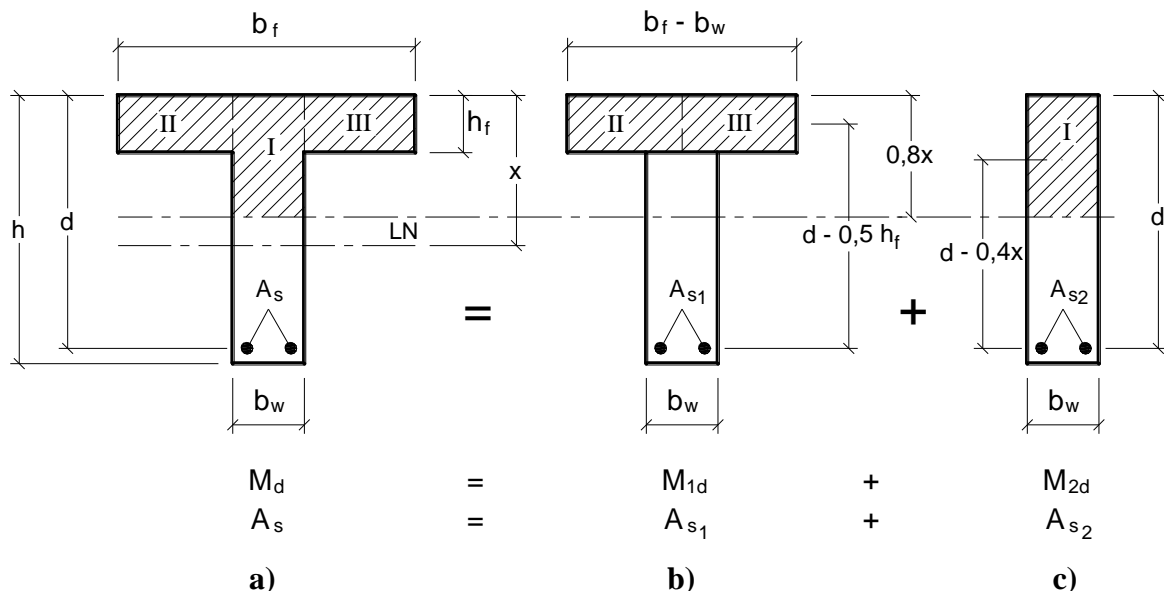


Figura 56 - Decomposição da seção T com armadura simples.

a) Equilíbrio de Forças Normais

Na Flexão Simples não existe a força normal solicitante externa, de modo que a força resultante do concreto comprimido deve equilibrar a força resultante da armadura tracionada:

³⁸ Caso se considere o diagrama parábola-retângulo, a seção T será dimensionada como seção retangular ($b_f \cdot h$) somente se $x \leq h_f$.

$$R_{cc} = R_{st} \quad \text{Eq. 53}$$

R_{cc} = força resultante das tensões normais de compressão na área de concreto comprimido;
 R_{st} = força resultante das tensões normais de tração na armadura longitudinal A_s .

b) Equilíbrio de Momentos Fletores

As forças internas resistentes R_{cc} e R_{st} formam um binário oposto ao momento fletor solicitante, tal que $M_{solic} = M_{resist} = M_d$. Conforme a decomposição da seção T em duas outras equivalentes, o momento fletor total é subdividido nas parcelas M_{1d} e M_{2d} , com:

$$M_d = M_{1d} + M_{2d} \quad \text{Eq. 54}$$

onde M_d deve ser considerado com valor absoluto. Do equilíbrio de momentos fletores na linha de ação da armadura A_{s1} na Figura 56b, define-se o momento fletor resistente M_{1d} proporcionado pela armadura A_{s1} e pela mesa comprimida:

$$M_{1d} = (b_f - b_w) h_f 0,85 f_{cd} (d - 0,5 h_f) \quad \text{Eq. 55}$$

Geralmente, adotam-se valores para todas as variáveis (b_f , b_w , h_f , f_{cd} , d) da Eq. 55, de modo a tornar possível o cálculo de M_{1d} . A segunda parcela do momento fletor total fica assim determinada da Eq. 54:

$$M_{2d} = M_d - M_{1d} \quad \text{Eq. 56}$$

A seção da Figura 56c é uma seção retangular com armadura simples, cujo equacionamento já foi desenvolvido na Eq. 20, e trocando M_d por M_{2d} fica:

$$M_{2d} = 0,68 b_w \times f_{cd} (d - 0,4x) \quad \text{Eq. 57}$$

Conhecendo-se os valores de M_{2d} , b_w , f_{cd} e d , com a Eq. 57 é possível definir a posição x da linha neutra e assim determinar em qual domínio a seção T se encontra. Como já apresentado na Eq. 23, a posição da linha neutra deve obedecer aos seguintes limites, conforme o item 14.6.4.3 da NBR 6118:

a) $x/d \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;

b) $x/d \leq 0,35$ para concretos com $50 < f_{ck} \leq 90$ MPa.

Eq. 58

Com o equilíbrio de momentos fletores em torno do centro de gravidade das áreas comprimidas de concreto nas seções **b** e **c** da Figura 56, e considerando o dimensionamento nos domínios 2 ou 3, onde $\sigma_{sd} = f_{yd}$, as parcelas de armadura A_{s1} e A_{s2} surgem de:

$$M_{1d} = \sigma_{sd} A_{s1} (d - 0,5 h_f)$$

$$A_{s1} = \frac{M_{1d}}{f_{yd} (d - 0,5 h_f)} \quad \text{Eq. 59}$$

$$M_{2d} = \sigma_{sd} A_{s2} (d - 0,4x)$$

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{f_{yd} (d - 0,4x)} \quad \text{Eq. 60}$$

Com a área de armadura total:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad \text{Eq. 61}$$

c) Permanência das seções planas

Considerando o diagrama de deformações mostrado na Figura 55 e fazendo a semelhança de triângulos, pode ser definida a equação que relaciona as deformações na armadura tracionada e no concreto correspondente à fibra mais comprimida:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{sd}} = \frac{x}{d - x} \quad \text{Eq. 62}$$

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{sd}} \quad \text{Eq. 63}$$

9.2.3 Cálculo Mediante Equações com Coeficientes K

Para a seção T podem ser utilizadas também as tabelas elaboradas para a seção retangular. Inicialmente, com a suposição de que a seção T será calculada como seção retangular com largura b_f , verifica-se a posição da linha neutra, por meio de K_c :

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} \quad \text{Eq. 64}$$

Com o valor de K_c determinam-se na Tabela A-1 (ou Tabela A-2) os valores β_x e K_s . O valor de x é imediato:

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad \rightarrow \quad x = \beta_x d$$

Os limites apresentados na Eq. 58 (igual à Eq. 23) para a posição da linha neutra devem ser obedecidos.³⁹ Para o diagrama retangular simplificado, se resultar $0,8x \leq h_f$ confirma a hipótese inicial de seção T calculada como seção retangular com largura b_f e altura h . A armadura tracionada é:

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} \quad \text{Eq. 65}$$

Se resultar $0,8x > h_f$, o dimensionamento deve ser feito com as equações desenvolvidas para a seção T. O valor de x inicialmente determinado em função de K_c não é verdadeiro e serviu apenas para definir que o dimensionamento deve ser feito com as equações da seção T. Para cálculo do momento fletor resistente M_{ld} , proporcionado pela área da mesa comprimida, adota-se $0,8x^* = h_f$, ficando:

$$x^* = \frac{h_f}{0,8} = 1,25 h_f$$

A variável β_x que relaciona x com d é:

$$\beta_x^* = \frac{1,25h_f}{d} \quad \text{Eq. 66}$$

Com β_x^* determina-se K_c^* na Tabela A-1 e:

$$M_{ld} = \frac{(b_f - b_w) d^2}{K_c^*} \quad \text{Eq. 67}$$

Determinado o momento fletor resistente M_{ld} , a segunda parcela de M_d é:

³⁹ Caso não sejam obedecidos, alguma alteração deve ser feita no projeto da viga, sendo a mais comum o aumento da altura h .

$$M_{2d} = M_d - M_{ld}$$

com M_d em valor absoluto. Com o momento fletor M_{2d} determina-se a posição x correta para a linha neutra, referente à seção retangular mostrada na Figura 56c:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_{2d}} \quad \text{Eq. 68}$$

Com o valor de K_c , na Tabela A-1 determinam-se K_s e β_x ($\beta_x = x/d$). A posição da linha neutra deve obedecer os limites apresentados na Eq. 58. A armadura tracionada é:

$$A_s = \frac{M_{ld}}{f_{yd}(d - 0,5h_f)} + K_s \frac{M_{2d}}{d} \quad \text{Eq. 69}$$

Como já observado, os coeficientes K foram calculados considerando as unidades de kN e cm, de modo que as variáveis das equações devem ter essas unidades.

9.2.4 Exemplos Numéricos

1º) Dimensionar a armadura longitudinal de flexão da viga com a seção transversal mostrada na Figura 57, sendo dados:

concreto C20
aço CA-50
 $\gamma_s = 1,15$
 $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$
 $M_k = + 15.000 \text{ kN.cm}$
 $c = 2,5 \text{ cm}$
brita 1
 $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$
 $b_f = 100 \text{ cm}$
 $h_f = 8 \text{ cm}$
 $b_w = 20 \text{ cm}$
 $h = 50 \text{ cm}$

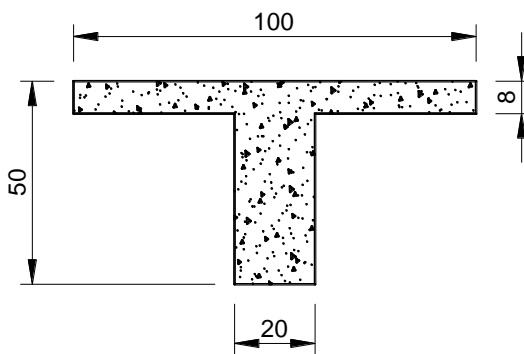


Figura 57 – Dimensões da seção T.

RESOLUÇÃO

Como exemplo de aplicação a resolução será feita segundo as equações teóricas deduzidas e também conforme as equações com coeficientes K . O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 15000 = 21.000 \text{ kN.cm}$$

O valor de a_{cg} (distância do centro de gravidade da armadura tracionada à borda tracionada da seção) será adotado como 5 cm, o que resulta na altura útil:

$$d = h - 5 \text{ cm} = 50 - 5 = 45 \text{ cm}$$

Os valores limites entre os domínios 2, 3 e 4 para o aço CA-50 e para os concretos do Grupo I de resistência, são:

$$x_{2lim} = 0,26d = 0,26 \cdot 45 = 11,7 \text{ cm}$$

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 45 = 28,4 \text{ cm}$$

a) Equações teóricas

Inicialmente supõe-se que resultará $0,8x \leq h_f$ e a seção T será calculada como retangular, com dimensões $b_f \cdot h$. Aplicando a Eq. 20 da seção retangular, com b_f ao invés de b_w , encontra-se a posição da linha neutra (x):

$$M_d = 0,68b_f \times f_{cd}(d - 0,4x) \quad , \text{ com } M_d \text{ sempre com valor absoluto.}$$

$$21.000 = 0,68 \cdot 100 \times \frac{2,0}{1,4}(45 - 0,4x) \quad \rightarrow \quad x = 5,0 \text{ cm}$$

A profundidade do diagrama retangular simplificado de distribuição de tensões de compressão no concreto, para os concretos do Grupo I de resistência (Eq. 12), é:

$$0,8x = 0,8 \cdot 5,0 = 4,0 \text{ cm}$$

Como resultou $0,8x = 4 \text{ cm} < h_f = 8 \text{ cm}$, a hipótese inicial foi confirmada, e a seção T deve ser dimensionada como retangular $b_f \cdot h$, com as equações definidas para a seção retangular. A verificação do domínio mostra que a seção T encontra-se no domínio 2,⁴⁰ dado que:

$$x = 5,0 \text{ cm} < x_{2\text{lim}} = 11,7 \text{ cm}$$

Além disso, a posição da linha neutra atende o limite apresentado na Eq. 58:

$$x/d = 5,0/45 = 0,11 \leq 0,45 \quad \rightarrow \text{ ok! (para concretos do Grupo I de resistência)}$$

A armadura é calculada aplicando a Eq. 22, com $\sigma_{sd} = f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$:

$$A_s = \frac{M_d}{f_{yd}(d - 0,4x)} = \frac{21.000}{\frac{50}{1,15}(45 - 0,4 \cdot 5,0)} = 11,23 \text{ cm}^2$$

A área de armadura mínima de flexão conforme a Tabela 2 é:

$$A_{s,\text{mín}} = 0,15\% b_w h = 0,0015 \cdot 20 \cdot 50 = 1,50 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow A_s > A_{s,\text{mín}}$$

b) Equações com coeficientes K

Supondo inicialmente que resultará $0,8x \leq h_f$ e a seção T será calculada como retangular, com dimensões $b_f \cdot h$, aplicando a Eq. 64 encontra-se a posição da linha neutra (x):

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{100 \cdot 45^2}{21.000} = 9,6$$

Com concreto C20 e aço CA-50, na Tabela A-1 determinam-se os valores de $\beta_x = 0,11$, $K_s = 0,024$ e domínio 2. Sendo $\beta_x = x/d$, os valores de x e $0,8x$ são:

$$x = \beta_x \cdot d = 0,11 \cdot 45 = 5,0 \text{ cm}$$

$$0,8x = 0,8 \cdot 5,0 = 4,0 \text{ cm} < h_f = 8 \text{ cm}$$

Como resultou $0,8x < h_f$, a hipótese inicial foi confirmada, ou seja, a seção T deve ser dimensionada como seção retangular $b_f \cdot h$. Verifica-se também que a posição da linha neutra atende o limite apresentado na Eq. 58, para concretos do Grupo I de resistência:

$$\beta_x = x/d = 0,11 \leq 0,45 \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

A armadura tracionada resulta da Eq. 65 (ou Eq. 30):

⁴⁰ Nas seções T geralmente resulta o domínio 2, porque a área de concreto comprimido é normalmente grande.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{21.000}{45} \rightarrow A_s = 11,20 \text{ cm}^2$$

c) Deformações

Como resultou o domínio 2, a deformação na armadura tracionada é $\varepsilon_{sd} = 10 \text{ ‰}$ e a deformação no concreto da fibra mais comprimida é (Eq. 24):

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{sd}} = \frac{x}{d-x}$$

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{10} = \frac{5,0}{45-5,0} \rightarrow \varepsilon_{cd} = 1,25 \text{ ‰} \quad (\text{no domínio 2 } \varepsilon_{cd} \text{ deve estar entre zero e } 3,5 \text{ ‰}).$$

d) Detalhamento da armadura

O detalhamento da armadura longitudinal de flexão está mostrado na Figura 58. Como o momento fletor é positivo, a armadura deve ser disposta próxima à borda inferior da viga. A Tabela A-4 mostra que para a área calculada $A_s = 11,23 \text{ cm}^2$ podem ser colocadas 6 $\phi 16 \text{ mm}$ ($12,00 \text{ cm}^2$), e a tabela mostra também quantas das seis barras $\phi 16 \text{ mm}$ podem ser dispostas em uma única camada. Considerando que o cobrimento é $c = 2,5 \text{ cm}$, para quatro barras a largura b_w mínima é de 20 cm, igual à largura existente de 20 cm, sendo possível, portanto, alojar quatro barras na primeira camada. As duas barras restantes devem ser colocadas na segunda camada, amarradas nos ramos verticais dos estribos. O espaçamento livre mínimo na direção vertical entre as barras das duas camadas é (Eq. 11):

$$a_{v,\text{mín}} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 0,5d_{\text{máx,agr}} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\text{mín}} = 2,0 \text{ cm}$$

Supondo que o CG da armadura esteja posicionado 0,5 cm acima da face superior das barras da primeira camada, a distância a_{cg} entre o centro de gravidade da armadura e a borda tracionada é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + 0,5 = 2,5 + 0,63 + 1,6 + 0,5 = 5,2 \text{ cm} \rightarrow \text{ok! foi adotado de início como } 5,0 \text{ cm}.$$

A viga não necessita de armadura de pele, pois $h = 50 \text{ cm}$ (ver Eq. 9), no entanto será aplicada com a área indicada na NB 1/1978:

$$A_{sp,\text{face}} = 0,05\% b_w \cdot h = 0,0005 \cdot 20 \cdot 50 = 0,50 \text{ cm}^2$$

(3 $\phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,60 \text{ cm}^2$ em cada face vertical. Esta armadura não está indicada na Figura 58).

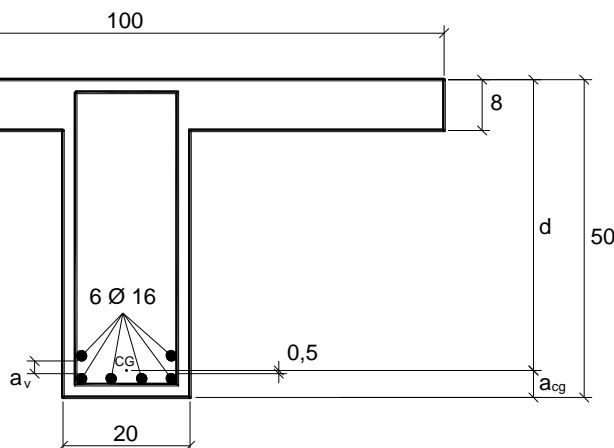


Figura 58 – Detalhamento da armadura longitudinal na seção transversal.

2º) Dimensionar a armadura longitudinal de flexão para a seção T mostrada na Figura 59, sabendo-se que:

$M_k = + 8.000 \text{ kN.cm}$
 concreto C25
 aço CA-50
 $\gamma_s = 1,15$
 $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$
 $c = 2,5 \text{ cm}$
 $\phi_t = 5 \text{ mm}$
 brita 1
 $b_f = 45 \text{ cm}$
 $h_f = 7 \text{ cm}$
 $b_w = 18 \text{ cm}$
 $h = 30 \text{ cm}$

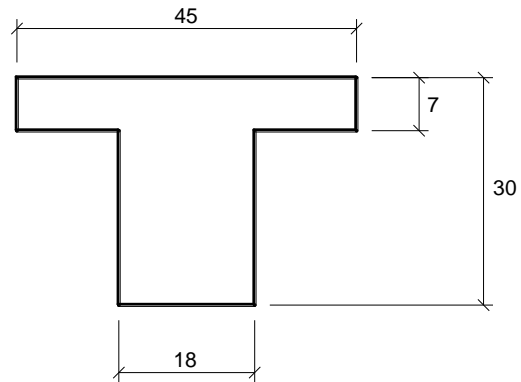


Figura 59 – Dimensões da seção transversal.

RESOLUÇÃO

Assim como o exemplo anterior, o problema é de dimensionamento, onde as duas incógnitas são a área de armadura A_s e a posição da linha neutra (x). A resolução será feita segundo as equações teóricas e do tipo K. O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 8000 = 11.200 \text{ kN.cm}$$

Adotando $a_{cg} = 5 \text{ cm}$, a altura útil d resulta: $d = h - a_{cg} = 30 - 5 = 25 \text{ cm}$

Os limites entre os domínios 2, 3 e 4, para o aço CA-50 e concretos do Grupo I de resistência, são:

$$x_{2lim} = 0,26d = 0,26 \cdot 25 = 6,5 \text{ cm}$$

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 25 = 15,8 \text{ cm}$$

a) Equações teóricas

Inicialmente supõe-se que a seção T será calculada como retangular $b_f \cdot h$, para $0,8x \leq h_f$. Aplicando a Eq. 20 da seção retangular, com b_f no lugar de b_w , encontra-se a posição da linha neutra (x):

$$M_d = 0,68b_f \cdot x \cdot f_{cd}(d - 0,4x)$$

$$11.200 = 0,68 \cdot 45 \cdot x \cdot \frac{2,5}{1,4}(25 - 0,4x) \quad \rightarrow \quad x = 9,7 \text{ cm}$$

$$0,8x = 0,8 \cdot 9,7 = 7,8 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}$$

Logo, a hipótese de seção retangular $b_f \cdot h$ não é válida, pois a linha neutra passa na nervura (alma) da viga, e neste caso a seção deve ser dimensionada com as equações desenvolvidas para a seção T. O valor inicial de x (9,7 cm) deve ser recalculado para a seção T. Inicialmente, calcula-se a parcela M_{ld} do momento fletor resistente total (Eq. 55):

$$M_{ld} = (b_f - b_w) h_f \cdot 0,85 f_{cd}(d - 0,5h_f)$$

$$M_{ld} = (45 - 18) \cdot 7 \cdot 0,85 \cdot \frac{2,5}{1,4}(25 - 0,5 \cdot 7) = 6.168 \text{ kN.cm}$$

A segunda parcela do momento fletor resistente (Eq. 56), considerando M_d sempre com valor absoluto, é:

$$M_{2d} = M_d - M_{ld} = 11.200 - 6.168 = 5.032 \text{ kN.cm}$$

Agora, da parcela M_{2d} pode-se calcular a posição correta da linha neutra (Eq. 57):

$$M_{2d} = 0,68b_w \times f_{cd}(d - 0,4x)$$

$$5.032 = 0,68 \cdot 18 \times \frac{2,5}{1,4}(25 - 0,4x) \rightarrow x = 11,2 \text{ cm, e verifica-se que } 0,8x = 9,0 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}$$

Foi confirmada a aplicação da formulação de seção T, que encontra-se no domínio 3:

$$x_{2\text{lim}} = 6,5 \text{ cm} < x = 11,2 \text{ cm} < x_{3\text{lim}} = 15,8 \text{ cm}$$

Além disso, deve ser verificado se a posição da linha neutra atende o limite apresentado na Eq. 58:

$$x/d = 11,2/25 = 0,45 \leq 0,45 \rightarrow \text{ok! a viga pode ser dimensionada.}$$

Caso resulte $x/d > 0,45$, geralmente a solução mais viável é aumentar a altura h da seção transversal.⁴¹ Nos domínios 2 e 3 a tensão na armadura tracionada é igual a f_{yd} . As parcelas A_{s1} e A_{s2} da armadura são (Eq. 59 e Eq. 60):

$$A_{s1} = \frac{M_{1d}}{f_{yd}(d - 0,5h_f)} = \frac{6.168}{\frac{50}{1,15}(25 - 0,5 \cdot 7)} = 6,56 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{f_{yd}(d - 0,4x)} = \frac{5.032}{\frac{50}{1,15}(25 - 0,4 \cdot 11,2)} = 5,64 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 6,56 + 5,64 = 12,20 \text{ cm}^2$$

b) Equações com coeficientes K

Supondo-se que a seção T será calculada como seção retangular, com a Eq. 64:

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{45 \cdot 25^2}{11.200} = 2,5$$

Com concreto C25 e aço CA-50, na Tabela A-1 determina-se o valor $\beta_x = 0,40$. Com $\beta_x = x/d$, os valores para x e $0,8x$ são:

$$x = \beta_x \cdot d = 0,40 \cdot 25 = 10,0 \text{ cm}$$

$$0,8x = 0,8 \cdot 10,0 = 8,0 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}$$

Portanto, com $0,8x > h_f$, a seção T deve ser dimensionada com as equações desenvolvidas para a seção T. Calcula-se β_x^* referente à altura da mesa comprimida (Eq. 66):

$$\beta_x^* = \frac{1,25h_f}{d} = \frac{1,25 \cdot 7}{25} = 0,35$$

Com $\beta_x^* = 0,35$ na Tabela A-1 encontra-se $K_c^* = 2,7$. Com K_c^* determina-se a primeira parcela do momento fletor resistente total (Eq. 67):

⁴¹ Uma solução teórica seria dimensionar a seção T com armadura dupla, como feita para seção retangular. No entanto, neste caso muito provavelmente a flecha da viga deverá superar a flecha máxima permitida pela norma, e aumentar a altura da viga é uma solução mais viável.

$$M_{1d} = \frac{(b_f - b_w) d^2}{K_c^*} = \frac{(45 - 18) 25^2}{2,7} = 6.250 \text{ kN.cm}$$

A segunda parcela do momento fletor resistente é (Eq. 56):

$$M_{2d} = M_d - M_{1d} = 11.200 - 6.250 = 4.950 \text{ kN.cm}$$

Com o momento fletor M_{2d} calcula-se a posição correta x da linha neutra (Eq. 68):

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_{2d}} = \frac{18 \cdot 25^2}{4.950} = 2,3$$

Na Tabela A-1, com $K_c = 2,3$, encontram-se $\beta_x = 0,44$, $K_s = 0,028$ e o domínio 3. Verifica-se que β_x atende ao limite máximo de 0,45 (Eq. 58). A posição da linha neutra resulta:

$$x = \beta_x \cdot d = 0,44 \cdot 25 = 11,0 \text{ cm} \quad , \text{ e } 0,8x = 8,8 \text{ cm} > h_f = 7 \text{ cm}, \text{ o que confirma a seção T.}$$

A área de armadura é (Eq. 69):

$$A_s = \frac{M_{1d}}{f_{yd}(d - 0,5h_f)} + K_s \frac{M_{2d}}{d} \quad \rightarrow \quad A_s = \frac{6.250}{\frac{50}{1,15}(25 - 0,5 \cdot 7)} + 0,028 \frac{4.950}{25}$$

$$A_s = 6,69 + 5,54 = 12,23 \text{ cm}^2$$

c) Detalhamento

O detalhamento da armadura longitudinal de flexão está mostrado na Figura 60. Para a área calculada $A_s = 12,20 \text{ cm}^2$, com auxílio da Tabela A-4 podem ser definidos os arranjos: 2 $\phi 20 + 3 \phi 16$ ($12,30 \text{ cm}^2$), ou 6 $\phi 16$ ($12,00 \text{ cm}^2$), ou 3 $\phi 20 + 2 \phi 12,5$ ($11,95 \text{ cm}^2$). A Tabela A-4 também mostra que é possível colocar três barras $\phi 20$ mm em uma única camada, pois a largura b_w mínima é 17 cm (para o cobrimento $c = 2,5$ cm), menor que a largura b_w existente (18 cm). Isso mostra que é possível dispor duas barras $\phi 20$ mm mais uma barra $\phi 16$ mm (entre as duas). As outras duas barras restantes ($\phi 16$) devem ser colocadas na segunda camada, amarradas nos ramos verticais dos estribos.

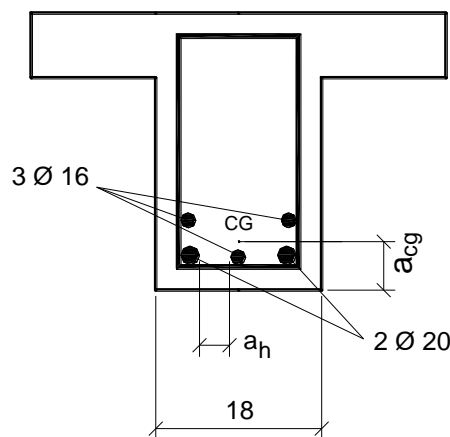


Figura 60 – Detalhamento da armadura longitudinal na seção transversal.

O espaçamento livre mínimo na direção vertical entre as barras das duas camadas é (Eq. 11):

$$a_{v,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,0 \text{ cm} \\ 0,5d_{\text{máx,agr}} = 0,5 \cdot 1,9 = 1,0 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{v,\min} = 2,0 \text{ cm}$$

Supondo que o CG da armadura esteja posicionado 0,5 cm acima da face superior das barras da primeira camada, a distância a_{cg} entre o centro de gravidade da armadura e a borda tracionada é:

$$a_{cg} = c + \phi_t + \phi_\ell + 0,5 = 2,5 + 0,5 + 2,0 + 0,5 = 5,5 \text{ cm} \rightarrow \text{ok! foi adotado de início como } 5,0 \text{ cm.}$$

O detalhamento indicado na Figura 60 mostra uma alta quantidade de armadura para a seção transversal da viga, devida principalmente à baixa altura h . Torna-se muito importante neste caso verificar a abertura das fissuras na seção transversal, bem como também a flecha.⁴² Se a viga não atende a esses requisitos, geralmente aumenta-se a sua altura.

3º) Dada a laje nervurada esquematizada na Figura 61, dimensionar a área de aço A_s das nervuras, consideradas biapoiadas. São dados:

concreto C30

brita 1

vão a das nervuras = 600 cm

$c = 2,0 \text{ cm}$

$M_k = + 1.350 \text{ kN.cm/nervura}$

aço CA-50

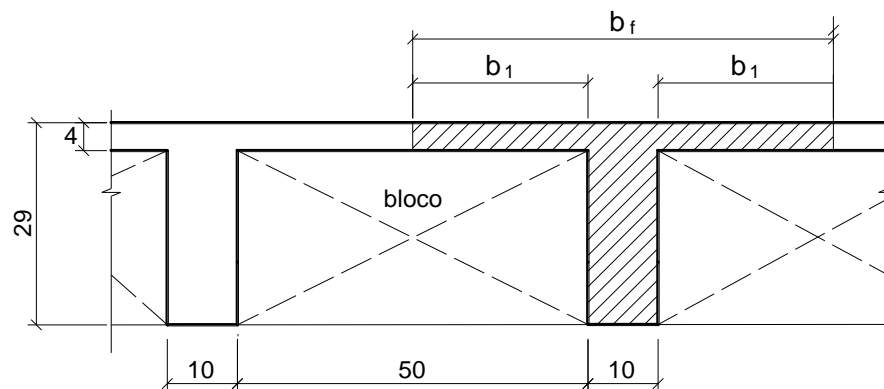


Figura 61 – Dimensões (cm) da laje nervurada.

RESOLUÇÃO

Como o momento fletor solicitante é positivo e a mesa da laje nervurada está comprimida pelo momento fletor, a seção formada é T, para cada nervura.⁴³ Conforme o desenho da laje mostrado na Figura 61 tem-se: $b_w = 10 \text{ cm}$; $h = 29 \text{ cm}$; $h_f = 4 \text{ cm}$; $b_2 = 50 \text{ cm}$. O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = \gamma_f M_k = 1,4 \cdot 1.350 = 1.890 \text{ kN.cm}$$

A largura colaborante é dada pelas dimensões b_1 à esquerda e à direita das nervuras, conforme definida na Eq. 52:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,1 a = 0,1 \cdot 600 = 60 \text{ cm} \\ 0,5 b_2 = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore b_1 = 25 \text{ cm}$$

A largura colaborante da mesa é:⁴⁴

$$b_f = b_w + 2b_1 = 10 + 2 \cdot 25 = 60 \text{ cm}$$

Para a altura útil será adotado o valor:⁴⁵

$$d = h - 2,5 \text{ cm} = 29 - 2,5 = 26,5 \text{ cm}$$

O valor de K_c é (Eq. 64):

⁴² O estudo de flecha e verificação de abertura de fissura em peça sob flexão serão feitos posteriormente.

⁴³ Se o momento fletor solicitante fosse negativo, a seção a considerar seria a retangular (10 x 29 cm).

⁴⁴ Nas lajes nervradas geralmente a largura colaborante coincide com a distância entre os eixos das nervuras.

⁴⁵ Na maioria das vezes as nervuras não têm estribos.

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{60 \cdot 26,5^2}{1.890} = 22,3$$

Com $K_c = 22,3$, na Tabela A-1 encontram-se domínio 2, $\beta_x = 0,03$ e $K_s = 0,023$. A verificação se o cálculo da seção T deve ser feito com as equações desenvolvidas para a seção retangular ou para a seção T é feita comparando $0,8x$ com h_f :

$$x = \beta_x \cdot d = 0,03 \cdot 26,5 = 0,8 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad 0,8x = 0,8 \cdot 0,8 = 0,6 \text{ cm} < h_f = 4 \text{ cm}$$

Portanto, cálculo de seção T como seção retangular. Além disso, $\beta_x = 0,03 < 0,45$, o que atende ao limite máximo estabelecido na Eq. 58. A área de armadura tracionada em cada nervura é (Eq. 65):

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{1.890}{26,5} = 1,64 \text{ cm}^2 \quad (2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2)$$

O detalhamento da seção transversal das nervuras está mostrado na Figura 62. O espaçamento livre mínimo entre as barras deve ser (Eq. 10):

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,0 \text{ cm} \\ 1,2d_{\max,agr} = 1,2 \cdot 1,9 = 2,3 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_{h,\min} = 2,3 \text{ cm}$$

Considerando que não há a necessidade de estribos nas nervuras, e com o cobrimento $c = 2,0 \text{ cm}$, o espaçamento livre existente entre as barras é:

$$a_h = b_w - 2(c + \phi_\ell) = 10 - 2(2,0 + 1,0) = 4,0 \text{ cm}$$

Portanto, $a_h > a_{h,\min}$, e podem ser dispostas as duas barras na largura da nervura.

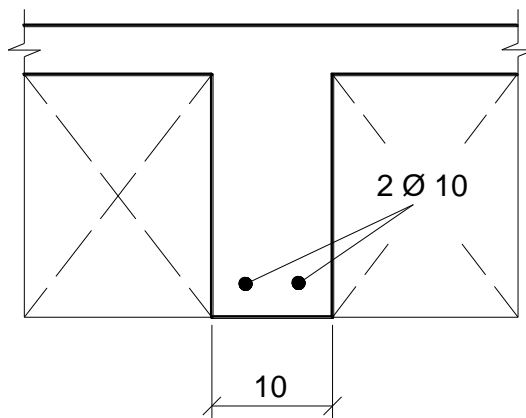


Figura 62 – Detalhamento da armadura de flexão na seção transversal da nervura.

4º) Calcular o momento fletor admissível de serviço para a seção T indicada na Figura 63. São conhecidos o concreto C20 e o aço CA-50.

RESOLUÇÃO

O problema em questão é de verificação, onde as incógnitas são a posição da linha neutra (x) e o máximo momento fletor que a seção pode resistir (M_k). O cálculo pode ser feito com as equações teóricas, supondo-se inicialmente que a seção T tenha sido calculada como seção retangular.

Como a armadura tracionada A_s está localizada no lado superior da viga, o momento fletor solicitante tem sinal negativo, o qual comprime o lado inferior da viga. Portanto, a mesa inferior está comprimida e pode ser considerada formando uma seção T juntamente com a alma.

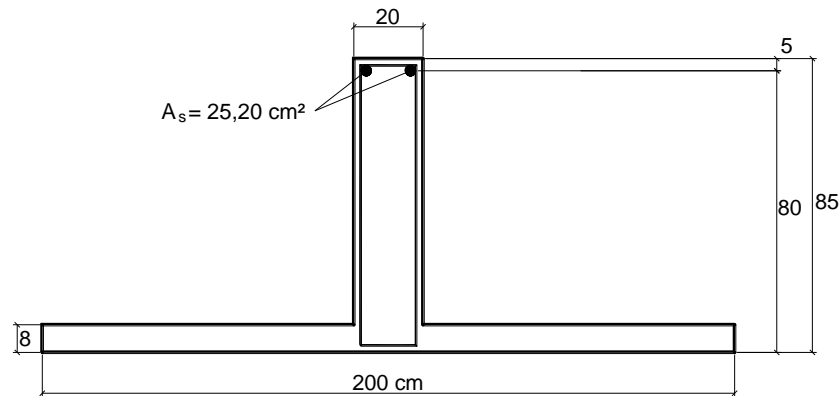


Figura 63 – Dimensões da seção transversal e área de armadura tracionada.

Das equações de equilíbrio de forças resultantes no concreto comprimido e na armadura tracionada (Eq. 53) tem-se: $R_{cc} = R_{st}$. E supondo que a seção tenha sido dimensionada nos domínios 2 ou 3, a tensão na armadura tracionada σ_{sd} é igual à máxima tensão possível no aço (f_{yd}). A força resultante de tração na armadura é (Eq. 17):

$$R_{st} = \sigma_{sd} A_s = \frac{50}{1,15} 25,20 = 1.096 \text{ kN}$$

Para atender ao equilíbrio de forças resultantes deve-se ter $R_{cc} = R_{st} = 1.096 \text{ kN}$. Supondo seção retangular a posição x da linha neutra é calculada pela Eq. 16, com b_f no lugar de b_w :

$$R_{cc} = 0,68 b_f x f_{cd} \quad \Rightarrow \quad 1.096 = 0,68 \cdot 200 x \frac{2,0}{1,4} \rightarrow x = 5,6 \text{ cm}$$

Comparação de $0,8x$ com h_f :

$$0,8x = 0,8 \cdot 5,6 = 4,5 \text{ cm} < h_f = 8 \text{ cm}$$

Como resultou $0,8x < h_f$, a seção T pode ser calculada como retangular com seção $b_f \cdot h$. O valor calculado para x está correto. Tem-se também que $x/d = 5,6/80 = 0,07 < 0,45$, e verifica-se que o limite máximo foi atendido (Eq. 58). A verificação do domínio serve para confirmar se σ_{sd} é realmente igual a f_{yd} :

$$x_{2lim} = 0,26 \cdot 80 = 20,8 \text{ cm} \quad ; \quad x_{3lim} = 0,63 \cdot 80 = 50,4 \text{ cm}$$

Como $x = 5,6 \text{ cm} < x_{2lim} = 20,8 \text{ cm}$, a seção está no domínio 2 e σ_{sd} é realmente igual a f_{yd} . O momento fletor máximo de serviço pode ser calculado pela Eq. 20 com b_f no lugar de b_w , e com $\gamma_f = 1,4$:

$$M_d = 0,68 b_f x f_{cd} (d - 0,4x)$$

$$1,4 \cdot M_k = 0,68 \cdot 200 \cdot 5,6 \frac{2,0}{1,4} (80 - 0,4 \cdot 5,6) \rightarrow M_k = 60.431 \text{ kN.cm}$$

Portanto, o momento fletor característico (M_k) de serviço é $- 60.431 \text{ kN.cm}$ (momento fletor negativo).

5º) Calcular o momento fletor máximo de serviço que a seção mostrada na Figura 64 pode resistir. São conhecidos o concreto da viga (C30) e o aço (CA-50).

RESOLUÇÃO

O problema em questão é de verificação (incógnitas x e M_k), como o exemplo anterior. Porém, como a armadura tracionada está na borda inferior da viga, o momento fletor solicitante tem sinal positivo e, por isso, a mesa está comprimida e pode ser utilizada no cálculo formando uma seção T junto com a alma. O cálculo deve ser iniciado buscando-se a posição da linha neutra, por meio da equação de equilíbrio das forças resultantes. São feitas as suposições de que a viga tenha sido dimensionada nos domínios 2 ou 3 e que a seção T tenha sido calculada como seção retangular $b_f \cdot h$.

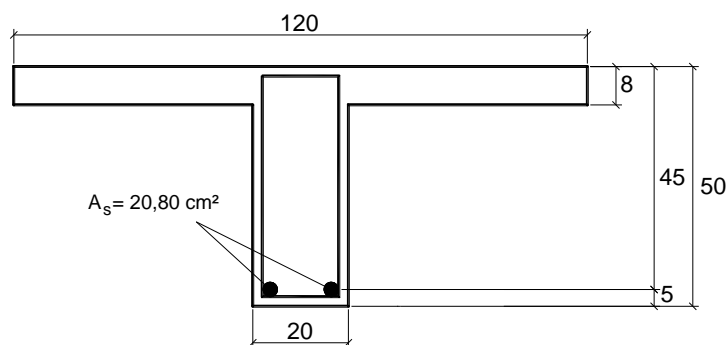


Figura 64 - Seção transversal com dimensões (cm) e área de armadura de tração.

Da equação de equilíbrio de forças resultantes tem-se $R_{cc} = R_{st}$, e supondo que a seção está no domínio 2 ou 3 tem-se $\sigma_{sd} = f_{yd}$. A resultante de força na armadura tracionada é (Eq. 17):

$$R_{st} = \sigma_{sd} A_s = \frac{50}{1,15} 20,80 = 904 \text{ kN}$$

Supondo seção retangular e o equilíbrio de resultantes, tem-se $R_{cc} = R_{st} = 904 \text{ kN}$. A posição da linha neutra é (Eq. 16):

$$R_{cc} = 0,68b_f \times f_{cd} \Rightarrow 904 = 0,68 \cdot 120 \times \frac{3,0}{1,4} \rightarrow x = 5,2 \text{ cm}$$

Verificação de $0,8x$ com h_f :

$$0,8x = 0,8 \cdot 5,2 = 4,2 \text{ cm} < h_f = 8 \text{ cm}$$

Portanto, a hipótese de seção T como retangular $b_f \cdot h$ está confirmada. Tem-se também que:

$$x/d = 5,2/45 = 0,12 < 0,45, \text{ e verifica-se que o limite máximo foi atendido (Eq. 58).}$$

O momento fletor máximo de serviço, com $\gamma_f = 1,4$, é (Eq. 20):

$$M_d = 0,68b_f \times f_{cd}(d - 0,4x)$$

$$1,4 \cdot M_k = 0,68 \cdot 120 \cdot 5,2 \cdot \frac{3,0}{1,4} (45 - 0,4 \cdot 5,2) \rightarrow M_k = 27.875 \text{ kN.cm}$$

Portanto, o momento fletor de serviço é 27.875 kN.cm (momento fletor positivo).

10. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Em todos os exercícios propostos considerar: aço CA-50, concretos com brita 1 (sem brita 2) e os seguintes valores para os coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

1º) Para a viga contínua da Figura 65, admitida com seção transversal constante nos dois vãos, determinar **d** e **A_s** para o apoio central **B**, de tal modo que se tenha a **mínima altura e armadura simples**. Detalhar a seção transversal e calcular as deformações máximas no concreto e no aço.

Para a seção sob o máximo momento fletor característico positivo de 5.750 kN.cm dimensionar a armadura de flexão, considerando a altura útil **d** determinada anteriormente. Calcule as deformações nos materiais. Verifique e analise os domínios de deformação para essa seção e do apoio B. Dados: concreto C25 ; $b_w = 14 \text{ cm}$; $\phi_t = 5 \text{ mm}$; $c = 2,5 \text{ cm}$.

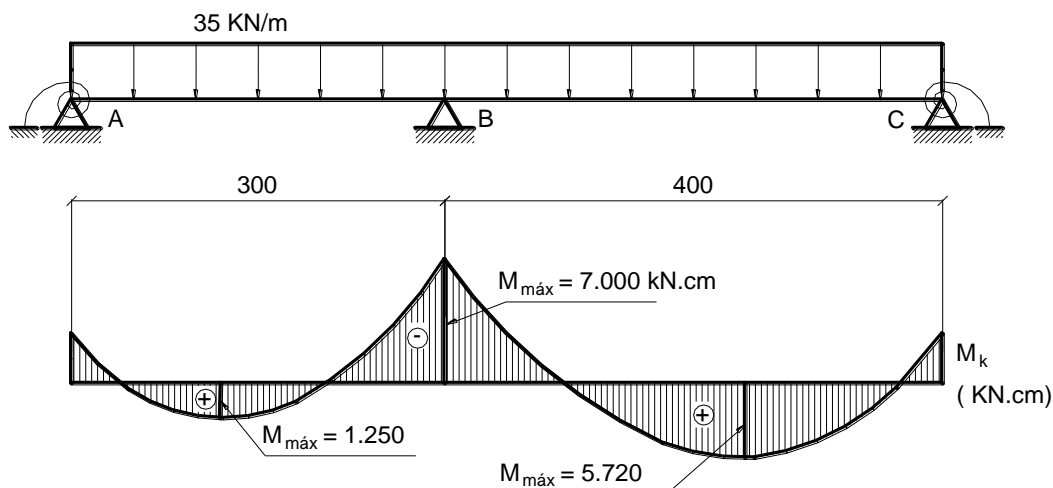


Figura 65 - Esquema estático e diagrama de momentos fletores.

2º) Conhecido o momento fletor característico $M_k = - 2.400 \text{ kN.cm}$, calcular e detalhar a armadura longitudinal de flexão para uma viga baldrame em ambiente não agressivo, com largura $b_w = 15 \text{ cm}$ e altura $h = 30 \text{ cm}$. São dados: concreto C25 ; $c = ?$; $\phi_t = 5 \text{ mm}$. Nota: verificar como é determinado o valor do cobrimento nominal, e adotar um valor adequado para a resolução.

3º) Dimensionar a viga do Exercício 2 considerando a seção como de apoio sobre o bloco de fundação, onde o momento fletor característico tem o valor $- 3.200 \text{ kN.cm}$ (negativo).

4º) Dado o momento fletor $M_k = + 5.000 \text{ kN.cm}$ e a seção transversal ($b_w = 15 \text{ cm}$; $h = 40 \text{ cm}$), calcular e detalhar a armadura longitudinal de flexão. Determinar a deformação máxima no concreto comprimido e a deformação na armadura. Dados: concreto C25 ; $c = 3,0 \text{ cm}$; $\phi_t = 5 \text{ mm}$.

5º) Dimensionar a viga do Exercício 4 considerando que o momento fletor característico (M_k) seja $+ 6.250 \text{ kN.cm}$.

6º) Calcular d e A_s de uma viga com armadura simples, conforme as duas situações seguintes:

a) altura mínima;

b) fixado $\varepsilon_{sd} = 10 \text{ ‰}$ e menor altura possível.

Detalhar a seção transversal, posicionando a linha neutra. Compare os resultados obtidos. Dados:

$b_w = 50 \text{ cm}$

$\phi_t = 8 \text{ mm}$

$c = 2,5 \text{ cm}$

$M_k = + 49.000 \text{ kN.cm}$

concreto C30

7º) Para a viga da Figura 66 já executada, calcular o máximo momento fletor admissível. São conhecidos:

$b_w = 12 \text{ cm}$

$d = 36 \text{ cm}$

$h = 40 \text{ cm}$

concreto C20

$A_s = 2 \phi 12,5 \text{ mm}$

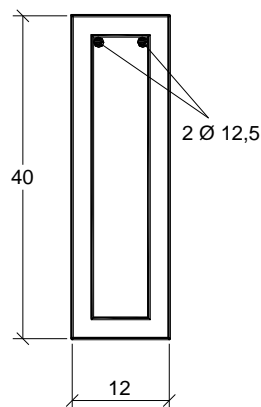


Figura 66 - Viga executada.

8º) Dimensionar e detalhar a armadura longitudinal de flexão para a seção transversal da viga mostrada na Figura 67, sendo dados:

$M_k = + 10.000 \text{ kN.cm}$
 concreto C30
 $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$
 $c = 2,5 \text{ cm}$

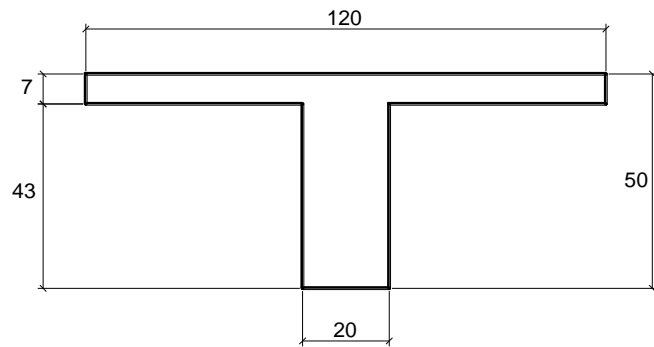


Figura 67 - Dimensões (cm) da seção T.

9º) Dimensionar a armadura longitudinal da viga da Figura 68 e calcular as deformações no concreto e no aço. São dados:

$M_k = + 9.000 \text{ kN.cm}$
 concreto C35
 $\phi_t = 5 \text{ mm}$
 $c = 2,5 \text{ cm}$

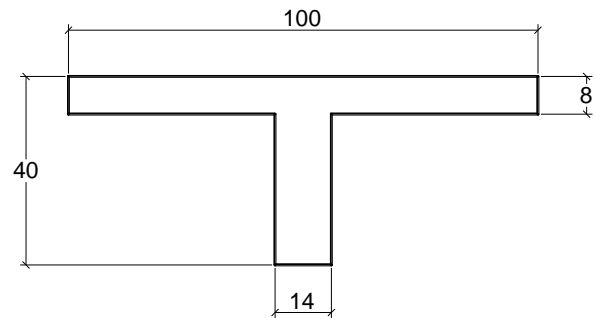


Figura 68 – Dimensões (cm) da seção T.

10º) Dimensionar a armadura longitudinal da viga da Figura 69 e calcular as deformações no concreto e no aço. São dados:

$M_k = + 9.000 \text{ kN.cm}$
 concreto C25
 $\phi_t = 5 \text{ mm}$
 $c = 2,5 \text{ cm}$

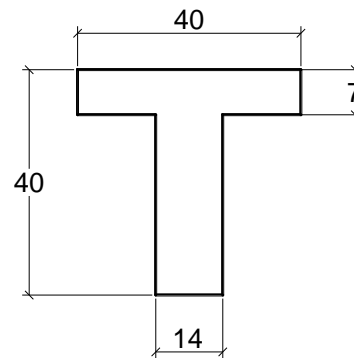


Figura 69 – Dimensões (cm) da seção T.

11º) Dimensionar e detalhar a armadura de flexão das nervuras da laje nervurada indicada na Figura 70, conhecendo o momento fletor por nervura de $M_k = + 4.500 \text{ kN.cm}$.

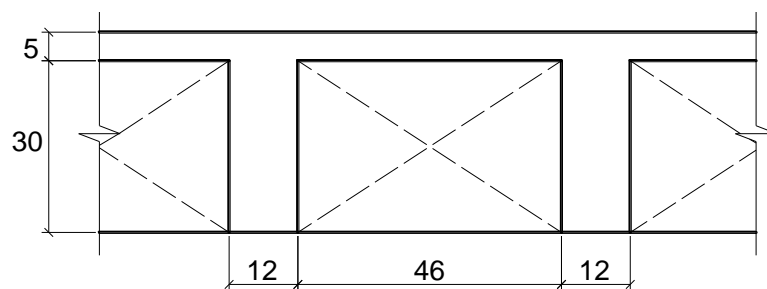


Figura 70- Dimensões (cm) da laje nervurada.

Dados: concreto C35 ; $c = 2,0 \text{ cm}$
 vão efetivo das nervuras (biapoiadas): 7,0 m

12º) Dimensionar e detalhar a armadura longitudinal da viga mostrada na Figura 71. Dados:

$M_k = -65.000 \text{ kN.cm}$
 concreto C25
 $\phi_t = 10 \text{ mm}$
 $c = 2,5 \text{ cm}$

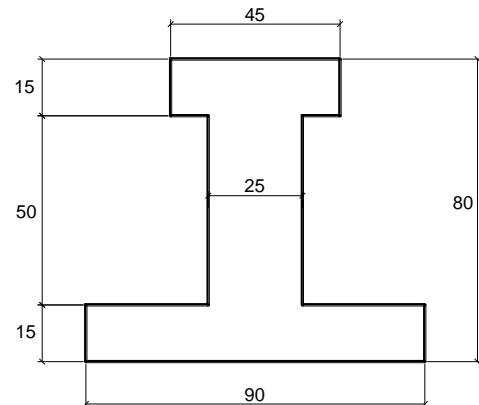


Figura 71 - Seção transversal.

13º) Calcular os momentos fletores solicitantes máximos e dimensionar e detalhar as armaduras de flexão das vigas da estrutura mostrada na Figura 72.

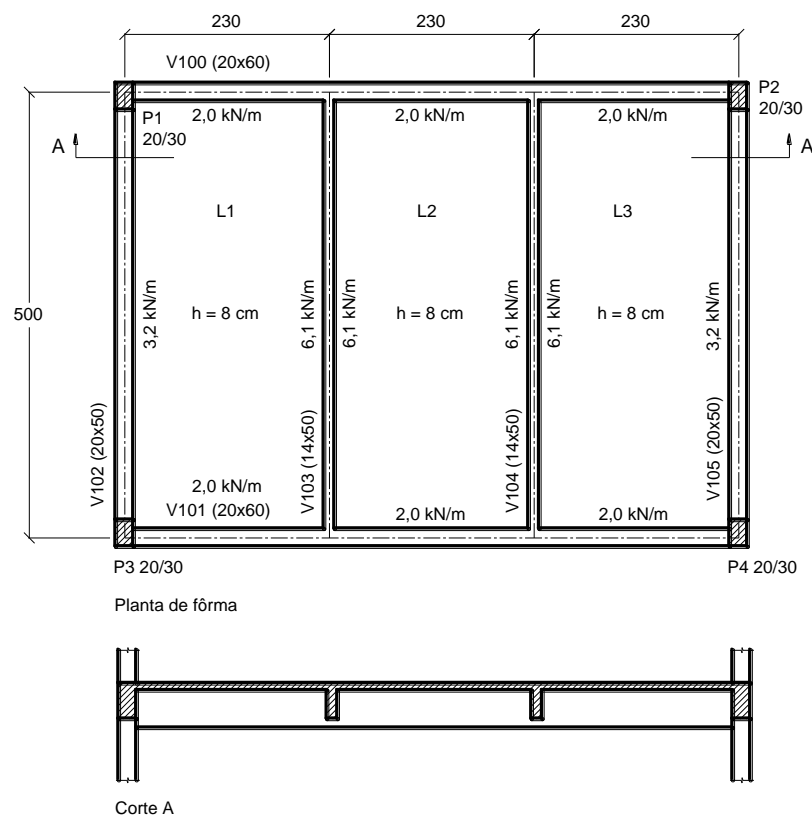


Figura 72 – Planta de fôrma do pavimento (medidas em cm).

Dados: concreto C25 ; $c = 2,5 \text{ cm}$

$\phi_t = 6,3 \text{ mm}$ para as vigas V100 e V101

$\phi_t = 5 \text{ mm}$ para as vigas V102 a V105

$\gamma_{\text{par}} = 3,0 \text{ kN/m}^2$ para parede com espessura final de 23 cm

$\gamma_{\text{concr.}} = 25 \text{ kN/m}^3$; $\gamma_{\text{divis.}} = 0,5 \text{ kN/m}^2$

Supor paredes sem aberturas de 23 cm de espessura final e altura de 2,5 m, de bloco cerâmico de oito furos, sobre as vigas V100, V101, V102 e V105. Sobre as vigas V103 e V104 supor divisórias sem aberturas, com altura de 2,0 m. Considerar, quando for o caso, a contribuição das lajes maciças no dimensionamento das vigas.

14º) Dada a planta de fôrma da Figura 73, dimensionar e detalhar as armaduras longitudinais de flexão para as seções mais solicitadas das vigas.

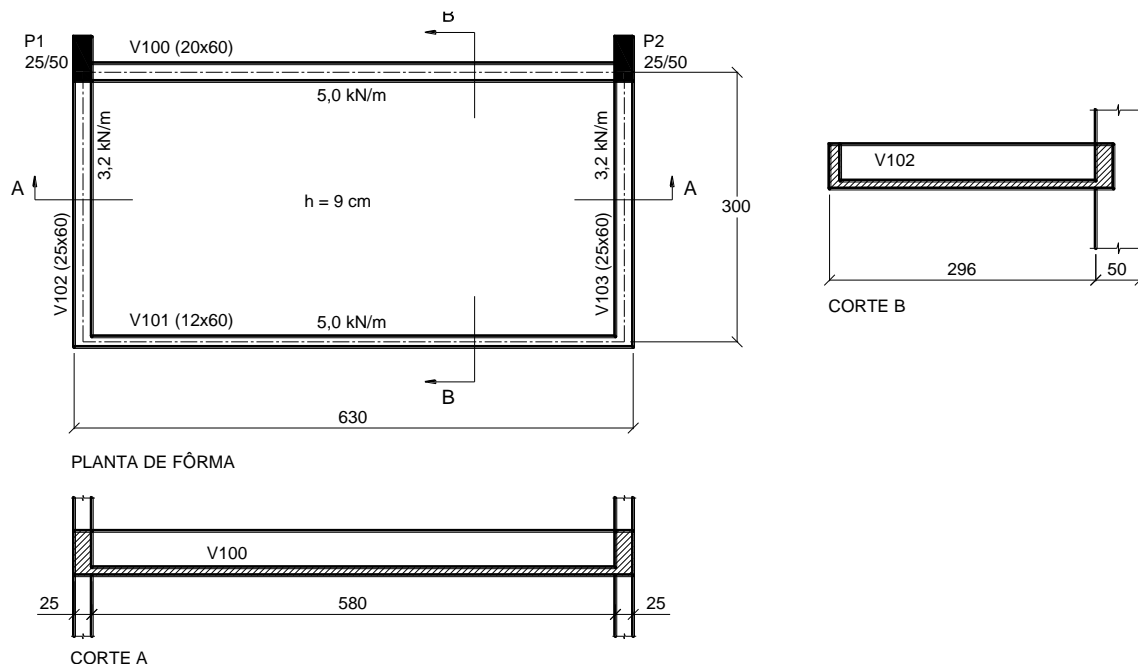


Figura 73 - Planta de fôrma e cortes A e B (medidas em cm).

Dados: concreto C30 ; $c = 3,0 \text{ cm}$; $\phi_t = 5 \text{ mm}$ para todas as vigas
 $\gamma_{\text{concr.}} = 25 \text{ kN/m}^3$; $\gamma_{\text{parede}} = 13 \text{ kN/m}^3$ para blocos cerâmicos furados

Supor a existência de uma parede (sem aberturas) de bloco cerâmico de oito furos, com 22 cm de espessura final e altura de 2,8 m, sobre a viga V100. A laje L1 não tem acesso público. Considerar, quando for o caso, a contribuição das lajes maciças no dimensionamento das vigas.

15º) Dada a planta de fôrma da Figura 74, dimensionar e detalhar as armaduras longitudinais de flexão das seções mais solicitadas das vigas. Dados:

concreto C30 ; $\phi_t = 5 \text{ mm}$; $c = 2,5 \text{ cm}$; $\gamma_{\text{concr.}} = 25 \text{ kN/m}^3$
 $\gamma_{\text{parede}} = 18 \text{ kN/m}^3$ para tijolos cerâmicos maciços

Supor a existência de paredes sem aberturas, de tijolo maciço, com 22 cm de espessura final e altura de 2,7 m, ao longo do comprimento total das vigas V102, V103 e V104 e ao longo do primeiro tramo das vigas V100 e V101. Os tramos das vigas que são apoios da laje L2 devem ser calculadas com uma carga de parapeito de 2,0 kN/m, ao longo dos seus comprimentos. A laje L3 é rebaixada em relação às lajes L1 e L2.

Considerar, quando for o caso, a contribuição das lajes maciças no dimensionamento das vigas.

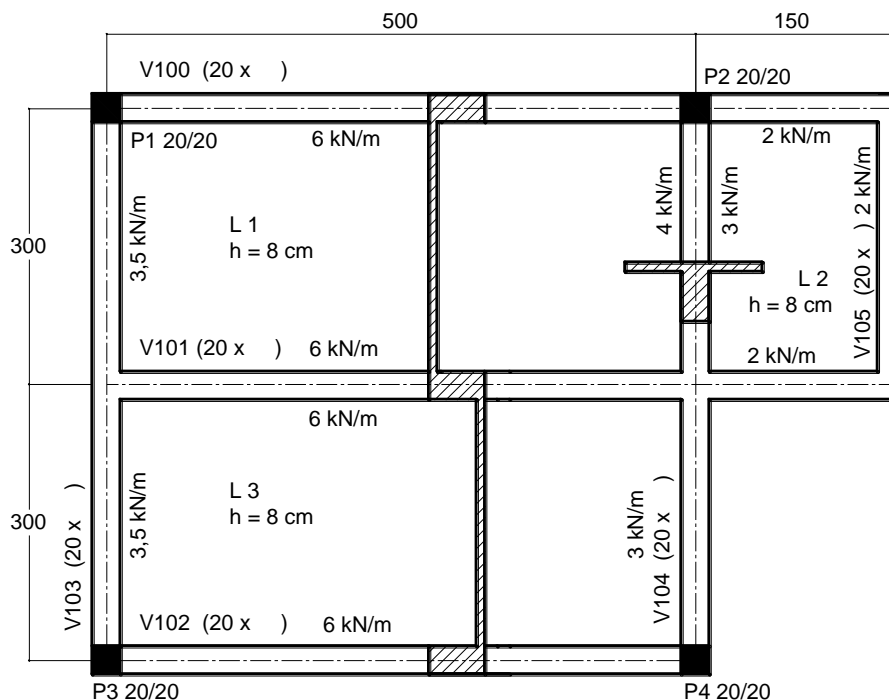


Figura 74 - Planta de fôrma do pavimento.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238p.

LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E. *Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*, v. 1. Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 305p.

SANTOS, L.M. *Cálculo de Concreto Armado*, v.1, São Paulo, Ed. LMS, 1983, 541p.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building code requirements for structural concrete*, ACI 318 R-95. Farmington Hills, 1995, 369p.

CARVALHO, R.C. ; FIGUEIREDO FILHO, J.R. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado: Segundo a NBR 6118/2014*. São Carlos, EDUFSCar, 4ª ed., 2014, 415p.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990: final draft*. Bulletin D'Information, n.203, 204 e 205, jul., 1991.

EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION. *Eurocode 2 – Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings*. London, BSI, 1992.

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p.

FUSCO, P.B. *Estruturas de concreto - Solicitações normais*. Rio de Janeiro, ed. Guanabara Dois, 1981, 464p.

MACGREGOR, J.G. *Reinforced concrete – Mechanics and design*. 3a ed., Upper Saddle River, Ed. Prentice Hall, 1997, 939p.

NAWY, E.G. *Reinforced concrete – A fundamental approach*. Englewood Cliffs, Ed. Prentice Hall, 1985, 701p.

PFEIL, W. *Concreto armado*, v. 1/2/3, 5ª ed., Rio de Janeiro, Ed. Livros Técnicos e Científicos, 1989.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 1-2, 4ª ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1985.

TABELAS ANEXAS

Tabela A-1 – Valores de K_c e K_s para o aço CA-50 (para concretos do Grupo I)

Tabela A-2 – Valores de K_c e K_s para os aços CA-25, CA-50 e CA-60 (para concretos do Grupo I)

Tabela A-3 – Área e massa linear de fios e barras de aço (NBR 7480)

Tabela A-4 – Área de aço e largura b_w mínima

Tabela A-5 – Valores de cálculo da tensão (σ'_{sd}) e da deformação (ε'_{sd}) na armadura comprimida e coeficiente K'_s para a LN em 0,45d (para concretos do Grupo I)

Tabela A-1 – Valores de K_c e K_s para o aço CA-50 (para concretos do Grupo I de resistência – $f_{ck} \leq 50$ MPa, $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$).

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES										
$\beta_x = \frac{x}{d}$	K_c (cm ² /kN)								K_s (cm ² /kN)	Dom.
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-50	
0,01	137,8	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	45,9	41,3	0,023	2
0,02	69,2	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	23,1	20,8	0,023	
0,03	46,3	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	15,4	13,9	0,023	
0,04	34,9	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	11,6	10,5	0,023	
0,05	28,0	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,3	8,4	0,023	
0,06	23,4	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	7,8	7,0	0,024	
0,07	20,2	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	6,7	6,1	0,024	
0,08	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	5,9	5,3	0,024	
0,09	15,8	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,3	4,7	0,024	
0,10	14,3	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	4,8	4,3	0,024	
0,11	13,1	9,8	7,8	6,5	5,6	4,9	4,4	3,9	0,024	
0,12	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	0,024	
0,13	11,1	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,7	3,3	0,024	
0,14	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,024	
0,15	9,7	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,2	2,9	0,024	
0,16	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,7	0,025	
0,17	8,7	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	2,9	2,6	0,025	
0,18	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,025	
0,19	7,8	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	0,025	
0,20	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,025	
0,21	7,1	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,4	2,1	0,025	
0,22	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,025	
0,23	6,6	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,2	2,0	0,025	
0,24	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,025	
0,25	6,1	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,0	1,8	0,026	
0,26	5,9	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	0,026	
0,27	5,7	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	1,9	1,7	0,026	3
0,28	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,026	
0,29	5,4	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	0,026	
0,30	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,7	1,6	0,026	
0,31	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	0,026	
0,32	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,026	
0,33	4,8	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	0,026	
0,34	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,027	
0,35	4,6	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	0,027	
0,36	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,027	
0,37	4,4	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,3	0,027	
0,38	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,027	
0,40	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,027	
0,42	3,9	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,028	
0,44	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,028	
0,45	3,7	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,46	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,48	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,028	
0,50	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,029	
0,52	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,54	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,56	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	0,030	
0,58	3,1	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,030	
0,60	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,030	
0,62	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,031	
0,63	2,9	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,031	

Tabela A-2 – Valores de K_c e K_s para os aços CA-25, CA-50 e CA-60 (para concretos do Grupo I de resistência – $f_{ck} \leq 50$ MPa, $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$).

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES												
$\beta_x = \frac{x}{d}$	$K_c \text{ (cm}^2/\text{kN)}$								$K_s \text{ (cm}^2/\text{kN)}$			Dom.
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,01	137,8	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	45,9	41,3	0,046	0,023	0,019	2
0,02	69,2	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	
0,03	46,3	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	15,4	13,9	0,047	0,023	0,019	
0,04	34,9	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,019	
0,05	28,0	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,3	8,4	0,047	0,023	0,020	
0,06	23,4	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,07	20,2	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	6,7	6,1	0,047	0,024	0,020	
0,08	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,09	15,8	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,3	4,7	0,048	0,024	0,020	
0,10	14,3	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,13	11,1	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,7	3,3	0,049	0,024	0,020	
0,14	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,15	9,7	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,2	2,9	0,049	0,024	0,020	
0,16	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,7	0,049	0,025	0,020	
0,17	8,7	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	2,9	2,6	0,049	0,025	0,021	
0,18	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,19	7,8	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	0,050	0,025	0,021	
0,20	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,21	7,1	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,4	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,22	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,23	6,6	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,2	2,0	0,051	0,025	0,021	
0,24	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,25	6,1	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,26	5,9	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,27	5,7	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	1,9	1,7	0,052	0,026	0,021	3
0,28	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,052	0,026	0,022	
0,29	5,4	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,30	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,7	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,31	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,32	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,33	4,8	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	0,053	0,026	0,022	
0,34	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,35	4,6	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,36	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,37	4,4	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	
0,40	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023	
0,42	3,9	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023	
0,44	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,45	3,7	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,46	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,48	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,057	0,028	0,024	
0,50	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029	0,024	
0,52	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,058	0,029	0,024	
0,54	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,029	0,024	
0,56	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	0,059	0,030	0,025	
0,58	3,1	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,060	0,030	0,025	
0,59	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,060	0,030	0,025	
0,60	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,030	0,025	4
0,62	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031	0,025	
0,63	2,9	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031	0,026	
0,64	2,9	2,2	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,062	0,031	0,026	
0,66	2,8	2,1	1,7	1,4	1,2	1,1	0,9	0,8	0,063	0,031	0,026	
0,70	2,7	2,0	1,6	1,4	1,2	1,0	0,9	0,8	0,064	0,032	0,027	
0,74	2,6	2,0	1,6	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,065	0,033	0,027	
0,77	2,6	1,9	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,066	0,033	0,028	

Tabela A-3 – Área e massa linear de fios e barras de aço (NBR 7480).

Diâmetro (mm)		Massa (kg/m)	Área (mm ²)	Perímetro (mm)
Fios	Barras			
2,4	-	0,036	4,5	7,5
3,4	-	0,071	9,1	10,7
3,8	-	0,089	11,3	11,9
4,2	-	0,109	13,9	13,2
4,6	-	0,130	16,6	14,5
5	5	0,154	19,6	17,5
5,5	-	0,187	23,8	17,3
6	-	0,222	28,3	18,8
-	6,3	0,245	31,2	19,8
6,4	-	0,253	32,2	20,1
7	-	0,302	38,5	22,0
8	8	0,395	50,3	25,1
9,5	-	0,558	70,9	29,8
10	10	0,617	78,5	31,4
-	12,5	0,963	122,7	39,3
-	16	1,578	201,1	50,3
-	20	2,466	314,2	62,8
-	22	2,984	380,1	69,1
-	25	3,853	490,9	78,5
-	32	6,313	804,2	100,5
-	40	9,865	1256,6	125,7

Tabela A-4 – Área de aço e largura b_w mínima.

Diâm. (mm)	A _s (cm ²) b _w (cm)		Número de barras									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,2	As		0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,98	1,12	1,26	1,40
	b _w	Br. 1	-	8	11	14	16	19	22	25	27	30
		Br. 2	-	9	13	16	19	23	26	30	33	36
5	As		0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
	b _w	Br. 1	-	9	11	14	17	20	22	25	28	31
		Br. 2	-	9	13	16	20	23	27	30	34	37
6,3	As		0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10
	b _w	Br. 1	-	9	12	15	18	20	23	26	29	32
		Br. 2	-	10	13	17	20	24	28	31	35	39
8	As		0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
	b _w	Br. 1	-	9	12	15	18	21	25	28	31	34
		Br. 2	-	10	14	17	21	25	29	33	36	40
10	As		0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00
	b _w	Br. 1	-	10	13	16	19	23	26	29	33	36
		Br. 2	-	10	14	18	22	26	30	34	38	42
12,5	As		1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50
	b _w	Br. 1	-	10	14	17	21	24	28	31	35	38
		Br. 2	-	11	15	19	24	28	32	36	41	45
16	As		2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00
	b _w	Br. 1	-	11	15	19	22	26	30	34	38	42
		Br. 2	-	11	16	21	25	30	34	39	44	48
20	As		3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20	28,35	31,50
	b _w	Br. 1	-	12	16	20	24	29	33	37	42	46
		Br. 2	-	12	17	22	27	32	37	42	47	52
22	As		3,80	7,60	11,40	15,20	19,00	22,80	26,60	30,40	34,20	38,00
	b _w	Br. 1	-	12	16	21	25	30	34	39	43	48
		Br. 2	-	13	18	23	28	33	39	44	49	54
25	As		4,90	9,80	14,70	19,60	24,50	29,40	34,30	39,20	44,10	49,00
	b _w	Br. 1	-	13	18	23	28	33	38	43	48	53
		Br. 2	-	13	19	24	30	35	41	46	52	57
32	As		8,05	16,10	24,15	32,20	40,25	48,30	56,35	64,40	72,45	80,50
	b _w	Br. 1	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
		Br. 2	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
40	As		12,60	25,20	37,80	50,40	63,00	75,60	88,20	100,80	113,40	126,00
	b _w	Br. 1	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81
		Br. 2	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81

largura b_w mínima:

$$b_{w,\min} = 2(c + \phi_t) + n^\circ \text{ barras} \cdot \phi_\ell + a_{h,\min}(n^\circ \text{ barras} - 1)$$

Br. 1 = brita 1 ($d_{\max} = 19$ mm) ; Br. 2 = brita 2 ($d_{\max} = 25$ mm)Valores adotados: $\phi_t = 6,3$ mm ; $c_{\text{nom}} = 2,0$ cmPara $c_{\text{nom}} \neq 2,0$ cm, aumentar $b_{w,\min}$ conforme: $c_{\text{nom}} = 2,5$ cm $\rightarrow + 1,0$ cm $c_{\text{nom}} = 3,0$ cm $\rightarrow + 2,0$ cm $c_{\text{nom}} = 3,5$ cm $\rightarrow + 3,0$ cm $c_{\text{nom}} = 4,0$ cm $\rightarrow + 4,0$ cm

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2d_{\max,agr} \end{cases}$$

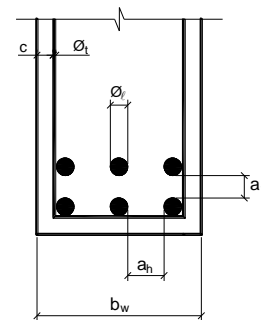


Tabela A-5 – Valores de cálculo da tensão (σ'_{sd}) e da deformação (ϵ'_{sd}) na armadura comprimida e coeficiente K'_s , para a linha neutra fixada em $0,45d$ (para concretos do Grupo I de resistência – $f_{ck} \leq 50$ MPa, $\gamma_s = 1,15$).

d'/d	Deformação ϵ'_{sd} (‰) (CA-25 ; CA-50 ; CA-60)	σ'_{sd} (MPa)			$K'_s = 1/\sigma'_{sd}$ (1/kN/cm ²)		
		CA-25	CA-50	CA-60	CA-25	CA-50	CA-60
0,05	3,11	217,4	435,0	521,7	0,046	0,023	0,019
0,10	2,72			521,7			
0,15	2,33			490,9			0,020
0,20	1,94		408,4	409,1		0,024	0,024
0,25	1,56		326,7	327,3		0,031	0,031
0,30	1,17		245,0	245,4		0,041	0,041

