



**Alex Fabiano de Almeida**

**Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos  
planos de concreto armado**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito  
parcial para a obtenção do título de Doutor em  
Engenharia Civil. Ênfase: Estruturas

Orientadora: Marta de Souza Lima Velasco  
Co-orientador: Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro  
Março de 2008



**Alex Fabiano de Almeida**

**Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos  
planos de concreto armado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Marta de Souza Lima Velasco**

Orientadora  
DEC / PUC-Rio

**Luiz Eloy Vaz**

Co-Orientador  
DME / UFRJ

**Andréia Abreu Diniz de Almeida**

DEC / PUC-Rio

**Sylvia Regina Mesquita de Almeida**

EEC / UFG

**Sergio Hampshire C. Santos**

DME / UFRJ

**Claudia R. Eboli**

DME / UFRJ

**José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de março de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Alex Fabiano de Almeida**

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Goiás, UEG, em fevereiro de 2001. Ingressou no curso de mestrado em Engenharia Civil (Estruturas) da Universidade Federal de Goiás, UFG, em março de 2002, atuando na área de Otimização de Estruturas. Concluiu o curso de Mestrado em Engenharia Civil em fevereiro de 2004.

#### Ficha Catalográfica

Almeida, Alex Fabiano de

Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado / Alex Fabiano de Almeida; orientadora: Marta de Souza Lima Velasco; co-orientador: Luiz Eloy Vaz. – 2008.

147 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Concreto armado. 3. Confiabilidade. 4. Otimização. 5. RBDO. I. Velasco, Marta de Souza Lima. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À minha mãe: Maria Madalena Abadias,  
pelos ensinamentos, compreensão e amor.

## Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido o dom da vida, inteligência e sabedoria;

À professora Marta e ao professor Eloy, pela paciência, orientação acadêmica e pessoal;

Às minhas amigas Maria Fernanda e Paola pela amizade e as muitas vezes que me deixaram falando sozinho;

Ao meu amigo Walter Edgley pelo companheirismo;

Aos colegas do doutorado;

Ao CNPq, pelo apoio financeiro;

Aos amigos que fiz nesse período e que foram de fundamental importância;

À minha mãe e aos meus irmãos, pelo estímulo, compreensão e amor imensurável, obrigado por serem minha família.

## Resumo

Almeida, Alex Fabiano de; Velasco, Marta de Souza Lima; Vaz, Luiz Eloy. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. Rio de Janeiro, 2008. 147p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho compara o projeto ótimo determinístico (DDO) com o projeto ótimo baseado em confiabilidade (RBDO) de pórticos planos de concreto armado. A estrutura é modelada por uma malha de elementos finitos usando elementos de barras e considerando a não-linearidade geométrica e dos materiais. Na formulação do problema de otimização proposto as variáveis de projeto são definidas para cada elemento finito da malha. Elas são as armaduras superior e inferior das seções transversais de extremidade do elemento, a altura da seção do elemento, as áreas de armadura transversal e o parâmetro D usado para descrever os estados limites últimos de acordo com a norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2004). Os algoritmos de otimização utilizados são os de programação quadrática sequencial (PQS), programação linear sequencial (PLS) e o método das direções viáveis (MDV).

As variáveis randômicas do problema de RBDO são a resistência à compressão do concreto, as resistências à tração e à compressão do aço, assim como as cargas aplicadas. As funções de comportamento são de dois tipos, a primeira é relativa à carga crítica da estrutura e a segunda ao controle de deslocamento para o estado limite de utilização. Para o cálculo da probabilidade de falha de uma função de comportamento, em cada iteração do problema de RBDO, o método FORM (PMA) utilizará o algoritmo HNV para obtenção do ponto de projeto. Análise de sensibilidade é feita pelo método analítico.

## Palavras-chave

Concreto Armado; Confiabilidade; Otimização; RBDO.

## Abstract

Almeida, Alex Fabiano de; Velasco, Marta de Souza Lima (Advisor); Vaz, Luiz Eloy (Co-Advisor). **Reliability-based design optimization of reinforced concrete plane frames**. Rio de Janeiro, 2008. 147p. DSc. Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work compares the Deterministic Design Optimization (DDO) with the Reliability-Based Design Optimization (RBDO) of reinforced concrete plane frames. The structure is modeled by a finite element mesh using bar elements and considering both geometric and material nonlinearities. In the formulation of the proposed optimization problem the design variables are defined for each element of the finite element mesh. They are the areas of tensile and compressive reinforcement at the element ends, the depth of the element rectangular cross-section, the areas of shear reinforcement, and the parameter  $D$  used to describe the deformation limit states for the element cross-sections defined according to the Brazilian code for the design of concrete structures NBR 6118 (ABNT, 2004). The optimization algorithms used are the Sequential Linear Programming (SLP), the Sequential Quadratic Programming (SQP) and the Method of Feasible Direction (MFD).

The random variables of the RBDO problem are the concrete compressive strength, the steel compressive and tensile strength, as well as some applied loads. The performance functions are of two types, the first relates to the critical load of the structure and the second to the control of displacements in the serviceability state. For performing the calculation of the probability of failure for the associated performing function in each iteration of the RBDO problem, the method FORM (PMA) will be used in connection with the HNV algorithm for obtaining the project point. The sensitivity analyses are carried out by the analytical method.

## Keywords

Reinforced concrete plane frames; Reliability; Optimization; RBDO.

# Sumário

1 Introdução	23
1.1. Considerações iniciais e objetivos	23
1.2. Histórico e revisão bibliográfica	25
1.2.1. Otimização via DDO (Deterministic Design Optimization)	25
1.2.2. Análise de confiabilidade	26
1.2.3. Otimização via RBDO	29
1.3. Procedimento proposto neste trabalho	35
1.4. Organização do trabalho	36
2 O conceito de RBDO	38
2.1. Definições necessárias	38
2.2. Exemplo ilustrativo	39
3 Análise de pórticos planos de concreto armado	41
3.1. Introdução	41
3.2. Análise não-linear de pórticos planos	41
3.2.1. Considerações iniciais	41
3.2.2. Características dos materiais	42
3.2.3. Deformação axial e curvatura	44
3.2.4. Esforços internos no elemento	46
3.2.5. Equação de equilíbrio	47
3.2.6. Modelos de elementos finitos	48
3.3. Cargas críticas	50
4 Análise de confiabilidade de estruturas	52
4.1. Conceitos básicos de probabilidade	53
4.1.1. Parâmetros de uma variável aleatória	54
4.1.2. Distribuições probabilísticas	57
4.1.3. Função densidade de probabilidade conjunta	57
4.2. Estado limite	58



4.2.1. Função de falha (função de comportamento ou função de estado limite)	59
4.3. Índice de confiabilidade	61
4.4. Método de simulação de Monte Carlo (MC)	65
4.5. Método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM)	66
4.6. Confiabilidade de sistemas	69
4.7. Determinação dos coeficientes parciais de segurança para um projeto específico	71
4.8. Fator de importância	72
4.9. Níveis dos métodos de projeto	72
 5 Projeto de Otimização Determinístico (DDO)	 74
5.1. Introdução	74
5.2. Dimensionamento ótimo de uma seção de concreto armado à flexão composta reta	74
5.3. Descrição do problema proposto via método DDO	78
5.3.1. Variáveis de projeto	78
5.3.2. Função objetivo	80
5.3.3. Restrições de resistência	81
5.3.4. Restrições para o ELS	83
5.3.5. Restrições com relação à altura das vigas	84
5.3.6. Restrições referentes às armaduras	84
5.3.7. Restrição relativa ao fator de carga crítica	85
5.3.8. Restrições laterais	85
5.3.9. Adimensionalização de variáveis	86
5.3.10. O problema de DDO	87
 6 Projeto de Otimização Baseado em Confiabilidade (RBDO)	 89
6.1. Condição de proximidade de projeto	93
6.2. Análise de confiabilidade pelo RIA (Reliability Index Approach)	94
6.3. Análise de confiabilidade por PMA (Performance Measure Approach)	95
6.4. Análise de confiabilidade híbrida por PMA	95
6.4.1. Método do valor médio avançado (AMV)	96

6.4.2. Método do valor médio conjugado (CMV)	96
6.4.3. Método do valor médio híbrido (HMV)	97
6.5. Variáveis aleatórias do problema	98
6.5.1. Propriedades mecânicas do concreto	98
6.5.2. Propriedades mecânicas da armadura longitudinal	99
6.5.3. Carregamento externo	99
6.5.4. Fatores de modelagem	100
6.6. O problema RBDO	101
7 Análise de sensibilidade	104
7.1. Introdução	104
7.2. Esforços internos resistentes	104
7.3. Esforços internos solicitantes	106
7.4. Deslocamentos	107
7.5. Carga crítica	108
7.6. Função objetivo	109
7.7. Restrições	110
7.8. Funções de comportamento	112
8 Aplicação numérica	114
8.1.1. Primeiro exemplo de aplicação	114
8.1.2. Segundo exemplo de aplicação	118
8.1.3. Terceiro exemplo de aplicação	121
8.1.4. Quarto exemplo de aplicação	124
9 Considerações finais	131
9.1. Conclusões	131
9.2. Sugestões para trabalhos futuros	132
10 Referências bibliográficas	133
Apêndice A	139
Apêndice B	145

## Lista de figuras

Figura 2.1 – Geometria do exemplo e carregamento atuante.	39
Figura 3.1 – Diagrama tensão-deformação de cálculo do concreto.	43
Figura 3.2 - Diagrama tensão-deformação de cálculo do aço classe A.	44
Figura 3.3 – Sistema de coordenadas de referência dos elementos finitos.	45
Figura 3.4 – Configuração deformada de um trecho de elemento.	45
Figura 3.5 – Convenção de sinal para esforços no elemento.	47
Figura 3.6 – (a) Modelo 1 e (b) modelo 2 com seus respectivos eixos de referência e graus de liberdade locais.	50
Figura 3.7 – (a) Ruína por ruptura e (b) ruína por perda de estabilidade.	51
Figura 4.1 – Representação gráfica do coeficiente de correlação.	56
Figura 4.2 – Representação da superfície de falha na PDF conjunta: (a) espaço original $U$ ; (b) espaço reduzido $V$ .	60
Figura 4.3 – Margem de segurança.	63
Figura 4.4 - Função de falha com duas variáveis randômicas no espaço normal padrão reduzido.	67
Figura 4.5 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em série.	70
Figura 4.6 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em paralelo.	70
Figura 5.1 – Envoltória resistente de uma seção (Melo et al. 2004).	75
Figura 5.2 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal.	76
Figura 5.3 – Funções $\varepsilon_s(D)$ e $\varepsilon_l(D)$ .	77
Figura 5.4 – Padrões de distribuição da armadura longitudinal ( $A_{ss}$ e $A_{si}$ ).	79
Figura 6.1 – Exemplo ilustrativo do processo de DDO vs. RBDO.	91
Figura 6.2 – Processo iterativo para o RBDO.	92
Figura 6.3 – Análise rápida de confiabilidade no RBDO.	94
Figura 7.1 – Tensão e deformação na seção.	105
Figura 7.2 – Diagrama tensão-deformação de cálculo do aço classe A – Regiões.	113

Figura 8.1 – (a) Dimensões e carregamento (b) malha e variáveis de projeto.	115
Figura 8.2 – (a) (b) Malha e variáveis de projeto.	118
Figura 8.3 – Geometria do terceiro exemplo.	122
Figura 8.4 – Variáveis de projeto do terceiro exemplo nos elementos.	122
Figura 8.5 – (a) Dimensões, carregamento e malha (b) variáveis de projeto.	125

## Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Variáveis do exemplo ilustrativo.	40
Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o exemplo de RBDO.	40
Tabela 4.1 – Grau de dependência de correlação entre variáveis (Soares e Venturini, 2001).	56
Tabela 4.2 – Relação entre Índice de confiabilidade $\beta$ e probabilidade de falha $P_f$ .	64
Tabela 4.3 – Classes de conseqüências e confiabilidade, e valores de índices de confiabilidade (JCSS <sup>1</sup> , 2000; CEN, 2001; Gulvanessian et al., 2002).	65
Tabela 5.1 – Valores limites para $D$ (Melo et al. 2004).	78
Tabela 5.2 – Taxas mínimas de armadura de flexão (NBR 6118, 2003).	84
Tabela 7.1 – Regiões e limites de integração.	105
Tabela 7.2 – Casos de deformação.	107
Tabela 8.1 – Variáveis aleatórias da 1ª aplicação.	116
Tabela 8.2 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do primeiro exemplo.	117
Tabela 8.3 – Coeficientes parciais de segurança da 1ª aplicação.	117
Tabela 8.4 – Fatores de importância da 1ª aplicação.	118
Tabela 8.5 – Variáveis aleatórias da 2ª aplicação.	119
Tabela 8.6 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do segundo exemplo.	120
Tabela 8.7 – Comparação de resultados obtidos da 2ª aplicação via RBDO pelo método FORM e pelo método de Monte Carlo (MC).	120
Tabela 8.8 – Coeficientes parciais de segurança da 2ª aplicação.	121
Tabela 8.9 – Fatores de importância da 2ª aplicação.	121
Tabela 8.10 – Variáveis aleatórias da 3ª aplicação.	123
Tabela 8.11 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do terceiro exemplo.	123
Tabela 8.12 – Coeficientes parciais de segurança da 3ª aplicação.	124
Tabela 8.13 – Fatores de importância da 3ª aplicação.	124

Tabela 8.14 – Parâmetros probabilísticos e determinísticos da 4ª aplicação.	129
Tabela 8.15 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do quarto exemplo.	129
Tabela 8.16 – Coeficientes parciais de segurança da 4ª aplicação.	130
Tabela 8.17 – Fatores de importância da 4ª aplicação.	130

## Lista de símbolos

### *Símbolos romanos*

$A_{si}^0$	armadura longitudinal inferior de referência
$A_{ss}^0$	armadura longitudinal superior de referência
$A_{sw}^0$	armadura transversal de referência
$A$	parâmetro usado na definição da curva tensão deformação do aço tipo B
$A_c$	área de concreto
$a_i$	constantes
$A_m$	área da seção transversal do m-ésimo elemento
$A_s$	área de aço
$A_s'$	área da seção da armadura longitudinal de compressão
$A_{s,min}$	área de aço mínima
$A_{si}$	armadura longitudinal inferior
$\hat{A}_{si}$	variável adimensional relativa à armadura longitudinal inferior
$A_{ss}$	armadura longitudinal superior
$\hat{A}_{ss}$	variável adimensional relativa à armadura longitudinal superior
$A_{sw}$	armadura transversal
$\hat{A}_{sw}$	variável adimensional relativa à armadura transversal
$A_{sw,m}$	armadura transversal por unidade de comprimento do elemento
$A_{sw,min}$	armadura transversal mínima
$A_{sw,nec}$	armadura transversal necessária
$A_{Total}$	área de aço total numa seção de concreto armado
$b$	largura da seção
$B$	parâmetro usado na definição da curva tensão deformação do aço tipo B
$b_w$	largura da alma numa seção de viga T
$c$	cobrimento da armadura
$C$	parâmetro usado na definição da curva tensão deformação do aço tipo B

$C_a$	custo do aço por unidade de volume
$c_{ac}$	relação entre os custos $C_a$ e $C_f$
$C_c$	custo do concreto por unidade de volume
$C_f$	custo da fôrma por unidade de área
$c_{fc}$	relação entre os custos $C_f$ e $C_c$
$Cov()$	covariância entre duas variáveis aleatórias
$C_s$	custo do aço por unidade de peso
$d$	distância da reta $G = 0$ até a origem, no espaço das variáveis reduzidas
$D$	parâmetro de deformação que descreve as configurações resistentes no ELU
$D^*$	parâmetro $D$ ótimo para $W = I$
$d'$	distância do cg da armadura à borda mais próxima da seção
$E(X)$	valor médio, ou a média, de uma variável aleatória $X$
$E(X^2)$	valor médio quadrático de uma variável aleatória $X$
$E_s$	modulo de elasticidade transversal do aço
$f^0$	valor da função objetivo para o ponto inicial
$\mathbf{F}$	vetor das forças nodais internas da estrutura
$f(x)$	função objetivo
$f_c$	resistência à compressão do concreto
$f_{cd}$	valor de cálculo da resistência à compressão do concreto
$f_{ck}$	valor característico da resistência à compressão do concreto
$f_{cm}$	valor médio da resistência à compressão do concreto
$F_X(x)$	função cumulativa de probabilidades
$f_X(x)$	função densidade de probabilidade
$F_{X,Y}()$	função cumulativa de probabilidades conjunta
$f_{X,Y}()$	função densidade de probabilidade conjunta
$f_y$	tensão de escoamento do aço
$f_{yd}$	tensão de escoamento de cálculo do aço
$f_{yk}$	valor característico da resistência à compressão do aço
$f_{ym}$	valor médio da resistência à compressão do aço
$G$	função de falha ou função de comportamento
$g_i(x)$	restrições de desigualdade
$h$	altura da seção transversal



$h^0$	valor inicial da variável $h$
$h_f$	altura da mesa de concreto numa seção de viga T
$\bar{h}$	altura na seção de referência
$\hat{h}$	variável adimensional relativa à altura da seção
$H_S$	carga horizontal
$I_i$	fator de importância das variáveis aleatórias para cada função de falha
<b>J</b>	Jacobiano
$K_T$	matriz de rigidez tangente
$l$	comprimento do elemento reto
<b>L</b>	matriz triangular inferior, obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação
<b>M</b>	momento de flexão
$M_R^*$	momento fletor resistente para $D^*$
<b>m</b>	vetor das médias
$M_R$	momento de flexão resistente de projeto
$M_S$	momento solicitante de cálculo
$N_R^*$	esforço normal resistente para $D^*$
<b>N</b>	força normal
$\mathbf{n}^{(k)}$	direção de máximo declive normalizada no ponto $\mathbf{v}_{HMV}^{(k)}$
$ndr$	numero de deslocamentos nodais restritos
$ne$	número de elementos do modelo
$neq$	número de graus de liberdade da estrutura
$nh$	número de alturas diferentes como variáveis
$N_R$	força normal resistente
$N_S$	força normal solicitante de cálculo
$ns$	número de seções de extremidade
$nsc$	número de seções de extremidade com todas as armaduras comprimidas
$nsi$	número de armaduras longitudinais inferiores
$nss$	número de armaduras longitudinais superiores
$nst$	número de armaduras tracionadas na flexão
$nsw$	número de armaduras de cisalhamento

$nvp$	numero de variáveis de projeto
$\mathbf{P}$	vetor das forças nodais externas
$\mathbf{P}_s$	vetor das forças nodais externas em serviço
$\mathbf{P}_k$	vetor das forças nodais externas características
$\mathbf{P}_m$	vetor das forças nodais externas médias
$P_f$	probabilidade de falha
$\mathbf{q}$	deslocamentos locais generalizados
$Q$	esforço cortante
$q_u$	componente de $\mathbf{q}$ na direção axial
$q_v$	componente de $\mathbf{q}$ na direção transversal
$R$	capacidade resistente da seção
$S$	esforço solicitante na seção
$s_m$	espaçamento entre as fissuras
$t$	idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração
$t_0$	tempo quando se deseja o valor da flecha diferida
TOL	tolerância para convergência
$T_m$	matriz de transformação do elemento $m$
$u$	componente de deslocamento no eixo $x$
$U$	espaço original das variáveis aleatórias
$U^*$	ponto de projeto no espaço original das variáveis aleatórias
$U_i^k$	valor característico desta variável
$U_i^*$	valor correspondente à variável $i$ no ponto de projeto quando a probabilidade de falha é alcançada
$\mathbf{u}$	vetor de variáveis aleatórias
$u_i$	deslocamentos nodais locais na direção axial
$u_{j,lim}$	valores admissíveis para cada deslocamento $j$
$u_x$	componente de deslocamento num ponto genérico na direção $x$
$u_y$	componente de deslocamento num ponto genérico na direção $y$
$v$	componente de deslocamento no eixo $y$
$V$	espaço normal padrão reduzido das variáveis aleatórias
$V^*$	ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas
$Var(X)$	variância de uma variável aleatória $X$

$V_{Sd}$	valor da força cortante solicitante correspondente às cargas de projeto
$v_i$	deslocamentos nodais locais na direção transversal
$V_R$	vetor resistente de cálculo
$V_S$	vetor solicitante de cálculo
$V_{si,m}$	volume da armadura longitudinal inferior do $m$ -ésimo elemento
$V_{ss,m}$	volume da armadura longitudinal superior do $m$ -ésimo elemento
$V_{st,m}$	volume da armadura transversal do $m$ -ésimo elemento
$W$	função objetivo do sub-problema de determinação do parâmetro $D$
$X$	eixo cartesiano global; variável aleatória
$x$	eixo cartesiano local
$\mathbf{x}$	vetor de variáveis de projeto
$\hat{\mathbf{x}}$	vetor de variáveis de projeto adimensionais
$x_{i,max}$	restrições laterais que definem os limites máximos
$x_{i,min}$	restrições laterais que definem os limites mínimos
$Y$	eixo cartesiano global; variável aleatória
$y$	eixo cartesiano local
$y_a$	ordenada que representa a deformação na fibra inferior de integração
$y_b$	ordenada que representa a deformação na fibra superior de integração
$y_{SI}$	ordenada que dista do cg da seção de concreto até o cg da armadura longitudinal inferior
$y_{SS}$	ordenada que dista do cg da seção de concreto até o cg da armadura longitudinal superior

### ***Símbolos gregos***

$\Phi$	cumulativa da distribuição normal padrão
$\Gamma$	matriz gamma, $\Gamma = L^{-1}$
$\Psi$	vetor de forças desequilibradas da estrutura
$\alpha$	sensibilidade ou gradiente normalizado no ponto de projeto
$\alpha_m$	fator de escala na restrição usado em termos de N e M

$\alpha_n$	fator de escala na restrição usado em termos de N
$\alpha_s$	coeficiente experimental dado em função do diâmetro da barra
$\beta$	índice de confiabilidade
$\beta_s$	índice de confiabilidade do sistema
$\beta_t$	índice de confiabilidade alvo
$\chi$	curvatura no centro de gravidade
$\epsilon_0$	deformação axial no centro gravidade
$\epsilon_c$	deformação específica do concreto
$\epsilon_{ci}$	deformação específica do concreto na fibra inferior do concreto
$\epsilon_{cs}$	deformação específica do concreto na fibra superior do concreto
$\epsilon_{c2}$	deformação igual a 0,002 no concreto
$\epsilon_{cu}$	deformação última de compressão no concreto
$\epsilon_l$	deformação na fibra extrema inferior
$\epsilon_s$	deformação específica do aço
$\epsilon_S$	deformação na fibra extrema superior
$\epsilon_x$	componente de deformação longitudinal
$\epsilon_{yd}$	deformação de escoamento de cálculo do aço
$\epsilon_{yu}$	deformação última de tração no aço
$\delta$	coeficiente de variação
$\phi$	diâmetro da barra de aço longitudinal
$\phi()$	PDF normal padrão
$\phi_u$	função de interpolação generalizada relativa aos deslocamentos $\mathbf{q}_u$
$\phi_v$	função de interpolação generalizada relativa aos deslocamentos $\mathbf{q}_v$
$\gamma$	coeficiente parcial de segurança
$\gamma_c$	coeficiente de minoração do concreto
$\gamma_f$	coeficiente de ponderação das ações
$\gamma_m$	coeficiente de ponderação das resistências
$\eta_b$	coeficiente de conformação superficial das barras da armadura
$\kappa$	coeficiente usado na restrição de viga parede
$\lambda^*$	carga critica de instabilidade
$\lambda_0$	fator de carga inicial

$\lambda_f$	valor do fator de proporcionalidade correspondente as cargas de projeto
$\lambda^r$	carga critica de ruína por falha do material
$\lambda_{inf}^*$	limite inferior para $\lambda^*$
$\mu_U^N$	média normal equivalente
$\mu$	valor médio, ou a média, de uma variável aleatória
$\nu^*$	ponto de projeto no espaço V (MPP)
$\nu_R$	vetor unitário dos esforços resistentes
$\nu_S$	vetor unitário dos esforços solicitantes de cálculo
$\theta$	rotações dos nós do elemento
$\rho_{ik}$	correlação entre dois componentes
$\rho_{max}$	taxa de armadura máxima admissível
$\rho_{min}$	taxa de armadura mínima admissível
$\rho_r$	taxa geométrica da armadura da seção transversal de concreto
$\rho_{X,Y}$	coeficiente de correlação
$\rho'$	taxa de armadura comprimida
$\sigma_i$	desvio padrão de uma variável aleatória $i$
$\sigma_U^N$	desvio padrão normal equivalente
$\sigma$	matriz de desvios padrões
$\sigma_c$	tensão à compressão no concreto
$\sigma_s$	tensão normal no aço; tensão de serviço na armadura
$\sigma_{SI}$	tensão na armadura longitudinal inferior
$\sigma_{SS}$	tensão na armadura longitudinal superior
$\sigma_x$	tensão normal na direção $x$
$\tau_{max}$	valor de cálculo da tensão convencional de cisalhamento no concreto
$\tau_{wu}$	valor ultimo de cisalhamento no concreto
$\omega_{lim}$	abertura limite de fissuras
$\xi$	coordenada axial adimensional
$\xi(t)$	coeficiente função do tempo
$\zeta$	critério para determinação do tipo do método

## Lista de abreviaturas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AMV	Advanced Mean Value
CDF	Cumulative Density Function
CMV	Conjugate Mean Value
DDO	Deterministic Design Optimization
ELS	Estados Limites de Serviço
ELU	Estados Limites Últimos
FORM	First Order Reliability Method
HLRF	Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler
HMV	Hybrid Mean Value
MC	Monte Carlo
MPP	Most Probable Point
MV	Mean Value
PDF	Probability Density Function
PL	Programação Linear
PLS	Programação Linear Sequencial
PM	Programação Matemática
PMA	Performance Measure Approach
PQS	Programação Quadrática Sequencial
RBDO	Reliability-Based Design Optimization
RIA	Reliability Index Approach
RSM	Response Surface Method
SORM	Second Order Reliability Method
SLP	Sequential Linear Programming
SQP	Sequential Quadratic Programming

# 1

## Introdução

### 1.1. Considerações iniciais e objetivos

Um projetista deve lidar com a existência de incertezas nas variáveis de projeto de maneira que faça com que o desempenho do projeto, como esperado, seja seguro e confiável. Para este propósito dois métodos têm sido utilizados para quantificar as incertezas nas variáveis de projeto de engenharia e seus efeitos no nível de segurança do projeto. O primeiro é o projeto baseado no método semiprobabilístico. Nesse método os fatores parciais de segurança são utilizados sobre as resistências dos materiais e sobre as cargas aplicadas visando obter uma probabilidade de falha adequada. Esse método será aqui denominado de método determinístico (Deterministic Design Optimization, DDO), pois, uma vez que os fatores parciais de segurança são aplicados, as variáveis passam a serem tratadas como determinísticas. O segundo método é o projeto baseado em confiabilidade, no qual as propriedades estatísticas das variáveis envolvidas no projeto são utilizadas para se dimensionar a estrutura com um valor alvo de confiabilidade.

Na busca do projeto mais interessante (mais leve, mais barato,...) o emprego de técnicas de programação matemática tem se tornado muito populares tanto para os métodos determinísticos quanto para os baseados em confiabilidade.

No campo da otimização estrutural determinística, os projetistas não conhecem a probabilidade de falha que a solução encontrada pode oferecer. O objetivo da Otimização Baseada na Confiabilidade (Reliability-Based Design Optimization, RBDO) é projetar estruturas econômicas que apresentem probabilidades de falha menor ou igual a valores prescritos definidos pelo usuário.

Desta forma, busca-se neste trabalho conciliar a otimização determinística de pórticos planos de concreto armado com os conceitos de incertezas em relação: às dimensões nominais, às propriedades dos materiais envolvidos e às solicitações atuantes. Para a parte de otimização determinística de pórticos planos de concreto armado é usado o algoritmo implementado por Melo (2000b), que otimiza o custo

da função objetivo segundo os custos do volume de concreto, do aço e das fôrmas. Para a parte de confiabilidade utiliza-se o algoritmo do método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM – first order reliability method), com as opções de enfoque pelo índice de confiabilidade (RIA – Reliability Index Approach) ou pela medida de desempenho (PMA – Performance Measure Approach).

A partir da realização de adaptações necessárias para a utilização conjunta dos dois algoritmos, Melo (2000b) e FORM, desenvolveu-se um programa de computador, na linguagem C, para o projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado sujeitos também a restrições de confiabilidade. Inicialmente, pretende-se utilizar restrições associadas a duas funções de falha. A primeira, relativa ao estado limite de utilização, envolvendo restrição ao deslocamento e a segunda, relativa ao estado limite último, envolvendo a carga limite da estrutura. A análise proposta aplica-se a concretos com classes de resistência pertencente ao grupo I ( $f_{ck} \leq C50$ ) sugerido pela NBR 8953 (ABNT, 1992).

Uma análise de confiabilidade da estrutura ótima obtida via DDO é realizada para se verificar se sua confiabilidade é comparável àquela prescrita no RBDO. A estrutura é discretizada pelo método dos elementos finitos e são consideradas as não-linearidades do material e geométrica.

As considerações sobre as distribuições e os parâmetros probabilísticos utilizados neste trabalho amparam-se no código de modelos probabilísticos do Comitê Internacional de Segurança de Estruturas (Joint Committee on Structural Safety, JCSS<sup>123</sup>, 2000, 2001) e nas normas brasileiras NBR 6118 (ABNT, 2004) e NBR 6123 (ABNT, 1988). Neste trabalho são consideradas como variáveis aleatórias no processo de avaliação das restrições de confiabilidade: a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ); as cargas permanentes e as cargas variáveis (e.g., vento).



## **1.2. Histórico e revisão bibliográfica**

### **1.2.1. Otimização via DDO (Deterministic Design Optimization)**

Segundo Melo (2000b), o primeiro trabalho documentado sobre otimização estrutural foi o de Maxwell (1869) que buscava o projeto de treliças de peso mínimo.

Os primeiros trabalhos em programação linear (PL) surgiram na década de 30 do século XX. George Dantzig, em 1947, apresentou um método de PL que se designa método “simplex” e que se revelou bastante eficaz. Muitos métodos de programação matemática (PM) têm surgido desde então, para serem aplicados às diversas classes de problemas (lineares, não-lineares, restritos, irrestritos).

Com o decorrer dos últimos anos foram desenvolvidas inúmeras formas de avaliação do projeto ótimo determinístico de estruturas de concreto armado. A nível internacional pode-se citar os estudos de Friel (1974), Holzer e Solmers (1977), Kang et al. (1993), Balling e Yao (1997), Liang et al. (2000), Liang et al. (2002), Leps e Sejnoha (2003), enquanto no cenário nacional destacam-se os trabalhos de Horowitz (1988), Eboli (1989), Souza Jr. (1992), Urban (1992), Melo (2000a, 2000b), Melo et al. (2004), Almeida (2001), Almeida (2004) e Rodrigues Jr. (2005).

Em um dos trabalhos mais recentes, desenvolvido por Rodrigues Jr. (2005), é proposta uma formulação para o projeto ótimo de pilares de edifícios altos de concreto armado. As dimensões da seção transversal, a armadura longitudinal dos pilares e a resistência característica do concreto são variáveis de projeto. A estratégia utilizada é de solução em multinível, onde no problema global determinam-se as dimensões das seções transversais e a resistência do concreto, e nos subproblemas são determinadas apenas as armaduras longitudinais dos pilares. A função objetivo do problema de otimização é o custo total das colunas do edifício. Os edifícios são modelados como pórticos espaciais considerando a não-linearidade geométrica da estrutura.

### 1.2.2.

#### Análise de confiabilidade

Dentre os métodos mais utilizados na análise de confiabilidade têm-se o método de simulação de Monte Carlo (MC) e o método analítico de primeira ordem (FORM). O método de MC surgiu oficialmente no ano de 1949 com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Marcin Ulam (Ulam, 2007). O método FORM faz parte do grupo dos chamados métodos do segundo momento que, segundo Melchers (2002), tiveram seus conceitos difundidos inicialmente por Mayer (1926), embora só tenham obtido uma maior aceitação com o trabalho de Cornell (1969).

Segundo Soares et al. (2002), o primeiro trabalho que aplica métodos de confiabilidade a estruturas de concreto armado data de 1947, quando Freudenthal publica seu trabalho sobre conceitos de confiabilidade aplicados a projetos de estruturas. Desde então, os principais códigos internacionais têm proposto incorporar esses conceitos.

Para melhor compreensão dos passos da pesquisa com relação à análise de estruturas de concreto armado considerando as incertezas que envolvem seus parâmetros, é traçado aqui um breve histórico de alguns trabalhos desenvolvidos.

Val et al. (1995) propõem um novo método de busca do ponto de projeto da análise de confiabilidade através do método das direções conjugadas. Além disso, o trabalho faz comparação da eficiência de convergência entre os principais algoritmos de otimização utilizados para a busca do ponto de projeto. Para esta comparação foi utilizado um pórtico de concreto armado, onde as variáveis aleatórias que descrevem o problema são: as cargas permanente e acidental; a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ); e as alturas das seções transversais ( $h$ ). No cálculo dos gradientes, necessário nos métodos baseados em gradientes, foi utilizado o método das diferenças finitas centrais. Foi utilizado o método das direções conjugadas, que não necessita de avaliação dos gradientes da função de comportamento e mostrou-se mais estável que os outros métodos. Entretanto, este novo método mostrou-se menos eficiente no âmbito de tempo computacional requerido quando comparado com os métodos baseados em gradientes.

Frangopol et al. (1996) fizeram estudos sobre a confiabilidade de pilares de concreto armado esbeltos e curtos. As superfícies de falha foram geradas através

dos históricos de tensão e de deformação nas fibras extremas não sendo considerada a resistência à tração do concreto. A análise de confiabilidade foi feita através do método de simulação de MC. Foram feitas verificações de confiabilidade de pilares de concreto armado, com variação da sequência de carregamento e de correlação entre as cargas. Foi constatado que, em alguns casos, a confiabilidade de pilares de concreto armado pode depender da sequência de carregamento, e que depende da correlação entre os carregamentos. Nos casos onde as correlações são menores que a unidade ( $\rho < 1,0$ ), elas se apresentaram conservativas para a maioria das regiões de falha por compressão. Entretanto, para as regiões de falha por tração, elas se mostraram não-conservativas. Sendo assim, a suposição de carregamento proporcional usada na maioria das normas de projeto para pilares de concreto armado pode não ser conservativa na região de falha por tração.

Em Real e Filho (2001) foram estudados os efeitos da variabilidade das dimensões geométricas e das propriedades dos materiais na análise de vigas e pilares de concreto armado. Foi constatado que a variabilidade das propriedades do concreto influenciam muito, tanto as flechas das vigas sob cargas de serviço quanto a carga de ruptura dos pilares sob flexo-compressão e com um determinado índice de esbeltez. Para os pilares estudados, a ruptura ocorreu devido ao esmagamento do concreto sem que o aço entrasse em escoamento. Para as vigas dúcteis, a aleatoriedade das propriedades mecânicas das armaduras influenciaram muito a aleatoriedade da carga de ruptura. Os efeitos das incertezas na resposta da estrutura foram avaliados empregando o método de Monte Carlo.

Outra metodologia é apresentada por Araújo e Real (2002) que verificaram a confiabilidade de vigas de concreto armado quanto aos estados limites últimos (modo de falha por flexão) e quanto aos modos de comportamento de utilização (por deformação excessiva e fissuração inaceitável). Nas aplicações estudadas foi constatado que o estado limite de deformações excessivas predomina com maior probabilidade de falha, pois o valor máximo permitido para a flecha é o que determina o cálculo da altura da viga. A confiabilidade da viga é avaliada através do método de Monte Carlo, que, dependendo do tamanho do problema, pode ser muito caro computacionalmente.

Soares et al. (2002) fizeram análises de confiabilidade de elementos de barras de concreto armado usando o método de superfície de resposta. Para a

análise da confiabilidade são empregados de forma acoplada um modelo de elementos finitos não-linear com o método de superfície de resposta e, para a determinação do índice de confiabilidade,  $\beta$ , o método FORM. A função de comportamento utilizada é representada pela diferença da carga última da estrutura pela carga real aplicada. Foram consideradas como aleatórias as seguintes variáveis: a resistência à compressão do concreto; a tensão de escoamento do aço; as cargas permanentes e acidentais. O modelo utilizado considera a não-linearidade dos materiais e a não-linearidade geométrica. Foram avaliados os índices de confiabilidade de estruturas de concreto armado, para a verificação da segurança obtida pelo uso dos fatores parciais de segurança, estabelecidos pelas principais normas internacionais. Segundo Soares et al. (2002), conclui-se o seguinte: o método empregado mostrou-se eficiente, reduzindo o custo computacional da análise da confiabilidade de elementos complexos de concreto armado; a não-linearidade das estruturas de concreto armado tem forte influência na determinação da confiabilidade; e, por último, os fatores parciais de segurança utilizados nas normas internacionais são adequados, embora, algumas vezes, possam ser excessivamente conservativos.

No estudo realizado por Gomes (2003), uma viga bi-apoiada de concreto armado foi analisada com ênfase nas incertezas da avaliação do comportamento estrutural. Foi desenvolvido um modelo para a geração de campos estocásticos multidimensionais não-Gaussianos. A análise da confiabilidade foi realizada utilizando-se o método FORM, assumindo como função de falha a flecha máxima na seção localizada no centro do vão, ou seja, o valor da flecha não deve ultrapassar um valor prescrito. O módulo de elasticidade do material é considerado como um campo estocástico.

Em Szerszen e Nowak (2005) foram desenvolvidas análises de confiabilidade de colunas de concreto armado sujeitas à carga excêntrica. As variáveis aleatórias foram as seguintes: a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ); as dimensões da seção transversal ( $b$ ,  $h$ ); e o diâmetro da barra de aço longitudinal ( $\phi$ ). A análise de confiabilidade foi feita utilizando as simulações de Monte Carlo. No estudo é proposto um novo modelo para o fator de redução de resistência dos pilares de concreto armado sujeitos à carga excêntrica.

Em Santos e Eboli (2006) foram feitas avaliações da confiabilidade estrutural com base nas normas da ABNT. Neste trabalho foram avaliadas as probabilidades de ruína de seções retangulares de concreto armado, dimensionadas à flexão composta reta, com armadura simétrica. O trabalho analisa diversas situações, variando-se as taxas de área de armadura longitudinal e as relações entre os valores de cargas permanentes e acidentais. As variáveis aleatórias consideradas no trabalho foram: a tensão de escoamento no aço ( $f_y$ ); a tensão de compressão no concreto ( $f_c$ ); a solicitação permanente ( $G$ ); a solicitação acidental ( $Q$ ); o fator de modelagem da resistência ( $m_R$ ) e o fator de modelagem das ações ( $m_S$ ). As principais considerações feitas a partir dos resultados foram que: os coeficientes parciais de segurança devem ser ajustados, a partir de um processo de análise crítica baseado na confiabilidade; os índices de confiabilidade foram maiores nos casos em que o percentual de carga permanente na carga total foi mais alto, devido à maior variabilidade das cargas acidentais; os índices de confiabilidade foram sempre maiores na região em que a resistência do concreto domina sobre a resistência do aço, o que sugere uma reavaliação dos valores numéricos dos coeficientes de minoração das resistências do aço e do concreto nas Normas Brasileiras.

Além destes trabalhos podem-se citar outros, que também envolvem análise de confiabilidade de estruturas de concreto armado, tais como: Ellingwood (1996, 2003), Araújo (2001), Diniz (2005), Lopes et al. (2006) e Neves et al. (2006). Dentre outras aplicações relevantes em confiabilidade podem-se citar os trabalhos a seguir: Ang e Cornell (1974), Hasofer e Lind (1974), Rackwitz e Fiessler (1978), Choudhori e Chokraborty (2005), Yang et al. (2006), Lee e Kwak (2006), Saleh e Moraes (2006) e Choi et al. (2006).

### 1.2.3.

#### Otimização via RBDO

O objetivo do RBDO é desenvolver projetos econômicos e confiáveis, introduzindo critérios de confiabilidade no processo de otimização. Segundo Kharmanda et al. (2004) o primeiro trabalho que introduziu a idéia de análise de confiabilidade em conjunto com otimização de projeto foi desenvolvido por Stevenson em 1967.

Dos trabalhos desenvolvidos recentemente em RBDO, pode-se citar os seguintes: Wang e Grandhi (1993), Sepulveda e Epstein (1993), Enevoldsen (1993), Al-Harthy e Frangopol (1994), Moses (1997), Kleiber et al. (1999), Choi e Youn (2001), Youn et al. (2003, 2004), Müller et al. (2003), Eboli et al. (2004), Youn e Choi (2004), Eboli e Vaz (2005), Papadrakakis et al. (2005), Tsompankis et al. (2005), Nogueira (2005), Almeida et al. (2005), Youn et al. (2005), Almeida et al. (2006), Lagoros e Papadopoulos (2006), Zou e Mahadevan (2006) e Almeida et al. (2007).

Wang e Grandhi (1993) desenvolveram em seu trabalho, otimização de estruturas baseadas em confiabilidade, um novo algoritmo para a avaliação das restrições de confiabilidade. Este algoritmo, como demonstrado por eles, tem a vantagem de convergir com poucas iterações, mesmo para funções altamente não-lineares, o que muitas vezes não acontece com algoritmos mais usados tal como o HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978). Os exemplos analisados por eles incluem funções de alta não-linearidade numérica, para demonstrar a eficiência do algoritmo proposto, tais como, uma placa, uma turbina e uma estrutura plana de barras. Apesar dos inúmeros exemplos, o foco do trabalho é fazer uma comparação para comprovar a eficiência do algoritmo proposto, não apresentando os resultados das otimizações onde foram restritos os deslocamentos em nós de interesse. Nestes exemplos são considerados somente materiais com comportamento linear, sendo as características geométricas e físicas dos materiais consideradas como variáveis aleatórias.

Sepulveda e Epstein (1993) propuseram a minimização do peso de projetos de estruturas sujeitos a restrições de confiabilidade em condições de serviço (deslocamento restrito e tensões). São consideradas como variáveis aleatórias: as cargas e as tensões internas permitidas. Para a análise das restrições de confiabilidade é utilizado o método de simulação de Monte Carlo. Como exemplificação do método proposto, é determinado o projeto ótimo de uma treliça de alumínio plana de dez barras, minimizando o seu peso. Através dos exemplos o autor conclui que na maioria dos casos a otimização determinística conduz a resultados com baixos níveis de confiabilidade. O método de aproximação se mostrou eficiente em número de análises requeridas para convergência onde ele considera como restrição de serviço a limitação de deslocamento em um dos nós.

Al-Harthy e Frangopol (1994) apresentam um algoritmo para a obtenção do projeto ótimo baseado em confiabilidade de vigas pré-moldadas de concreto pré-tensionadas. A função objetivo busca minimizar a área de cordoalha de protensão e as restrições de confiabilidade verificam as tensões nas fases inicial, final e de estado limite último. Para a otimização do projeto é usado o algoritmo do método das direções viáveis. São tomadas como variáveis aleatórias: o carregamento; as propriedades dos materiais; os níveis de força para a pré-tensão; e alguns coeficientes necessários para o modelo estrutural nos estágios inicial, final e último. É utilizado o método do segundo momento para a avaliação da confiabilidade (Rackwitz and Fiessler, 1978).

Müller et al. (2003) implementaram otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas, tais como pórticos e treliças. Para a otimização foi utilizado o algoritmo de pontos interiores e, para a determinação da resposta considerando as incertezas, foram utilizados os métodos de análise estatística linear e de simulação de Monte Carlo. Foram consideradas como variáveis aleatórias os parâmetros mecânicos, tais como: o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento do material e as cargas atuantes. No problema de RBDO foi considerado o peso da estrutura como função objetivo sujeita a restrições de confiabilidade para os deslocamentos e as tensões. No trabalho foram analisados dois exemplos: o primeiro é um pórtico plano com três elementos e o segundo uma treliça plana de dez elementos. Através dos resultados obtidos no trabalho, os autores afirmam que a análise estatística linear é um bom método para a análise da resposta estatística de estruturas reticuladas planas de comportamento linear elástico. A utilização da simulação de Monte Carlo não é recomendável em problemas de otimização considerando incertezas, nos quais são utilizados métodos iterativos, o que conduziria a um número excessivo de análises, inviabilizando o processo.

Para a avaliação do RBDO deve-se trabalhar com restrições probabilísticas que podem ser formuladas ou pelo RIA ou pelo PMA (Choi e Youn, 2001). Destes dois, o RIA foi o primeiro a ser idealizado. Através de um processo iterativo procura-se determinar o índice de confiabilidade,  $\beta$ , para a função de falha estabelecida nesse enfoque. Contudo, muitas vezes sua convergência é lenta ou nem chega a acontecer (Youn et al., 2003). Para contornar esse problema, foi

proposto um método alternativo, o PMA, que se mostrou mais eficiente do que o RIA (Tu et al., 1999).

Mesmo o PMA quando utilizando o método AMV (Advanced Mean Value), mostrou-se instável em diversos casos nos quais a função avaliada era côncava. Por esse motivo foi proposto por Youn et al. (2004) um método híbrido (HMY-Hybrid Mean Value) que associa dois métodos (AMV e CMV- Conjugate Mean Value), resolvendo o problema tanto para funções côncavas quanto para as convexas.

Mesmo com o método HMY, o processo de RBDO pode não ser eficiente o bastante no caso de problemas com muitas variáveis aleatórias ou onde o cálculo da sensibilidade de projeto é inviável. Desta forma, para atender a estes requisitos foi proposta em Youn e Choi (2004) uma nova metodologia, onde o método HMY é integrado a um novo método, RSM (Response Surface Method), baseado no método dos mínimos quadrados. Este novo método, segundo o autor, diminui o esforço computacional mantendo uma boa precisão.

Desde o início da utilização da análise de confiabilidade como restrição em projetos ótimos (RBDO) muitas formulações diferentes vêm sendo propostas para melhorar o seu desempenho computacional garantindo a confiabilidade de seus resultados. Dentre estas destacam-se três: RBDO tradicional (ou Parallel-loop RBDO); serial-loop RBDO; e single-loop RBDO (Youn et al., 2005). Os métodos **parallel** e **serial loop** têm dupla iteração, na análise de confiabilidade e de otimização. Por outro lado, o método **single-loop** remove uma iteração no processo da análise de confiabilidade, mas pode causar problemas de perda de precisão e de instabilidade numérica no problema.

Youn et al. (2005) desenvolveram uma formulação (PMA+) que, segundo eles, mostrou-se mais eficiente computacionalmente na maioria dos casos, quando comparada com outros métodos de RBDO. Tal formulação destaca-se por três passos básicos: o processo do RBDO é iniciado tomando como ponto inicial o projeto obtido pela execução de uma otimização determinística; a verificação e utilização das restrições probabilísticas que estejam ativas; aproveitamento do projeto da iteração anterior, quando satisfeita a condição de proximidade, para que haja diminuição da quantidade de avaliações da função de falha.

Buscando também a diminuição do tempo computacional para análise de confiabilidade no método RBDO, Zou e Mahadevan (2006) propõem em seu



trabalho um algoritmo que se destaca pelos seguintes passos: utilização do DDO como ponto inicial, se for possível; identificação e utilização das restrições potencialmente ativas; construção de aproximações de primeira ordem em séries de Taylor para todas as restrições potencialmente ativas. No método, a análise de confiabilidade é desacoplada do processo de otimização, onde a análise de confiabilidade e as iterações de otimização são avaliadas sequencialmente até a convergência dos resultados da otimização. As propriedades estatísticas dos parâmetros mecânicos aleatórios são assumidas como variáveis de projeto. Segundo os autores o método mostra-se mais eficiente que o método RBDO tradicional e compara-se em eficiência com o método PMA desacoplado.

Eboli et al. (2004) apresentam em seu trabalho uma aplicação do parâmetro beta de confiabilidade em otimização de estruturas. Neste trabalho foi utilizado o método FORM para a avaliação da probabilidade de falha dos exemplos, em conjunto com um algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (PQS) para a otimização. Foram analisados dois exemplos, sendo o primeiro um pórtico plano sob a ação de cargas verticais e vento, onde as variáveis aleatórias foram as propriedades mecânicas dos materiais, as cargas atuantes e os fatores de modelagem. Para este primeiro exemplo foi verificada a confiabilidade de uma determinada seção sujeita a restrições de deslocamento e tensões. O segundo exemplo faz uma comparação com a treliça de dez elementos utilizada em Müller et al. (2003), onde foram consideradas como variáveis aleatórias os módulos de elasticidade dos elementos e as tensões axiais de resistência. Através deste trabalho, conclui-se que, com a utilização do parâmetro beta e do método FORM, foi possível efetuar inúmeras análises para ambos os exemplos em um tempo bem inferior ao que seria necessário com a utilização da simulação de MC.

Nogueira (2005) apresenta um modelo de otimização acoplado à confiabilidade para a análise de estruturas de barras de concreto armado. O modelo mecânico utilizado leva em consideração a não-linearidade física dos materiais e os efeitos não-lineares geométricos. Com relação à modelagem mecânica, foi utilizado um modelo que busca representar o dano para o concreto. O problema de otimização considera como variáveis de projeto a altura do elemento, a armadura tracionada e a armadura comprimida. Para a análise mecânica é utilizado o Método dos Elementos Finitos onde se emprega o elemento de pórtico para a discretização, e na análise de confiabilidade é utilizado

o Método das Superfícies de Respostas com aproximação da função estado limite a partir de polinômios de segundo grau. As variáveis escolhidas para representar a aleatoriedade do problema foram a resistência média à compressão do concreto e a resistência média do aço. O modelo acoplado de otimização e confiabilidade é empregado para análise de vigas de concreto armado. O autor conclui que, ao se otimizar uma estrutura, a probabilidade de falha tende a aumentar, o que pode conduzir a estados contra a segurança em projetos. Salienta ainda que a confiabilidade também pode ser usada para avaliar a segurança de diversos sistemas estruturais, comparando sua eficiência, bem como para se determinar as variáveis que mais influenciam no comportamento global da estrutura.

Em Eboli (2005) foi realizada a otimização de uma treliça plana de 10 barras sujeita a restrições de confiabilidade. Essas restrições foram estabelecidas com relação ao deslocamento máximo e às tensões de resistência. A análise da confiabilidade foi realizada utilizando-se o método FORM. Foram analisados dois enfoques diferentes para a determinação do ponto de projeto, o RIA e o PMA. O RIA mostrou-se menos confiável do que o PMA, pois não apresentou convergência para determinadas situações, o que não acontece com o PMA. Além desta constatação, o trabalho forneceu uma interessante ferramenta para projetistas ao considerar as incertezas com relação aos módulos de elasticidade das barras e as tensões últimas de resistência.

Em Almeida et al. (2005, 2006) são otimizadas seções e pilares de concreto armado, respectivamente, considerando a aleatoriedade das propriedades dos materiais e das cargas atuantes. O FORM é utilizado para a análise da confiabilidade. Através de exemplos de aplicação, os autores concluem que o projeto convencional ou mesmo o DDO podem conduzir a projetos com níveis de confiabilidade inapropriados. Além do mais, ao se adotar o RBDO pode-se, também, calibrar os coeficientes parciais de segurança para um estado limite de uma estrutura específica e obter o fator de importância das variáveis aleatórias sem nenhum custo adicional para o processo, pois os mesmos são um subproduto do RBDO.

Pereira (2007) desenvolveu em seu trabalho um algoritmo para a otimização baseada em confiabilidade de treliças espaciais. As variáveis aleatórias e de projeto são as seções transversais, as coordenadas nodais, as propriedades dos materiais (módulo de elasticidade e tensão de escoamento) e os carregamentos. A

não-linearidade geométrica é considerada. Foram consideradas funções de comportamento para a análise de confiabilidade em relação aos deslocamentos e em relação às tensões.

### **1.3. Procedimento proposto neste trabalho**

A partir da revisão bibliográfica citada nos itens anteriores, pode-se analisar a contribuição do presente trabalho na área de RBDO. Neste trabalho é utilizado o processo analítico (FORM) na análise de confiabilidade e algoritmos de PM na otimização do projeto. A estrutura é discretizada pelo método dos elementos finitos e são consideradas as não-linearidades do material e geométrica. Este trabalho visa apresentar uma comparação entre dois procedimentos para o projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado (DDO x RBDO).

O primeiro procedimento (DDO) é na verdade um dimensionamento ótimo baseado no método semiprobabilístico, chamado aqui de determinístico, porque todas as variáveis são tratadas como se elas fossem determinísticas durante o processo de otimização. Nessa metodologia, o tratamento estatístico das variáveis aleatórias é feito “a priori”, antes da otimização e, por isso, é denominada método semiprobabilístico de projeto. O método é usado pela grande maioria das normas de projeto de vários países, inclusive as do Brasil. O segundo procedimento (RBDO) trata a aleatoriedade das variáveis durante a otimização, o que permite realizar uma análise de confiabilidade em cada iteração do processo de otimização e prescrever uma probabilidade de falha desejada para as restrições de projeto. O dimensionamento das armaduras da seção é feito com a hipótese de comportamento determinístico nas duas formulações. As restrições de confiabilidade no RBDO são associadas a duas funções de falha. A primeira é relativa ao estado limite de utilização, envolvendo restrição ao deslocamento e a segunda é relativa ao estado limite último, envolvendo a carga limite da estrutura.

Ao adotar a otimização via RBDO neste trabalho, espera-se obter um projeto confiável e econômico. Obtêm-se também os coeficientes parciais de segurança e o fator de importância de cada variável aleatória. Esse fator de importância auxilia na escolha da variável aleatória que necessita de um controle maior. Assim, caso não se obtenham índices de confiabilidade satisfatórios, os

parâmetros probabilísticos dessas variáveis de maior importância podem ser alterados.

Dentro do contexto da revisão bibliográfica, este trabalho é o primeiro a utilizar técnicas de programação matemática (e.g., SQP - Sequential Quadratic Programming, SLP - Sequential Linear Programming) para a obtenção do projeto ótimo de estruturas de pórtico plano de concreto armado sujeitas a restrições determinísticas e não-determinísticas considerando-se a não-linearidade física e geométrica do problema. As restrições não-determinísticas utilizam o método de segundo momento (FORM) com o enfoque da medida de desempenho (PMA). O procedimento adotado fornece como dados de saída para o projeto ótimo: as alturas das seções ( $h$ ); as áreas de aço longitudinais ( $A_{ss}$  e  $A_{st}$ ) e as áreas de aço transversais ( $A_{sw}$ ).

#### 1.4.

#### Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta o conceito de RBDO, através de definições básicas e de um exemplo ilustrativo.

No capítulo 3 são apresentados os critérios e detalhes para a análise de pórticos planos de concreto armado, considerando a não-linearidade dos materiais e a não-linearidade geométrica.

No capítulo 4 são apresentados os conceitos básicos necessários para compreensão da análise de confiabilidade de estruturas. O capítulo inicia-se apresentando os conceitos dos parâmetros essenciais para o estudo da confiabilidade de estruturas e, em seguida, são descritos os estados limites e a função de comportamento. São introduzidos os conceitos de índice de confiabilidade e o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). O item 4.6 trata de confiabilidade de sistemas para o caso em que se têm mais de uma função de falha, verificando-se inicialmente se o caso é um sistema em série ou em paralelo. Em 4.7 são definidos os conceitos para a calibração de coeficientes parciais de segurança.

No capítulo 5 são descritos os detalhes necessários para compreensão do problema de otimização determinística (DDO) em seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão, incluindo a forma de inicialização do parâmetro  $D$ .

No capítulo 6 é apresentada a metodologia para o projeto de otimização baseado em confiabilidade (RBDO), onde são expostos os dois tipos de enfoque para a avaliação da confiabilidade: o enfoque do índice de confiabilidade (RIA) e o enfoque da medida de desempenho (PMA). São também apresentadas as variáveis aleatórias do problema proposto.

No capítulo 7 são descritas as sensibilidades analíticas utilizadas no programa desenvolvido. Estas sensibilidades representam a variação de uma função devida à variação de uma variável.

No capítulo 8 são apresentados os exemplos de aplicação desenvolvidos.

Por fim, no capítulo 9 são apresentadas conclusões referentes aos exemplos de aplicação de RBDO em estruturas de concreto armado e as sugestões para trabalhos futuros. Nos apêndices A e B são apresentados alguns conceitos de análise de confiabilidade de sistemas e distribuições probabilística, respectivamente.

## 2

## O conceito de RBDO

Este capítulo apresenta uma introdução ao conceito de RBDO, através de definições básicas e de um exemplo ilustrativo.

### 2.1.

#### Definições necessárias

Este trabalho aborda dois conceitos: otimização e teoria da confiabilidade de estruturas.

No campo da otimização de estruturas, muitos algoritmos eficientes para a busca do projeto ótimo têm sido elaborados, tais como SQP, SLP e direções viáveis (Haftka e Gurdal, 1993). Também no campo da teoria da confiabilidade de estruturas, várias técnicas eficientes têm sido desenvolvidas nos últimos 30 anos para se estimar a confiabilidade, tais como FORM e SORM.

Com a associação desses dois conceitos, pretende-se neste trabalho obter uma ferramenta que determine o valor ótimo de projeto de pórticos planos de concreto armado sujeitos a restrições determinísticas e de confiabilidade. Com a introdução do conceito de análise de confiabilidade de estruturas, busca-se representar de uma forma mais precisa as características aleatórias de variáveis significativas em um projeto de estruturas. Serão considerados dois tipos de variáveis:

1. Vetor das variáveis de projeto ( $\mathbf{x}$ ): são variáveis determinísticas definidas a fim de otimizarem o sistema;
2. Vetor das variáveis randômicas ( $\mathbf{u}$ ): representam as incertezas na estrutura (variáveis aleatórias).

Esta metodologia de otimização baseada na confiabilidade (RBDO em inglês) visa obter um projeto ótimo preservando o nível de confiabilidade adequado. De uma forma geral, formula-se o problema RBDO como,

$$\text{Minimizar custo } f(x) \quad (2.1a)$$

Sujeito a

$$Pf_s(x, u) - Pf_t \leq 0 \quad (2.1b)$$

$$g(x) \leq 0 \quad (2.1c)$$

sendo  $Pf_s$  a probabilidade de falha do sistema e  $Pf_t$  a probabilidade de falha desejada (target). As restrições de confiabilidade e determinísticas são representadas pelas (2.1b) e (2.1c), respectivamente.

Assim, o problema (2.1) busca minimizar a função de custo,  $f(x)$ , sujeita às restrições de confiabilidade mínima para os sistemas em estudo (Eq. 2.1b) e às restrições determinísticas (Eq. 2.1c) quando necessário.

## 2.2.

### Exemplo ilustrativo

Seja uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída como mostra a Figura 2.1.  $G$  é a função de comportamento (Eq. 2.2) que representa se o projeto é ou não satisfatório, indicando que a viga não estará apta para a utilização devido a deslocamento excessivo caso se tenha  $G < 0$ , sendo

$$G(w, L) = 1 - \frac{u(w, L)}{u_{\lim}} \quad (2.2)$$

onde:  $u_{\lim} = L/350$  é o deslocamento limite;  $u$  é o deslocamento da estrutura para uma determinada configuração.  $L$  é o comprimento da viga e  $w$  é a intensidade da carga distribuída (Figura 2.1), ambas são consideradas variáveis aleatórias do exemplo. As características destas variáveis aleatórias são definidas na Tabela 2.1.

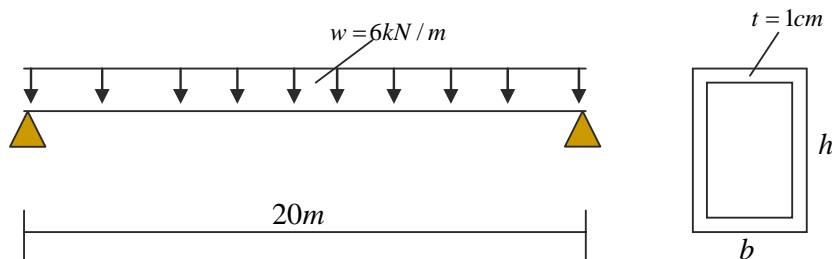


Figura 2.1 – Geometria do exemplo e carregamento atuante.

Variável	símbolo	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Carga distribuída	w (kN/m)	Normal	6,00	1,50
Comprimento do vão	L (m)	Normal	20,00	0,05
Largura da seção	b (cm)	Determinística	50	-
Altura da seção	h (cm)	Determinística	150	-

Tabela 2.1 – Variáveis do exemplo ilustrativo.

Utilizando os dados acima, deseja-se dimensionar a seção transversal da viga, assumindo um material homogêneo com módulo de elasticidade do aço ( $E_s = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ) e o índice de confiabilidade alvo ( $\beta_t = 1,5$ ). Para isso, otimizam-se as dimensões da seção da viga considerando-se como restrição de confiabilidade a limitação para o deslocamento máximo no centro do vão da viga.

Sendo  $\beta_s$  o índice de confiabilidade do sistema (índice de confiabilidade da viga ao deslocamento excessivo, neste caso).  $\beta_t$  relaciona-se de forma inversamente proporcional com a probabilidade de falha da função de comportamento,  $P_f$ . Desta forma ao considerar-se  $\beta_t = 1,5$  tem-se  $P_f = 6,68 \times 10^{-2}$ .

Dimensões	$\beta_s$	$P_f$
b=50 h=150	9,67	$2,02 \times 10^{-20}$
b=42,9 h=130	5,94	$1,42 \times 10^{-8}$
b=36,4 h=111	3,83	$6,40 \times 10^{-5}$
b=24,9 h=78	$1,52 > \beta_t$	$6,42 \times 10^{-2}$

Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o exemplo de RBDO.

Na Tabela 2.2, encontram-se alguns dos resultados obtidos para este exemplo de RBDO. Observa-se que à medida que o algoritmo de otimização reduz as dimensões da estrutura, a probabilidade de a estrutura não satisfazer a função de comportamento aumenta. No fim do processo obtêm-se as dimensões ótimas com uma probabilidade de falha satisfatória para o estado limite de utilização onde se considerou o efeito das incertezas da carga aplicada e do comprimento do elemento estrutural.



### **3**

## **Análise de pórticos planos de concreto armado**

### **3.1.**

#### **Introdução**

A sistemática convencional de projeto baseia-se em processos de análises sucessivas, envolvendo um grande número de variáveis e um grande número de verificações. Com base nos resultados de uma primeira análise, o projetista modifica as configurações de projeto caso os critérios de projeto tenham sido violados, objetivando encontrar uma estrutura que atenda aos referidos critérios. Muito dificilmente a escolha adotada representa a melhor configuração possível, ou a mais econômica, apenas representa uma escolha viável. O processo de otimização de estruturas pode ser entendido como a finalização ideal de um processo de análises sucessivas, que continuaria até que se encontrasse a estrutura mais econômica no espaço das soluções viáveis. Na busca por esse objetivo, podem-se utilizar técnicas de otimização numérica.

Assim, a busca por um projeto ótimo necessita da análise da estrutura. Neste trabalho será utilizada para a análise de pórticos planos de concreto armado a mesma metodologia empregada por Melo (2000b) que executa a análise não-linear geométrica e do material tendo por opção a utilização de dois tipos de elementos finitos distintos.

### **3.2.**

#### **Análise não-linear de pórticos planos**

#### **3.2.1.**

##### **Considerações iniciais**

No trabalho é adotada uma formulação não-linear para análise estática de pórticos planos de concreto armado. Os elementos finitos são elementos de estado plano de tensões de eixo reto e seção transversal constante e retangular.

Para a discretização da estrutura foram implementados por Melo (2000b) dois modelos de elementos finitos que têm por diferença principal a aproximação utilizada para a representação da componente do deslocamento axial. No primeiro modelo, os deslocamentos axial e transversal são aproximados por polinômios linear e cúbico, respectivamente. Já no segundo elemento a aproximação da componente axial foi composta por um polinômio quadrático, e a componente transversal por um cúbico. É utilizado o método iterativo de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações não-lineares.

A não-linearidade geométrica é tratada considerando a hipótese de rotações moderadas. No caso dos materiais, são assumidas as relações tensão-deformação não-lineares.

No trabalho não são considerados os efeitos dinâmicos, considerando somente um caso de carga onde o processo de carregamento é suposto estático. As cargas aplicadas são consideradas atuando somente nos pontos nodais do modelo discretizado. Caso elas estejam atuando ao longo dos elementos, elas são substituídas por cargas nodais equivalentes.

### 3.2.2. Características dos materiais

Para o dimensionamento de seções de concreto armado, a NBR 6118 (ABNT, 2004) recomenda o diagrama parábola-retângulo para descrever a relação tensão x deformação no concreto na região comprimida e despreza-se a contribuição do concreto para a resistência à tração. As tensões negativas são consideradas de compressão como mostra a Figura 3.1, de onde se têm,

$$\begin{aligned}
 \sigma_c &= -\sigma_{cd} & \text{se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_c \leq -\varepsilon_{c2} \\
 \sigma_c &= \sigma_{cd} \left[ 2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{se } -\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq 0 \\
 \sigma_c &= 0 & \text{se } \varepsilon_c \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cu} &= 3,5\% & \varepsilon_{c2} &= 2\% \\ \sigma_{cd} &= 0,85 f_{cd} & f_{cd} &= f_{ck} / \gamma_c \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\varepsilon_c$  é a deformação no concreto,  $\sigma_c$  é a tensão de compressão,  $f_{cd}$  é o valor de cálculo da resistência à compressão,  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração ( $\gamma_c = 1,4$ ) e  $f_{ck}$  é o valor característico da resistência à compressão.

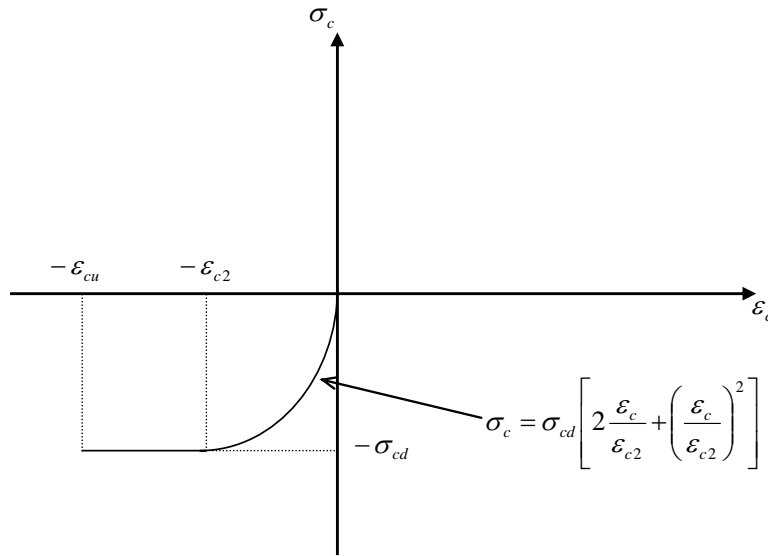


Figura 3.1 – Diagrama tensão-deformação de cálculo do concreto.

Para os aços, a mesma norma recomenda usar (Figuras 3.2):

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s & \text{se } |\varepsilon_s| &\leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s &= \text{sign}(\varepsilon_s) f_{yd} & \text{se } |\varepsilon_s| &> \varepsilon_{yd} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão normal no aço;  $\varepsilon_s$  é a deformação no aço;  $\varepsilon_{yd}$  é a deformação de escoamento de cálculo do aço;  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento de cálculo do aço;  $E_s$  é o módulo de elasticidade transversal do aço e  $\text{sign}(x)$  é a função que retorna o sinal da função dada (se  $x \geq 0$  a função retorna +1, caso contrário, ela retorna -1).

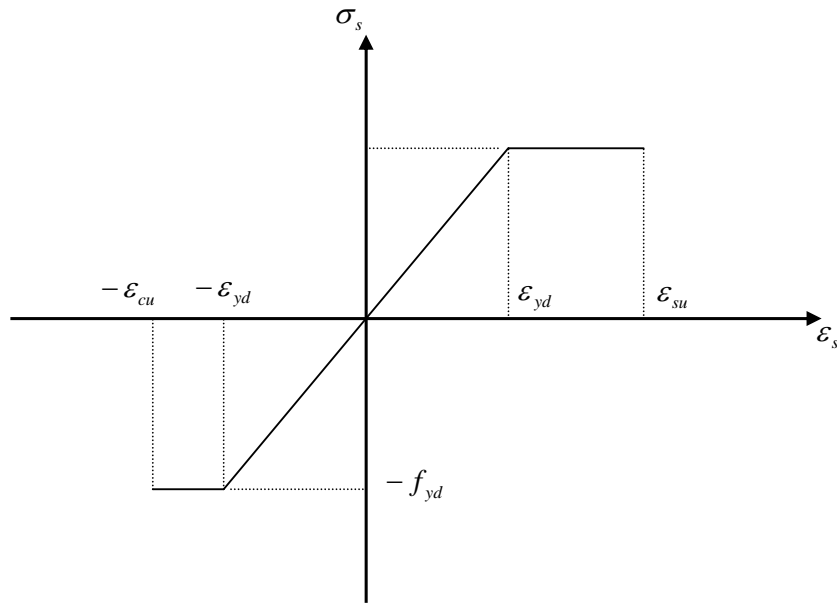


Figura 3.2 - Diagrama tensão-deformação de cálculo do aço classe A.

Para a análise da resposta da estrutura em termos de esforços internos solicitantes, deve-se trabalhar com os valores médios das resistências, ou seja, substitui-se o  $f_{cd}$  pelo seu valor médio,  $f_{cm}$ , e o  $f_{yd}$  pelo seu valor médio,  $f_{ym}$ . Os coeficientes de ponderação das ações são iguais os recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2004). Para o cálculo dos esforços internos resistentes segue-se também a NBR 6118.

### 3.2.3. Deformação axial e curvatura

O sistema de coordenadas de referência dos elementos adotado está representado na Figura 3.3, considerando-se que o carregamento aplicado atua no plano  $x$ - $y$  permanecendo neste plano após a deformação.

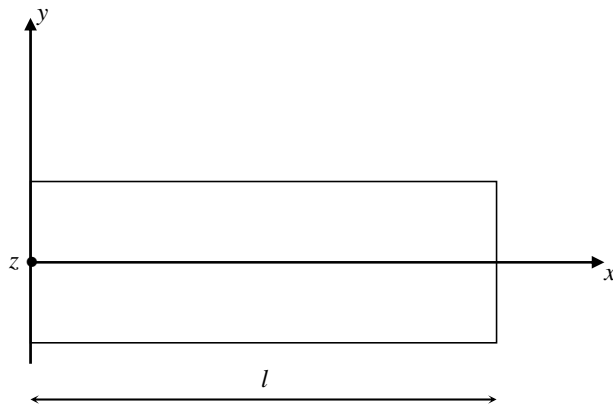


Figura 3.3 – Sistema de coordenadas de referência dos elementos finitos.

As componentes de deslocamento finais de P0 nas direções  $x$  e  $y$  são  $u$  e  $v$ , e as componentes de deslocamento finais de P nas direções  $x$  e  $y$  são  $u_x$  e  $u_y$  (Figura 3.4).

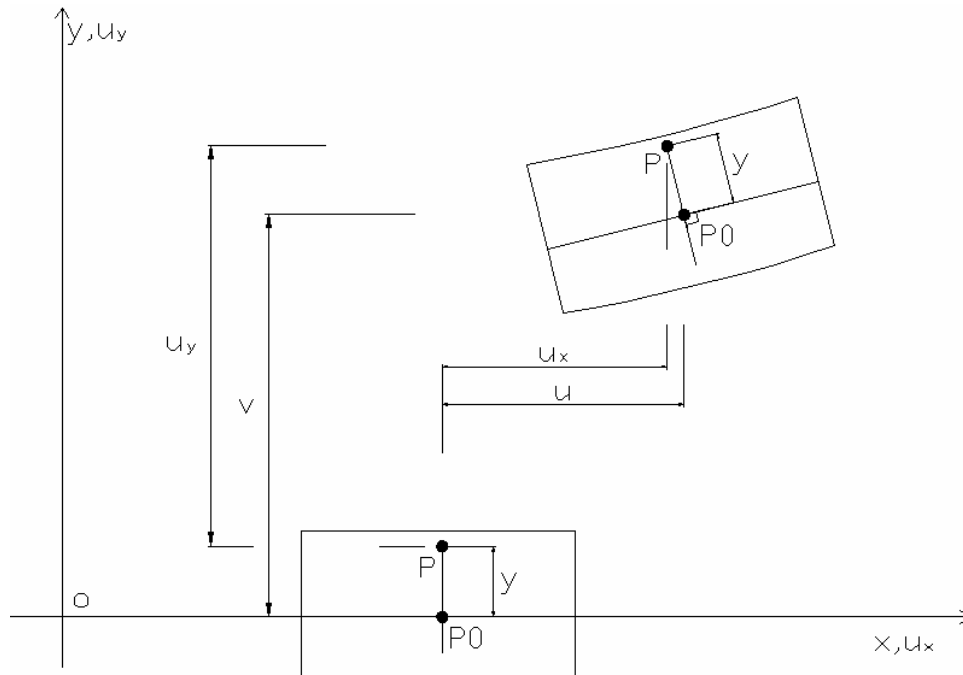


Figura 3.4 – Configuração deformada de um trecho de elemento.

Com base na hipótese de Navier-Bernoulli e das rotações moderadas, a equação que descreve  $\varepsilon_x$  devida ao campo de deslocamentos pode ser escrita como

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

ou

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_0 - y\chi \\ \varepsilon_0 &= u' + \frac{1}{2}v'^2 \\ \chi &= v''\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde  $\varepsilon_0$  é a deformação axial;  $\chi$  é a curvatura;  $()'$  e  $()''$  significam as derivadas de primeira e segunda ordens em relação a  $x$ .

### 3.2.4. Esforços internos no elemento

Na formulação adotada por Melo (2000b) obtêm-se as equações de equilíbrio não-lineares para o pórtico obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais. Os esforços internos para o equilíbrio são: a força normal  $\mathbf{N}$ ; a resultante das tensões do concreto e do aço; e o momento  $\mathbf{M}$ , resultante dos momentos produzidos pelas tensões internas do concreto e do aço em relação ao centróide da seção transversal. Utilizando-se as convenções de sinais da Figura 3.5, tem-se:

$$\begin{aligned}N &= \iint_{A_m} \sigma_x dA = \iint_{A_{c,m}} \sigma_x dA + \sigma_{SI,m} A_{SI,m} + \sigma_{SS,m} A_{SS,m} \\ M &= - \iint_{A_m} \sigma_x y dA = - \iint_{A_{c,m}} \sigma_x y dA - \sigma_{SI,m} y_{SI,m} A_{SI,m} - \sigma_{SS,m} y_{SS,m} A_{SS,m}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Os esforços das Equações (3.6) são definidos para uma seção qualquer do elemento finito  $m$ . Assim, tem-se  $A_{SI,m}$ ,  $A_{SS,m}$  para as armaduras longitudinais inferior e superior,  $A_{c,m}$  para a área de concreto,  $\sigma_{SI,m}$ ,  $\sigma_{SS,m}$  para as tensões nas armaduras longitudinais inferior e superior e  $y_{SI,m}$ ,  $y_{SS,m}$  para as ordenadas que distam do centro de gravidade da seção de concreto até o centro de gravidade das armaduras longitudinais inferior e superior, respectivamente.

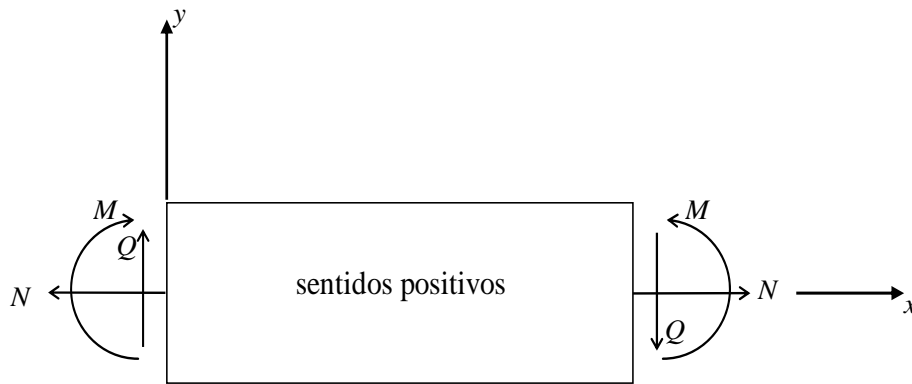


Figura 3.5 – Convenção de sinal para esforços no elemento.

### 3.2.5. Equação de equilíbrio

O problema de solução das equações de equilíbrio não-lineares (Eq. 3.7) é resolvido de forma incremental pelo método de Newton-Raphson

$$\Psi = F - P = 0 \quad (3.7)$$

sendo  $F$  o vetor das forças nodais internas da estrutura e  $P$  o vetor das forças nodais externas. O problema possui  $neq$  equações não-lineares, sendo  $neq$  o número de graus de liberdade da estrutura.

O processo iterativo utiliza incrementos de deslocamento (Eq. 3.8) até que as forças desequilibradas se anulem ( $\Psi \cong 0$ ). Assim têm-se as equações de equilíbrio incrementais.

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k+1)} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi(u^{(k)}) &= F(u^{(k)}) - P \\ K_T(u^{(k)}) \Delta u^{(k+1)} &= -\Psi(u^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Onde

$$K_T(u^{(k)}) = \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{u^{(k)}} \quad (3.10)$$

sendo  $K_T(u^{(k)})$  a matriz de rigidez tangente e  $\Psi(u^{(k)})$  o vetor de forças desequilibradas da estrutura.

**3.2.6.****Modelos de elementos finitos**

Para a discretização da estrutura foram implementados por Melo (2000b) dois modelos de elementos finitos.

Para ambos os modelos, os deslocamentos  $u$  e  $v$  são aproximados em função de deslocamentos nodais locais generalizados  $q^T = \{q_u^T \ q_v^T\}$ .

$$\begin{aligned} u &= \phi_u^T q_u \\ v &= \phi_v^T q_v \end{aligned} \quad (3.11)$$

O primeiro modelo utilizado tem os deslocamentos axial e transversal aproximados por polinômios lineares e cúbicos, respectivamente. As funções de interpolação generalizada são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_u^T &= \{1 - \xi \quad \xi\} \\ \phi_v^T &= \{(1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \quad l\xi(1 - \xi)^2 \quad \xi^2(3 - 2\xi) \quad -l\xi^2(1 - \xi)\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $\xi = x/l$  é a coordenada adimensional. Com relação aos deslocamentos nodais generalizados  $q$ , para este modelo tem-se

$$\begin{aligned} q_u^T &= \{u_1 \ u_2\} \\ q_v^T &= \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

O segundo modelo utilizado tem os deslocamentos axial e transversal aproximados por polinômios quadráticos e cúbicos, respectivamente. As funções de interpolação generalizada são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_u^T &= \{1 - 3\xi + 2\xi^2 \quad \xi(2\xi - 1) \quad 4\xi(1 - \xi)\} \\ \phi_v^T &= \{(1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \quad l\xi(1 - \xi)^2 \quad \xi^2(3 - 2\xi) \quad -l\xi^2(1 - \xi)\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

para os deslocamentos nodais generalizados  $q$ , deste modelo, tem-se,

$$\begin{aligned} q_u^T &= \{u_1 \ u_2 \ u_3\} \\ q_v^T &= \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Através das funções de interpolação, definem-se a matriz de rigidez tangente do elemento ( $\mathbf{k}_T$ ) e o vetor de forças nodais internas no elemento ( $\mathbf{f}$ ), para os dois modelos implementados.



$$k_T = \left[ \frac{\partial f}{\partial q} \right] \quad (3.16)$$

$$k_{T_m} = \int_{l_m} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial q_m} + \frac{\partial v'}{\partial q_m} \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial q_m} \right\}^T + N \frac{\partial v'}{\partial q_m} \left( \frac{\partial v'}{\partial q_m} \right)^T + \frac{\partial v''}{\partial q_m} \left\{ \frac{\partial M}{\partial q_m} \right\} \right] dx \quad (3.17)$$

$$f_m = \int_{l_m} \left[ N \left( \frac{\partial u'}{\partial q} + v' \frac{\partial v'}{\partial q} \right) + M \frac{\partial v''}{\partial q} \right] dx \quad (3.18)$$

Assim, a matriz de rigidez tangente da estrutura ( $K_T$ ) e o vetor de forças nodais internas da estrutura ( $F$ ), para os dois modelos implementados são:

$$K_T = \sum_{m=1}^{nel} (T_m^T k_{T_m} T_m) \quad (3.19)$$

$$F = \sum_{m=1}^{nel} (T_m^T f_m) \quad (3.20)$$

onde  $T_m^T$  é a transposta da matriz de transformação do elemento  $m$  que é definida a partir das relações geométricas entre os deslocamentos generalizados do elemento ( $q$ ) nos eixos locais  $xy$  e os deslocamentos generalizados da estrutura nos eixos globais  $XY$ .

$$T = \begin{bmatrix} \cos & \text{sen} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & \text{sen} & 0 \\ -\text{sen} & \cos & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.21)$$

A Figura 3.6 mostra os eixos globais  $XY$ , os eixos locais  $xy$  e os graus de liberdade globais para cada modelo de elemento finito utilizado.

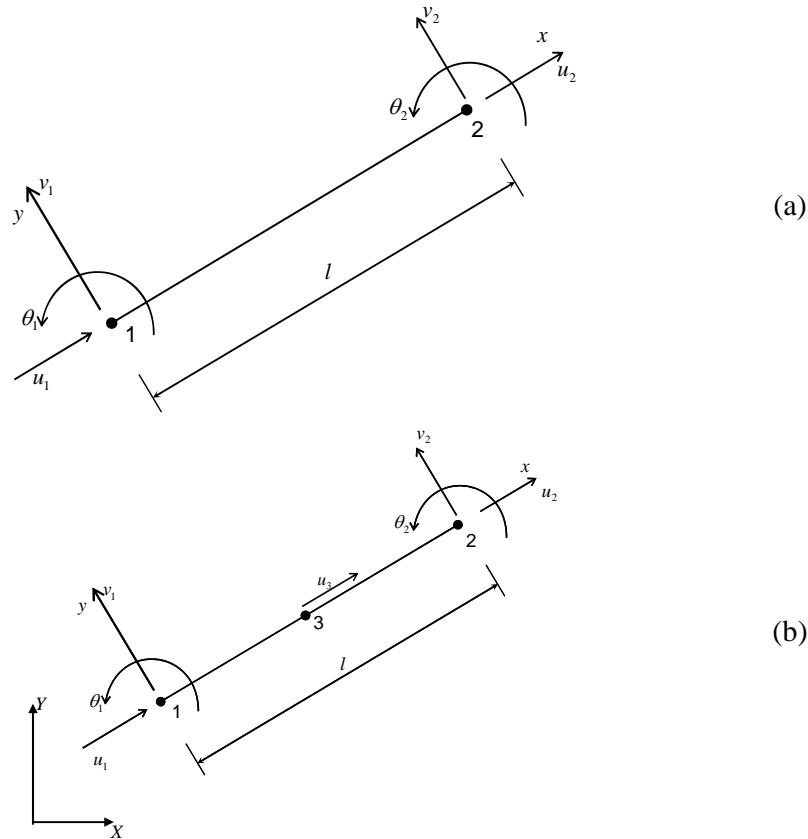


Figura 3.6 – (a) Modelo 1 e (b) modelo 2 com seus respectivos eixos de referência e graus de liberdade locais.

### 3.3. Cargas críticas

Para um elemento reto de concreto armado submetido à flexo-compressão, verifica-se que, sob a ação de carregamento crescente, podem ser alcançados dois tipos diferentes de falha, impossibilitando sua utilização:

- ruptura do material, que ocorre quando algum dos critérios de falha do material é violado em algum ponto da estrutura;
- colapso por instabilidade do elemento ou da estrutura, que se caracteriza pela perda de equilíbrio.

Buscando estimar o coeficiente de colapso da estrutura para ambos os casos, Melo (2000b) apresenta a análise da carga crítica de instabilidade ( $\lambda^*$ ) e o cálculo da carga crítica de ruína por falha do material ( $\lambda^r$ ).

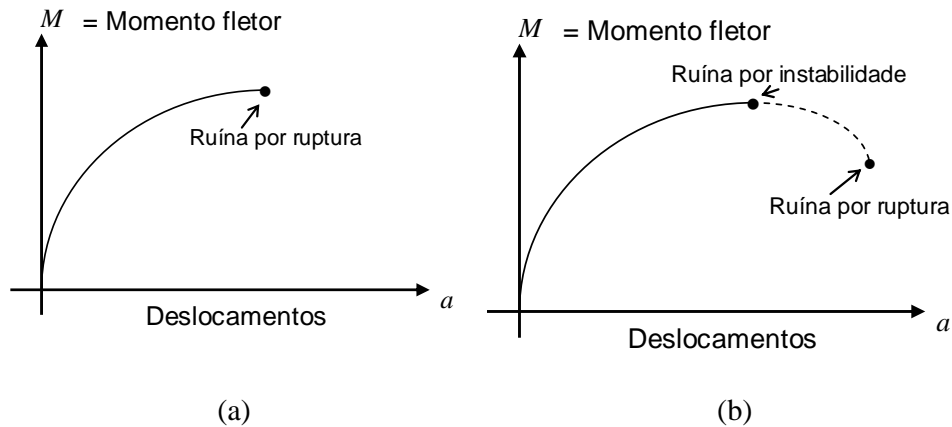


Figura 3.7 – (a) Ruína por ruptura e (b) ruína por perda de estabilidade.

Na Figura 3.7(a) visualiza-se um exemplo onde uma seção de concreto armado submetida à flexo-compressão monotonicamente falha por não atender o critério de resistência ( $\lambda^* \geq \lambda^r$ ), e na Figura 3.7(b) a estrutura atinge o colapso por instabilidade antes de ocorrer a falha por não atender o critério de resistência ( $\lambda^* < \lambda^r$ ).

Neste trabalho é utilizado o algoritmo implementado por Melo (2000b) que executa uma busca de ordem zero para a determinação da carga crítica, baseada na inspeção do sinal do determinante da matriz de rigidez tangente. Partindo-se de  $\lambda_0$ , executa-se o procedimento de bissecção até determinar o intervalo que contém o valor crítico e, em seguida, faz-se uma busca pelo método da seção áurea até identificar  $\lambda^*$ . Verificações nas seções de extremidade dos elementos são realizadas durante o processo para constatar se houve falha no critério de resistência das seções.

## 4

### Análise de confiabilidade de estruturas

Nos primórdios da engenharia civil, o desconhecimento técnico-científico conduzia a projetos excessivamente seguros, mas em contrapartida de custo muito elevado. Hoje em dia, o progresso científico nos permite projetar estruturas confiáveis e econômicas.

Na teoria da confiabilidade de estruturas, muitas técnicas eficientes têm sido desenvolvidas nos últimos 30 anos para se estimar a confiabilidade. Dentre elas têm-se, principalmente, o método de confiabilidade de primeira ordem (First Order Reliability Method, FORM) e o método de confiabilidade de segunda ordem (Second Order Reliability Method, SORM) (Melchers, 2002). O FORM propicia, na maioria dos problemas, uma precisão satisfatória com um tempo de análise computacional reduzido quando comparado a outros métodos, o que justifica sua larga utilização nas mais diversas aplicações de projeto, como por exemplo neste trabalho. São considerados dois tipos de variáveis:

1. Variáveis determinísticas  $\mathbf{x}$ : são as incógnitas do problema de dimensionamento ótimo. Elas formam o vetor que representa os parâmetros de controle do sistema, sendo elas as dimensões geométricas da estrutura e as áreas transversais de aço longitudinal e transversal (vide seção 5.3.1);
2. Variáveis randômicas  $\mathbf{u}$ : essas variáveis representam as incertezas associadas à estrutura, sendo as propriedades mecânicas dos materiais e as ações externas. São identificadas por suas distribuições e por seus parâmetros probabilísticos. Em conjunto com o vetor  $\mathbf{x}$ , elas são usadas no processo de otimização baseado em confiabilidade (Vide seção 6.5).

No FORM, a análise de confiabilidade requer a identificação das distribuições e dos parâmetros probabilísticos de cada variável aleatória. Sendo assim, é necessário compreender cada um destes parâmetros para que haja uma boa caracterização das variáveis aleatórias que compõem o problema.

#### 4.1. Conceitos básicos de probabilidade

Há dois tipos de experimentos: determinísticos e não-determinísticos. Quando os resultados dos experimentos de um determinado fenômeno são previsíveis, o fenômeno é chamado de determinístico. Caso contrário, se os resultados dos experimentos não forem previsíveis, o fenômeno é chamado de aleatório ou não-determinístico. Neste último caso, cada experimento deve ser associado a um valor de probabilidade de ocorrência do evento relacionado ao fenômeno em observação.

Usualmente uma função densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , é identificada por PDF (Probability Density Function). Sendo expressa matematicamente em (4.1) a probabilidade da variável X assumir valores entre  $a$  e  $b$ .

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4.1)$$

onde X é a variável aleatória (randômica). Para que  $f_X(x)$  seja considerada uma PDF ela deve satisfazer as seguintes condições:

- $f_X(x) \geq 0,0$  para qualquer  $x$  ;
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1,0$  ;
  - $\int_a^b f_X(x) dx = P(a \leq X \leq b)$  .
- ( 4.2)

A função cumulativa de probabilidades (Cumulative Distribution Function, CDF),  $F_X(x)$ , é definida por:

- $F_X(-\infty) = 0,0$  ;
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1,0$  ;
  - $F_X(\infty) = 1,0$  .
- ( 4.3)

Existem muitas funções teóricas que satisfazem as condições descritas para a PDF e para a CDF. A escolha de uma delas para representar um determinado fenômeno (ou variável) depende, basicamente, de se fazer ajustes em relação aos dados coletados. A PDF que mais se aproximar do histograma que representa os dados coletados para a variável, será utilizada para representá-la na análise.

#### 4.1.1.

##### Parâmetros de uma variável aleatória

A operação matemática que é utilizada para a obtenção da expectância é a integração ponderada de uma variável randômica. A expectância de uma função de uma variável randômica é:

$$E\langle g(X) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx \quad (4.4)$$

onde  $g(x)$  é a função da variável randômica e  $f_x(x)$  é a PDF de X. Como se pode observar pela Eq. (4.4) a expectância de uma função de uma variável randômica é a integral do produto de  $g(x)$  por  $f_x(x)$ .

A principal expectância é conhecida como *média* ou valor esperado (primeiro momento) de uma variável aleatória X e é obtida com  $g(x) = X$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \mu_X \quad (4.5)$$

Outras expectâncias importantes de uma função de uma variável randômica são:

1. o *valor quadrado médio* (segundo momento) de uma variável randômica,

$$E\langle X^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (4.6)$$

2. a *variância* (segundo momento em torno da média ou segundo momento central) de uma variável randômica é definida como

$$Var(X) \equiv E\langle (X - \mu_X)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_x(x) dx = E\langle X^2 \rangle - (\mu_X)^2 \quad (4.7)$$

3. o *desvio padrão* da variável randômica é definido como

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)} \quad (4.8)$$

O *coeficiente de variação*,  $\delta$ , de X é expresso pelo desvio padrão dividido pela média:

$$\delta = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (4.9)$$

Por convenção,  $\delta$  é adotado sempre positivo, mesmo que a média venha a ser negativa.

A expectância também pode ser aplicada a mais de uma variável randômica. Assim, a expectância de uma função de várias variáveis randômicas  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é definido como

$$E\langle g(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle \equiv \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{x_n=-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4.10)$$

Quando se fala de expectância de duas variáveis randômicas, existem dentre elas algumas que são frequentemente úteis, tais como:

1. o valor esperado do produto de duas variáveis randômicas  $X_j$  e  $X_k$  é

$$E\langle X_j X_k \rangle \equiv \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_k=-\infty}^{+\infty} x_j x_k f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k \quad (4.11)$$

onde de  $f_{x_j, x_k}(x_j, x_k)$  é a PDF conjunta de  $X_j$  e  $X_k$ ;

2. quando existirem duas variáveis randômicas, existirão várias medidas estatísticas que podem ser usadas para capturar como as duas variáveis randômicas se movem juntas através do tempo. As duas mais largamente usadas são a correlação (coeficiente de correlação) e a covariância. A covariância fornece uma medida não padronizada do grau no qual elas se movem juntas, e é estimada tomando o produto dos desvios da média para cada variável em cada período. Assim, a *covariância* entre  $X_j$  e  $X_k$  é definida como

$$\begin{aligned} Cov(X_j X_k) &\equiv E\langle (X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k) \rangle = E\langle X_j X_k \rangle - E\langle X_j \rangle E\langle X_k \rangle \\ &= \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_k=-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k) f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$E\langle X_j \rangle \equiv \mu_j \equiv \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_k=-\infty}^{+\infty} x_j f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k$$

$$E\langle X_k \rangle \equiv \mu_k \equiv \int_{x_j=-\infty, x_k=-\infty}^{+\infty} \int_{x_j=-\infty, x_k=-\infty}^{+\infty} x_k f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k$$

3. o *coeficiente de correlação* estabelece um índice de relação linear entre duas variáveis aleatórias e pode ser representado matematicamente por,

$$\rho_{jk} = \frac{Cov(X_j, X_k)}{\sigma_{Xj} \sigma_{Xk}} \quad (4.13)$$

onde  $\sigma_{Xj}$  e  $\sigma_{Xk}$  são os desvios padrões das variáveis randômicas.

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias tem seu valor sempre dentro do intervalo  $(-1 \leq \rho_{jk} \leq 1)$  como pode ser visualizado na Figura 4.1 e classificado verbalmente pela Tabela 4.1.

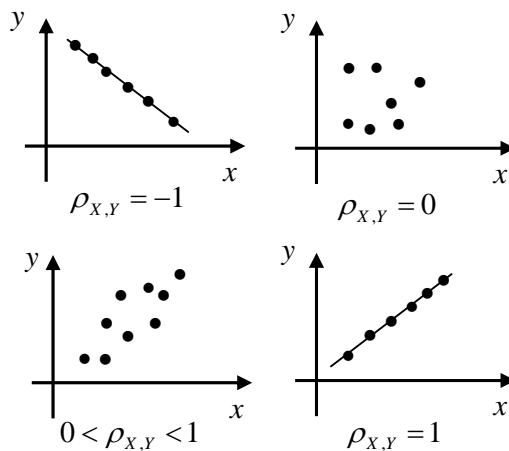


Figura 4.1 – Representação gráfica do coeficiente de correlação.

Intervalo do $\rho$	Grau de dependência
0,0 à 0,3	Baixo
0,3 à 0,5	Médio
0,5 à 0,7	Importante
0,7 à 0,9	Forte
0,9 à 1,0	Muito Forte

Tabela 4.1 – Grau de dependência de correlação entre variáveis (Soares e Venturini, 2001).



Quando  $\rho_{jk} = 0$  diz-se que as variáveis aleatórias são estatisticamente independentes ou não-correlacionadas, pois suas características estatísticas não se alteram devido à presença de uma outra variável, ou seja, a realização de uma variável não depende ou influi na realização da outra variável. A maioria das variáveis da análise de estruturas pertence a este grupo.

#### **4.1.2. Distribuições probabilísticas**

Todas as funções que atendam às condições estabelecidas em (4.2) para uma função PDF podem ser usadas como distribuição de probabilidades. Buscando-se que a PDF represente estatisticamente da melhor forma possível um determinado fenômeno, as mais diversas distribuições podem ser utilizadas. Nas diversas bibliografias (Hart, 1982; Nowak, 2000; JCSS<sup>3</sup>, 2000; JCSS<sup>2</sup>, 2001; Melchers, 2002) são apresentadas várias funções de distribuição de probabilidades que podem ser utilizadas na prática da engenharia, tais como:

- Distribuição normal ou Gaussiana;
- Distribuição lognormal;
- Distribuição exponencial;
- Distribuição de Rayleigh;
- Distribuição uniforme;
- Distribuição Tipo I (máximos extremos) ou Gumbel;
- Distribuição Tipo I (mínimos extremos);
- Distribuição Tipo II (máximos extremos);
- Distribuição Tipo III (mínimos extremos) ou Weibull;
- Distribuição Gamma;
- Distribuição Beta.

No Apêndice B são apresentados mais detalhes com relação às principais distribuições de probabilidades.

#### **4.1.3. Função densidade de probabilidade conjunta**

Em análises onde se tenha duas ou mais variáveis aleatórias, é necessário estabelecer o comportamento conjunto destas variáveis. Para a compreensão deste

comportamento de dependência, será empregada aqui a descrição para duas variáveis aleatórias dependentes entre si,  $X$  e  $Y$ . Contudo, estes mesmos conceitos se estendem para um número qualquer de variáveis aleatórias.

Através da PDF conjunta,  $f_{X,Y}(x,y)$ , das variáveis aleatórias dependentes entre si,  $X$  e  $Y$ , determina-se a CDF conjunta de probabilidades, por:

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (4.14)$$

onde a PDF conjunta das variáveis aleatórias deve satisfazer as condições seguintes:

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0,0$  para qualquer  $x$  e  $y$ ;
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1,0$ ;
  - $\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) dx dy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ .
- (4.15)

## 4.2.

### Estado limite

O conceito de um estado limite relacionado à confiabilidade de estruturas pode ser definido como o limite entre um desempenho aceitável ou não aceitável da estrutura. Este limite é representado matematicamente por uma função de comportamento ou função de estado limite.

A função de falha pode representar vários estados limites que impossibilitem a utilização de uma determinada estrutura, onde tradicionalmente cada modo de falha pode ser considerado separadamente e, assim, pode-se definir para cada modo um estado limite específico.

Três tipos de estados limites podem ser considerados, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2004):

1. *Estados limites últimos* (ELU) – correspondem ao esgotamento da capacidade resistente da estrutura como um todo ou de parte da mesma.

Podem-se citar alguns exemplos de modos de falha:

- Perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- Esgotamento, total ou parcial, da capacidade resistente da estrutura, devido às solicitações normais, tangenciais e efeitos de segunda ordem.

2. *Estados limites de serviço* (ELS) – caracterizam a não recomendação de utilização da estrutura, mesmo que não tenha sido esgotada a capacidade resistente da mesma. Alguns exemplos de modos de falha são:

- Estado limite de formação de fissuras – estado em que se inicia a fissuração;
- Estado limite de abertura de fissuras – estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos valores especificados. Quando ultrapassado pode possibilitar corrosão da armadura, penetração de agentes externos e perda irreversível de resistência da seção de concreto;
- Estado limite de deformações excessivas – estado no qual os limites de deformação estabelecidos para utilização normal da estrutura são atingidos;
- Estado limite de vibrações excessivas – estado no qual as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção.

3. *Estados limites de fadiga* (ELF) – estão relacionados com o acúmulo de danos à estrutura devido à atuação de cargas cíclicas que geram um mecanismo que envolve a formação e a propagação de fissuras até o colapso da estrutura. O ELF ocorre nas barras de aço inseridas no concreto, particularmente naquelas sob tração.

#### 4.2.1.

##### **Função de falha (função de comportamento ou função de estado limite)**

As funções de comportamento ou de estado limite são formuladas utilizando equações fornecidas em normas que descrevem os diversos estados limites. Tomando como exemplo a seção de uma viga que esteja submetida a um momento fletor devido a cargas externas, para se garantir que a capacidade resistente da seção não seja ultrapassada (condição  $R > S$ , também conhecido como *problema básico*) pode-se estabelecer a seguinte função de falha:

$$G(R,S) = R - S \quad (4.16)$$

onde  $R$  representa a capacidade resistente da seção e  $S$  o esforço solicitante na seção.

Considerando inicialmente as variáveis no espaço original  $U$ , sendo  $R$  e  $S$  variáveis independentes com distribuições normais (Figura 4.2a), é possível obter as variáveis normais reduzidas (padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão unitário),  $r$  e  $s$ :

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (4.17)$$

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (4.18)$$

No espaço das variáveis reduzidas,  $V$  (ou seja, com média zero e desvio padrão unitário, Figura 4.2b) a função de falha  $G(V)$  pode ser escrita como:

$$G(V) = r\sigma_R + \mu_R - s\sigma_S - \mu_S \quad (4.19)$$

onde  $\sigma$  e  $\mu$  são o desvio padrão e a média das variáveis randômicas, respectivamente.

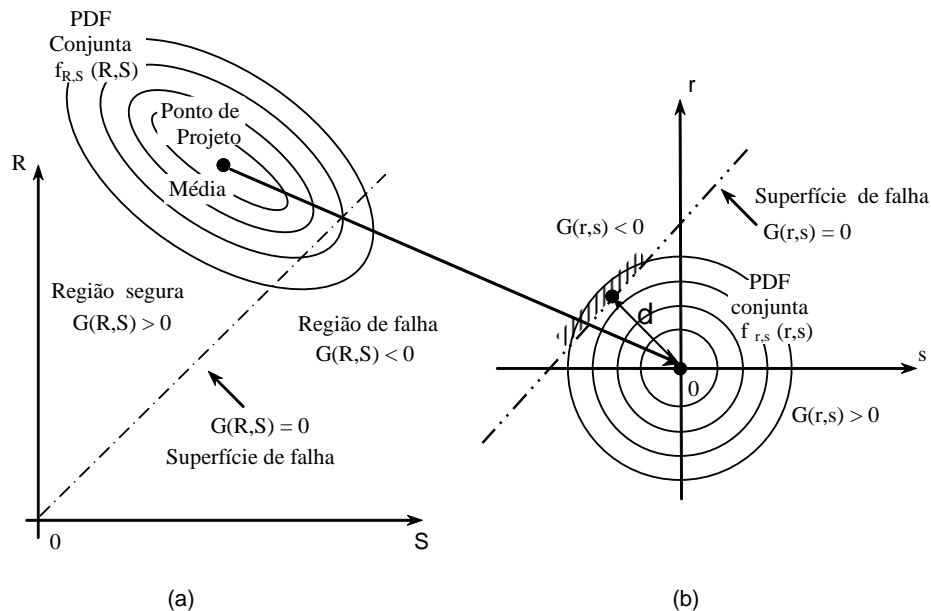


Figura 4.2 – Representação da superfície de falha na PDF conjunta: (a) espaço original  $U$ ; (b) espaço reduzido  $V$ .

A função de falha delimita o limite desejável e não desejável de tensões na seção ( $G=0$ ). Desta forma, quando  $G \geq 0$  a estrutura está segura ou atende ao

critério de comportamento desejado, já quando  $G < 0$  a estrutura não está segura ou não atende ao critério de desempenho desejado. A probabilidade de falha ( $P_f$ ) é dada pela probabilidade de ocorrer  $G < 0$ , e é representada da seguinte forma:

$$P_f = P(R - S < 0) = P(G < 0) \quad (4.20)$$

A Figura 4.2 mostra, para o caso de duas variáveis aleatórias normais, independentes e contínuas ( $R$  e  $S$ ), a superfície de falha (definida por  $G = 0$ ), o espaço seguro (dado por  $G > 0$ ) e o espaço de falha (definido por  $G < 0$ ). A área hachurada representa a região onde a função de comportamento assume valores menores do que zero. Na Figura 4.2 os círculos representam valores constantes da função PDF,  $f_{R,S}(R,S)$ , e  $d$  a menor distância de  $G(r,s)=0$  até a origem.

Pode-se descrever o exemplo anterior de uma forma mais geral fazendo  $\mathbf{u}=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  como o vetor das variáveis randômicas que pode representar os parâmetros de resistência, cargas, dimensões e outros. Logo, a função de comportamento fica  $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dependente do vetor  $\mathbf{u}$ .

### 4.3. Índice de confiabilidade

Na Figura 4.2b é mostrada a superfície de falha do *problema básico*  $G(r,s) = G(V) = 0$  no espaço das variáveis reduzidas. Através da geometria analítica é fácil demonstrar que a distância da reta  $G(V)=0$  até a origem, no espaço das variáveis reduzidas é igual a:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.21)$$

que é também conhecido como índice de confiabilidade,  $\beta$ . Portanto, a distância do ponto sobre a superfície de falha mais próximo a origem é o próprio índice de confiabilidade.

Deve ser observado que o ponto sobre a superfície de falha mais próximo à origem é também o ponto sobre a reta com maior probabilidade de ocorrência, ou seja, o ponto com maior valor de função PDF,  $f_{R,S}(R,S)$  sobre a superfície de falha. Este ponto é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha (MPP- Most Probable Point).

Estendendo-se para um número  $n$  qualquer de variáveis aleatórias normais estatisticamente independentes  $X_i = N(\mu_i, \sigma_i)$ , usando  $X_i$  para identificar as variáveis aleatórias envolvidas na análise e  $x$  para suas correspondentes variáveis reduzidas, caso  $G(u)$  seja uma função linear das variáveis  $X_i$  tem-se:

$$G(u) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (4.22)$$

onde  $a_i$  são as constantes. Assim, o índice confiabilidade é representado como

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}} \quad (4.23)$$

Uma outra forma de interpretação e obtenção de  $\beta$  é encontrada na literatura. Tomando-se novamente o *problema básico*  $G(u) = R - S$ , como uma combinação linear de duas variáveis randômicas normais padrão independentes. Assim,  $G(u)$  é considerada uma função de variáveis aleatórias normais independentes, para a qual é possível mostrar que:

$$\mu_{G(u)} = \mu_R - \mu_S \quad (4.24)$$

$$\sigma_{G(u)} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4.25)$$

sendo  $\mu_{G(u)}, \mu_R, \mu_S, \sigma_{G(u)}, \sigma_R, \sigma_S$  as médias e os desvios padrões das variáveis aleatórias e da função de comportamento. Desta forma, pode-se determinar a probabilidade de falha como,

$$P_f = P(G(u) \leq 0.0) = \Phi\left(\frac{k - \mu_{G(u)}}{\sigma_{G(u)}}\right) \quad (4.26)$$

onde  $\Phi$  é a função cumulativa da distribuição normal padrão. Fazendo  $k = G(u) = 0$  obtém-se a probabilidade da função de falha ser violada.

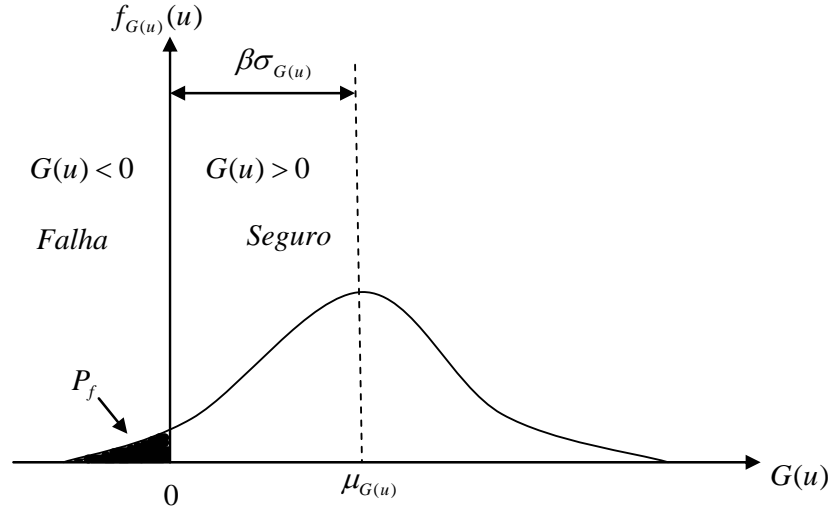


Figura 4.3 – Margem de segurança.

A Figura 4.3 mostra a representação gráfica do índice de confiabilidade,  $\beta$ , e da probabilidade de falha,  $P_f$ . Assim tem-se:

$$\beta = \frac{\mu_{G(u)}}{\sigma_{G(u)}} \Rightarrow \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.27)$$

$$P_f = \int_{G(u) \leq 0} f_{G(u)}(u) du \quad (4.28)$$

Observa-se, portanto, que o índice  $\beta$  mede a distância entre o valor médio de  $G(u)$  e a origem (ponto zero) em unidades de desvios padrões de  $G(u)$ . Para uma função qualquer, o método FORM aproxima  $G(u)$  por um hiperplano que passa pelo MPP e é tangente a  $G(u)$  nesse ponto, permitindo assim o cálculo aproximado de  $\beta$  pela Equação (4.27), ou seja, os valores calculados da média e da variância de  $G(u)$  são aproximados devido à linearização da função.

A avaliação da Equação (4.28) para o *problema básico* (R, S) pode ser obtida exatamente. De uma forma geral, a função  $G(u)$  pode não ser linear e conter várias variáveis randômicas, ou seja, conduzindo a uma função PDF conjunta de múltiplas variáveis randômicas e correlacionadas,  $f_{G(u)}(u)$ , no espaço original  $U$ . Tal integral  $n$ -dimensional ( $n$  é o número de variáveis randômicas) num domínio complexo ( $G(u) \leq 0$ ) é de difícil obtenção e muitas vezes dispendiosa computacionalmente. Por isso costuma-se calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  no espaço reduzido  $V$  (espaço normal padrão) e correlacioná-lo com a probabilidade de falha (métodos de segundo momento),  $P_f$  (Eq. (4.29) e Tabela 4.2).

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \text{ ou } P_f = \Phi(-\beta) \quad (4.29)$$

Com o objetivo de obter o índice de confiabilidade,  $\beta$ , para as mais variadas distribuições e funções de desempenho com variáveis dependentes ou não, foram elaborados vários métodos ao longo das últimas décadas. Entre eles destacam-se por sua relativa eficiência e simplicidade os métodos de segundo momento (Second-Moment Methods, FORM e SORM). Como já mencionado, o método FORM que é um método de segundo momento de primeira ordem, lineariza a função de comportamento no ponto de projeto. O termo segundo momento se deve à necessidade somente da utilização das médias e das variâncias.

$P_f$	$\beta$
$10^{-1}$	1,28
$10^{-2}$	2,33
$10^{-3}$	3,09
$10^{-4}$	3,71
$10^{-5}$	4,26
$10^{-6}$	4,75

Tabela 4.2 – Relação entre Índice de confiabilidade  $\beta$  e probabilidade de falha  $P_f$ .

#### 4.3.1.1.

##### Índices de confiabilidade relacionados à vida do projeto

As normas brasileiras ainda não regulamentaram a verificação dos níveis de confiabilidade requeridos para as estruturas. Entretanto, o CEN (2001) define, três níveis de classes de consequência, para a análise de confiabilidade. A Tabela 4.3 estabelece valores mínimos de índices de confiabilidade relacionados com as classes de consequências e confiabilidade para os estados limites últimos (ELU) e os estados limites serviço (ELS). Além disso, são feitas correspondências com os períodos de referência de um e 50 anos. Por exemplo, para uma estrutura pertencente à classe de consequência CC2 e considerando o ELU com um período de referência de 50 anos tem-se  $\beta = 3,8$  (Tabela 4.3), ou seja, estima-se que haverá uma probabilidade de falha máxima de  $P_f = 7,2 \times 10^{-5}$  em 50 anos.

Muitas vezes as análises de estruturas civis de concreto armado são consideradas pertencentes à classe de consequência CC2. Esta classe corresponde a consequências médias para a perda de vidas humanas, econômicas, sociais ou



consideráveis conseqüências ambientais, sendo aplicável a escolas, residências, hotéis e etc.

		Valores de $\beta$			
		ELU		ELS	
Classe de Conseqüências	Classe de Confiabilidades	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência
CC3	RC3	5,2	4,3	-	-
CC2	RC2	4,7	3,8	2,9	1,5
CC1	RC1	4,2	3,3	-	-

Tabela 4.3 – Classes de conseqüências e confiabilidade, e valores de índices de confiabilidade (JCSS<sup>1</sup>, 2000; CEN, 2001; Gulvanessian et al., 2002).

#### 4.4.

#### Método de simulação de Monte Carlo (MC)

O método de MC surgiu oficialmente, no ano de 1949, com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam. Este método de cálculo de probabilidade, que se baseia em simulações aleatórias, é um dos mais antigos do gênero, sendo de fácil compreensão física e amplamente utilizado pelos engenheiros. Este método apresenta boa precisão e é de fácil implementação computacional, não exigindo maiores conhecimentos matemáticos.

Como o próprio nome indica, o método de simulação de MC envolve a geração de um grande número de valores randômicos para cada variável aleatória. Com estes valores, a função de comportamento é avaliada e assim observados seus resultados. No caso da análise da confiabilidade de estruturas, isto quer dizer que cada variável randomicamente gerada vai formar um vetor  $\mathbf{u}_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de variáveis randômicas. A função de comportamento é então avaliada  $G(\mathbf{u}_i)$ , se ela for violada (i.e.  $G(\mathbf{u}_i) \leq 0$ ), a estrutura ou o elemento não satisfaz às condições mínimas exigidas. Assim o experimento é repetido muitas vezes e em cada vez um novo vetor  $\mathbf{u}_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  é gerado. Finalmente, se um número  $N$  de experimentos são feitos, a probabilidade de falha é dada aproximadamente por:

$$P_f \approx \frac{n(G(\mathbf{u}_i) \leq 0)}{N} \quad (4.30)$$

onde  $n(G(u_i) \leq 0)$  é o número de vezes que a função de comportamento teve valores  $G(u_i) \leq 0$  e  $N$  é o número de avaliações da função de comportamento necessárias para a precisão desejada.

Apesar da simplicidade do método de simulação de MC, o tempo necessário para a obtenção da probabilidade via MC demanda inúmeras análises da função de comportamento, ou seja, a sua utilização não é recomendável em problemas de otimização considerando incertezas, nos quais são utilizados métodos iterativos, o que conduziria a um número excessivo de análises, inviabilizando o processo.

Para mais detalhes sobre este método podem ser consultadas as seguintes referências: Hart (1982), Soares e Venturini (2001) e Melchers (2002).

#### 4.5.

#### Método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM)

No método FORM as variáveis aleatórias  $\mathbf{u}$ , cujas distribuições são quaisquer, correlacionadas ou não (espaço original  $\mathbf{U}$ ), são transformadas em variáveis normais padrões reduzidas e independentes (espaço normal padrão  $\mathbf{V}$ ). A função de comportamento  $G(\mathbf{U})$  é escrita em função das variáveis no espaço  $\mathbf{V}$  como  $G(\mathbf{V})$ . A superfície de falha  $G(\mathbf{V}) = 0,0$  é aproximada por uma superfície linear (ou hiperplano) no ponto com a menor distância até a origem, identificado como  $\mathbf{V}^*$  (ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas ou ponto mais provável de falha, ‘MPP – Most Probable Point’), que é também o ponto sobre o hiperplano, cujo valor da função densidade de probabilidade conjunta das variáveis é maior.

Com a obtenção do ponto, determina-se o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) que é a distância deste ponto até a origem, calculada pela Eq. (4.31). A probabilidade de falha ( $P_f$ ) pode ser então simplesmente calculada pela Eq. (4.32).

$$\beta = \text{sign}(G(\mu)) \|\mathbf{V}^*\| \quad (4.31)$$

$$P_f = P(F) = \int_F f_V(\mathbf{V}) dV \cong \Phi(-\beta) \quad (4.32)$$

onde,  $F$  indica o domínio de falha  $G(\mathbf{V}) < 0$ , conforme ilustra a Figura 4.4 para um caso bidimensional (duas variáveis aleatórias),  $\Phi$  é a CDF normal padrão e  $\mathbf{V}^*$  é o ponto de projeto (MPP) no espaço reduzido.

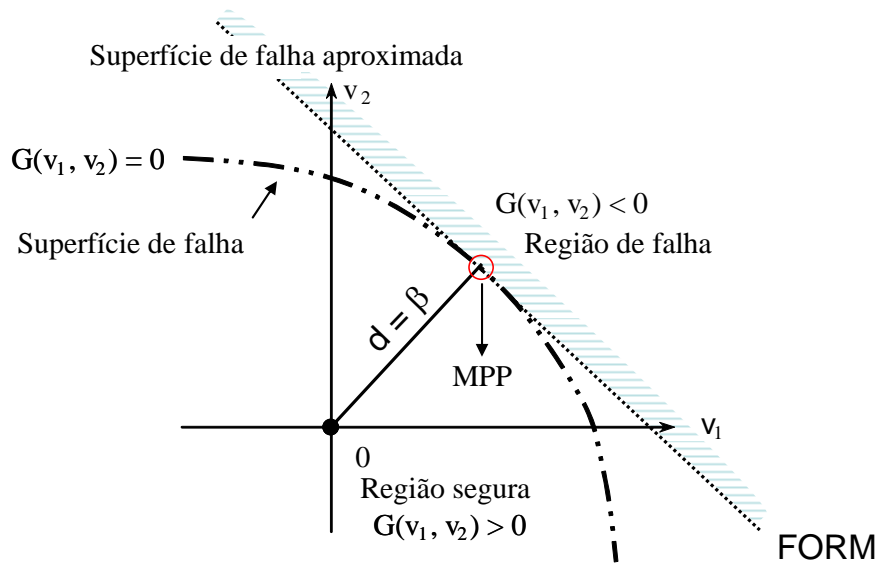


Figura 4.4 - Função de falha com duas variáveis randômicas no espaço normal padrão reduzido.

Como se pode observar, a determinação do ponto  $V^*$  (MPP) é um dos passos fundamentais para a obtenção da probabilidade de falha pelo método FORM. Para encontrar este ponto, formula-se um problema de otimização  $P$  (ou de programação não-linear) com uma restrição, tal que:

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{minimizar } \|V\| \\ & \text{Sujeito a } G(V) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

A obtenção do ponto de projeto  $V^*$ , leva a um problema de otimização, que pode ser resolvido por vários algoritmos. O algoritmo mais usado na análise de confiabilidade estrutural é o desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978). Este algoritmo é comumente identificado como HLRF e é resumido pela seguinte expressão recursiva:

$$\mathbf{V}^{k+1} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{V}^k)\|^2} [\nabla G(\mathbf{V}^k)^T \mathbf{V}^k - G(\mathbf{V}^k)] \nabla G(\mathbf{V}^k) \quad (4.34)$$

onde  $\nabla G(\mathbf{V}^k)$  é o gradiente da função de falha no espaço reduzido e  $G(\mathbf{V}^k)$  é o valor da função de falha, ambos avaliados no ponto  $V^k$ .

Outros algoritmos também são recomendáveis para a avaliação de  $V^*$ , tais como: programação quadrática sequencial (PQS) e método do gradiente projetado.

Para a análise de confiabilidade pelo método FORM é necessário um processo iterativo, como descrito resumidamente a seguir:

1. Escolher um ponto de partida  $\mathbf{U}$  no espaço original (geralmente o vetor das médias) e calcular a matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes;

$$\rho_{U_i U_j}^E = F \rho_{U_i U_j} \quad (4.35a)$$

onde  $\rho_{U_i U_j}^E$  é o coeficiente de correlação equivalente das variáveis aleatórias  $U_i$  e  $U_j$  e  $F$  depende do tipo de distribuição de ambas as variáveis (Melchers, 2002);

2. Calcular as médias e desvios padrões normais equivalentes no ponto de partida através das expressões

$$\sigma_{U_i}^N = \frac{\phi(\Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^k)))}{f_{U_i}(U_i^k)} \quad (4.35b)$$

$$\mu_{U_i}^N = U_i^k - \sigma_{U_i}^N \Phi^{-1}(F_{U_i}(U_i^k)) \quad (4.35c)$$

e montar a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  e o vetor  $\mathbf{m}$ , com os respectivos desvios padrões e médias normais equivalentes;

3. Avaliar a função de falha  $G(\mathbf{U})$ , o Jacobiano e o gradiente de  $G(\mathbf{V})$  no espaço reduzido através das expressões a seguir,

$$G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{U}) \quad (4.35d)$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \quad (4.35e)$$

$$\nabla G(\mathbf{V}) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}) \quad (4.35f)$$

onde  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}$  e contém a inversa da matriz triangular inferior,  $\mathbf{L}$ , obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes;

4. Transformar o ponto de partida para o espaço reduzido usando transformação de Nataf (Melchers, 2002);

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (4.35g)$$

5. Avaliar o novo ponto  $\mathbf{V}^{k+1}$  através do algoritmo HLRF (Eq. 4.34);
6. Avaliar o índice de confiabilidade;

$$\beta = \text{sign}(G(\mu)) \| \mathbf{V}^{k+1} \| \quad (4.35h)$$

7. Avaliar o novo ponto  $\mathbf{U}^{k+1}$  no espaço original através da expressão a seguir;

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + (\mathbf{J}^{-1})^T (\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k) \quad (4.35i)$$

8. Tomar  $\mathbf{U}^{k+1}$  como novo ponto de partida e repetir os passos 2 a 8 até a convergência, i.e.,

$$\frac{\|\mathbf{V}^{k+1}\| - \|\mathbf{V}^k\|}{\|\mathbf{V}^{k+1}\|} \leq TOL \quad (4.35j)$$

9. Avaliar a probabilidade de falha pelo método FORM através de:

$$P_f^{FORM} = \Phi(-\beta) \quad (4.35k)$$

Entretanto, há casos em que se pode ter mais de uma função de comportamento,  $G(\mathbf{U})$ . Nesses casos há que se efetuar a análise de confiabilidade de sistemas.

#### 4.6. Confiabilidade de sistemas

Para o caso onde se têm mais de uma função de falha, verifica-se inicialmente se o sistema é um sistema em série ou em paralelo. A probabilidade de falha de cada função de falha pode ser calculada, usando o método FORM, para cada modo de falha, sendo depois avaliada a probabilidade do sistema falhar como um todo, considerando a contribuição de todos os modos.

É considerado um sistema em *série* quando a falha de um dos seus componentes significa a falha completa do mesmo e neste caso a probabilidade de falha do sistema é dada pela probabilidade de qualquer um dos componentes falhar (Figura 4.5). Esta probabilidade é expressa pela união dos eventos que representam a falha dos componentes individuais, ou seja:

$$P_f^s = P \left[ \bigcup_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \right] \quad (4.36)$$

onde  $j$  é o número de componentes individuais identificados na análise.

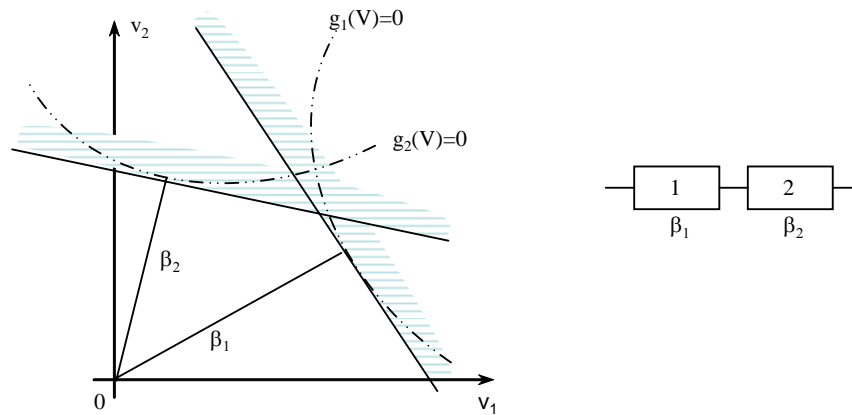


Figura 4.5 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em série.

Um sistema é considerado em *paralelo* quando a falha do mesmo somente ocorre após a falha de todos os seus componentes (Figura 4.6). A probabilidade de falha deste sistema é expressa pela intersecção dos eventos que representam a falha dos componentes individuais:

$$P_f^P = P \left[ \bigcap_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \right] \quad (4.37)$$

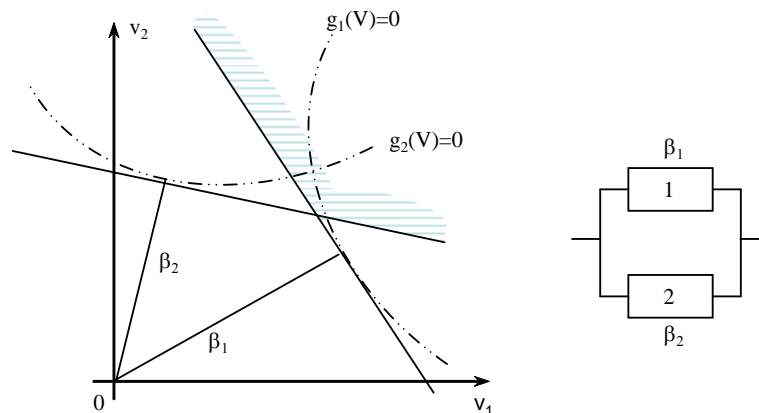


Figura 4.6 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em paralelo.

Outros detalhes são comentados no apêndice A.

**4.7.****Determinação dos coeficientes parciais de segurança para um projeto específico**

Em projetos estruturais dimensionados pelo método semiprobabilístico, os estados limites são verificados utilizando-se certos valores de projeto para as variáveis. O valor de projeto resulta do produto ou divisão do valor característico (no sentido mais desfavorável ao projeto) da variável por um coeficiente parcial de segurança. O valor característico é definido como um valor que, de acordo com a distribuição de probabilidades da variável, representa um determinado percentual que pode ser ultrapassado. Esses valores característicos dependem do tipo de material e da classe da estrutura.

Na determinação dos coeficientes parciais de segurança de uma estrutura específica, determinam-se, para um estado limite, os valores destes coeficientes depois de se obter o resultado ótimo, ou seja, após se obter um resultado cujo valor desejado da probabilidade de falha é alcançado.

Assim, a determinação dos coeficientes parciais de segurança pode ser feita com a caracterização estatística das variáveis aleatórias do problema e com a determinação de um valor alvo (ou aceitável) para a probabilidade de falha. Em seguida determina-se um projeto inicial (dimensões iniciais) e procede-se iterativamente obtendo novas dimensões e avaliando as respectivas probabilidades de falha da função de comportamento considerada pelo método FORM, até que se obtenha um projeto que satisfaça a probabilidade de falha desejada.

Após se chegar ao projeto ótimo e se obter, pelo FORM, o MPP desse projeto, os fatores parciais de segurança podem ser obtidos em relação a cada variável aleatória a partir de:

$$\gamma_{fi} = \frac{U_i^*}{U_i^k} \quad (4.38)$$

$$\gamma_{mi} = \frac{U_i^k}{U_i^*} \quad (4.39)$$

onde  $\gamma_{fi}$  é fator parcial de segurança relacionado às ações impostas à estrutura,  $\gamma_{mi}$  é fator parcial de segurança relacionado às resistências dos materiais,  $U_i^*$  é o valor correspondente à variável  $i$  no ponto de projeto quando a probabilidade de falha é alcançada e  $U_i^k$  é o valor característico desta variável.

Vários trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos anos com relação a este assunto, tais como: Ellingwood (1996), Nowak e Szerszen (2004), Diniz (2005) e Santos e Eboli (2006).

#### 4.8. Fator de importância

O fator de importância das variáveis aleatórias para cada função de falha, Eq. (4.40), é fornecido, também, pelo método FORM, sendo determinado pelo quadrado da sensibilidade, Eq. (4.41), que é o gradiente da função de comportamento normalizado no ponto de projeto ( $V^*$ ).

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (4.40)$$

$$\alpha = \frac{\nabla G(V^*)}{\|\nabla G(V^*)\|} \quad (4.41)$$

esse fator indica qual o nível de importância de cada variável aleatória para a obtenção da confiabilidade da estrutura no ponto de projeto.

#### 4.9. Níveis dos métodos de projeto

De acordo com Soares e Venturini (2001), são mencionados na literatura quatro níveis para a classificação quanto ao nível do método de projeto de confiabilidade de uma estrutura:

- Métodos de nível I são métodos de confiabilidade que usam apenas um parâmetro estatístico (valor médio) para cada variável aleatória do projeto. Este método também é conhecido por método das tensões admissíveis;
- Métodos de nível II são métodos de confiabilidade que usam dois parâmetros estatísticos (valores característicos) para cada variável aleatória do projeto (média e desvio padrão). Este método também é conhecido por método semiprobabilístico;
- Métodos de nível III são métodos de confiabilidade que usam como medida a probabilidade de falha e assumem como conhecidas às



funções de distribuições probabilísticas das variáveis aleatórias do projeto;

- Métodos de nível IV são métodos de confiabilidade que buscam a união da otimização com a estatística, assim sendo, é um projeto ótimo que leva em consideração as incertezas das variáveis de interesse.

Através dos níveis citados acima se pode agora classificar este trabalho como fazendo parte dos métodos de nível IV. Pois o mesmo busca o projeto ótimo de estruturas planas de concreto armado considerando as incertezas das variáveis de interesse.

## 5

### Projeto de Otimização Determinístico (DDO)

#### 5.1.

##### Introdução

O DDO (Deterministic Design Optimization) é um método de projeto ótimo baseado no método de projeto semiprobabilístico. No método semiprobabilístico a segurança é considerada garantida pelo uso de fatores de majoração para as cargas e de minoração para as resistências. Após a utilização dos fatores de segurança, o problema de otimização trata as variáveis como determinísticas e busca minimizar a função objetivo (custo, volume de material, etc.). As variáveis podem estar sujeitas às restrições de: geometria, segurança, estabilidade, serviço, etc. Este problema é representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \quad \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \\ &\quad \quad \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $x$  designa o vetor das variáveis de projeto determinísticas,  $g_i(x)$  as restrições de desigualdade,  $h_j(x)$  as restrições de igualdade e  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  são, respectivamente, os limites mínimos e máximos para as variáveis de projeto.

Os valores dos fatores de segurança utilizados dependem principalmente das normas de projeto e, algumas vezes, da experiência do engenheiro.

#### 5.2.

##### Dimensionamento ótimo de uma seção de concreto armado à flexão composta reta

Neste trabalho o dimensionamento de um pórtico plano de concreto armado requer a avaliação dos esforços solicitantes e resistentes nas seções críticas (seções das extremidades do elemento). A necessidade de obtenção destes esforços origina um subproblema também dependente das variáveis de projeto ( $h$ , altura da seção;  $A_{ss}$  e  $A_{si}$ , armaduras longitudinais;  $A_{sw}$ , armaduras transversais e os parâmetros de deformação  $D$ ). Todas essas variáveis de projeto serão

detalhadas no próximo item, com exceção dos parâmetros de deformação  $D$  que são tratados neste item.

O critério adotado para o cálculo da resistência de uma seção crítica é o apresentado por Melo et al. (2004), onde se verifica a capacidade resistente em problemas de otimização de estruturas constituídas de barras de concreto armado. O parâmetro  $D$  é avaliado através da solução de um problema de maximização sem restrição do co-seno do ângulo entre os vetores solicitante  $\{V_S\}^T = [M_S \ N_S]$  e resistente  $\{V_R\}^T = [M_R \ N_R]$ , como mostra a Figura 5.1 e é definido na Eq. (5.2). Através da maximização do problema exposto na Eq. (5.2), que busca o parâmetro  $D$  para  $\theta = 0^\circ$ , obtém-se  $W = 1$ . Este valor já era esperado, pois o valor máximo da função é bem conhecido.

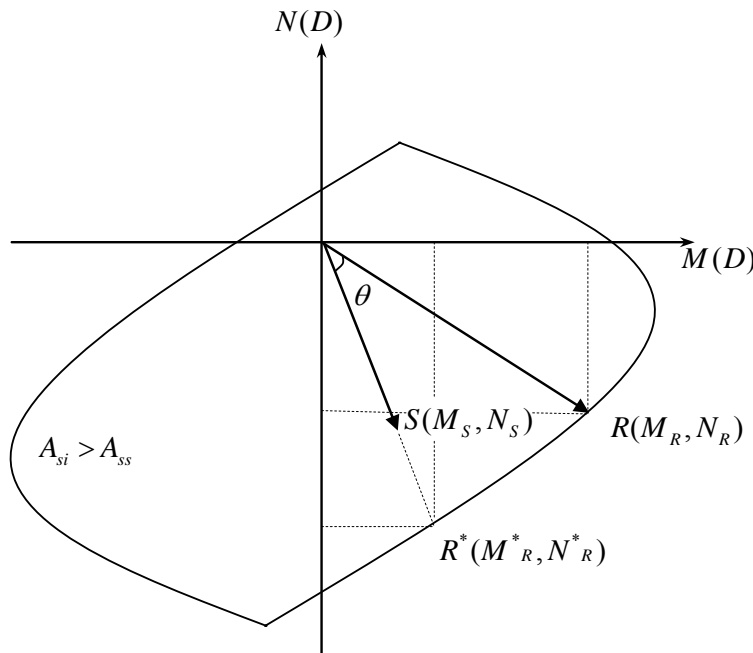


Figura 5.1 – Envoltória resistente de uma seção (Melo et al. 2004).

Após a determinação das características da seção e dos esforços solicitantes, o parâmetro de deformação  $D$  pode ser obtido através do seguinte problema de programação matemática sem restrição:

$$\text{Maximizar } W(D) = \cos \theta \quad (5.2)$$

$$W = \{v_R\} \bullet \{v_S\} = \frac{M_R M_S + N_R N_S}{\left[ (M_R^2 + N_R^2) (M_S^2 + N_S^2) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Na Figura 5.2 apresentam-se os domínios de estado limite último de uma seção transversal, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2004), onde ocorre:

1. Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:
  - reta **a** – tração uniforme;
  - domínio 1 – tração não uniforme, sem compressão;
  - domínio 2 – flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $0 \leq \varepsilon_c < 3,5 \text{ ‰}$ );
2. Ruptura convencional por encurtamento limite do concreto:
  - domínio 3 – flexão simples (seção subarmada) ou composta;
  - domínio 4 – flexão simples (seção superarmada) ou composta;
  - domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
  - domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
  - reta **b** – compressão uniforme.

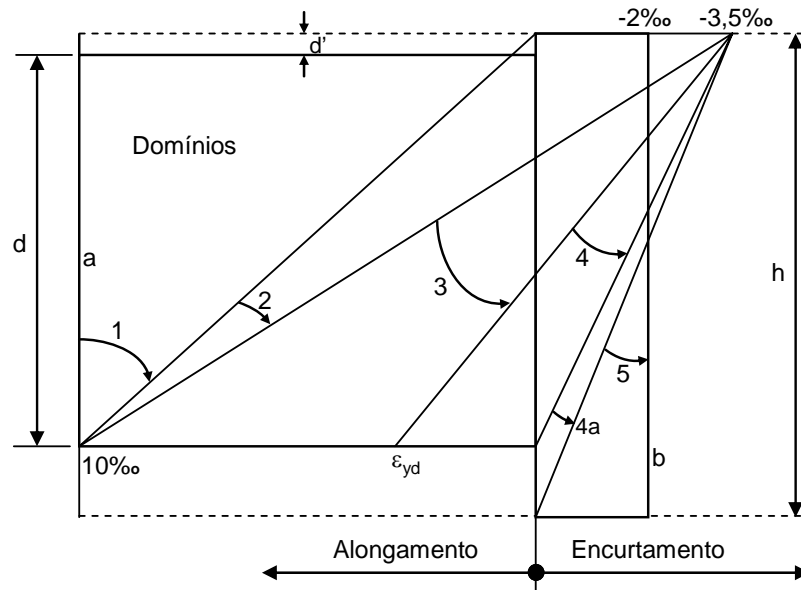


Figura 5.2 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal.

No problema definido na Equação (5.2) a variável de projeto é o parâmetro de deformação  $D$  (Eboli, 1989) que define a configuração deformada resistente da seção. Em Eboli (1989) as deformações das fibras extremas correspondentes aos domínios definidos na Figura 5.2 são definidas em função do parâmetro  $D$  como representado pela Figura 5.3.

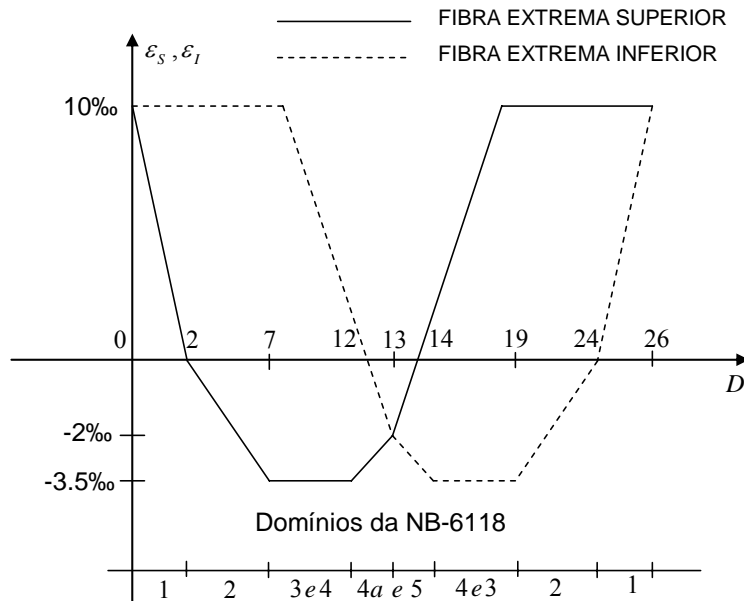


Figura 5.3 – Funções  $\varepsilon_s(D)$  e  $\varepsilon_i(D)$ .

Neste trabalho é utilizado o parâmetro de deformação  $D$  de forma adimensional, ou seja, o valor de  $D$  varia de zero a um, como adotado em Melo (2000b). A adimensionalização é feita para se ter mais estabilidade numérica no algoritmo de solução do problema de otimização. Na Tabela 5.1 são apresentados os valores limites para o parâmetro de deformação  $D$  utilizados neste trabalho em cada domínio do ELU, onde  $\bar{h}$  é a altura na seção de referência e  $d'$  é a distância do centro de gravidade da armadura à borda mais próxima da seção.

Domínios	Limites
1	$0 \leq D \leq \frac{10}{27}$
2	$\frac{10}{27} \leq D \leq \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2} \leq D \leq \frac{1}{27}(23,5 - \varepsilon_{yd} \times 10^3)$
4	$\frac{1}{27}(23,5 - \varepsilon_{yd} \times 10^3) \leq D \leq \frac{23,5}{27}$
4a	$\frac{23,5}{27} \leq D \leq \frac{1}{27} \left[ 27 - \frac{3,5(\bar{h} - d')}{\bar{h}} \right]$
5	$\frac{1}{27} \left[ 27 - \frac{3,5(\bar{h} - d')}{\bar{h}} \right] \leq D \leq 1$

Tabela 5.1 – Valores limites para  $D$  (Melo et al. 2004).

Para determinação dos esforços resistentes ou para construção da envoltória da Figura 5.1, que é obtida variando-se o parâmetro  $D$  de zero a um, as seguintes expressões são utilizadas:

$$N_R(D) = \iint_A \sigma_X(D) dA = \iint_{Ac} \sigma_X(D) dA + \sigma_{si}(D)A_{si} + \sigma_{ss}(D)A_{ss} \quad (5.3)$$

$$M_R(D) = - \iint_A \sigma_X(D) y dA = - \iint_{Ac} \sigma_X(D) y dA - \sigma_{si}(D)y_{si}A_{si} - \sigma_{ss}(D)y_{ss}A_{ss} \quad (5.4)$$

### 5.3.

#### Descrição do problema proposto via método DDO

Neste trabalho é utilizado o algoritmo apresentado por Melo (2000b) com algumas adaptações para a NBR 6118 (ABNT, 2004) para se obter o projeto ótimo determinístico, que é descrito a seguir.

#### 5.3.1.

##### Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são contínuas. Elas relacionam-se com cada elemento do modelo de elementos finitos e são descritas a seguir:

1. A altura da seção transversal,  $h$ . A altura pode assumir diferentes valores no mesmo vão, mas um único valor no mesmo elemento. O número

máximo de variáveis correspondentes a  $(h)$  é dado quando ele se iguala ao número de elementos do modelo ( $ne$ );

2. As armaduras longitudinais inferiores e superiores nas seções dos nós de extremidade. Sendo o número de variáveis igual (Figura 5.4):

- ao valor de  $ne$  para as armaduras inferiores dos nós  $i$  ( $A_{si,i}$ );
- ao valor de  $ne$  para as armaduras inferiores dos nós  $j$  ( $A_{si,j}$ );
- ao valor de  $ne$  para as armaduras superiores dos nós  $i$  ( $A_{ss,i}$ );
- ao valor de  $ne$  para as armaduras superiores dos nós  $j$  ( $A_{ss,j}$ ).

Nó  $i$  e  $j$  representam a extremidade esquerda e direita do elemento, respectivamente.

3. A armadura transversal por unidade de comprimento,  $A_{sw}$ .  $A_{sw}$  é considerada constante ao longo do elemento, sendo assim, o número de variáveis correspondentes é igual ao valor de  $ne$ ;
4. Os parâmetros de deformação  $D$ , que descrevem as configurações resistentes no ELU, das seções de extremidades. Sendo,  $ne$  variáveis para os parâmetros  $D$  dos nós  $i$  ( $D_i$ ), e  $ne$  variáveis para os parâmetros dos nós  $j$  ( $D_j$ ).

O número máximo de variáveis de projeto será  $8ne$ .

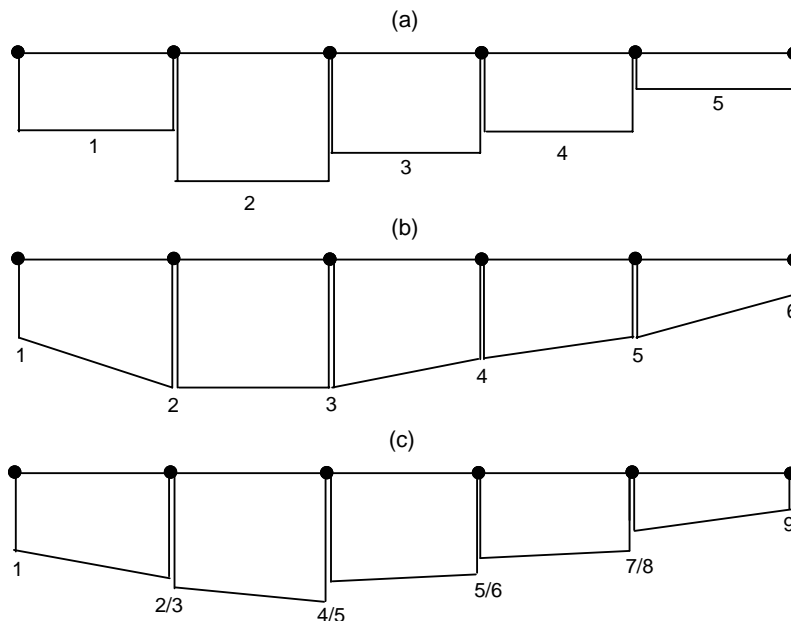


Figura 5.4 –Padrões de distribuição da armadura longitudinal ( $A_{ss}$  e  $A_{si}$ ).

A Figura 5.4 apresenta três padrões de distribuição de armadura longitudinal possíveis para este trabalho. Ao se igualar as armaduras dentro do elemento, tem-

se a distribuição mostrada pela Figura 5.4a, ou seja, por exemplo ( $A_{si,i} = A_{si,j}$ ). Ao se igualar as armaduras associadas a um mesmo nó, tem-se a distribuição mostrada pela Figura 5.4b, ou seja, por exemplo ( $A_{si,i+1} = A_{si,j}$ ). Por último o caso geral, sem vinculação (Figura 5.4c), ou seja, por exemplo ( $A_{si,i} \neq A_{si,j} \neq A_{si,i+1}$ ). Na Figura 5.4 os números abaixo de cada item representam um exemplo, onde uma estrutura é formada por 5 elementos, portanto: na Figura 5.4a tem-se 5 variáveis ( $A_{si}$ ); na Figura 5.4b tem-se 6 variáveis ( $A_{si}$ ) e na Figura 5.4c tem-se 9 variáveis ( $A_{si}$ ).

### 5.3.2.

#### Função objetivo

A função objetivo assumida representará o custo total dos materiais do pórtico e o custo da fôrma. Ela é representada matematicamente por

$$f = C_a \sum_{m=1}^{ne} (V_{si,m} + V_{ss,m} + V_{st,m}) + C_c \sum_{m=1}^{ne} b_m h_m l_m + C_f \sum_{m=1}^{ne} 2h_m l_m \quad (5.5)$$

$$V_{si,m} = \frac{(A_{si,i} + A_{si,j})_m}{2} l_m \quad (5.6)$$

$$V_{ss,m} = \frac{(A_{ss,i} + A_{ss,j})_m}{2} l_m \quad (5.7)$$

$$V_{st,m} = A_{sw,m} l_m (b_m + h_m - 4c) \quad (5.8)$$

onde,

$C_a = C_s \gamma_s$  é o custo do aço por unidade de volume;

$C_s$  é o custo do aço por unidade de peso;

$C_c$  é o custo do concreto por unidade de volume;

$C_f$  é o custo da fôrma por unidade de área;

$\gamma_s$  é o peso específico do aço;

$V_{si,m}$  é o volume da armadura longitudinal inferior do  $m$ -ésimo elemento;

$V_{ss,m}$  é o volume da armadura longitudinal superior do  $m$ -ésimo elemento;

$V_{st,m}$  é o volume da armadura transversal do  $m$ -ésimo elemento;

$A_{sw,m}$  é a armadura transversal por unidade de comprimento do elemento;

$b_m$  é a largura da seção do  $m$ -ésimo elemento;

$h_m$  é a altura da seção do  $m$ -ésimo elemento;



$l_m$  é o comprimento da seção do  $m$ -ésimo elemento;

$c$  é o cobrimento da armadura.

A primeira parcela representa o custo das armaduras necessárias, a segunda o custo do concreto e a última representa o custo da fôrma. É considerada a utilização de estribos de dois ramos, sem a inclusão do comprimento dos ganchos do estribo.

### 5.3.3.

#### Restrições de resistência

A estrutura deve atender a critérios que avaliem a capacidade resistente das seções de extremidades dos elementos. Nesta formulação, utilizam-se restrições em cada seção de extremidade, ou seja, um total de  $4ne$  (onde  $ne$  é o número de elementos). Para que a seção resista à solicitação de flexo-compressão, as restrições definidas por (5.9) e (5.10) devem ser atendidas:

$$\text{sign}(N_s)N_R(x) \geq \text{sign}(N_s)N_s(x, u) \quad (5.9)$$

$$\text{sign}(M_s N_s) \frac{M_R(x)}{N_R(x)} \geq \text{sign}(M_s N_s) \frac{M_s(x, u)}{N_s(x, u)} \text{ se } N_s \neq 0 \quad (5.10)$$

$$\text{sign}(M_s)M_R(x) \geq \text{sign}(M_s)M_s(x, u) \text{ se } N_s = 0$$

onde  $N_R(x)$  é o esforço resistente normal e  $M_R(x)$  é o momento resistente de cálculo numa seção de extremidade do elemento. Para o cálculo de  $M_R(x)$  e  $N_R(x)$  é considerado que  $f_c = f_{cd}$  e  $f_y = f_{yd}$ .  $N_s$  é a força normal solicitante e  $M_s$  é o momento solicitante de cálculo. Para o cálculo de  $M_s$  e  $N_s$  é considerado  $f_c = f_{cm}$  e  $f_y = f_{ym}$ .  $\text{Sign}(x)$  retorna o sinal da expressão dada (se  $x \geq 0$   $\text{Sign}(x)$  retorna +1, caso contrario é retornado -1).

São estabelecidas também as restrições quanto ao esmagamento da biela comprimida e para o cálculo da armadura transversal necessária, sendo uma restrição para cada elemento, ou seja,  $ne$  restrições. Estas restrições são representadas matematicamente por:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (5.11)$$

$$V_{Rd2} = 0,27(1 - f_{ck}/250)f_{cd} b d \quad (5.12)$$

$$A_{sw} \geq A_{sw,nec} \quad (5.13)$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \geq V_{Sd} \quad (5.14)$$

$$V_{sw} = (A_{sw,nec}/s) 0,9 d f_{ywd} (\sin \alpha_{sw} + \cos \alpha_{sw}) \quad (5.15)$$

onde,

- $V_{Sd}$  - é a força cortante solicitante de cálculo na seção;
- $V_{Rd2}$  - é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;
- $f_{cd}$  - é a resistência característica de dimensionamento do concreto à compressão;
- $V_{Rd3}$  - é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal;
- $V_c$  - é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça (considera-se para este trabalho  $V_c = 0$ );
- $V_{sw}$  - a parcela absorvida pela armadura transversal;
- $\alpha_{sw}$  - é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar valores na faixa  $45^\circ \leq \alpha_{sw} \leq 90^\circ$  (assumindo-se que a armadura vertical é composta por estribos verticais, ou seja,  $\alpha_{sw} = 90^\circ$ );
- $f_{ywd}$  - é a resistência de projeto da armadura de cisalhamento;
- $b$  - é largura da seção;
- $d$  - é a altura útil da seção transversal;
- $A_{sw}/s$  - é a área da seção transversal total de estribos por metro linear de viga.

É considerado o modelo I da NBR 6118 (ABNT, 2004) que admite diagonais de compressão inclinadas de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural.

Para a análise destas restrições, que fazem parte do ELU, os coeficientes de ponderação das resistências e das ações são considerados segundo o estabelecido pela NBR 6118.

#### 5.3.4. Restrições para o ELS

Para evitar que a estrutura sofra deslocamentos que ultrapassem os limites de deformação excessiva estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2004), são impostas restrições aos deslocamentos nodais  $u_j$ , calculados com as ações externas de serviço como segue

$$\text{sign}(u_j)u_j \leq u_{j,\text{lim}} \quad j = 1, \dots, \text{ndr} \quad (5.16)$$

onde  $u_{j,\text{lim}}$  é o valor admissível para cada deslocamento  $j$  e  $\text{ndr}$  é o número de deslocamentos nodais restritos.

Em casos de controle de deslocamento nodal excessivo em vigas, considera-se a flecha adicional diferida decorrente das cargas de longa duração em função da fluência. De maneira aproximada pode-se obter a flecha total através do produto da flecha imediata pelo fator  $\alpha_f$  dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50\rho'} \quad (5.17)$$

$$\rho' = \frac{As'}{b d} \quad (5.18)$$

$$\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0)$$

$$\xi(t) = 0,68(0,996')t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (5.19)$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

sendo  $t_0$  a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração;  $t$  o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;  $\rho'$  a taxa de armadura comprimida;  $\xi(t)$  o coeficiente função do tempo e  $As'$  a área da seção da armadura longitudinal de compressão. O valor da flecha total é obtido ao multiplicar-se a flecha imediata por  $(1 + \alpha_f)$ .

Para a análise do ELS os coeficientes de ponderação das resistências e das ações podem ser conservadoramente tomados iguais a um ( $\gamma_m = \gamma_f = 1$ ).

**5.3.5.****Restrições com relação à altura das vigas**

Com o intuito de não permitir o comportamento de viga parede na estrutura, é estabelecido um limite superior para a altura total da viga,

$$h \leq \kappa l \quad (5.20)$$

onde  $\kappa = 0,5$  para vigas simplesmente apoiadas de um único tramo e  $\kappa = 0,333$  nos demais casos e  $l$  é o vão da viga.

**5.3.6.****Restrições referentes às armaduras**

As restrições que se referem às armaduras de flexão estabelecem valores mínimos para as armaduras de tração. A Tabela 5.2 estabelece os valores mínimos para armadura de flexão segundo a norma NBR 6118. As restrições são representadas matematicamente a seguir:

$$A_s \geq A_{s,min} \quad (5.21)$$

Forma da seção	Valores mínimos de $\rho_{min} (A_{s,min}/A_c)$							
	$f_{ck}$ $\omega_{min}$	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288

Tabela 5.2 – Taxas mínimas de armadura de flexão (NBR 6118, 2003).

Para a armadura transversal são determinados limites com relação à área mínima  $A_{sw,min}$ :

$$A_{sw} \geq A_{sw,min} \quad (5.22)$$

Sendo,

$$\frac{A_{sw,min}}{s} = 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} b \operatorname{sen} \alpha_{sw} \quad (5.23)$$

onde,

$\alpha_{sw}$  - é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar valores na faixa  $45^\circ \leq \alpha_{sw} \leq 90^\circ$  (assumindo-se que a armadura vertical é composta por estribos verticais, ou seja,  $\alpha_{sw} = 90^\circ$ );

$f_{ywk}$  - é a resistência ao escoamento da armadura de cisalhamento;

$f_{ct,m}$  - é a resistência à tração média do concreto ( $f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3}$ );

$b$  - é largura da seção;

$A_{sw}/s$  - é a área da seção transversal total de estribos por metro linear de viga.

Para a análise destas restrições, que fazem parte do ELU, os coeficientes de ponderação das resistências e das ações são considerados segundo o estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2004).

### 5.3.7.

#### Restrição relativa ao fator de carga crítica

Esta restrição estabelece a garantia de que a carga devida aos esforços solicitantes não ocasione a perda de estabilidade, i.e., garanta que o valor do fator de carga crítica de instabilidade ( $\lambda^*$ ) seja maior que o valor do fator de proporcionalidade correspondente às cargas de projeto ( $\lambda_f$ ). Quando  $\lambda^* < \lambda_f$  o equilíbrio não é satisfeito. Para que isso seja prevenido tem-se a restrição

$$\lambda^* \geq \lambda_{inf}^* \quad (5.24)$$

sendo  $\lambda_{inf}^*$  uma constante com  $\lambda_{inf}^* \geq \lambda_f$ . Entretanto,  $\lambda_{inf}^*$  não deve ser confundido com um coeficiente de segurança estrutural, mas entendido como uma forma de se assegurar que a estabilidade do equilíbrio para cargas de projeto é pelo menos igual às definidas por  $\lambda_f$ .

### 5.3.8.

#### Restrições laterais

As restrições laterais definem os limites mínimos e máximos para as variáveis de projeto.

$$x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max} \quad i = 1...nvp. \quad (5.25)$$

onde  $nvp$  é o numero de variáveis de projeto.

**5.3.9.****Adimensionalização de variáveis**

Para não ocorrer instabilidade numérica nos algoritmos de otimização devido à diversidade de unidades de medidas presentes nas restrições, nas variáveis de projeto e na função objetivo, é recomendável que se faça a adimensionalização das grandezas envolvidas. Para isso são empregados os seguintes fatores de escala:

1. as variáveis de projeto e a função objetivo são adimensionalizadas dividindo as mesmas por seus respectivos valores iniciais,

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \frac{h_i}{h_i^0} \quad i = 1, \dots, nh \\ \hat{A}_{si,j} &= \frac{A_{si,j}}{A_{si,j}^0} \quad j = 1, \dots, nsi \\ \hat{A}_{ss,k} &= \frac{A_{ss,k}}{A_{ss,k}^0} \quad k = 1, \dots, nss \\ \hat{A}_{sw,l} &= \frac{A_{sw,l}}{A_{sw,l}^0} \quad l = 1, \dots, nsw \\ \hat{f}(\hat{x}) &= \frac{f(\hat{x})}{f(\hat{x}^0)}\end{aligned}\tag{5.26}$$

onde  $nh$ ,  $nsi$ ,  $nss$ ,  $nsw$  são o número de: alturas, armaduras longitudinais inferiores, armaduras longitudinais superiores e armaduras de cisalhamento, respectivamente. Os parâmetros de deformação  $D$  já são adimensionais. Após a adimensionalização tem-se o novo vetor de variáveis adimensionais,  $\hat{x}$ ;

2. a restrição relativa à força normal é multiplicada pelo fator  $\alpha_n = 1/(bh^0 f_{cd})$ ;
3. a restrição relativa à excentricidade é primeiro reescrita multiplicando-a pela força normal resistente e depois pelo fator  $\alpha_m = 1/(b(h^0)^2 f_{cd})$ . Para essa transformação, é necessário que haja a igualdade de sinais dos esforços;

4. as demais restrições são adimensionalizadas através dos seus respectivos valores mínimos ou máximos admissíveis.

### 5.3.10.

#### O problema de DDO

Após a adimensionalização, a função objetivo e as restrições do problema de DDO estão apresentadas a seguir. Este problema tem como objetivo encontrar o vetor das variáveis adimensionais que represente o valor ótimo da função objetivo efetiva,

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{C_c}{f^0} \left[ c_{ac} \sum_{m=1}^{ne} (V_{si,m} + V_{ss,m} + V_{st,m}) + \sum_{m=1}^{ne} b_m h_m^0 \hat{h}_m l_m + 2c_{fc} \sum_{m=1}^{ne} h_m^0 \hat{h}_m l_m \right] \quad (5.28)$$

submetida às seguintes restrições:

$$\text{sign}(N_s)_i [N_s(x, u) - N_R(x)]_i \alpha_{n_i} \leq 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(M_s)_i \left[ N_R(x) \frac{M_s(x, u)}{N_s(x, u)} - M_R(x) \right]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s \neq 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(M_s)_i [M_s(x, u) - M_R(x)]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s = 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(u_j) \frac{u_j}{u_{j,\text{lim}}} - 1 \leq 0 \quad j = 1 \dots ndr.$$

$$\frac{h_k^0 \hat{h}_k}{\kappa l_k} - 1 \leq 0 \quad k = 1 \dots nh.$$

$$1 - \frac{A_{s_l}^0 \hat{A}_{s_l}}{A_{s,\text{min}_l}} \leq 0 \quad l = 1 \dots nst.$$

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} - 1 \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k}}{A_{sw,nec_k}} \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k}}{A_{sw,\text{min}_k}} \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_{\inf}^*} \leq 0$$

$$\hat{x}_{i,\min} \leq \hat{x}_i \leq \hat{x}_{i,\max} \quad i = 1 \dots nvp. \quad (5.29)$$

sendo  $ns$  o número de seções de extremidade,  $ndr$  o número de deslocamentos restritos,  $nst$  o número de armaduras tracionadas na flexão,  $nh$  o número de alturas diferentes como variáveis,  $ne$  o número de elementos,  $c_{ac} = C_a / C_c$  e  $c_{fc} = C_f / C_c$ .



## 6

### Projeto de Otimização Baseado em Confiabilidade (RBDO)

Nos últimos anos muitos estudos têm sido disponibilizados na literatura com relação ao RBDO. Enquanto, por um lado, as pesquisas sobre confiabilidade de estruturas têm se concentrado na descrição probabilística das cargas envolvidas e dos parâmetros dos materiais e nos métodos de análise da confiabilidade do projeto. Por outro lado, a otimização busca trabalhar com algoritmos eficientes que localizem pelo menos um mínimo local para sistemas particularmente grandes utilizando restrições determinísticas. Assim, é possível, nos projetos estruturais, estabelecer uma conexão entre confiabilidade e otimização. Esta conexão pode ser realizada considerando todas as incertezas que podem ser modeladas como variáveis randômicas.

Assumindo-se geometrias satisfatórias, materiais apropriados e valores das cargas solicitantes conhecidos, pode-se realizar a análise para determinar o comportamento detalhado da estrutura. Mudanças no carregamento, variabilidade nas propriedades dos materiais e incertezas com respeito aos modelos analíticos contribuem conjuntamente para que exista a probabilidade de que a estrutura não se comporte como pretendido. Para lidar com essas incertezas, têm sido desenvolvidos métodos de análise que, para estruturas cada vez mais complexas, buscam precisar na análise a influência destas incertezas e computar a confiabilidade das mesmas.

Nos últimos dez anos tem ocorrido um crescente aumento na análise de confiabilidade de estruturas, a qual permite o cálculo da probabilidade de falha da estrutura. Quanto à confiabilidade dos projetos ótimos obtidos via DDO, dois casos são possíveis:

- Caso 1: Alto nível de confiabilidade. Quando se escolhem valores elevados para os coeficientes de segurança de certos parâmetros, o custo estrutural é significativamente aumentado, devido ao nível de confiabilidade que se torna maior que o necessário para a estrutura. Ou seja, o projeto é seguro, mas muito pouco econômico;

- Caso 2: Baixo nível de confiabilidade. Quando se escolhem valores baixos para os coeficientes de segurança, os níveis de confiabilidade estrutural podem assumir valores menores do que os apropriados. Isto indica que muitas vezes a confiabilidade de um DDO pode ser muito baixa e necessitar ser avaliada por análises probabilísticas.

Para ambos os casos pode-se observar que há a necessidade de realizar a avaliação da análise de confiabilidade no processo de otimização a fim de se controlar o nível de confiabilidade e minimizar a função de custo estrutural. A avaliação da análise de confiabilidade nos projetos de otimização em engenharia é chamada de RBDO.

De uma forma geral a formulação do problema RBDO é definida por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \text{custo } f(x) \\ & \text{Sujeito a } \Phi^{-1}(G(u) \leq 0) + \beta_t = -\beta_s + \beta_t \leq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $\beta_t$  é o índice de confiabilidade desejado (alvo),  $\beta_s$  o índice de confiabilidade do sistema e  $\Phi$  a cumulativa da distribuição normal padrão. No problema (6.1) busca-se minimizar a função de custo  $f(x)$ , onde  $x$  é o vetor das variáveis de projeto, sujeita à restrição de confiabilidade mínima para o sistema em estudo, que é representado pela função de comportamento  $G(u)$ , onde  $u$  é o vetor das variáveis aleatórias.

Deve-se ter em mente que várias análises são requeridas no espaço das variáveis randômicas a fim de se avaliar a confiabilidade do sistema. O processo de otimização é executado no espaço das variáveis de projeto que são determinísticas. Conseqüentemente, para se obter uma estrutura ótima e confiável, as variáveis de projeto devem ser repetidamente alteradas, e cada conjunto de variáveis de projeto corresponde a um novo espaço de variáveis randômicas, que precisa ser manipulado para a avaliação da confiabilidade estrutural neste ponto.

A restrição probabilística do problema (6.1) pode ser representada, também, por:

$$G_p = F_G^{-1}(\Phi(-\beta_t)) \geq 0 \quad (6.2)$$

onde  $G_p$  e  $F_G$  são, respectivamente, a medida de desempenho e a função cumulativa probabilística.

O problema de RBDO utilizando o índice de confiabilidade,  $\beta$ , na restrição não-determinística é definido pela Equação (6.1). Essa formulação é chamada de

enfoque do índice de confiabilidade, ou, Reliability Index Approach (RIA, em inglês). Similarmente, quando se usa a restrição da Equação (6.2) no lugar da restrição dada em (6.1) a formulação passa a ser chamada de enfoque da medida de desempenho, ou, Performance Measure Approach (PMA).

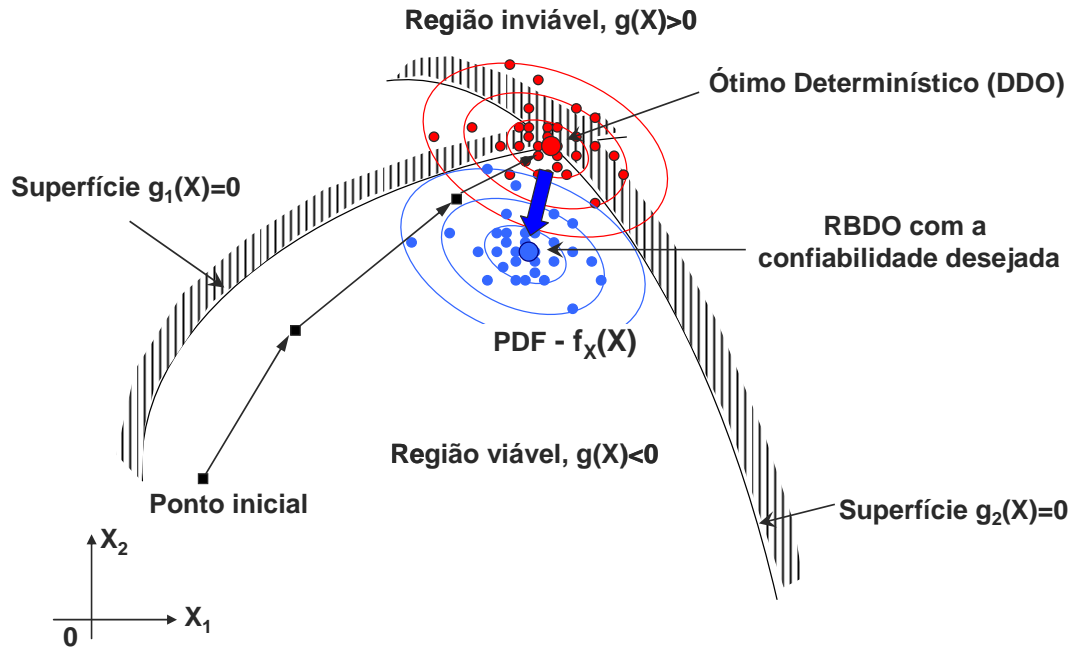


Figura 6.1 – Exemplo ilustrativo do processo de DDO vs. RBDO.

A Figura 6.1 é representada por duas variáveis aleatórias,  $X_1$  e  $X_2$ , duas restrições,  $g_1(X)$  e  $g_2(X)$ , um processo de obtenção do projeto ótimo determinístico (DDO), o ponto de projeto ótimo baseado em confiabilidade (RBDO) e  $f_X(X)$  que representa a função densidade de probabilidade (PDF). Devido às várias incertezas no sistema, o projeto de otimização determinística (DDO) pode conduzir a projetos com níveis de confiabilidade não satisfatórios que correspondem aos pontos negros na região viável. Como se pode observar, o exemplo da Figura 6.1 mostra que, algumas vezes, o projeto de otimização necessita ser movido para dentro da região viável (região com comportamento satisfatório) para aumentar a confiabilidade das restrições de projeto enquanto minimiza-se a função de custo (função objetivo). Este processo é chamado de otimização baseada em confiabilidade (Reliability-Based Design Optimization, RBDO). Observa-se que para solução via RBDO, os pontos entorno do ótimo, que correspondem aos vários pontos cinzas na Figura 6.1 se encontram

majoritariamente na região viável. Ele estabelece uma probabilidade máxima  $P_f$  de comportamento não-satisfatório para cada restrição de confiabilidade definida.

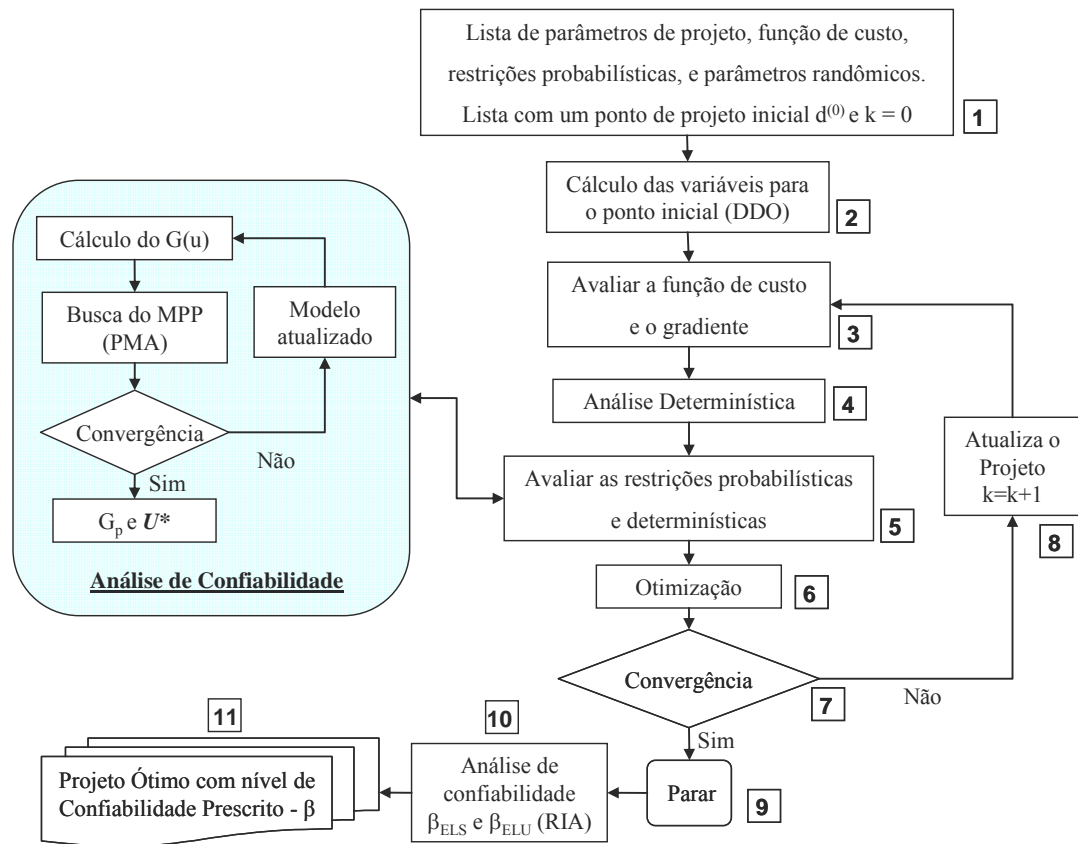


Figura 6.2 – Processo iterativo para o RBDO.

A Figura 6.2 ilustra o processo iterativo do problema de RBDO (Eq. (6.1), onde se pode observar que são representados os passos do processo:

1. definição dos parâmetros iniciais;
2. determinação do ponto inicial para o RBDO obtido pelo projeto ótimo determinístico (DDO);
3. avaliação da função de custo e dos gradientes;
4. análise determinística necessária para o cálculo das restrições determinísticas;
5. avaliação das restrições e das sensibilidades determinísticas e probabilísticas. Em cada análise de uma restrição probabilística é feita uma análise de confiabilidade pelo método FORM-PMA;

6. execução do procedimento para determinação do próximo passo no algoritmo de otimização escolhido;
7. verificação da convergência do processo;
8. caso não ocorra a convergência, continua-se o processo iterativo;
9. caso ocorra a convergência, interrompe-se o processo iterativo;
10. análise de confiabilidade pelo método FORM-RIA das restrições probabilísticas para a determinação dos índices de confiabilidade  $\beta$ ;
11. projeto de otimização baseado em confiabilidade atingido.

O problema de RBDO utilizado adota alguns procedimentos recomendados por Youn et al. (2005) e Zou e Mahadevan (2006) para melhorar o tempo computacional do RBDO clássico, tais como:

- adotar o resultado do DDO como ponto inicial para o RBDO;
- tomar para as análises do FORM o ponto de projeto da iteração anterior devido à proximidade do último ponto de projeto (condição de proximidade de projeto, comentada no item seguinte).

Estes dois procedimentos contribuem de forma significativa na redução do número de avaliações da função de comportamento inclusa nas restrições probabilísticas, esta redução proporciona um decréscimo significativo no tempo de processamento do RBDO.

A Figura 6.1 ilustra o processo iterativo que é tratado neste trabalho, ou seja, otimiza pórticos planos de concreto armado sujeitos a restrições determinísticas e não-determinísticas.

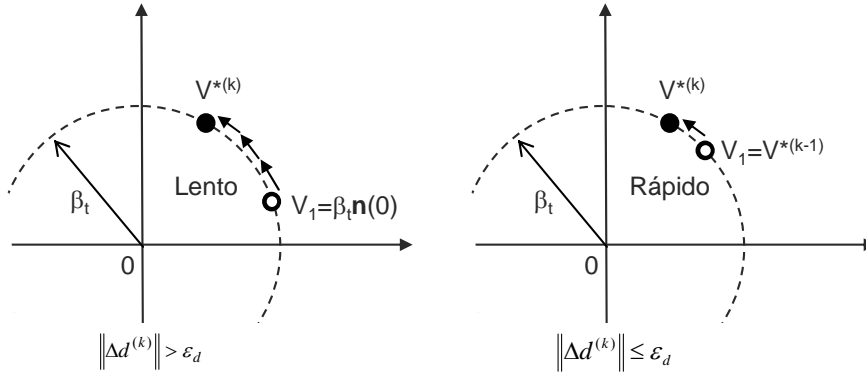
### **6.1. Condição de proximidade de projeto**

Para reduzir o tempo computacional da avaliação das restrições probabilísticas no processo do RBDO, Youn et al. (2005) recomendam o uso da observação da condição de proximidade de projeto (Eq. 6.3). O objetivo é efetuar a análise de confiabilidade o mais rápida e eficientemente possível utilizando a informação da iteração de projeto prévia, quando esta satisfaz a condição de proximidade de projeto. Resumindo, caso seja satisfeita a condição de proximidade de projeto, o FORM utiliza o MPP da iteração do processo de otimização prévia  $V^{*(k-1)}$  como ponto inicial para a busca do novo MPP ao invés

do ponto com valores médios  $V_1 = \beta n(0)$  (vetor das médias das variáveis randômicas, Figura 6.3).

$$\Delta d^{(k)} = \left\| \left( x^{(k)} - x^{(k-1)} \right) \right\| \leq \varepsilon_d \quad (6.3)$$

onde  $\Delta d$  é a medida de proximidade de projeto;  $x$  é o vetor das variáveis de projeto e  $\varepsilon_d$  é uma constante para a identificação da proximidade de projeto.



(a) Sem condição de proximidade      (b) Com condição de proximidade

Figura 6.3 – Análise rápida de confiabilidade no RBDO.

A Figura 6.2 mostra a ilustração da análise rápida de confiabilidade no RBDO – PMA considerando a condição de proximidade que aproveita o MPP da iteração anterior do RBDO (Figura 6.2b) e sem considerar a condição de proximidade (Figura 6.2a).  $V^{*(k)}$  e  $V^{*(k-1)}$  são os pontos de projeto no espaço normal padrão para as análises de confiabilidade da iteração  $k$  e  $k-1$  no processo do RBDO.

## 6.2.

### Análise de confiabilidade pelo RIA (Reliability Index Approach)

No RIA, o índice de confiabilidade de primeira ordem ( $\beta_s$ ), que se utiliza do FORM para a sua determinação, é obtido pela formulação de uma problema de otimização com uma restrição de igualdade no espaço  $V$  (espaço reduzido). No fim do processo iterativo do FORM obtém-se o ponto mais provável de falha ou MPP (Most Probable Point) e assim  $\beta_s = \text{sign}(G(\mu)) \|v^*_{G(V)=0}\|$ .

Vários algoritmos de otimização podem ser empregados para a obtenção do MPP. Neste trabalho é utilizado o algoritmo HLRF, já citado anteriormente, para

a avaliação da performance de confiabilidade pelo RIA, devido a sua simplicidade e sua eficiência.

### 6.3.

#### **Análise de confiabilidade por PMA (Performance Measure Approach)**

A análise de confiabilidade por PMA pode ser formulada como uma análise inversa de confiabilidade do método RIA. A medida de performance probabilística de primeira ordem é obtida de um problema de otimização não-linear no espaço reduzido  $V$  definido por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } G(V) \\ &\text{Sujeito a } \|V\| = \beta_t \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde o ponto ótimo na superfície alvo de confiabilidade é identificado como o MPP ( $v^*_{\beta=\beta_t}$ ).

Diferentemente do RIA, para o PMA, somente o vetor de direção  $v^*_{\beta=\beta_t} / \|v^*_{\beta=\beta_t}\|$  precisa ser determinado sobre a superfície esférica devida à restrição de igualdade  $\|V\| = \beta_t$ .

O problema representado na Eq. (6.4) pode ser resolvido por vários algoritmos de otimização. Contudo, o método HMV (Hybrid Mean Value) é o mais recomendado para o PMA devido a sua simplicidade e sua eficiência, tanto para funções côncavas quanto para convexas (Youn et al., 2003).

### 6.4.

#### **Análise de confiabilidade híbrida por PMA**

O método HMV é composto por dois métodos: o AMV (Advanced Mean Value), mais recomendado para problemas com funções de comportamento côncavas, e o CMV (Conjugate Mean Value), para convexas.

No HMV é realizada uma verificação para identificar se a função é côncava ou convexa e a partir desta verificação seleciona-se qual método será utilizado para determinar o MPP (AMV ou CMV). A verificação realizada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \zeta^{k+1} &= (n^{k+1} - n^k) \cdot (n^k - n^{k-1}) \\ \text{se } \text{sign}(\zeta^{k+1}) &> 0 \text{ função convexa - CMV} \\ \text{se } \text{sign}(\zeta^{k+1}) &\leq 0 \text{ função côncava - AMV} \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $n^k$  é a direção de máximo declive normalizada no ponto  $v_{HMV}^{(k)}$  e  $\zeta^{k+1}$  é o critério para determinação do tipo do método a ser utilizado em cada iteração.

$$n(v_{HMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_v G(v_{HMV}^{(k)})}{\|\nabla_v G(v_{HMV}^{(k)})\|} \quad (6.6)$$

O PMA é o método que tem se mostrado computacionalmente mais eficiente do que o RIA para solução de problemas de RBDO (Youn et al., 2003).

#### 6.4.1.

##### Método do valor médio avançado (AMV)

Cabe lembrar que o método AMV (Advanced Mean Value) é mais recomendado para problemas com funções de comportamento côncavas.

O método AMV começa com o método do valor médio (MV – Mean Value) (Youn et al., 2003), definido por:

$$v_{MV}^* = \beta_t n(0) \quad (6.7)$$

$$n(0) = -\frac{\nabla_v G(\mu)}{\|\nabla_v G(\mu)\|} \quad (6.8)$$

onde  $n(0)$  é a direção de máximo declive normalizada definida no ponto correspondente aos valores médios,  $\mu$ .

Assim, iterativamente o método AMV atualiza o vetor direção do método de máximo declive e é formulado por:

$$v_{AMV}^{(1)} = v_{MV}^*, v_{AMV}^{(k+1)} = \beta_t n(v_{AMV}^{(k)}) \quad (6.9)$$

$$n(v_{AMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_v G(v_{AMV}^{(k)})}{\|\nabla_v G(v_{AMV}^{(k)})\|} \quad (6.10)$$

#### 6.4.2.

##### Método do valor médio conjugado (CMV)

Quando aplicado a funções côncavas, o método AMV tende muitas vezes a ter uma convergência lenta ou até mesmo não convergir, pois este método atualiza a direção utilizando somente o MPP corrente. Esse tipo de dificuldade pode ser transposta usando o MPP corrente e o anterior, o que é realizado no método da média conjugada (Conjugate Mean Value - CMV). O CMV determina a nova direção de busca através da combinação de  $n(u_{CMV}^{(k-2)})$ ,  $n(u_{CMV}^{(k-1)})$  e  $n(u_{CMV}^{(k)})$  com igual peso para as três direções.



$$v_{CMV}^{(0)} = 0, v_{CMV}^{(1)} = v_{AMV}^{(1)}, v_{CMV}^{(2)} = v_{AMV}^{(2)} \quad (6.11)$$

$$v_{CMV}^{(k+1)} = \beta_t \frac{n(v_{CMV}^{(k)}) + n(v_{CMV}^{(k-1)}) + n(v_{CMV}^{(k-2)})}{\|n(v_{CMV}^{(k)}) + n(v_{CMV}^{(k-1)}) + n(v_{CMV}^{(k-2)})\|} \quad (6.12)$$

onde a Eq. (6.12) é para  $k \geq 2$  e,

$$n(v_{CMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_v G(v_{CMV}^{(k)})}{\|\nabla_v G(v_{CMV}^{(k)})\|} \quad (6.13)$$

Através do CMV que utiliza a direção de busca pelo método do máximo declive conjugado (Eq. 6.12) consegue-se uma boa convergência e estabilidade para funções côncavas. Contudo, para funções convexas ele é ineficiente, segundo Youn et al. (2003).

### 6.4.3.

#### Método do valor médio híbrido (HMV)

Como visto nas seções anteriores o HMV determina através da Expressão 6.5 qual método (AMV ou CMV) que deve ser utilizado para determinar o MPP. O método HMV adotado neste trabalho é resumido a seguir:

1. Para  $k=0$  e com uma tolerância para convergência igual a  $TOL=10^{-3}$  avalia-se a direção de máximo declive no espaço reduzido  $V$ ;

$$n(v_{HVM}^{(0)}) = -\frac{\nabla_v G(v_{HVM}^{(0)})}{\|\nabla_v G(v_{HVM}^{(0)})\|} \quad (6.14)$$

2. Se a função é do tipo convexa ou  $k < 3$ , calcula-se o MPP utilizando o método AMV. Se a função é do tipo côncava e  $k \geq 3$  calcula-se o MPP utilizando o método CMV;

Se AMV então  $v_{HVM}^{(k+1)} = \beta_t n(v_{HVM}^{(k)})$

$$\text{Se CMV então } v_{HVM}^{(k+1)} = \beta_t \frac{n(v_{HVM}^{(k)}) + n(v_{HVM}^{(k-1)}) + n(v_{HVM}^{(k-2)})}{\|n(v_{HVM}^{(k)}) + n(v_{HVM}^{(k-1)}) + n(v_{HVM}^{(k-2)})\|} \quad (6.15)$$

$$n(v_{HVM}^{(k)}) = -\frac{\nabla_v G(v_{HVM}^{(k)})}{\|\nabla_v G(v_{HVM}^{(k)})\|} \quad (6.16)$$

3. Avalia-se a função de comportamento  $G(v_{HVM}^{(k)})$  e o índice de confiabilidade  $\beta^{(k+1)}$ , no novo MPP  $v_{HVM}^{(k+1)}$

$$\max(|\Delta G(v_{HVM}^{(k+1)})|, |\beta^{(k+1)} - \beta_t|) \leq TOL \quad (6.17)$$

$$\left| \Delta G(v_{HMV}^{(k+1)}) \right| = \left| \frac{G(v_{HMV}^{(k+1)}) - G(v_{HMV}^{(k)})}{G(v_{HMV}^{(k+1)})} \right| \quad (6.18)$$

se atingido o critério de convergência o processo é interrompido, caso contrário passa-se para o item seguinte;

4. Calcula-se o gradiente  $\nabla_v G(v_{HMV}^{(k+1)})$  da função de comportamento e faz-se a verificação se a função é côncava ou convexa a partir da Eq. (6.5), e determina-se qual o método deve ser utilizado (AMV ou CMV). Faz-se  $k=k+1$  e repetem-se os passos, especificados a cima, a partir do item dois até a convergência.

## 6.5.

### Variáveis aleatórias do problema

Para a definição das variáveis aleatórias a serem consideradas na análise devem-se observar as incertezas com relação à resistência e às cargas aplicadas.

Os possíveis casos de incertezas relativos à resistência dos elementos estruturais podem ser (Nowak e Collins, 2000):

- Análise – incertezas quanto aos métodos aproximados de análise e modelos idealizados de tensão-deformação;
- Materiais – incertezas quanto às propriedades dos materiais: resistências, módulos de elasticidade; composição química e etc;
- Fabricação – incertezas quanto às dimensões de componentes, momento de inércia.

Os itens seguintes descrevem as variáveis aleatórias consideradas nesse trabalho.

### 6.5.1.

#### Propriedades mecânicas do concreto

Neste trabalho é considerada como variável aleatória à resistência à compressão do concreto, tendo o seu valor médio definido pela seguinte expressão:

$$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,65\delta)} \quad (kN / cm^2) \quad (6.19)$$

onde  $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão do concreto e  $\delta$  é o coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto.

Segundo o JCSS<sup>3</sup> (2000) a distribuição apropriada para descrever o comportamento aleatório da resistência à compressão do concreto é a distribuição Lognormal. Soares e Venturini (2001) recomendam para a tensão no concreto o valor de  $\delta$  entre 10% e 25%. O seu valor característico é determinado de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004), ou seja, o  $f_{ck}$  é o valor que corresponde a 5% de probabilidade de ser ultrapassado (distribuição normal), no sentido desfavorável para a segurança.

### 6.5.2.

#### Propriedades mecânicas da armadura longitudinal

A distribuição que melhor descreve o comportamento aleatório da resistência de escoamento do aço característica ( $f_{yk}$ ) é a distribuição Lognormal (JCSS<sup>3</sup>, 2000). Segundo Soares e Venturini (2001) deve-se usar para a resistência do aço valores de  $\delta$  entre 6% e 12%. Os valores médios ou valores esperados para estas variáveis são obtidos por:

$$f_{ym} = f_{yk} + 2\sigma_{f_{yw}} \quad (kN / cm^2) \quad (6.20)$$

$$E_s = E_{sm} = 21000 kN / cm^2 \quad (6.21)$$

sendo  $\sigma_{f_{yw}}$  o desvio padrão da resistência de escoamento do aço, com valor recomendado pelo JCSS<sup>3</sup> (2000) de 3 kN/cm<sup>2</sup> e  $E_s$  o módulo de deformação longitudinal do aço. Para este trabalho  $E_s$  não é considerado como variável aleatória. O valor usado na análise de confiabilidade é de  $E_s = 2,05 \times 10^4$  kN/cm<sup>2</sup> (JCSS<sup>3</sup>, 2000). O valor característico  $f_{yk}$  é definido de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004), onde  $f_{yk}$  é o valor que corresponde a 5% de probabilidade de ser ultrapassado no sentido desfavorável para a segurança.

### 6.5.3.

#### Carregamento externo

A questão de qual distribuição e qual coeficiente de variação adotar para um determinado tipo de carregamento externo para projetos de estruturas de concreto

armado é comentada por Nowak e Collins (2000), JCSS<sup>2</sup> (2001) e Melchers (2002).

Diversos tipos de cargas podem atuar em uma estrutura. Podem-se classificar as cargas em três categorias gerais com relação aos dados estatísticos obtidos, são elas:

- Tipo I – para esse tipo de carga é considerado que os dados obtidos não dependem do tempo. Exemplos de cargas deste tipo são: cargas permanentes e cargas acidentais de longa duração ou permanência;
- Tipo II – para esse tipo de carga é considerado que os dados são dependentes de intervalos de tempo. Cargas que se enquadram nesta categoria são: as cargas de ventos, as cargas de neve, e as cargas acidentais de curta duração;
- Tipo III – nesta categoria as cargas ocorrem durante eventos extremos tais como terremotos e tornados.

De uma forma geral, as funções mais adotadas para representarem o comportamento das ações externas utilizadas na engenharia são (Soares e Venturini, 2001):

- Permanente: Log-normal ou Normal  $\therefore \delta = 8\%$  a  $15\%$ ;
- Acidental: Gumbel ou Weibull  $\therefore \delta = 10\%$  a  $30\%$ ;
- Onda: Gumbel ou Weibull  $\therefore \delta = 40\%$ .

Os valores característicos são determinados de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004). Para as cargas permanentes, os valores característicos  $P_k$  são iguais às suas respectivas médias  $P_m$  ( $P_k = P_m$ ), no caso das cargas acidentais, seus valores característicos correspondem de 25% a 35% de probabilidade de serem ultrapassados no sentido desfavorável, para um período de recorrência de 50 anos, ou seja, dentro de um período de 50 anos existe uma probabilidade de 25% a 35% de ocorrência de cargas superiores às cargas de projeto.

#### **6.5.4. Fatores de modelagem**

Para o cálculo dos diversos tipos de elementos estruturais, muitas vezes são feitas aproximações das tensões, forças axiais, forças cortantes e momentos

fletores. Na maioria das vezes não são considerados os efeitos tridimensionais, as imperfeições e a não-homogeneidade dos materiais.

Desta forma, as incertezas do modelo dependem muito do tipo da estrutura (pórticos, placas, cascas, etc), sendo necessário se considerar um fator de modelagem para o cálculo da resistência dos elementos estudados, que considere estas incertezas (JCSS<sup>3</sup>, 2000 e Santos e Eboli, 2006). Contudo, esse trabalho não considerará tais fatores devido à dificuldade de se obter dados confiáveis para esses fatores quando aplicados a análise não-linear geométrica.

## 6.6. O problema RBDO

Este problema tem como objetivo encontrar o vetor das variáveis adimensionais que represente o valor ótimo da função objetivo efetiva

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{C_c}{f^0} \left[ c_{ac} \sum_{m=1}^{ne} (V_{si,m} + V_{ss,m} + V_{st,m}) + \sum_{m=1}^{ne} b_m h_m^0 \hat{h}_m l_m + 2c_{fc} \sum_{m=1}^{ne} h_m^0 \hat{h}_m l_m \right] \quad (6.22)$$

submetido às seguintes restrições (restrição probabilística (6.23) e restrições determinísticas (6.24):

$$G_p(x, y) = -F_G^{-1}(\Phi(-\beta_i)) \leq 0 \quad (6.23)$$

$$\text{sign}(N_s)_i [N_s(x, u) - N_R(x)]_i \alpha_{n_i} \leq 0 \quad i = 1 \dots ns. \quad (6.24a)$$

$$\text{sign}(M_s)_i \left[ N_R(x) \frac{M_s(x, u)}{N_s(x, u)} - M_R(x) \right]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s \neq 0 \quad i = 1 \dots ns. \quad (6.24b)$$

$$\text{sign}(M_s)_i [M_s(x, u) - M_R(x)]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s = 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\frac{\omega_l}{\omega_{\lim}} - 1 \leq 0 \quad l = 1 \dots nst. \quad (6.24c)$$

$$\frac{h_k^0 \hat{h}_k}{\kappa l_k} - 1 \leq 0 \quad k = 1 \dots nh. \quad (6.24d)$$

$$1 - \frac{A_{s_l}^0 \hat{A}_{s_l}}{A_{s, \min_l}} \leq 0 \quad l = 1 \dots nst. \quad (6.24e)$$

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} - 1 \leq 0 \quad k = 1...ne. \quad (6.24f)$$

$$1 - \frac{A_{swk}^0 \hat{A}_{swk}}{A_{sw,nec_k}} \leq 0 \quad k = 1...ne. \quad (6.24g)$$

$$1 - \frac{A_{swk}^0 \hat{A}_{swk}}{A_{sw,min_k}} \leq 0 \quad k = 1...ne. \quad (6.24h)$$

$$\hat{x}_{i,min} \leq \hat{x}_i \leq \hat{x}_{i,max} \quad i = 1...nvp. \quad (6.24i)$$

a maioria das variáveis presentes nas Equações (6.22) e (6.24) já foram apresentadas no item referente a DDO. As funções de comportamento necessárias para a análise probabilística que representam a Eq.(6.23) são as seguintes:

$$G_p(x, y) = \text{sign}(u_j) \frac{u_j(x, y)}{u_{j,lim}} - 1 \leq 0 \quad j = 1...ndr. \quad (6.25a)$$

$$G_p(x, y) = 1 - \lambda^*(x, y) \leq 0. \quad (6.25b)$$

onde  $x$  e  $y$  representam, respectivamente, as variáveis de projeto determinísticas e as variáveis aleatórias que compõem o problema,  $u_j(x, y)$  é o deslocamento nodal e  $\lambda^*(x, y)$  é o fator de majoração de uma dada representação da carga aplicada que produzirá o colapso da estrutura.

A carga crítica  $\lambda^*(x, y)$  da Equação (6.25b) também pode se entendida como o coeficiente que é capaz de provocar o colapso da estrutura quando multiplicado pelas cargas randômicas atuantes na mesma. Considera-se no momento da análise da restrição probabilística (Eq. 6.25b), as propriedades aleatórias das resistências ( $f_c$  e  $f_y$ ) e das cargas atuantes. Em cada avaliação da função de comportamento (FORM – PMA) é determinada a carga aplicada  $\lambda^*(x, y)$  que produzirá o colapso da estrutura considerando os valores do vetor das variáveis randômicas ( $y$ ) em cada iteração. Assim, esta restrição impõe que  $\lambda^*(x, y) \geq 1$ , ou seja, que a carga crítica da estrutura calculada a partir de uma configuração formada pelo parâmetros determinísticos ( $x$ ) e pelas variáveis randômicas ( $y$ ) seja superior a 1. Essa restrição garante que, no final da otimização via RBDO, a estrutura terá pelo menos uma probabilidade de falha máxima  $P_f = 7,2 \times 10^{-5}$  em 50 anos ( $\beta = 3,8$ ) para o ELU (carga crítica).

A Equação (6.25a) restringe a probabilidade máxima de ocorrência de deslocamentos superiores ao estabelecido como limite ( $u_{j,lim}$ ). Essa restrição garante que, no final da otimização via RBDO, a estrutura terá pelo menos uma probabilidade de falha máxima  $P_f = 6,68 \times 10^{-2}$  em 50 anos ( $\beta = 1,5$ ) para o ELS (deslocamento restrito).

A otimização foi realizada com os algoritmos de Programação Quadrática Seqüencial (SQP em inglês), Programação Linear Seqüencial (SLP em inglês) e Método das Direções Viáveis (MFD em inglês), sendo utilizado o que tiver melhor comportamento após testes preliminares. Para a determinação das sensibilidades da restrição de confiabilidade foi utilizado o proposto por Enevoldsen (1993).

## 7

## Análise de sensibilidade

### 7.1.

#### Introdução

Este capítulo descreve as sensibilidades analíticas utilizadas no programa desenvolvido. Estas sensibilidades representam a variação de uma função devido à variação de uma variável de interesse (variáveis de projeto ou variáveis probabilísticas).

### 7.2.

#### Esforços internos resistentes

A sensibilidade dos esforços internos resistentes é determinada pela Eq. (7.1). Sendo  $si$  e  $ss$  os índices que representam as áreas de aço inferior e superior, respectivamente.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} A_{si} + \sigma_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} A_{ss} + \sigma_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x} \\ \frac{\partial M_R}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} y_{si} A_{si} - \sigma_{si} \frac{\partial y_{si}}{\partial x} A_{si} - \sigma_{si} y_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} y_{ss} A_{ss} - \sigma_{ss} \frac{\partial y_{ss}}{\partial x} A_{ss} - \sigma_{ss} y_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x}\end{aligned}\quad (7.1)$$

A parcela devido ao concreto é dividida em três regiões: 1, 2 e 3 (Figura 7.1). Sendo  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_b$  as deformações nas fibras que representam, para cada caso, os limites inferior e superior de integração, respectivamente.  $y_a$  e  $y_b$  são, respectivamente, as ordenadas das deformações nas fibras inferior e superior de integração. Na Tabela 7.1 são representadas as deformações e ordenadas necessárias nas integrações a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x dA &= - \frac{\sigma_{cd} b}{3 \varepsilon_{c2}^2 \chi^2} \left\{ \begin{aligned} &3 \chi \varepsilon_b (2 \varepsilon_{c2} + \varepsilon_b) \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} - 3 \chi \varepsilon_a (2 \varepsilon_{c2} + \varepsilon_a) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \\ &- [3 \varepsilon_{c2} (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + \varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3] \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x dA &= - \sigma_{cd} b \left( \frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{\partial y_a}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (7.2)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x y dA = - \frac{\sigma_{cd} b}{6 \varepsilon_{c2}^2 \chi^3} \left\{ \begin{aligned} & 2\chi \left[ 3\varepsilon_{c2} (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + \varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \\ & + 6\chi \left[ 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_b + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) \varepsilon_b^2 - \varepsilon_b^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} \\ & - 6\chi \left[ 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_a + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) \varepsilon_a^2 - \varepsilon_a^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \\ & - \left[ \frac{12\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + 4(\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) (\varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3)}{-3(\varepsilon_b^4 - \varepsilon_a^4)} \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x y dA = - \sigma_{cd} b \left( y_b \frac{\partial y_b}{\partial x} - y_a \frac{\partial y_a}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.1} \sigma_x dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.1} \sigma_x y dA = 0$$

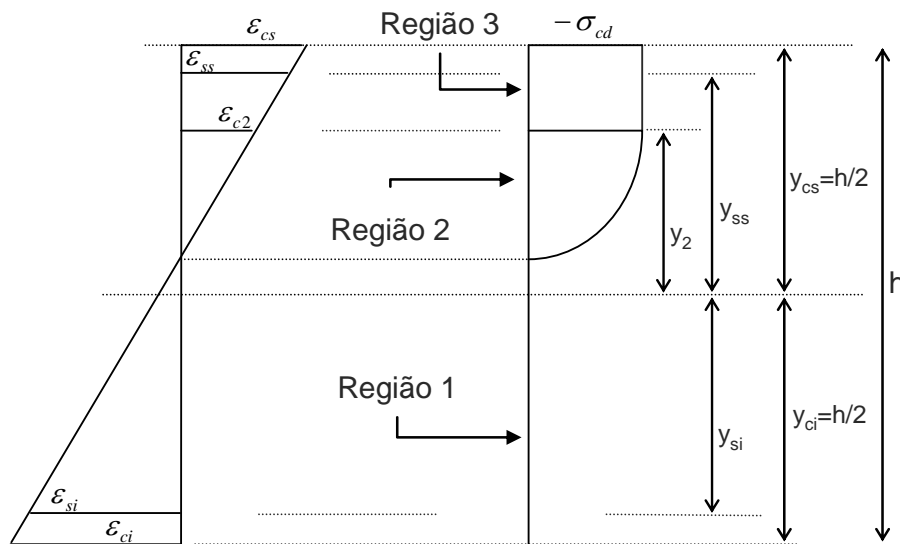


Figura 7.1 – Tensão e deformação na seção.

Domínios	Regiões	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_b$	$y_a$	$y_b$
reta a	1	-	-	-	-
1	1	-	-	-	-
2a	1, 2	0	$\varepsilon_{cs}$	-	-
2b, 3, 4 e 4a	1, 2, 3	0	$-\varepsilon_{c2}$	$y_2$	$y_{cs}$
5	2, 3	$\varepsilon_{ci}$	$-\varepsilon_{c2}$	$y_2$	$y_{cs}$
reta b	2	-	-	$y_{ci}$	$y_{cs}$

Tabela 7.1 – Regiões e limites de integração.

### 7.3. Esforços internos solicitantes

As sensibilidades dos esforços internos solicitantes são obtidas derivando-se as Equações (3.7) nos pontos de integração em relação aos termos explícitos de  $x$  (Eq. 7.3).

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_s(x,u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} A_{si} + \sigma_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} A_{ss} + \sigma_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x} \\ \frac{\partial M_s(x,u)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} y_{si} A_{si} - \sigma_{si} \frac{\partial y_{si}}{\partial x} A_{si} - \sigma_{si} y_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} y_{ss} A_{ss} - \sigma_{ss} \frac{\partial y_{ss}}{\partial x} A_{ss} - \sigma_{ss} y_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x}\end{aligned}\quad (7.3)$$

A Eq. (7.3) está em função das variáveis de projeto  $x$  e das deformações caracterizadas pelo campo de deslocamento  $u$  obtido na análise (Eq. 3.6). Devido à característica do concreto a sua sensibilidade é dividida em três regiões: 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x dA &= -\frac{\sigma_{cd} b}{\varepsilon_{c2}^2 \chi} \left[ \varepsilon_b (2\varepsilon_{c2} + \varepsilon_b) \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} - \varepsilon_a (2\varepsilon_{c2} + \varepsilon_a) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x dA &= -\sigma_{cd} b \left( \frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{\partial y_a}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x y dA &= -\frac{\sigma_{cd} b}{\varepsilon_{c2}^2 \chi^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[ 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_b + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_b) \varepsilon_{c2}^2 - \varepsilon_{c2}^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} \\ &- \left[ 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_a + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_a) \varepsilon_{c2}^2 - \varepsilon_{c2}^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x y dA &= -\sigma_{cd} b \left( y_b \frac{\partial y_b}{\partial x} - y_a \frac{\partial y_a}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (7.4)$$

Além das três diferentes regiões (Figura 7.1) há também os nove casos de deformação na seção de concreto. A Tabela 7.2 mostra esses possíveis casos, onde  $\varepsilon_{cs}$  e  $\varepsilon_{ci}$  são as deformações nas fibras extremas superior e inferior, respectivamente.

Caso	$\varepsilon_{cs} (\text{‰})$	$\varepsilon_{ci} (\text{‰})$	Regiões
1	$\varepsilon_{cs} > 0$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1
2	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1, 2
3	$\varepsilon_{cs} < -2$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1, 2, 3
4	$\varepsilon_{cs} > 0$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	1, 2
5	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	2
6	$\varepsilon_{cs} < -2$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	2, 3
7	$\varepsilon_{cs} > 0$	$\varepsilon_{ci} < -2$	1, 2, 3
8	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$\varepsilon_{ci} < -2$	2, 3
9	$\varepsilon_{cs} < -2$	$\varepsilon_{ci} < -2$	3

Tabela 7.2 – Casos de deformação.

#### 7.4. Deslocamentos

A determinação da sensibilidade dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  em relação às variáveis de projeto  $\mathbf{x}$  (Eq. 7.5) é obtida pela derivada da equação de equilíbrio Eq. (3.7).

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (7.5)$$

A primeira parcela é devida à dependência implícita das forças internas e a segunda parcela à parte explícita. Sendo  $\mathbf{K}_t = \partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$  a matriz de rigidez tangente, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}_t^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (7.6)$$

neste trabalho as cargas externas  $\mathbf{P}$  independem das variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ . A sensibilidade dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto é apresentada na Eq. (7.7).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K}_t^{-1} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.7)$$

A derivada explícita das forças internas  $F$  em relação a  $x$  fica então

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = T_m^T \sum_{m=1}^{ne} \frac{\partial f_m(x, u)}{\partial x} \quad (7.8)$$

onde  $T_m^T$  é a transposta da matriz de transformação do elemento  $m$  e  $f_m$  é o vetor das forças no  $m$ -ésimo elemento que depende dos esforços solicitantes  $N$  e  $M$  (Eq. 3.6), nos pontos de Gauss,

$$\frac{\partial f_m(x, u)}{\partial x} = \int_l \left[ \frac{\partial N(x, u)}{\partial x} \phi_u' + \frac{\partial M(x, u)}{\partial x} \phi_v'' \right] \partial x \quad (7.9)$$

$\phi$  é o vetor das funções de interpolação relativas aos deslocamentos (Eq. 3.12).

## 7.5.

### Carga crítica

O fator de carga crítica  $\lambda^*$  está implicitamente ligado à variação das variáveis de projeto  $x$ . Entretanto o fator de carga  $\lambda$  é um parâmetro independente que representa o carregamento monotônico da estrutura. Resumindo, a carga crítica é o fator de carga máximo suportado pela estrutura antes de seu colapso quer seja por instabilidade quer seja por ruptura. Esse limite de colapso é representado pela equação de equilíbrio Eq. (7.10).

$$F(x, u) - \lambda^* P_s(x) = 0. \quad (7.10)$$

Derivando-se a Eq. (7.10) em relação às variáveis de projeto  $x$ ,

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} P(x) - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

onde  $F$  é o vetor de forças nodais internas da estrutura e  $P_s$  é o vetor das forças nodais externas em serviço. Sendo  $K_t^* = \partial F(x, u) / \partial u$  a matriz de rigidez tangente e o sinal  $*$  representa o nível de carga crítica ( $\lambda = \lambda^*$ ).

$$K_t^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} P(x) - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} = 0 \quad (7.12)$$

onde a matriz  $K_t^*$  é singular ( $K_t^* \varphi = \varphi^T K_t^* = 0$ ), ou seja, quando multiplicada por seu autovetor  $\varphi$  que equivale a um autovalor nulo conduz a Eq. (7.13).

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{\varphi^T \left[ \frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x} - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} \right]}{\varphi^T P(x)} \quad (7.13)$$

Como  $\mathbf{P}$  independe de  $\mathbf{x}$  ( $\partial P(x)/\partial x = 0$ ), a sensibilidade do fator de carga crítica em relação a  $\mathbf{x}$  é expresso pela Eq. (7.14).

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{\varphi^T \frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x}}{\varphi^T P} \quad (7.14)$$

## 7.6. Função objetivo

As derivadas da função objetivo (Eq. 5.28) em relação as variáveis de projeto  $\mathbf{x}$  são apresentadas aqui para um caso geral, ou seja, que uma mesma variável  $x_i$  pode representar mais de um elemento ( $h, A_{sw}$ ) ou seção ( $A_{si}, A_{ss}, D$ ). Para o caso da sensibilidade em relação à altura  $h_i$ , tem-se

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{h}_i} = \frac{C_c h_i^0}{f^0} \left[ c_{ac} \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k} l_k) + \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (b_k l_k) + \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (l_k) \right] \quad (7.15)$$

onde  $\Lambda_h$  é o conjunto de elementos com altura  $h_i$ . O índice  $i$  representa o número da variável de projeto que deriva e o índice  $k$  representa o número de um determinado elemento ( $\Lambda_{h_i} \supset h_k$ ) sendo  $k = i$ .

No caso da sensibilidade em relação à armadura inferior e superior ( $A_{si}, A_{ss}$ ) fica,

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{si}} = \frac{C_a A_{si}^0}{2f^0} \left[ \sum_{k \in \Lambda_{si1,i}} (l_k) + \sum_{z \in \Lambda_{si2,i}} (l_z) \right] \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{ss}} = \frac{C_a A_{ss}^0}{2f^0} \left[ \sum_{k \in \Lambda_{ss1,i}} (l_k) + \sum_{z \in \Lambda_{ss2,i}} (l_z) \right] \quad (7.17)$$

onde  $\Lambda_{ss1}, \Lambda_{ss2}, \Lambda_{si1}$  e  $\Lambda_{si2}$  são o conjunto das áreas de aço longitudinais inferior e superior para os nós 1 e 2 ( $A_{si}$  e  $A_{ss}$ ). O índice  $i$  representa o número da variável de projeto que deriva à função objetivo.  $k$  e  $z$  representam os números de um determinado elemento ( $\Lambda_{si} \supset \{A_{si_k}, A_{si_z}\}$  e  $\Lambda_{ss} \supset \{A_{ss_k}, A_{ss_z}\}$ ).

Para as derivadas com relação às armaduras transversais  $A_{sw}$  tem-se,

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{swi}} = \frac{C_a A_{swi}^0}{f^0} \left[ \sum_{z \in \Lambda_{swi}} (b_k + h_k - 4c) l_k \right] \quad (7.18)$$

onde  $\Lambda_{sw}$  é o conjunto de elementos com armadura transversal  $A_{sw}$ . O índice  $i$  representa o número da variável de projeto que deriva à função objetivo e  $k$  é o índice que representa o número de um determinado elemento ( $\Lambda_{swi} \supset A_{swk}$ ).

Devido à função objetivo independer dos parâmetros de deformação  $D$  sua sensibilidade é nula para qualquer  $D_i$  (Eq. 7.19).

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial D_i} = 0 \quad \forall i \quad (7.19)$$

### 7.7. Restrições

As sensibilidades das restrições em relação às variáveis de projeto  $x$  são representadas para um caso geral. O índice  $i$  determina cada uma das variáveis de projeto e o índice  $k$ , dependendo do tipo da restrição, tem as variações indicadas na Eq. (5.29).

As derivadas em relação ao critério de resistência são

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{1k}}{\partial \hat{x}_i} &= \text{sign}(N_s)_k \left( \frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial N_R}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \alpha_{n_k} \\ \frac{\partial g_{2k}}{\partial \hat{x}_i} &= \begin{cases} \text{sign}(M_s)_k \left[ \frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} \frac{M_s}{N_s} + \frac{M_R}{N_s^2} \left( N_s \frac{\partial M_s}{\partial \hat{x}_i} - M_s \frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} \right) - \frac{\partial M_R}{\partial \hat{x}_i} \right]_k \alpha_{m_k} & N_s \neq 0 \\ \text{sign}(M_s)_k \left( \frac{\partial M_s}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial M_R}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \alpha_{m_k} & N_s = 0 \end{cases} \quad (7.20) \\ \frac{\partial g_{3k}}{\partial \hat{x}_i} &= \text{sign}(V_s)_k \left( V_{Rd2} \frac{\partial V_s}{\partial \hat{x}_i} - V_s \frac{\partial V_{Rd2}}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \frac{1}{V_{Rd2}^2} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial V_{Rd2}}{\partial \hat{x}_i} = 0,27 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b h^0 \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.21)$$

Em relação ao estado limite de utilização

$$\frac{\partial g_{4k}}{\partial \hat{x}_i} = \text{sign}(u_k) \frac{1}{u_{k,\text{lim}}} \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial g_{5_k}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\omega_{k, \lim}} \frac{\partial \omega_k}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.23)$$

sendo

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \hat{x}_i} = \alpha_{s_m} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.24)$$

Em relação ao limite das alturas

$$\frac{\partial g_{6_k}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{h_k^0}{\kappa l_k} \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.25)$$

Em relação ao limite das armaduras longitudinais e transversais

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{7_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{s_k}^0}{A_{s, \min_k}^2} \left( A_{s, \min_k} \frac{\partial \hat{A}_{s_k}}{\partial \hat{x}_i} - \hat{A}_{s_k} \frac{\partial A_{s, \min_k}}{\partial \hat{x}_i} \right) \\ \frac{\partial g_{8_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{sw_k}^0}{A_{sw, nec_k}^2} \left( A_{sw, nec_k} \frac{\partial \hat{A}_{sw_k}}{\partial \hat{x}_i} - \hat{A}_{sw_k} \frac{\partial A_{sw, nec_k}}{\partial \hat{x}_i} \right) \\ \frac{\partial g_{9_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{sw_k}^0}{A_{sw, \min_k}^2} \frac{\partial \hat{A}_{sw_k}}{\partial \hat{x}_i}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Em relação ao fator de carga crítica

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\lambda_{\inf}^*} \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.27)$$

Na avaliação das restrições probabilísticas é utilizado o valor do ponto de projeto  $\mathbf{u}^*$  (MPP-Most Probable Point) obtido pelo FORM, substituindo os valores utilizados na análise determinística ( $\mathbf{f}_c$ ,  $\mathbf{f}_y$  e as cargas externas definidas como aleatórias), tem-se (Enevoldsen, 1993)

$$\frac{\partial G_{P1}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})\|} \frac{\partial g_4}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial G_{P2}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})\|} \frac{\partial g_{10}}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.29)$$

onde  $\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})$  é o gradiente das variáveis aleatórias no espaço original  $\mathbf{U}$ . Nas Eqs. (7.28) e (7.29) são utilizadas as derivadas em relação ao estado limite de utilização, deformação excessiva ( $\partial g_4 / \partial \hat{x}_i$ ), e em relação ao fator de carga crítica ( $\partial g_{10} / \partial \hat{x}_i$ ). Porém, aqui elas são avaliadas sem utilizar fatores de minoração de

resistências ( $\gamma_m = 1$ ), majoração de cargas ( $\gamma_f = 1$ ) e o limite inferior da carga crítica ( $\lambda_{inf}^* = 1$ ).

## 7.8. Funções de comportamento

Neste trabalho as funções de comportamento são representadas pelo limite de deformação máxima (ELS) e pelo fator de carga crítica mínima (ELU) (Eqs. 7.30 e 7.31).

$$\frac{\partial G_2}{\partial X_i} = \text{sign}(u_k) \frac{1}{u_{k, \text{lim}}} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial X_i} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial X_i} \quad (7.31)$$

onde  $X_i$  é uma variável aleatória e

$$\frac{\partial u}{\partial X_i} = K_t^{-1} \left( \frac{\partial P(X_i)}{\partial X_i} - \frac{\partial F(X_i, u)}{\partial X_i} \right) \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial X_i} = \frac{\varphi^T \left[ \frac{\partial F(X_i, u)^*}{\partial X_i} - \lambda^* \frac{\partial P(X_i)}{\partial X_i} \right]}{\varphi^T P(X_i)}. \quad (7.33)$$

Desta vez a parcela nas Eqs. (7.32) e (7.33) referentes à carga externa  $P$  pode depender da carga aleatória  $X_i$  ( $\partial P(X_i, u)/\partial X_i \neq 0$ ).

Como foi visto nos itens anteriores as derivadas das funções de comportamento dependem das derivadas de  $N_s$  e  $M_s$  em relação ao vetor das variáveis aleatórias  $u$  ( $f_c$ ,  $f_y$  e as cargas externas definidas como aleatórias).

Os esforços internos ( $N_s$  e  $M_s$ ) possuem duas parcelas distintas que os compõem: uma devido ao concreto  $f_c$  e a outra à armadura longitudinal  $A_s$ . Ambas possuem características distintas quanto a sua não-linearidade física: o concreto possui nove casos de deformação na seção (Tabela 7.1), por causa das três regiões de tensão (Figura 7.1), e a armadura longitudinal possui quatro casos conforme Figura 7.2.

Derivando-se a Eq. (3.6) em relação a uma variável aleatória  $X_i$  tem-se,

$$\frac{\partial N_s}{\partial X_i} = \iint_{Ac} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_i} dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial X_i} A_{si} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial X_i} A_{ss} \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial X_i} = - \iint_{Ac} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_i} y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial X_i} y_{si} A_{si} - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial X_i} y_{ss} A_{ss} \quad (7.35)$$



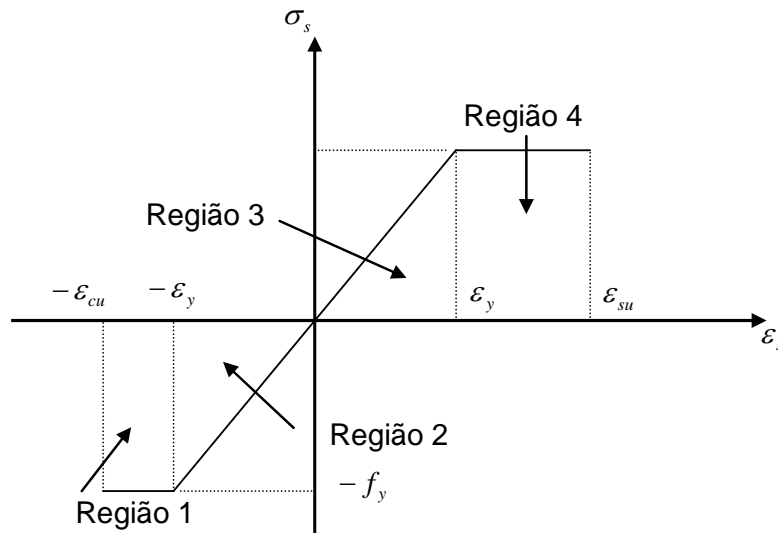


Figura 7.2 – Diagrama tensão-deformação de cálculo do aço classe A – Regiões.

## 8

### Aplicação numérica

Este capítulo apresenta os exemplos de aplicação desenvolvidos. Em cada um dos exemplos de projeto via DDO são avaliadas as confiabilidades dos estados limites (ELS – deslocamento restrito e ELU – carga crítica) e comparados com as do projeto via RBDO. Tanto a parte de otimização de pórticos planos de concreto armado (PQS, PLS), como a parte de confiabilidade estrutural (FORM) foram implementados em linguagem C.

Os coeficientes de variação ( $\delta$ ) e as distribuições (normal, lognormal, etc.) que descrevem o comportamento das variáveis aleatórias são estabelecidos de acordo com as recomendações do JCSS<sup>2,3</sup> (2001, 2000), de Melchers (2002) e Ellingwood (2003). O índice de confiabilidade desejado,  $\beta_t$ , é estabelecido de acordo com a recomendação de CEN (2001) (Tabela 4.3). Os valores característicos são estabelecidos de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004). O peso próprio é considerado determinístico nos exemplos de aplicação.

Para a determinação da carga crítica ( $\lambda^*$ ) dos exemplos, todas as cargas são amplificadas com exceção das cargas devido ao peso próprio. Nos exemplos 1, 2 e 3 são tomados como base os exemplos apresentados por Melo (2000b) para efeito comparativo (DDO versus RBDO), contudo, diferenciam-se pelo fato de os resultados apresentados neste trabalho obedecerem à nova NBR 6118.

#### 8.1.1.

##### Primeiro exemplo de aplicação

Neste exemplo tem-se uma coluna engastada-livre como mostra a Figura 8.1a. A coluna é discretizada em três elementos finitos (Figura 8.1b). É utilizado o Modelo I para o elemento finito e são adotados cinco pontos de Gauss para a integração numérica.  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{H}$  são considerados como carga permanente e como carga accidental, respectivamente. Os coeficientes de variação ( $\delta$ ) e as distribuições que descrevem o comportamento de  $\mathbf{f}_c$  e  $\mathbf{f}_y$  são estabelecidos de acordo com as recomendações de JCSS<sup>3</sup> (2000). O Módulo de elasticidade do aço

é considerado determinístico,  $E_s = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  (JCSS<sup>3</sup>, 2000), na avaliação das restrições de confiabilidade. Os parâmetros probabilísticos que são utilizados nesta aplicação estão descritos na Tabela 8.1.

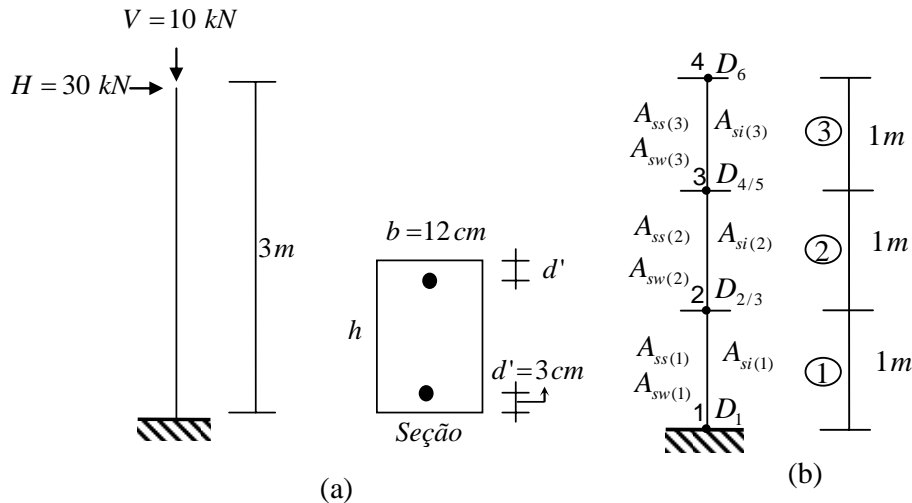


Figura 8.1 – (a) Dimensões e carregamento (b) malha e variáveis de projeto.

O exemplo é composto por 16 variáveis de projeto: a altura,  $h$ , (1 variável); a área de aço longitudinal inferior,  $A_{si}$ , (3 variáveis); a área de aço longitudinal superior,  $A_{ss}$ , (3 variáveis); a área de aço transversal,  $A_{sw}$ , (3 variáveis) e os parâmetros de deformação,  $D$ , (6 variáveis).

Neste exemplo são adotados os seguintes parâmetros:

- resistência característica à compressão do concreto,  $f_{ck} = 2 \text{ kN/m}^2$ ;
- resistência característica de escoamento do aço,  $f_{yk} = 5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ ;
- fatores de minoração do aço e do concreto,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\gamma_c = 1,4$ ;
- módulo de elasticidade do aço,  $E_s = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ;
- deslocamento horizontal nodal restringido (nó 4),  $u_{lim} = 0,02 \text{ m}$ ;
- fator de carga crítico mínimo determinístico,  $\lambda_{inf}^* = 1,5$ ;
- custo do concreto por metro cúbico,  $C_c = 79,24$ ;
- custo do aço por kg,  $C_s = 0,52$ ;
- custo da fôrma por  $\text{m}^2$ ,  $C_f = 6,30$ .

Os índices de confiabilidade mínimos para os estados limite de serviço e limite último, com um período de retorno de 50 anos, adotados são  $\beta_{ELS} = 1,5$  e  $\beta_{ELU} = 3,8$  (Tabela 4.3).

Variável	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação	Distribuição
$f_c$ (kN/cm <sup>2</sup> )	2,00	2,6578	0,3986	0,15	Lognormal
$f_y$ (kN/cm <sup>2</sup> )	50,00	56,00	3,00	0,0536	Lognormal
V (kN)	7,1428	7,1428	0,7142	0,10	Normal
H (kN)	21,4285	20,3753	5,0938	0,25	Gumbel (Tipo I - Máx)

Tabela 8.1 – Variáveis aleatórias da 1ª aplicação.

Neste exemplo tanto o DDO quanto o RBDO utilizam o algoritmo de otimização de programação quadrática sequencial (PQS).

Para esta aplicação, no método RBDO, foram consideradas duas restrições de confiabilidade (deslocamento restrito e carga crítica) e as demais restrições determinísticas utilizadas no método DDO. As restrições ativas para o RBDO são: de confiabilidade devido à flecha na extremidade livre; de armaduras necessárias de cisalhamento em todos os elementos; os critérios de resistência no elemento 1 relativa a  $N$  e a  $M/N$ , no nó 2 no elemento 2 referente a  $N$  e a  $M/N$  e no nó 3 no elemento 2 referente a  $N$ .

Analizando os resultados apresentados na Tabela 8.2 e o comportamento desta aplicação, a solução através do RBDO possui como principal restrição ativa a restrição de confiabilidade para o ELS (deslocamento restrito), sujeita a uma probabilidade de falha máxima considerada como apropriada ( $\beta = 1,5$  ou  $P_f = 6,68 \cdot 10^{-2}$ ). O  $\beta$  associado a instabilidade global foi de  $\beta_{ELU} = 7,5 > 3,8$ .

A solução através do RBDO mostrou-se mais interessante, pois fornece um projeto mais seguro atendendo ao limite mínimo para a confiabilidade no ELS e ELU, e as restrições determinísticas ao mesmo tempo.

Já na otimização via DDO, após uma análise de confiabilidade da estrutura ótima obtida, verifica-se que a estrutura apresenta uma confiabilidade satisfatória quanto ao estado limite último, mas muito baixa em relação ao estado limite de serviço ( $\beta_{ELU} = 7,4 > 3,8$  e  $\beta_{ELS} = 0,51 < 1,5$ ) conforme Tabela 8.2.

Variáveis	Ponto inicial	Solução (DDO)	Solução (RBDO)
$h$ (cm)	31,5	41,7	43,6
$A_{st(1)}$ (cm <sup>2</sup> )	4,658	0,321	0,000
$A_{st(2)}$ (cm <sup>2</sup> )	1,816	0,000	0,000
$A_{st(3)}$ (cm <sup>2</sup> )	0,945	0,196	0,000
$A_{ss(1)}$ (cm <sup>2</sup> )	9,275	8,975	9,843
$A_{ss(2)}$ (cm <sup>2</sup> )	6,433	5,186	5,575
$A_{ss(3)}$ (cm <sup>2</sup> )	2,981	1,770	1,697
$A_{sw(1)}$ (cm <sup>2</sup> /m)	2,824	1,983	1,889
$A_{sw(2)}$ (cm <sup>2</sup> /m)	2,824	1,983	1,889
$A_{sw(3)}$ (cm <sup>2</sup> /m)	2,824	1,983	1,889
$f$ (R\$)	32,85	35,51	37,04
$\lambda$	1,63	1,75	1,92
$\beta_{ELS/ELU}$	-	0,51 / 7,40	1,50 / 7,50
Tempo(seg)	-	8	45
NAFC <sup>a</sup>	-	-	352

<sup>a</sup> NAFC é o número de avaliações da função de comportamento.

Tabela 8.2 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do primeiro exemplo.

Após o processo de cálculo pelo RBDO obtiveram-se os coeficientes parciais de segurança e os fatores de importância de cada variável aleatória. Para se obter os coeficientes, primeiramente deve-se otimizar o projeto com uma confiabilidade alvo que nada mais é que RBDO. Depois, com o valor da variável aleatória no ponto de projeto e com o valor característico da mesma variável, calculam-se os fatores parciais de segurança através das Eqs.(4.38) e (4.39). Assim, tem-se na Tabela 8.3 os resultados dos coeficientes parciais de segurança para as restrições de confiabilidade (deslocamento restrito e carga crítica) que representam respectivamente o ELS e o ELU. Para o ELS, comparando-se os valores dos coeficientes parciais (Tabela 8.3) com os estabelecidos de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004) tem-se:  $f_c$  (0,84<1,0);  $f_y$  (0,89<1,0);  $V$  (1=1,0) e  $H$  (1,22>1). Para o ELU tem-se:  $f_c$  (2,07>1,4);  $f_y$  (0,89<1,15);  $V$  (1,02<1,4) e  $H$  (1,44>1,4).

	$f_c$	$f_y$	$V$	$H$
$\gamma_{ELS}$	0,84	0,89	1,00	1,22
$\gamma_{ELU}$	2,07	0,89	1,02	1,44

Tabela 8.3 – Coeficientes parciais de segurança da 1ª aplicação.

Na Tabela 8.4 tem-se os valores dos fatores de importância das variáveis aleatórias que permitem identificar as variáveis de maior influência nas funções de comportamento da estrutura. Para este primeiro exemplo de aplicação pode-se observar claramente através da Tabela 8.4 que as variáveis randômicas que têm maior sensibilidade (ou importância) no ponto de projeto são:  $f_c$  e  $H$ .

	$f_c$	$f_y$	$V$	$H$
$I_{ELS}$	0,24	0,00	0,00	0,76
$I_{ELU}$	0,80	0,00	0,00	0,20

Tabela 8.4 – Fatores de importância da 1ª aplicação.

### 8.1.2. Segundo exemplo de aplicação

Neste segundo exemplo são comparados os resultados de projeto obtidos através do DDO e RBDO para um pórtico plano, como mostra a Figura 8.2, com nove elementos finitos e 26 graus de liberdade. É utilizado o Modelo I, para o elemento finito e adotado cinco pontos de Gauss para a integração numérica. O modelo de elementos finitos considera a não-linearidade geométrica e a não-linearidade do material. As variáveis randômicas são apresentadas na Tabela 8.5 onde  $H_1$  e  $H_2$  são cargas acidentais, e  $V_1$  e  $V_2$  são cargas permanentes. Os parâmetros probabilísticos que descrevem o comportamento das variáveis randômicas  $f_c$  e  $f_y$  são definidos de acordo com as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2004) e do JCSS<sup>3</sup> (2000). O módulo de elasticidade do aço é considerado como determinístico na análise de confiabilidade das restrições probabilísticas,  $E_s = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Para a análise de confiabilidade das funções de comportamento são estabelecidos limites mínimos para os índices de confiabilidade (Tabela 4.3) com um período de retorno de 50 anos,  $\beta_{ELU} = 3,8$ ,  $\beta_{ELS} = 1,5$ , limitando o deslocamento no nó 4 e a carga crítica da estrutura, respectivamente.

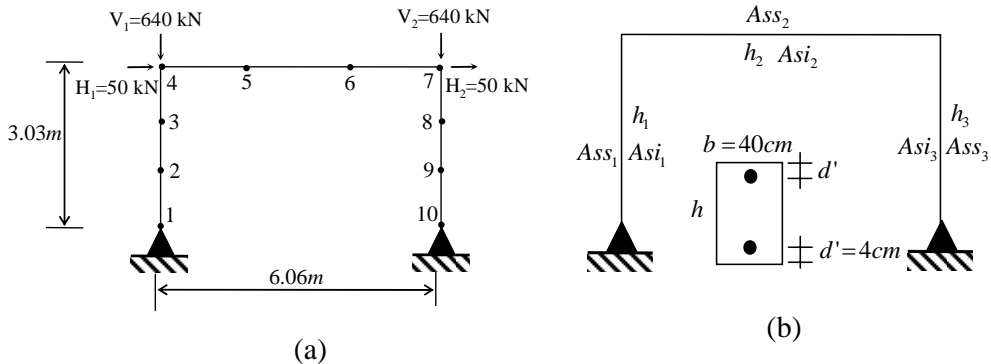


Figura 8.2 – (a) (b) Malha e variáveis de projeto.

O exemplo é composto por 36 variáveis de projeto: a altura,  $h$ , (3 variáveis); a área de aço longitudinal inferior,  $A_{si}$ , (3 variáveis); a área de aço longitudinal

superior,  $A_{ss}$ , (3 variáveis); a área de aço transversal,  $A_{sw}$ , (9 variáveis) e os parâmetros de deformação,  $D$ , (18 variáveis).

Neste exemplo são adotados os seguintes parâmetros: resistência característica à compressão do concreto,  $f_{ck} = 3 \text{ kN/cm}^2$ ; coeficiente de variação do concreto,  $\delta = 0,15$ ; resistência característica de escoamento do aço,  $f_{yk} = 5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  (CA-50); fatores de minoração do aço e do concreto,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\gamma_c = 1,4$ ; distância do centro de gravidade da armadura à borda mais próxima,  $d' = 4 \text{ cm}$ ; módulo de elasticidade do aço,  $E_s = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ; fator de carga crítico mínimo para análise determinística,  $\lambda_{inf}^* = 1,4$ ; deslocamento horizontal nodal restringido (nó 4),  $u_{lim} = 0,03 \text{ m}$ ; custo do concreto por metro cúbico,  $C_c = 215,24$ ; custo do aço por kg,  $C_s = 2,91$ ; custo da fôrma por  $\text{m}^2$ ,  $C_f = 58,00$ .

Variável	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coeficiente de Variação	Distribuição
$f_c \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	3,0000	3,9867	0,5980	0,1500	Lognormal
$f_y \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	50,0000	56,0000	3,0000	0,0536	Lognormal
$H_1 \text{ (kN)}$	50,0000	47,5456	11,8861	0,2500	Gumbel máx.
$V_1 \text{ (kN)}$	640,0000	640,000	64,0000	0,1000	Normal
$H_2 \text{ (kN)}$	50,0000	47,5456	11,8861	0,2500	Gumbel máx.
$V_2 \text{ (kN)}$	640,0000	640,000	64,0000	0,1000	Normal

Tabela 8.5 – Variáveis aleatórias da 2ª aplicação.

Na Tabela 8.6 são apresentados os valores para as variáveis iniciais e os valores finais para o projeto ótimo pelo DDO e pelo RBDO. É utilizado o algoritmo de otimização de programação linear sequencial (PLS). As restrições ativas para o RBDO são: de confiabilidade devido à carga crítica; de armadura mínima de cisalhamento em todos os elementos; do critério de resistência no nó 7 nos elementos 6 e 7 relativa a  $M/N$ . O projeto ótimo pelo DDO satisfaz as restrições determinísticas como o esperado. Analisando a confiabilidade deste projeto ótimo pode-se verificar que o índice de confiabilidade relacionado à função de comportamento devido à carga crítica é menor que o recomendado  $\beta_{ELU} = 3,26 < \beta_{TARGET} = 3.80$  (CEN, 2001). O projeto ótimo obtido pelo RBDO satisfaz ambas as restrições determinísticas e probabilísticas resultando em um projeto mais seguro.

Variáveis	Ponto inicial	DDO	RBDO
$h_{(1)} \text{ (cm)}$	40,00	49,72	55,27
$h_{(2)} \text{ (cm)}$	60,00	50,40	52,72
$h_{(3)} \text{ (cm)}$	40,00	35,68	34,88
$A_{si(1)} \text{ (cm}^2\text{)}$	15,10	7,13	7,78
$A_{si(2)} \text{ (cm}^2\text{)}$	16,70	16,81	17,01
$A_{si(3)} \text{ (cm}^2\text{)}$	15,10	6,89	5,75
$A_{ss(1)} \text{ (cm}^2\text{)}$	15,10	5,06	0,00
$A_{ss(2)} \text{ (cm}^2\text{)}$	16,70	12,28	11,35
$A_{ss(3)} \text{ (cm}^2\text{)}$	15,10	9,92	9,23
$f(R\$)$	2.216,33	1.847,26	1.854,04
$\lambda^*$	1,97	1,43	1,47
$\beta_{(ELS/ELU)}$	-	1,44 / 3,26	1,83 / 3,79
$\text{Tempo(seg)}$	-	60	230
$NAFC^a$	-	-	1207

<sup>a</sup> NAFC é o número de avaliações da função de comportamento.

Tabela 8.6 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do segundo exemplo.

Buscando-se verificar os resultados das análises de confiabilidade obtidos pelo método do segundo momento (FORM), para este exemplo de aplicação via RBDO, foi feita uma comparação com os resultados obtidos pelo método de Monte Carlo (MC) (Tabela 8.7). Para a comparação da probabilidade de falha da função de comportamento devido ao deslocamento restrito foram gerados 50.000 valores randômicos para cada variável não-determinística. Para a comparação da probabilidade de falha da função de comportamento devido à carga crítica da estrutura foram gerados 350.000 valores randômicos para cada variável não-determinística. Pode-se observar que os resultados obtidos pelo método FORM foram próximos aos obtidos via método de MC e com um tempo muitíssimo inferior.

	Função de Comportamento			
	Deformação restrita (ELS)		Carga crítica (ELU)	
	Método		Método	
	FORM	MC	FORM	MC
Média	-	1,93 cm	-	2,28
Desvio Padrão	-	0,54 cm	-	0,35
Probabilidade de falha	$3,36 \cdot 10^{-2}$	$4,35 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$
$\beta_{(ELS/ELU)}$	1,83	1,71	3,79	3,71

Tabela 8.7 – Comparação de resultados obtidos da 2ª aplicação via RBDO pelo método FORM e pelo método de Monte Carlo (MC).

Na Tabela 8.8 são apresentados os fatores parciais de segurança para as variáveis randômicas. Eles são obtidos pelas Equações 4.38 e 4.39. Os resultados dos coeficientes parciais de segurança para as restrições de confiabilidade (deslocamento restrito e carga crítica) representam respectivamente o ELS e o ELU. Para o ELS, comparando-se os valores dos coeficientes parciais (Tabela 8.8)



com os estabelecidos de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004) tem-se:  $f_c$  (0,83<1,0);  $f_y$  (0,90<1,0);  $V_1$  e  $V_2$  (1=1,0);  $H_1$  (1,24>1,0) e  $H_2$  (1,26>1,0). Para o ELU tem-se:  $f_c$  (0,91<1,4);  $f_y$  (0,92<1,15);  $V_1$  e  $V_2$  (1<1,4);  $H_1$  (1,79>1,4) e  $H_2$  (1,82>1,4).

	$f_c$	$f_y$	$H_1$	$V_1$	$H_2$	$V_2$
$\gamma_{ELS}$	0,83	0,90	1,24	0,99	1,26	1,00
$\gamma_{ELU}$	0,91	0,92	1,79	0,97	1,82	1,01

Tabela 8.8 – Coeficientes parciais de segurança da 2ª aplicação.

Na Tabela 8.9 são apresentados os fatores de importância de função de comportamento em relação às variáveis aleatórias deste exemplo. Para este segundo exemplo de aplicação pode-se observar que as variáveis randômicas que têm maior sensibilidade (ou importância) no ponto de projeto são:  $H_1$  e  $H_2$ .

	$f_c$	$f_y$	$H_1$	$V_1$	$H_2$	$V_2$
$I_{ELS}$	0,09	0,00	0,42	0,01	0,48	0,00
$I_{ELU}$	0,07	0,01	0,44	0,01	0,47	0,00

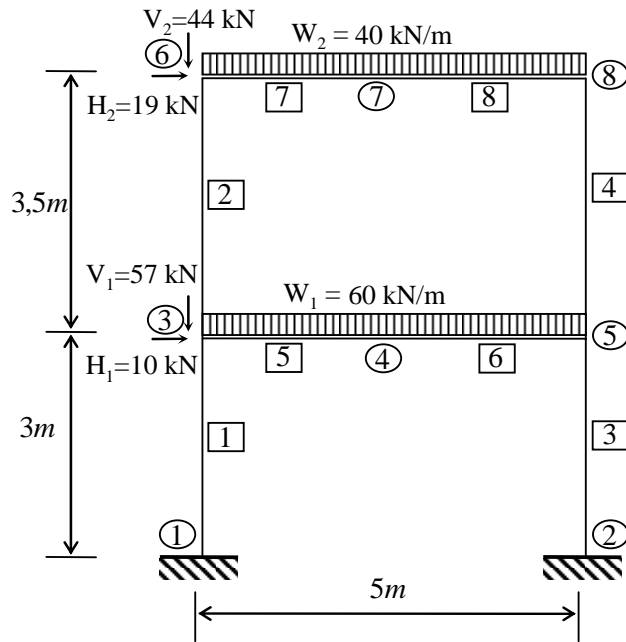
Tabela 8.9 – Fatores de importância da 2ª aplicação.

### 8.1.3.

#### Terceiro exemplo de aplicação

Neste terceiro exemplo tem-se um pórtico de dois pavimentos com um vão, como mostra a Figura 8.3, onde aplicam-se os pesos próprios para os pilares ( $25 \times 35 \text{ cm}^2$ ) iguais a 2,07 kN/m, para a viga inferior ( $25 \times 45 \text{ cm}^2$ ) 3,1 kN/m e para a superior 3,44 kN/m, considerando-se seus valores como determinísticos. As cargas atuantes (Figura 8.3) já estão majoradas ( $\gamma_f = 1,4$ ). Este pórtico é discretizado em oito elementos finitos (Figura 8.3). É utilizado o Modelo I, para o elemento finito e adotado cinco pontos de Gauss para a integração numérica. O modelo de elementos finitos considera a não-linearidade geométrica e a não-linearidade do material. As variáveis randômicas são apresentadas na Tabela 8.10 onde  $H_1$  e  $H_2$  são cargas acidentais, e  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $W_1$  e  $W_2$  são cargas permanentes. Os coeficientes de variação e as distribuições probabilísticas descrevem o comportamento das variáveis randômicas  $f_c$  e  $f_y$  definidos de acordo com as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2004) e do JCSS<sup>3</sup> (2000). Para a análise de confiabilidade das funções de comportamento são estabelecidos limites mínimos para os índices de confiabilidade com um período de retorno de 50 anos,  $\beta_{ELU} =$

3,8 e  $\beta_{ELS} = 1,5$ , limitando o deslocamento vertical no nó 7 e a carga crítica da estrutura, respectivamente.



(a)

Figura 8.3 – Geometria do terceiro exemplo.

O exemplo é composto por 50 variáveis de projeto (Figura 8.4): a altura,  $h$ , (6 variáveis); a área de aço longitudinal inferior,  $A_{si}$ , (10 variáveis); a área de aço longitudinal superior,  $A_{ss}$ , (10 variáveis); a área de aço transversal,  $A_{sw}$ , (8 variáveis) e os parâmetros de deformação,  $D$ , (16 variáveis).

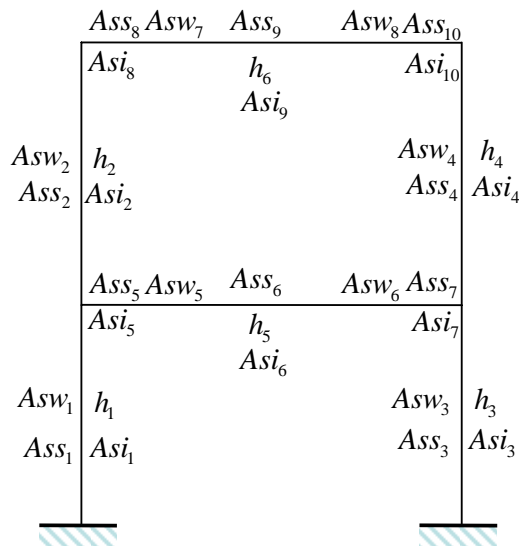


Figura 8.4 – Variáveis de projeto do terceiro exemplo nos elementos.

Neste exemplo são adotados os seguintes parâmetros: resistência característica a compressão do concreto,  $f_{ck} = 2,5 \text{ kN/m}^2$ ; resistência característica de escoamento do aço,  $f_{yk} = 4 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  (CA-40A); fatores de minoração do aço e do concreto,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\gamma_c = 1,4$ ; distância do centro de gravidade da armadura à borda mais próxima,  $d' = 5 \text{ cm}$ ; módulo de elasticidade do aço,  $E_s = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ; fator de carga crítico mínimo para as restrições determinísticas,  $\lambda_{\text{inf}}^* = 1,5$ ; deslocamento vertical no nó restringido (nó 7),  $u_{\text{lim}} = 0,02 \text{ m}$ ; idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração,  $t_0 = 4$  meses; tempo quando se deseja o valor da flecha diferida,  $t = 40$  meses; custo do concreto por metro cúbico,  $C_c = 198,98$ ; custo do aço por kg,  $C_s = 2,91$ ; custo da fôrma por  $\text{m}^2$ ,  $C_f = 58,00$ .

Variável	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação	Distribuição
$f_c \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	2,5000	3,3222	0,4983	0,1500	Lognormal
$f_y \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	40,0000	46,000	3,0000	0,0652	Lognormal
$H_1 \text{ (kN)}$	7,1428	6,7920	1,6980	0,2500	Gumbel máx.
$V_1 \text{ (kN)}$	40,7142	40,7142	4,0714	0,1000	Normal
$W_1 \text{ (kN/m)}$	42,8571	42,8571	4,2857	0,1000	Normal
$H_2 \text{ (kN)}$	13,5714	12,9050	3,2262	0,2500	Gumbel máx.
$V_2 \text{ (kN)}$	31,4286	31,4286	3,1428	0,1000	Normal
$W_2 \text{ (kN/m)}$	28,5714	28,5714	2,8571	0,1000	Normal

Tabela 8.10 – Variáveis aleatórias da 3ª aplicação.

Na Tabela 8.11 são apresentados os valores para as variáveis iniciais, e os valores finais após a otimização somente para as variáveis referentes às alturas da seção do elemento  $h_i$ . É utilizado o algoritmo de otimização de programação quadrática sequencial (PQS). As restrições ativas para o RBDO são: de confiabilidade devido ao deslocamento vertical limitado no nó 7; de armadura necessária de cisalhamento nos elementos de 3 ao 8; de armadura de cisalhamento mínima nos elementos 1 e 2; dos critérios de resistência no elemento 2 relativa a  $M/N$  e no nó 5 elemento no elemento 6 relativa a  $N$ .

Variáveis	Ponto inicial	DDO	RBDO
$h_{(1)} \text{ (cm)}$	35,0	22,26	20,00
$h_{(2)} \text{ (cm)}$	35,0	20,49	20,15
$h_{(3)} \text{ (cm)}$	35,0	29,12	25,84
$h_{(4)} \text{ (cm)}$	35,0	32,44	26,63
$h_{(5)} \text{ (cm)}$	45,0	42,99	47,40
$h_{(6)} \text{ (cm)}$	45,0	52,22	55,10
$f(R\$)$	2.364,71	2.059,18	2.019,24
$\lambda^*$	2,75	2,08	2,03
$\beta_{ELS/ELU}$	-	0,92 / 10,92	1,51 / 10,77
$\text{Tempo(seg)}$	-	50	136
$NAFC^a$	-	-	414

<sup>a</sup>  $NAFC$  é o número de avaliações das funções de comportamento.

Tabela 8.11 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do terceiro exemplo.

Como nos exemplos anteriores o projeto ótimo pelo DDO satisfaz as restrições determinísticas como o esperado, entretanto, quando verificada a confiabilidade desse projeto ótimo pode se verificar que o índice de confiabilidade relacionado à função de comportamento devida ao deslocamento restrito é menor que o recomendado ( $\beta_{ELS} = 0,92 < \beta_{TARGET} = 1,50$ ) enquanto o índice de confiabilidade relativo à função de comportamento devida à carga crítica é excessivo ( $\beta_{ELU} = 10,92 > \beta_{TARGET} = 3,80$ ). O projeto ótimo obtido pelo RBDO satisfaz ambas as restrições determinísticas e probabilísticas resultando em um projeto mais seguro.

Na Tabela 8.12 são apresentados os fatores parciais de segurança para as variáveis randômicas. Para este exemplo podem-se observar os resultados dos coeficientes parciais de segurança para as restrições de confiabilidade (deslocamento restrito e carga crítica) que representam respectivamente o ELS e o ELU. Para o ELS, comparando-se os valores dos coeficientes parciais (Tabela 8.12) com os estabelecidos de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004) tem-se:  $f_c$  (0,89<1,0);  $f_y$  (0,88<1,0);  $V_1$ ,  $V_2$  e  $W_1$  (1=1,0);  $W_2$  (1,11>1,0);  $H_1$  (0,91<1,0) e  $H_2$  (0,86<1,0). Para o ELU tem-se:  $f_c$  (2,39>1,4);  $f_y$  (1,14<1,15);  $V_1$  e  $V_2$ , (1,02<1,4),  $W_1$  (1,62>1,4);  $W_2$  (1,06<1,4);  $H_1$  (1,03<1,4) e  $H_2$  (0,71<1,4).

	$f_c$	$f_y$	$H_1$	$V_1$	$W_1$	$H_2$	$V_2$	$W_2$
$\gamma_{ELS}$	0,89	0,88	0,91	1,01	1,00	0,86	1,00	1,11
$\gamma_{ELU}$	2,39	1,14	0,83	1,03	1,62	0,71	1,02	1,06

Tabela 8.12 – Coeficientes parciais de segurança da 3ª aplicação.

Na Tabela 8.13 são apresentados os fatores de importância da função de comportamento em relação às variáveis aleatórias deste exemplo. Pode-se observar que as variáveis randômicas que têm maior sensibilidade (ou importância) no ponto de projeto são:  $f_c$  e  $W_2$  para o ELS e  $f_c$  e  $W_1$  para o ELU.

	$f_c$	$f_y$	$H_1$	$V_1$	$W_1$	$H_2$	$V_2$	$W_2$
$I_{ELS}$	0,46	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,00	0,50
$I_{ELU}$	0,50	0,15	0,00	0,00	0,33	0,02	0,00	0,00

Tabela 8.13 – Fatores de importância da 3ª aplicação.

#### 8.1.4.

#### Quarto exemplo de aplicação

Neste quarto exemplo são comparados os resultados de projeto obtidos através do DDO e RBDO para um pórtico plano, como mostra a Figura 8.5, onde aplicam-se os pesos próprios para os pilares ( $25 \times 30 \text{ cm}^2$ ) iguais a 2,07 kN/m,

para a viga ( $25 \times 35 \text{ cm}^2$ )  $3,44 \text{ kN/m}$ , com nove elementos finitos e 24 graus de liberdade. É utilizado o Modelo I, para o elemento finito e adotado cinco pontos de Gauss para a integração numérica. O modelo de elementos finitos considera a não-linearidade geométrica e a não-linearidade do material. As variáveis randômicas são apresentadas na Tabela 8.14 onde  $q_{\text{total}}$  é a carga acidental e  $V_w$  é a velocidade básica do vento. Os parâmetros probabilísticos que descrevem o comportamento das variáveis randômicas  $f_c$  e  $f_y$  são definidos de acordo com as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2004) e do JCSS<sup>3</sup> (2000). O módulo de elasticidade é considerado como determinístico na análise de confiabilidade das restrições probabilísticas,  $E_s = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Para a análise de confiabilidade das funções de comportamento são estabelecidos limites mínimos para os índices de confiabilidade (Tabela 4.3) com um período de retorno de 50 anos,  $\beta_{\text{ELS}} = 1,5$  e  $\beta_{\text{ELU}} = 3,8$ , limitando o deslocamento horizontal no nó 4 e a carga crítica da estrutura, respectivamente.

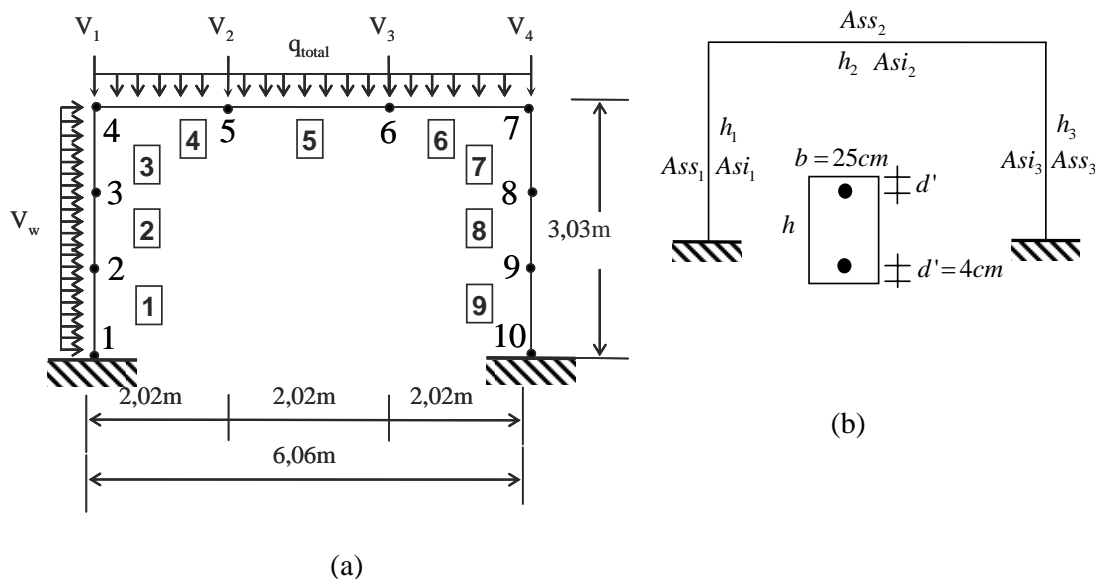


Figura 8.5 – (a) Dimensões, carregamento e malha (b) variáveis de projeto.

Neste exemplo são adotados os seguintes parâmetros: resistência característica a compressão do concreto,  $f_{ck} = 3,0 \text{ kN/m}^2$ ; resistência característica de escoamento do aço,  $f_{yk} = 5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  (CA-50); fatores de minoração do aço e do concreto utilizados nas restrições determinísticas,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\gamma_c = 1,4$ ; distância do centro de gravidade da armadura à borda mais próxima,  $d' = 4 \text{ cm}$ ; módulo de elasticidade do aço,  $E_s = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ; fator de carga crítico mínimo para a

análise determinística,  $\lambda_{inf}^* = 1,4$ ; deslocamento horizontal nodal restringido (nó 4),  $u_{lim} = 0,01$  m; custo do concreto por metro cúbico,  $C_c = 215,24$ ; custo do aço por kg,  $C_s = 2,91$ ; custo da fôrma por  $m^2$ ,  $C_f = 58,00$ .

O exemplo é composto por 36 variáveis de projeto: a altura,  $h$ , (3 variáveis); a área de aço longitudinal inferior,  $A_{si}$ , (3 variáveis); a área de aço longitudinal superior,  $A_{ss}$ , (3 variáveis); a área de aço transversal,  $A_{sw}$ , (9 variáveis) e os parâmetros de deformação,  $D$ , (18 variáveis).

Neste quarto exemplo de aplicação tem-se um pórtico bi-engastado sujeito à carga de vento (cidade do Rio de Janeiro) e a cargas acidentais (edifício de escritórios).

### ***Carga de vento***

A carga devida ao vento deste exemplo de aplicação é retirada do trabalho de Santos (2005). Segundo a NBR 6123 (ABNT, 1988) a carga total,  $q_k$  (pressão mais sucção), a ser considerada para um prédio localizado no centro de uma grande cidade é:

$$q_k = (C_e - C_i) 0,613 V_k^2 \quad (8.1)$$

$$V_k = V_o S_1 S_2 S_3 \quad (8.2)$$

onde:

- $V_o$  é a velocidade básica do vento que apresenta um período de recorrência médio de 50 anos. A probabilidade de que a velocidade  $V_o$  seja igualada ou excedida neste período é de 63%;
- $V_k$  é a velocidade característica do vento;
- $S_1$  e  $S_3$  são o fator topográfico e o fator estatístico, respectivamente;
- $S_2$  representa a rugosidade do terreno, dimensões da edificação e altura sobre o terreno;
- $C_e$  e  $C_i$  coeficiente de forma externo e interno, respectivamente.

Para este exemplo são assumidos os seguintes valores:  $V_o = 35$  m/s para a cidade do Rio de Janeiro;  $S_1 = 1,0$  para terreno plano;  $S_2 = 1,0$  para uma altura de 80 m;  $S_3 = 1,0$  edificação de um edifício para escritórios;  $C_e - C_i = 1,2$  (Santos, 2005) e  $a_1 = 5$  m, que é a distância perpendicular entre as colunas.

A média das velocidades máximas anuais do vento ( $\mu_v$ ), i.e. máximas ocorridas em um ano, para um tempo de retorno médio ( $\bar{T}$ ) da velocidade básica do vento ( $V_0$ ) de 50 anos é (Hart, 1982; Santos, 2005):

$$\bar{T} = \frac{1}{1 - CDF_{V_{w1}}(V_0)} \Rightarrow 50 = \frac{1}{1 - CDF_{V_{w1}}(35)} \therefore \mu_v = 23,0497 \text{ m/s} \quad (8.3)$$

onde  $CDF_{V_{w1}}$  é a distribuição de probabilidade acumulada das máximas velocidades anuais do vento para um período de medida de um ano.

Para o cálculo via RBDO é considerado que o comportamento da velocidade do vento é representado pela função Gumbel para valores máximos e que a velocidade máxima média anual possui: média de 23,05 m/s (tempo de retorno de 50 anos); desvio padrão igual a 4,61 m/s. Assumindo uma vida de projeto de 50 anos e de acordo com a teoria de valores extremos tem-se a média e o desvio padrão da velocidade para 50 anos (JCSS<sup>2</sup>, 2001):

$$\mu_{V_{w50}} = \mu_{V_w} + 0,78\sigma_{V_w} \ln(T) = 23,05 + 0,78 \times 4,61 \times \ln(50) = 37,11 \text{ m/s} \quad (8.4)$$

$$\sigma_{V_{w50}} = \sigma_{V_w} = 4,61 \text{ m/s} \quad (8.5)$$

### ***Carga accidental***

A viga suporta uma laje de concreto de prédio de escritórios. As cargas aplicadas são supostas compostas por duas partes: cargas de longa duração e cargas de curta duração. As definições e valores seguidos são as especificados pelo JCSS<sup>2</sup>, (2001).

Para as *cargas de longa duração* (sustained loads) adota-se a distribuição Gamma com média ( $\mu=0,5 \text{ kN/m}^2$ ) correspondente a uma distribuição de 5 anos e com intensidade de duração de carga permanente para o intervalo, ou seja, é considerado que o período de renovação de carga é de 5 anos. Isto quer dizer que a carga tem um valor constante durante 5 anos e se renova depois deste período. O desvio padrão da carga de longa duração é determinado de acordo com a expressão:

$$\sigma_{(qlt)} = \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_u^2 \frac{A_0}{A} \varpi} \quad (8.6)$$

$$\sigma_{(qlt)} = \sqrt{0,3^2 + 0,6^2 \frac{20}{30} 2} = 0,75 \text{ kN/m}^2$$

onde  $\sigma_v = 0,3 \text{ kN/m}^2$  e  $\sigma_u = 0,6 \text{ kN/m}^2$  são os desvios padrões parciais que descrevem o modelo estocástico para as cargas constantes dentro de um determinado período (e.g. peso de mobílias, peso de equipamentos);  $A_0 = 20 \text{ m}^2$  é a área de referência;  $A = 30 \text{ m}^2$  é a área de influência deste exemplo;  $\varpi = 2$  é o fator de forma de linha de influência.

Para as *cargas de curta duração* (intermittent loads, e.g., ajuntamento de pessoas, reuniões lotadas durante um evento especial, ou estocagem temporária de móveis para realocação) é adotada uma distribuição Gamma com média ( $\mu = 0,2 \text{ kN/m}^2$ ) e desvio padrão parcial ( $\sigma_{(u)} = 0,4 \text{ kN/m}^2$ ). A taxa de renovação de carga é de 1 ano e o intervalo de intensidade de duração de carga é de 1/365, ou seja, um dia por ano. O valor final do desvio padrão da carga de curta duração é então,

$$\sigma_{(qst)} = \sqrt{\sigma_{(u)}^2 \frac{A_0}{A} \varpi} = \sqrt{0,4^2 \frac{20}{30} 2} = 0,46 \text{ kN / m}^2 \quad (8.7)$$

Em 5 anos supõe-se que a carga de curta duração será excedida 5 vezes, ou seja, uma por ano. A função cumulativa de probabilidade para 5 anos será :

$$CDF_{qst5} = (CDF_{qst1})^5 \quad (8.8)$$

Para se obter a função cumulativa de probabilidade da carga acidental total ( $q_{total} = q_{lt} + q_{st}$ ) é necessário calcular uma integral de convolução

$$CDF_{qtotal5} = \int_0^{q_{total}} CDF_{q_{lt}}(q) PDF_{q_{st5}}(q_{total} - q).dq \quad (8.9)$$

Em 50 anos, a função cumulativa de probabilidade da carga acidental total é

$$CDF_{qtotal50} = (CDF_{qtotal5})^{10} \quad (8.10)$$

A função  $CDF_{qtotal50}$  pode ser aproximada por uma função Gumbel com média ( $\mu = 3,78 \text{ kN/m}^2$ ) e desvio padrão ( $\sigma = 1,28 \text{ kN/m}^2$ ).

Para esta carga acidental total foi adotado que há uma probabilidade de 25% das cargas serem ultrapassadas no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos.



Variável	Distribuição	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
$a_1$ (m)	Determinístico	5	-	-	-
$f_c$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Lognormal	3,0000	3,9867	0,5980	0,1500
$f_v$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Lognormal	50,0000	56,0000	3,0000	0,0536
$q_{total}$ (kN/m <sup>2</sup> )	Gumbel máx.	4,4473	3,7800	1,2800	0,3386
$V_w$ (m/s)	Gumbel máx.	35,0000	37,1164	4,6099	0,1242
$V_1$ (kN)	Determinístico	300	-	-	-
$V_2$ (kN)	Determinístico	5	-	-	-
$V_3$ (kN)	Determinístico	5	-	-	-
$V_4$ (kN)	Determinístico	300	-	-	-

Tabela 8.14 – Parâmetros probabilísticos e determinísticos da 4ª aplicação.

Neste exemplo tanto o DDO como o RBDO, utilizam o algoritmo de otimização de programação quadrática sequencial (PQS).

Variáveis	Ponto inicial	DDO	RBDO
$h_{(1)}$ (cm)	70	26,21	28,76
$h_{(2)}$ (cm)	40	31,46	30,32
$h_{(3)}$ (cm)	40	20,00	21,65
$A_{si(1)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.1	6,66	3,44
$A_{si(2)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.7	5,09	4,72
$A_{si(3)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.1	6,77	3,37
$A_{ss(1)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.1	6,67	4,08
$A_{ss(2)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.7	6,67	8,79
$A_{ss(3)}$ (cm <sup>2</sup> )	10.1	6,23	2,54
$f$ (R\$)	1.615,99	960,16	905,14
$\lambda^*$	6,37	1,70	1,51
$\beta_{(ELS/ELU)}$	-	1,18 / 10,81	1,51 / 8,76
$Tempo(seg)$	-	32	120
$NAFC^a$	-	-	597

<sup>a</sup> NAFC é o número de avaliações da função de comportamento.

Tabela 8.15 – Valores iniciais e finais das variáveis de projeto do quarto exemplo.

As restrições ativas para o RBDO são: de confiabilidade devido ao deslocamento restrito; de armadura mínima de cisalhamento nos elementos 3, 5, 7, 8 e 9; do critério de resistência no nó 2 nos elementos 1 e 2 relativa a  $M/N$ ; no nó 3 nos elementos 2 e 3 relativa a  $M/N$ ; no nó 4 elemento 3 relativo a  $M/N$  e no elemento 9 nó 10 relativo a  $M/N$ .

O projeto ótimo pelo DDO satisfaz as restrições determinísticas como o esperado. Mas ao verificar-se a confiabilidade do projeto ótimo determinístico (DDO) observa-se que o índice de confiabilidade relacionado à função de comportamento devida ao deslocamento restrito é menor que o recomendado ( $\beta_{ELS} = 1,18 < \beta_{TARGET} = 1,50$ ) enquanto o índice de confiabilidade relativo à função de comportamento devida à carga crítica é excessiva ( $\beta_{ELU} = 10,81 > \beta_{TARGET} = 3,80$ ). O projeto ótimo obtido pelo RBDO satisfaz ambas as restrições determinísticas e probabilísticas resultando em um projeto mais confiável.

Na Tabela 8.16 são apresentados os fatores parciais de segurança para as variáveis randômicas. Para este exemplo pode-se observar os resultados dos coeficientes parciais de segurança para as restrições de confiabilidade (deslocamento restrito e carga crítica) que representam respectivamente o ELS e o ELU (Tabela 8.16). Para o ELS, comparando-se os valores dos coeficientes parciais com os estabelecidos de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2004), tem-se:  $f_c$  (0,92<1,0);  $f_y$  (0,90<1,0);  $q_{total}$  (1,23>1,0) e  $V_w$  (0,83<1,0). Para o ELU tem-se:  $f_c$  (2,21>1,4);  $f_y$  (1,08<1,15);  $q_{total}$  (1,32<1,4) e  $V_w$  (1,46>1,4).

	$f_c$	$f_y$	$q_{total}$	$V_w$
$\gamma_{ELS}$	0,92	0,90	1,23	0,83
$\gamma_{ELU}$	2,21	1,08	1,32	1,46

Tabela 8.16 – Coeficientes parciais de segurança da 4ª aplicação.

Na Tabela 8.17 são apresentados os fatores de importância de função de comportamento em relação as variáveis aleatórias deste exemplo. Pode-se observar que as variáveis randômicas que têm maior sensibilidade (ou importância) no ponto de projeto são:  $f_c$  e  $q_{total}$  para o ELS e  $f_c$ ,  $f_y$  e  $V_w$  para o ELU.

	$f_c$	$f_y$	$q_{total}$	$V_w$
$I_{ELS}$	0,65	0,00	0,32	0,03
$I_{ELU}$	0,66	0,16	0,02	0,16

Tabela 8.17 – Fatores de importância da 4ª aplicação.

## 9

## Considerações finais

### 9.1.

### Conclusões

Como se pode constatar através das aplicações, quando comparados aos projetos ótimos obtidos via RBDO, os projetos ótimos obtidos via DDO podem conduzir a projetos demasiadamente seguros e antieconômicos ou a projetos com um baixo nível de segurança. Ao se adotar o RBDO é possível se obter um projeto ótimo seguro com uma probabilidade de falha pré-fixada. Com essa ferramenta, pode-se otimizar o custo do pórtico com relação aos volumes de aço e de concreto e à área de fôrma considerando algumas das principais incertezas que constituem o problema de pórticos planos de concreto armado. O estado limite último (cargas críticas) e os estados limites de utilização (e.g., deslocamento restrito) são avaliados pelas restrições determinísticas e não-determinísticas.

Dentro do contexto da revisão bibliográfica, este trabalho é o primeiro a utilizar técnicas de programação matemática (e.g., SQP, SLP) para a obtenção do projeto ótimo de estruturas de pórtico plano de concreto armado sujeitas a restrições determinísticas e não-determinísticas considerando-se a não-linearidade física e geométrica do problema. As restrições não-determinísticas utilizam o método de segundo momento (FORM) com o enfoque da medida de desempenho (PMA – HMV). O procedimento adotado fornece como dados de saída para o projeto ótimo: as alturas das seções ( $h$ ); as áreas de aço longitudinais ( $A_{ss}$  e  $A_{si}$ ) e as áreas de aço transversais ( $A_{sw}$ ).

Neste trabalho são consideradas como variáveis aleatórias no processo de avaliação das restrições de confiabilidade: a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ); as cargas permanentes e acidentais (e.g., vento). A introdução das cargas como variáveis aleatórias mostrou-se de fundamental importância na obtenção da confiabilidade desejada, descrevendo de maneira mais precisa a aleatoriedade do problema.

Uma das vantagens da utilização do RBDO via FORM é a possibilidade de se obter os coeficientes parciais de segurança para um estado limite de uma estrutura específica, bem como os fatores de importância das variáveis aleatórias. Deste modo, é possível avaliar quais são as variáveis que realmente importam na análise, sem nenhum custo adicional de processamento, pois os mesmos são subprodutos do RBDO (FORM).

## **9.2.**

### **Sugestões para trabalhos futuros**

A seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros para se complementar os estudos iniciados com o presente trabalho:

- O desenvolvimento de uma formulação para se obter o projeto ótimo de pórticos em 3D sujeitos a restrições determinísticas e não-determinísticas;
- O desenvolvimento de uma formulação para se obter o projeto ótimo de estruturas protendidas sujeitas a restrições determinísticas e não-determinísticas;
- A consideração da altura  $h$ , da largura  $b$ , do cobrimento das armaduras dos elementos  $d'$  e dos fatores de modelagem também como variáveis randômicas;
- A implementação de uma interface gráfica para o programa, o tornado assim de fácil manipulação e compreensão da entrada e saída dos dados.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8953**: Concreto para fins estruturais – Classificação por grupos de resistência. Rio de Janeiro, 1992.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; EBOLI, C. R. 2005. **Reliability-based design optimization of reinforced concrete cross-section under uniaxial moment and axial force**. XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari-ES, Brasil.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; EBOLI, C. R. 2006. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de uma coluna modelo de concreto armado submetida à flexão composta reta**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, São Paulo-SP, Brasil.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; 2007. **Comparação entre o projeto ótimo determinístico e o baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. XXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Porto, Portugal.

ALMEIDA, A. F. de. **Otimização de componentes pré-moldados de concreto protendido**. 2004. 177 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia – GO.

ALMEIDA, S. R. M. de. **Contribuição ao projeto ótimo de cabos em vigas de concreto protendido**. 2001. 166 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

AL-HARTHY, A. S.; FRANGOPOL, D. M., 1994. **Reliability-Based Design of Prestressed Concrete Beams**. ASCE Journal of the Structural Engineering, Vol. 120, No.11, 3156p-3177p.

ANG, A. H. S.; CORNELL, C. A., 1974. **Reliability bases of structural safety and design**. ASCE Journal of the Structural Division, Vol.100, No.9, 1755p-1769p.

ARAÚJO, J. M. 2001. **Probabilistic analysis of reinforced concrete columns**. Advances in engineering software 32, 871p-879p, Elsevier.

ARAÚJO, J. M.; REAL, M. de V., 2002. **Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com a nova NBR-6118**. 44º Congresso Brasileiro do Concreto, Belo Horizonte-MG, Brasil.

BALLING, R. J.; YAO, X., 1997. “**Optimization of reinforced concrete frames**”. Journal of structural optimization, Ed. J. S. Arora, ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice, v. 123, No. 2, pp. 193-202.

BA-ABBAD, M. A., 2004. **Reliability-Based Design Optimization of a Nonlinear Elastic Plastic Thin-Walled T-Section Beam**. Dissertation, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 247 pages.

CEN, 2001. **European committee for standardization**. EN 1990 – Europe: Basis of Structural Design.

CHAUDHURI, A.; CHAKRABORTY, S., 2006. **Reliability of linear structures with parameter uncertainty under non-stationary earthquake**. Structural Safety 28, 231p–246p, Elsevier.

CHOI, H.H.; LEEB, S.Y.; CHOIC, I.Y.; CHOD, H.N.; MAHADEVAN, S., 2006. **Reliability-based failure cause assessment of collapsed bridge during construction**. Reliability Engineering and System Safety 91, 674p–688p, Elsevier.

CHOI, K. K.; YOUN, B. D., 2001. **Advances in Reliability Based Optimization and Probability Analysis**. NASA/ICASE Series on Risk-Based Design, 2001. Iowa City, USA.

DINIZ, S. M. C., 2005. **Structural reliability-based methods: rational tools for design codes development**. XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari-ES, Brasil.

EBOLI, C. R., 1989. **Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado à Flexão Composta Oblíqua**. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E.; MULLER, A. L., 2004, **Aplicação do parâmetro beta de confiabilidade em otimização de estruturas**. XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Recife-PE, Brasil.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E., 2005. **Optimization of plane trusses with constraints in the reliability index Beta**. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

ELLINGWOOD, B. R., 1996. **Reliability-Based condition assessment and LRFD for existing structures**. Structural Safety Vol. 18, No. 2/3, 67p–80p; Elsevier Science Ltd. Netherlands.

ELLINGWOOD, B. R., 2003. **Toward load and resistance factor design for fiber-reinforced polymer composite structures**. Journal of Structural Engineering ASCE, vol. 129, No. 4. 449p–458p.

ENEVOLDSEN, I., 1993. **Sensitivity Analysis of Reliability-Based Optimization Models**. 465p–472p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.

FRANGOPOL, D. M.; IDE, Y.; SPACONE, E.; IWAKI, I., 1996. **A new look at reliability of reinforced concrete columns**. Structural Safety Vol. 18 No. 2/3, pp. 123-150. Elsevier.

FRIEL, L. L. 1974. **Optimum Singly reinforced concrete sections**. ACI Structural Journal, Vol.71, No.11, pp. 556-558.

GOMES, H. M. 2003, **Análise da confiabilidade estrutural levando em conta a aleatoriedade das propriedades do concreto**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil.

GULVANESSIAN, H.; CALGARO, J.; HOLICKY, M., 2002. **Designers' guide to EN 1990; EUROCODE: basis of structural design**. 192p. Thomas Telford, London.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. 1993. **Elements of structural optimization**. 481pp. Kluwer academic publishers, Netherlands.

HART, G. C., 1982. **Uncertainty Analysis, Loads and Safety in Structural Engineering**. 224p. Prentice-Hall Editor, New Jersey, USA.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. 1974. **Exact and invariant Second-Moment code format**, J. Engineering Mechanics Div. ASCE, Vol.100, No.1, 111p-121p.

HOLZER, S. M.; SOLMERS, A. E., 1977. **"Nonlinear Model / Solution Process: Energy Approach"**. Journal of the Engineering mechanics division, V.103, n. 4, 629p-647p.

HOROWITZ, B., 1988. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado**. Publicação no 01/08, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

JCSS<sup>1</sup>, Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 1: Basis of Design*, 2000.

JCSS<sup>2</sup>, Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 2: Loads*, 2001.

JCSS<sup>3</sup>, Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 3: Resistance Models*, 2000.

KANG, M.M.; KIM, L.S.; PULMANO, V.A., 1993. **Minimum-Cost reinforced concrete beams and columns**. In: computational Mechanics, Pulmano & Tin-Loi, V.2, 943p-948p.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; EL-HAMI, A., 2004. **Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states**. 421p-434p. Struct Multidisc Optim 27.

KLEIBER, M.; SIEMASZKO, A.; STOCKI, R., 1999. **Interactive stability-oriented reliability-based design optimization**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 168 (1999) 243p-253p, Elsevier.

LAGAROS, N. D.; PAPADOPOULOS, V., 2006. **Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections**. International Journal of Solids and Structures, Vol.43, No.22-23, 6948p-6964p, Elsevier.

LEE, S. H.; KWAK, B. M., 2006. **Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis**. Structural Safety 28 (2006) 261p-272p, Elsevier.

LEPS, M.; SERJNOHA, M. 2003. **New approach to optimization of reinforced concrete beams**. Computers & Structures 81 (2003) 1957p-1966p, Pergamon.

LIMA, E. C. P.; SAGRILO, L. V. S. – **Confiabilidade Estrutural**, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

LIANG, Q.Q; XIE Y.M.; STEVEN, G.P. 2000. **Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure**. ACI Structural Journal/March (2000) 322p–331p.

LIANG, Q.Q; UY, B.; STEVEN, G.P. 2002. **Performance-Based Optimization for Strut-Tie Modeling of Structural Concrete**. Journal of Structural Engineering /June (2002) 815p–823p.

LOPES, M. T. de A.; EBOLI, C. R; VELASCO, M. de S. L.; VAZ, L. E. 2006. **Confiabilidade à força cortante de seções transversais de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibras de carbono**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, São Paulo-SP, Brasil.

MAXWELL, C., 1869, **Scientific papers**, Vol. 2, Dover Publications, New York (1952), pp.175-177.

MELCHERS, R. E., 2002. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 437p. John Wiley & Sons, New York.

MELO, A. M. C. de; VAZ, L. E.; SHEHATA, I. A. El M.. 2004, **Um critério de resistência geral para otimização de pórticos de concreto armado**. XXV CILAMCE, Recife, Brasil.

MELO, A. M. C. de. 2000a, **Optimum design of RC plane frames with nonlinear response**. 157p – 167p. ISSMO 2000, Swansea, Wales, UK.

MELO, A. M. C. de. 2000b, **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado**. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

MOSES, F., 1997, **Problems and prospects of reliability-based optimization**. 293p – 301p. Engineering Structures, Vol. 19, No. 4, Elsevier.

MÜLLER, A. L.; VAZ, L. E.; EBOLI, C. R, 2003, **Otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil.

NOGUEIRA, C. G., **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicados à estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

NEVES, R. A.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W. S.; LAMAIRE, M. 2006, **Reliability analysis of reinforced concrete grids with nonlinear material behavior**, Reliability Engineering & System Safety 91 (2006), 735p-744p, Elsevier.

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. M., 2004, **Reliability-Based calibration for structural concrete, Phase 2**. 97p. Portland Cement Association Research & Development Information, PCA R&D Serial No. 2674, USA.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R., 2000. **Reliability of structures**. 338 p. McGraw Hill Higher Education, USA.



- PAPADRAKAKIS, M., LAGAROS, N. D., PLEVRIS, V., 2005. **Design optimization of steel structures considering uncertainties**. Engineering Structures 27 (2005) 1408p–1418p, Elsevier.
- PEREIRA, A., 2007. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade: Aplicação a treliças espaciais**. Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. 1978. **Structural reliability under combined random load sequences**, Computers and structures, Vol.9, No.5, 489p-494p.
- REAL, M. de V.; FILHO, A. C. 2001, **Aplicação do método de Monte Carlo no estudo de vigas e pilares de concreto armado**. 35p – 44p. Teoria e Prática na Engenharia Civil No. 2, Brasil.
- RODRIGUES Jr., S. J., 2005. **Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado**. Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- SALEH, J. H.; MARAIS, K., 2006. **Reliability: How much is it worth? Beyond its estimation or prediction, the (net) present value of reliability**. Reliability Engineering & System Safety 91 (2006) 665p–673p, Elsevier.
- SANTOS, H. de C., 2005. **Reliability based determination of safety factors for earthquake and wind in Brazilian conditions**. 3721p – 3728p. ICOSSAR 2005, Rome, Italy.
- SANTOS, H. de C.; EBOLI, C. R., 2006. **Avaliação da confiabilidade estrutural com base nas normas NBR-6118 e NBR-8681**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, 502p-517p, São Paulo-SP, Brasil.
- SEPULVEDA, A. E.; EPSTEIN, L. D., 1993. **Approximation Concepts for Structural Synthesis with Uncertain Parameters**. 457p-464p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.
- SOARES, R. C.; VENTURINI, W. S., 2001. **Introdução à Análise de Confiabilidade**. Notas de Aula, São Carlos (2001).
- SOARES, R. C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W. S.; LEMAIRE, M., 2002. **Reliability analysis of non-linear reinforced concrete frames using the response surface method**. Reliability Engineering & System Safety 91 (2002), Elsevier.
- SOUZA Jr., J. B. M., 1992. **Dimensionamento Ótimo de Pilar Padrão de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- SZERSZEN, M. M.; NOWAK, A. S., 2005. **Reliability-based sensitivity analysis of RC columns resistance**. 2525p – 2530p. ICOSSAR 2005, Rome, Italy.
- TSOMPANAKIS, Y., et al., 2005. **Recent advances in reliability-based structural optimization under earthquake loading**. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- TU, J.; CHOI, K. K.; PARK, Y.H., 1999. **A New Study on Reliability-Based Design Optimization**. ASME J. Mech Des, Vol.121, No.4, 557p–564p.
- ULAM, S. M., 2007 Encyclopedia Britannica Article. **Stanislaw Marcin Ulam**. Disponível em: < <http://www.britannica.com/eb/article-9074138/Stanislaw-Marcin-Ulam>>, Acesso em: 20 nov. 2007.

- URBAN, A. G. G., 1992. **Dimensionamento Ótimo em concreto armado: Viga contínua e seção transversal retangular submetida à flexão composta reta.** Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- VAL, D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D., 1995. **Optimization problem solution in reliability analysis of reinforced concrete structures.** 351p – 355p. Computers & Structures Vol. 60, N.3, 1996, Elsevier.
- YANG, S.I.; FRANGOPOL, D. M.; KAWAKAMI, Y.; NEVES, L. C., 2006. **The use of lifetime functions in the optimization of interventions on existing bridges considering maintenance and failure costs.** Reliability Engineering and System Safety 91 (2006) 698p–705p, Elsevier.
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K., 2004. **A new response surface methodology for reliability-based design optimization.** Computers and Structures, Vol.82, No.2-3, 241p–256p, Elsevier.
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; DU, L., 2004. **Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method.** Struct Multidisc Optim.
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; PARK, Y. H., 2003. **Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization.** J Mech Des, ASME 125, 221p–232p; Proceedings of 2001 ASME Design Engineering Technical Conferences: 27 th Design Automation Conference. Pittsburgh, PA.
- YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; DU, L., 2005. **Enriched Performance Measure Approach (PMA+) for Reliability-Based Design Optimization.** American Institute of Aeronautics and Astronautics, 16p.
- WANG, L.; GRANDHI, R. V., 1993. **Reliability-Based Optimization of Structure.** 441p–448p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.
- ZOU, T.; MAHADEVAN, S., 2006. **A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization.** Struct Multidisc Optim, 190p–200p.

## Apêndice A

### CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

#### A.1

##### Probabilidade de falha de um sistema em série

Segundo a teoria das probabilidades, para a união de eventos, a probabilidade de falha de um sistema em série pode ser obtida por:

$$\begin{aligned}
 p_f^s &= P\left[\bigcup_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j P_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k>i}^n \sum_{l>k}^n P_{ikl} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

onde:

$$P_i = P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \tag{A.2}$$

$$P_{ik} = P[P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_k(\mathbf{V}) \leq 0.0)] \tag{A.3}$$

$$P_{ikl} = P[P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_k(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_l(\mathbf{V}) \leq 0.0)] \tag{A.4}$$

$g_i$  identifica o  $i$ -ésimo componente do sistema e os símbolos  $\Sigma$  e  $\cap$  denotam respectivamente, “somatório” e “interseção”.

Como as probabilidades de falha dos componentes individuais geralmente são baixas na análise de problemas estruturais, os termos de terceira ordem podem ser desprezados na maioria das vezes. A probabilidade de falha de um sistema em série (Eq. A.1) pode ser calculada utilizando as seguintes expressões:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) \tag{A.5}$$

$$P_{ik} = \Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ik}) \tag{A.6}$$

onde:

$\beta_i, \beta_j$  - são os índices de confiabilidade de cada um dos componentes;

$\rho_{ik}$  - é a correlação entre dois componentes;

$\Phi(\cdot)$  - é a função cumulativa de probabilidades normal padrão;

$\Phi(\cdot, \cdot, \rho)$  - é a função cumulativa bidimensional normal padrão.

A função cumulativa bidimensional normal padrão, pode ser expressa matematicamente por:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{i,j}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{i,j}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, z) dz \quad (A.7)$$

onde  $\varphi(\beta_i, \beta_j, z)$  é a função densidade de probabilidades bidimensional padrão:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 - 2zxy}{1-z^2}\right)\right] \quad (A.8)$$

A integral da Eq. (A.7) deve ser avaliada numericamente. Alternativamente, têm-se os chamados limites de primeira-ordem e segunda-ordem que podem ser utilizados para evitar a avaliação numérica da mesma. Neste caso são obtidos os limites: superior e inferior da probabilidade de falha de um sistema em série para os dois limites.

Limites para probabilidade  $P_{ik}$ :

$$\max[P(A), P(B)] \leq P[g_i, g_k] \leq P(A) + P(B) \quad (A.9)$$

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_k - \rho\beta_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (A.10)$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_k) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho\beta_k}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (A.11)$$

Limites de primeira ordem:

$$\max_{n=1}^n [P(F_i)] \leq p_f \leq \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i))\right] \quad (A.12)$$

Limites de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
& P(F_1) + \sum_{i=2}^n \max \left\{ \left[ P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i F_j) \right], 0.0 \right\} \leq p_f \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(F_i) - \sum_{i=2}^n \max_{j < i} [P(F_i F_j)]
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Na Figura A.1a são mostrados os limites de primeira ordem para um sistema com duas funções de falha:

$$G_1(a, b) \rightarrow \beta_1 \rightarrow P(F_1) \text{ e } G_2(a, b) \rightarrow \beta_2 \rightarrow P(F_2) \tag{A.14}$$

Para modos de falha independentes a probabilidade de falha de uma estrutura pode ser representada por:

$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i)) \Rightarrow n = 2 \tag{A.15}$$

onde,  $F_i$  é a probabilidade de falha do modo  $i$ .

A Eq. (A.15) pode ser expandida da seguinte forma:

$$p_f = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \tag{A.16}$$

Contudo, quando  $P(F_i) \ll 1$  o termo  $P(F_1 \cap F_2)$  pode ser desprezado e a Eq. (A.16) pode ser aproximada para:

$$p_f^{\sup} \cong P(F_1) + P(F_2) \tag{A.17}$$

onde  $p_f^{\sup}$  representa o limite de probabilidade de falha superior.

Para a determinação do limite inferior, considera-se o caso onde todos os modos de falha são totalmente dependentes, sendo que o modo que tiver a maior probabilidade de falha será sempre o de provável colapso, conforme Eq. (A.18).

$$p_f^{\inf} = \max_{i=1}^n [P(F_i)] \tag{A.18}$$

Assim, tem-se para um sistema em série os limites inferiores e superiores, onde eles limitam uma região entre completamente independente e totalmente dependente, tomando, portanto, a Eq. (A.18) como limite superior e Eq. (A.17) como inferior, tem-se:

$$\max[P(F_1), P(F_2)] \leq p_f \leq P(F_1) + P(F_2) \tag{A.19}$$

Limites de segunda ordem:

Os limites de segunda ordem são obtidos levando em consideração os termos  $P(F_1 \cap F_2)$  na Eq. (A.16). Assim, determina-se o limite inferior por:

$$p_f \geq P(F_1) + \max \{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} \quad (\text{A.20})$$

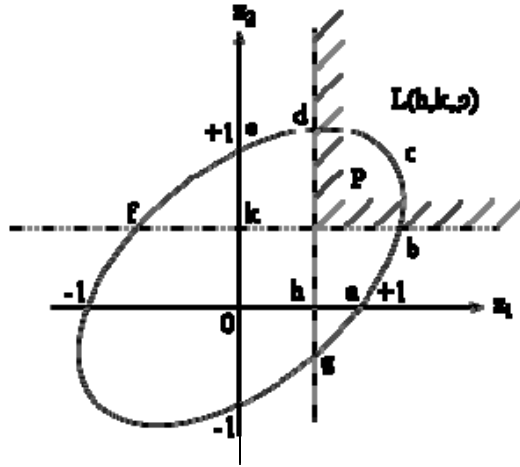
e o limite superior de segunda ordem é obtido por:

$$p_f \leq P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \quad (\text{A.21})$$

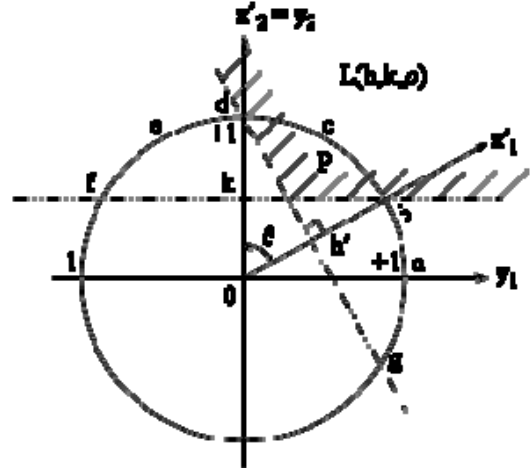
Desta forma, pode-se ressaltar que os limites de segunda ordem possuem uma precisão maior que os de primeira ordem, devido ao fato deste considerar os termos  $P(F_1 \cap F_2)$ , podendo-se escrever que:

$$\begin{aligned} P(F_1) + \max \{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} &\leq p_f \leq \\ \Rightarrow P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) &\end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

No caso de duas funções de falha, resolvendo-se a Eq. (A.21) obtém-se a probabilidade de falha exata de um sistema em série. Como se pode observar pela Eq. (A.22) é necessário determinar o termo  $P(F_1 \cap F_2)$ , podendo ser determinado de forma exata através da Eq. (A.6) ou Eq. (A.7), que tem um alto custo computacional, ou pelos limites  $P_{ik}$  da Eq. (A.9).



(a)



(b)

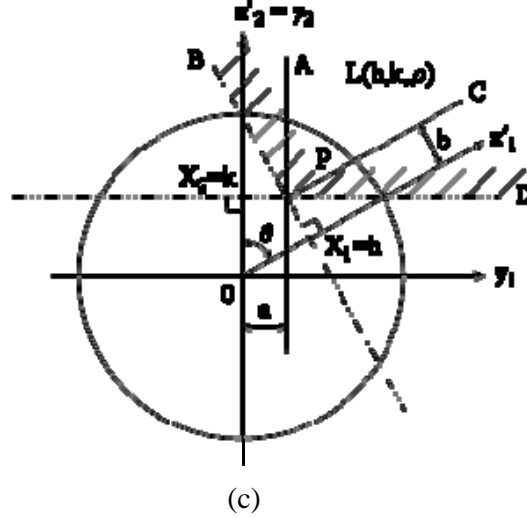


Figura A.1 - Região de integração no espaço inicial (correlacionado) normal bi-variacional; (b) Região de integração transformada no espaço reduzido (independente) normal bi-variacional padrão; (c) Limites BPC e APD para  $\Phi(., \rho)$ , região fora de BPD.

Considerando inicialmente a Figura A.1a onde se tem um espaço típico de uma função de densidade de probabilidade, com  $\rho = 1/2$ . Porém é mais conveniente se trabalhar com o espaço reduzido (normal padrão independente)  $(x_1, x_2)$  para essa transformação se usa Eq. (A.23).

$$x_1 = \frac{1}{(1-\rho^2)^{1/2}}(y_1 - \rho y_2), \quad x_2 = y_2 \quad (\text{A.23})$$

Fazendo-se a transformação obtém-se a Figura A.1b no espaço reduzido onde o ângulo  $\theta < \pi/2$  (onde  $\rho = \cos(\theta)$ ), pode-se notar que houve um giro no sentido anti-horário do eixo. Através da Figura A.1 pode-se determinar a Eq. (A.9).

Na Figura A.1c a parte hachurada representa  $\Phi(., \rho)$  limitadas por BPD. No espaço reduzido a região APD representa o produto da probabilidade de  $\Phi(-a)$  e  $\Phi(-b)$ . A região BPC representa o maior limite ( $\Phi(-b) \Phi(-h)$ ) e a APD representa o menor limite ( $\Phi(-a) \Phi(-k)$ ). Desta forma,

$$\begin{aligned} \max[\Phi(-b)\Phi(-h), \Phi(-a)\Phi(-k)] &\leq \Phi(-h, -k, \rho) \\ &\leq \Phi(-b)\Phi(-h) + \Phi(-a)\Phi(-k) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$a = \frac{h - \rho k}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (\text{A.25})$$

$$b = \frac{k - \rho h}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (\text{A.26})$$

A eqs. (A.24) e (A.9) só valem para valores positivos de  $\rho \geq 0$  para valores de  $\rho < 0$ , tem-se

$$0 \leq \Phi(h, k, \rho) \leq \max[\Phi(b)\Phi(h), \Phi(a)\Phi(k)] \quad (\text{A.27})$$

Assim, pode-se reescrever a equação de limite de segunda ordem do problema.

$$\begin{aligned} P(F_1) + \max\{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)^+, 0\} &\leq p_f \leq \Rightarrow \\ \Rightarrow P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)^- &\end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$P(F_1 \cap F_2)^- = \max[\Phi(-b)\Phi(-h), \Phi(-a)\Phi(-k)] \quad (\text{A.29})$$

$$P(F_1 \cap F_2)^+ = \Phi(-b)\Phi(-h) + \Phi(-a)\Phi(-k) \quad (\text{A.30})$$



## Apêndice B

### DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

#### B.1

##### Distribuição normal

A distribuição normal ou gaussiana, *PDF*, pode ser definida por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

onde  $x$  é a variável aleatória, e os parâmetros  $\mu_x$  e  $\sigma_x$  são a média e o desvio padrão desta variável aleatória, respectivamente.

Muitas vezes a função é representada de uma forma mais simples, sendo:  $N(\mu_x, \sigma_x)$ , por necessitar de apenas dois parâmetros. Para obter a função cumulativa *CDF*, é necessário empregar integração numérica ou tabelas disponíveis na bibliografia.

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad (\text{B.2})$$

onde  $s = (x - \mu_x) / \sigma_x$ .

Uma forma de avaliação alternativa de  $f_X(x)$  e  $F_X(x)$  é conseguida introduzindo uma variável reduzida  $s$ , que contém média zero e desvio padrão unitário,  $N(0,1)$ . Os valores de  $f_X(x)$  e  $F_X(x)$  para esta variável reduzida são tabelados e identificadas por  $\phi(s)$  e  $\Phi(s)$ . Assim, as expressões (B.1) e (B.2) podem ser reescritas da seguinte forma, para um par  $N(\mu_x, \sigma_x)$ .

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x} \phi \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (\text{B.4})$$

## B.2

### Distribuição lognormal

Tem-se uma distribuição lognormal quando estatisticamente  $\ln(X)$ , sendo  $X$  uma variável aleatória, pode ser representado por uma distribuição normal. Assim, a PDF e a CDF, para uma variável lognormal, são definidas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\xi_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad (\text{B.5})$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right) \quad (\text{B.6})$$

onde  $\lambda$  é o valor esperado de  $\ln(X)$ ,  $\lambda = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \xi^2$ , e  $\xi$  é o desvio padrão de

$$\ln(X), \quad \xi = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right]}.$$

## B.3

### Distribuição beta

A função de distribuição Beta tem como vantagem apresentar grande flexibilidade em se adaptar aos dados probabilísticos observados. Sua PDF é representada por quatro parâmetros  $(a, b, q, r)$ , como se vê a seguir:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}} \quad a \leq x \leq b \quad (\text{B.7})$$

onde a função Beta é dada por

$$\beta(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = (k-1)! \text{ para } k \text{ inteiros } > 0 \quad (\text{B.9})$$

Como podem ser observados os parâmetros  $a$  e  $b$  descrevem intervalos de inúmeras distribuições Beta. Fazendo-se  $a = 0$  e  $b = 1$  obtém-se a função Beta padrão que apresenta PDF e CDF definidas por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\beta(q,r)} s^{q-1} (1-s)^{r-1} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (\text{B.10})$$

$$F_s(s) = \frac{\beta_s(q,r)}{\beta(q,r)} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

## B.4

### Distribuições de valores extremos

As distribuições de probabilidade de valores extremos são utilizadas na engenharia devido à necessidade de se representar os valores máximos extremos dos carregamentos atuantes sobre a estrutura durante sua vida útil e os valores mínimos de resistência da mesma.

Para a avaliação das distribuições é necessário que sejam coletados dados durante vários anos (no mínimo 20 a 25 anos) para que se ajuste a melhor distribuição possível para os valores. Devido à dificuldade de obtenção destes dados surgiu a chamada estatística de extremos que possibilita definir a distribuição dos valores extremos de uma variável  $X$ .

Podem-se citar como principais distribuições de valores extremos utilizados na engenharia, as seguintes:

- Tipo I (máximos) ou Gumbel;
- Tipo I (mínimos);
- Tipo II (máximos);
- Tipo III (mínimos) ou Weibull.

Maiores detalhes sobre estas distribuições e outras são encontradas em (Melchers 2002, Nowak 2000, JCSS 2000, Hart 1982).