MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Sistemas não lineares: Newton - Raphson

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

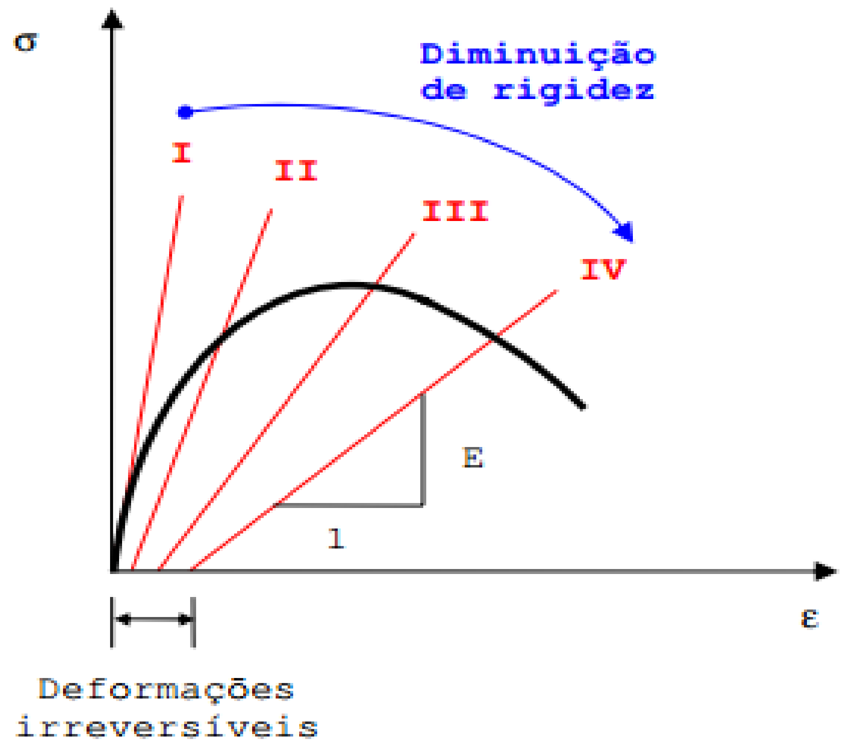
MODELOS NÃO LINEARES

Ao contrário do tópico anterior imaginemos agora que as equações que formam o nosso sistema não têm características lineares, ou seja, as variáveis que formam estas equações não são de grau 1.

Tais equações tem grandes aplicações no campo das ciências exatas e tecnológicas. Por exemplo a modelagem do comportamento do concreto é um exemplo característico de uma resposta não linear.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Figura 1 – Comportamento não linear do concreto [1].



RELEMEBRANDO O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA UMA EQUAÇÃO

O método de Newton-Raphson (ou Método de Newton) é um modelo de método computacional baseado em informações da derivada da função à qual deseja-se determinar a solução.

Primeiro precisamos discutir a importância de empregar informações da derivada, logo falaremos a sua interpretação geométrica.

A primeira derivada pode ser interpretada como uma medida de coeficiente de variação angular de uma reta tangente que passa por um determinado ponto P de uma função f. Para que se tenha validade a seguinte definição é necessário que f seja contínua em P.

Para que f seja contínua em P devem ser válidas as seguintes afirmações:

- Existe $f(a)$;
- Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Imaginemos que uma função $f(x)$ pode ser escrita como uma série de Taylor no ponto x_1, ou seja, possui o seguinte formato da equação (2):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n \tag{2}$$

$$a_n = {f^{(n)}(a)}/_{n!} \tag{3}$$

Portanto, se $f(x)$ no ponto x_1 pode ser escrito no formato de uma série polinomial de Taylor conforme equação (4). Neste caso a série foi expandida até o termo de ordem 2:

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\frac{(x - x_1)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x - x_1)^2}{2!} \tag{4}$$

Admitindo que o termo de f'' é muito pequeno e que a $f(x)$ possui dentro de um intervalo $[x_1,\ x_2]$ uma raiz, ou seja, $f(x) = 0$. Logo podemos reescrever a equação (4):

$$0 \approx f(x_1) + f'(x_1).(x - x_1) \tag{5}$$

$$\frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} \approx x - x_1 \tag{6}$$

$$x \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{7}$$

A equação (7) pode ser reescrita como um processo recursivo, chamado aqui de Newton-Raphson.

$$x^{t+1} = x^t - \frac{f(x^t)}{f'(x^t)} \tag{8}$$

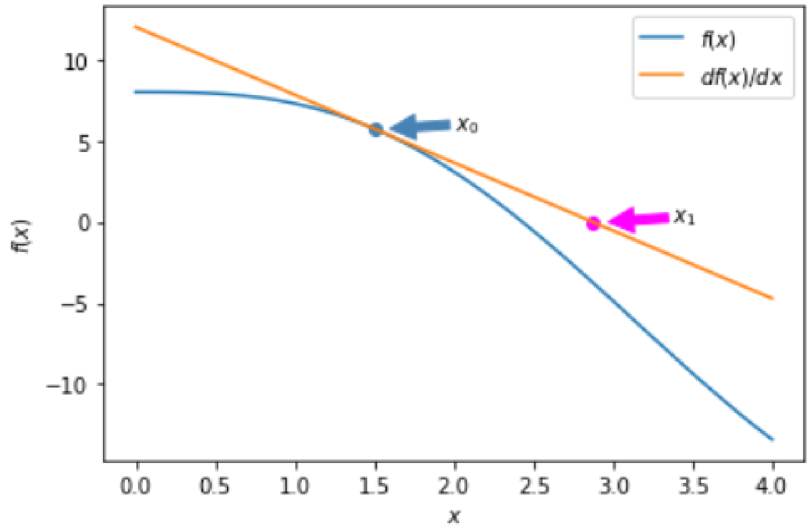
O erro de cada iteração para esse método é dado pela avaliação do novo ponto médio conforme eq's (9) e (10) [2]:

$$erro = |x^{t+1} - x^t| \tag{9}$$

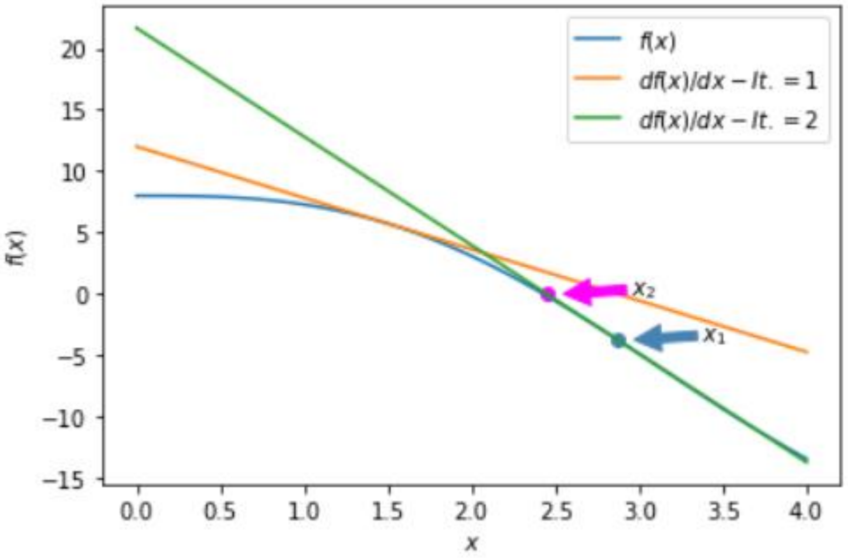
$$erro = 0 \qquad \text{Para a condição que } f(x^{t+1}) = 0 \tag{10}$$

O movimento gráfico do método de Newton-Raphson (NR) pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Movimento gráfico do método de NR para função $f(x) = 8 - 4{,}50.(x - senx)$ no intervalo 0 e 4 [3].



Iteração t = 1

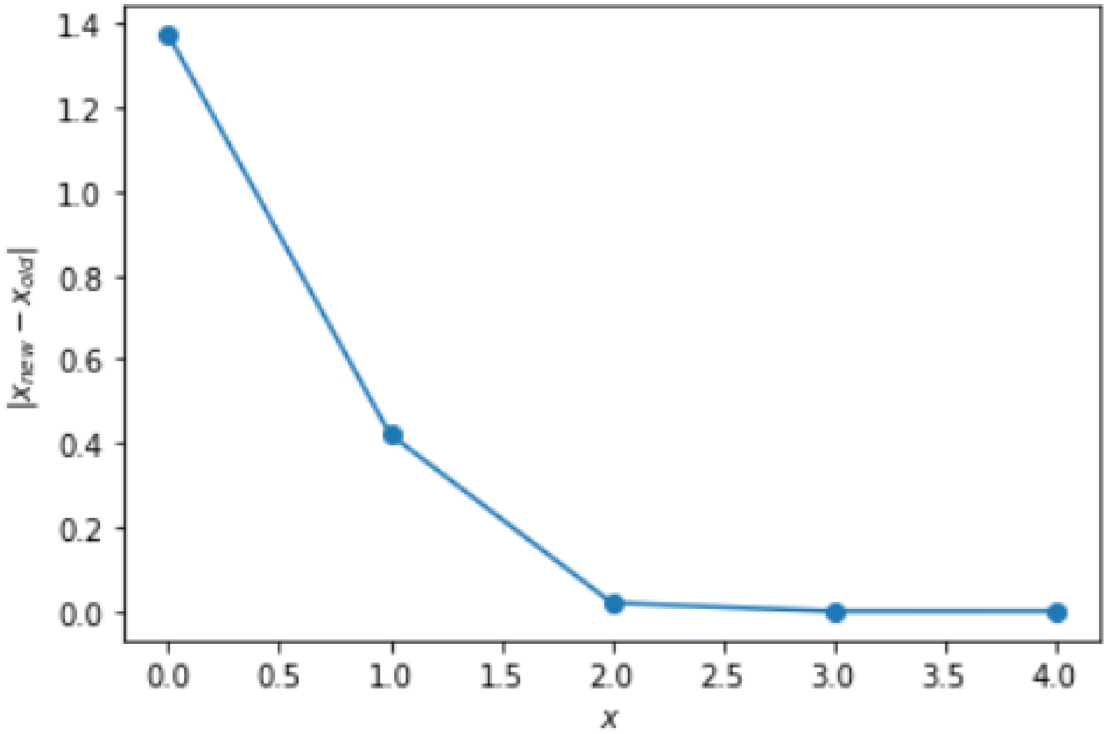


Iteração t = 2

```
ERRO = 100, TOL = 1E-2, X = X_INI
while ERRO > TOL:
      Avalie f(x) e f’(x)
      X = eq. 8
      ERRO = eq’s 9 e 10
RAIZ = X
```

	f(x)	diff(f(x))	x	erro
0	5.738727e+00	-4.181683	2.872349	1.372349e+00
1	-3.728559e+00	-8.837875	2.450465	4.218840e-01
2	-1.587621e-01	-7.967374	2.430538	1.992653e-02
3	-5.740125e-04	-7.909534	2.430466	7.257222e-05
4	-7.734007e-09	-7.909321	2.430466	9.778347e-10

Iterações



Convergência

O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

Utilizando o mesmo conceito visto anteriormente agora vamos estabelecer uma maneira de determinar as derivadas do sistema de equações. Esta maneira será feita utilizando o conceito de Jacobiano do sistema de equações, dado conforme equação (11).

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1/_{x_1} & \cdots & \partial f_1/_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/_{x_1} & \cdots & \partial f_n/_{x_n} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Agora reescreveremos a equação (8) para a forma matricial, onde o vetor $\boldsymbol{s}$ armazena a direção de busca do novo conjunto solução $\boldsymbol{x}^{t+1}$:

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^{t} + \boldsymbol{s} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{J}^{-\boldsymbol{1}}.\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{t}) \tag{13}$$

O processo iterativo só finaliza quando o critério de parada é satisfeito. Este critério é disposto na equação (14):

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty}}{\left\| x^{(k+1)} \right\|_{\infty}} \leq tol, tol > 0 \tag{14}$$

Exemplo 1.1 [4,5]: Determinar o conjunto solução dos sistemas apresentados a seguir. Considere uma tolerância de 10^{-3} como critério de parada das iterações.

$$\begin{bmatrix} {x_1}^2 + x_1.x_2 & = 10 \\ x_2 + 3.x_1.{x_2}^2 & = 57 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^t = [1{,}50 \quad 3{,}50] \qquad \text{a)}$$

$$\begin{bmatrix} {x_1}^3 + 2.x_2 + x_3 & = 4 \\ 2.{x_1}^2 + {x_2}^2 - 4.x_3 & = -1 \\ 3.{x_1}^2 + 4.x_2 + x_3 & = 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^t = [1 \quad 1 \quad 2] \qquad \text{b)}$$

Solução do exemplo a)

Determinação da Jacobiana da função: Vamos usar a biblioteca Sympy.

$$\begin{bmatrix} 2.x_1 + x_2 & x_1 \\ 3.{x_2}^2 & 1 + 6.x_1.x_2 \end{bmatrix}$$

Iteração $t = 1$ aplicaremos o valor de $\boldsymbol{x}^1 = [1{,}50 \quad 3{,}50]$

$$J(\boldsymbol{x}^1) = \begin{bmatrix} 2.1{,}50 + 3{,}50 & 1{,}50 \\ 3.3{,}50^2 & 1 + 6.1{,}50.3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}50 & 1{,}50 \\ 36{,}75 & 32{,}50 \end{bmatrix}$$

$$J(\boldsymbol{x}^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.20816653 & -0.00960769 \\ -0.23538831 & 0.04163331 \end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}^1) = \begin{bmatrix} 1{,}50^2 + 1{,}50.3{,}50 - 10 \\ 3{,}50 + 3.1{,}50.\,3{,}50^2 - 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}50 \\ 1{,}625 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = -J(\boldsymbol{x}^1)^{-1}.\,f(\boldsymbol{x}^1) = \begin{bmatrix} 0{,}5360 \\ -0{,}6561 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^2 = \begin{bmatrix} 1{,}50 \\ 3{,}50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5360 \\ -0{,}6561 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0360 \\ 2{,}8439 \end{bmatrix}$$

REFERÊNCIAS

[1] Faglioni AF [UNESP. Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra. Mestrado em Engenharia Civil. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), 2006.

[2] Burden RL, Faires JD. Numerical analysis. 9. ed., International ed. Belmont, Calif.: Brooks/Cole; 2011.

[3] Gilat A, Suramanian V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 2008.

[4] Chapra SC. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas. 3ª edição. AMGH; 2013.

[5] Vitorino A, Ruggiero MAG. Algebra Linear e Aplicações 20--. https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/sistemas_triangulares.html (accessed August 23, 2021).

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA