MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Diferenciação numérica

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

A DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção falaremos sobre um modelo de diferenciação numérica. Onde nosso objetivo é dado uma função $y = f(x)$ precisamos determinar a derivada no ponto $x = x_k$. Ou seja, vamos construir uma aproximação da derivada da função na vizinhança de x_k.

A derivada é uma ferramenta importante e com grande frequência aparece na solução de problemas em ciências exatas e tecnológicas. Muitos destes modelos são expressos em termos de taxa. São exemplos destes tipos de problemas: (a) condução de calor, (b) corrente em um capacitor, (c) energia de um sistema mecânico [1].

DIFERENÇAS FINITAS

A aproximação de uma derivada pode ser dada por:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

À medida que x se aproxima de a a precisão da derivação aumenta. Para então escrever modelos de aproximação vamos empregar a expansão da série de Taylor.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n \qquad (2)$$

$$a_n = {f^{(n)}(a)}/{n!} \tag{3}$$

Portanto para obter a aproximação de $f'(x_{i+1})$ como o polinômio de Taylor. Para isso considere que $h = x_{i+1} - x_i$.

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{h^1}{1!} + f''(x_i)\frac{h^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + f''''(x_i)\frac{h^4}{4!} + \ldots \tag{4}$$

Empregando dois termos e um resíduo é possível chegar a:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - f''(x_i)\frac{h}{2!} \tag{5}$$

Onde $f''(x_i)\frac{h}{2!}$ É dado como o erro de truncamento da série.

Vamos empregar esta aproximação para cálculo da derivada de $f(x) = ln\, x$ no ponto $x = 1{,}80$.

Para isso vamos considerar o parâmetro h = 0,10, 0,01 e 0,001.

Aplicando a equação (5) chegamos em:

$$f'(1{,}80) \cong \frac{ln(1{,}80 + 0{,}10) - ln(1{,}80)}{0{,}10} = 0{,}540672$$

$$f'(1{,}80) \cong \frac{ln(1{,}80 + 0{,}010) - ln(1{,}80)}{0{,}010} = 0{,}554018$$

$$f'(1{,}80) \cong \frac{ln(1{,}80 + 0{,}0010) - ln(1{,}80)}{0{,}0010} = 0{,}555401$$

Exemplo 1.1: Dada as funções *f(x)* apresentadas em a e b determinar o valor da derivada numérica nos pontos informados.

a) $f(x) = x^3, x = 3$

b) $f(x) = sen\, x,\ x = \pi/3$

REFERÊNCIAS

[1] Gilat A, Suramanian V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 2008.

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA