MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Métodos diretos - Eliminação de Gauss

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO

A primeira condição que devemos nos atentar é se o sistema possui uma única solução como visto anteriormente. Umas das maneiras de observar tal condição é o uso de determinantes.

Para que o sistema seja solucionável a matriz $\boldsymbol{A}$ não pode ser singular, ou seja, se o seu determinante deve ser diferente de zero.

OPERAÇÕES ELEMENTARES

Os métodos diretos de maneira geral trabalharam com operações elementares sobre as equações do sistema permitindo que após um determinado número finito de operações a solução do sistema possa ser encontrada.

Permutação de linhas do sistema de equações; $L_i \leftrightarrow L_j$

Multiplicação de uma equação por uma constante não nula; $L_i \leftarrow k.L_i$

Adicionar ou subtrair um múltiplo de uma equação a uma outra. $L_j \leftarrow k.L_i + L_j$

Para entender um pouco mais sobre as operações elementares imaginemos o seguinte sistema de equações:

$$2.x_1 - 3.x_2 = -8$$

$$3.x_1 + 4.x_2 = 5$$

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Fazendo o determinante $|A| = 17 \neq 0$. Sistema Possível.

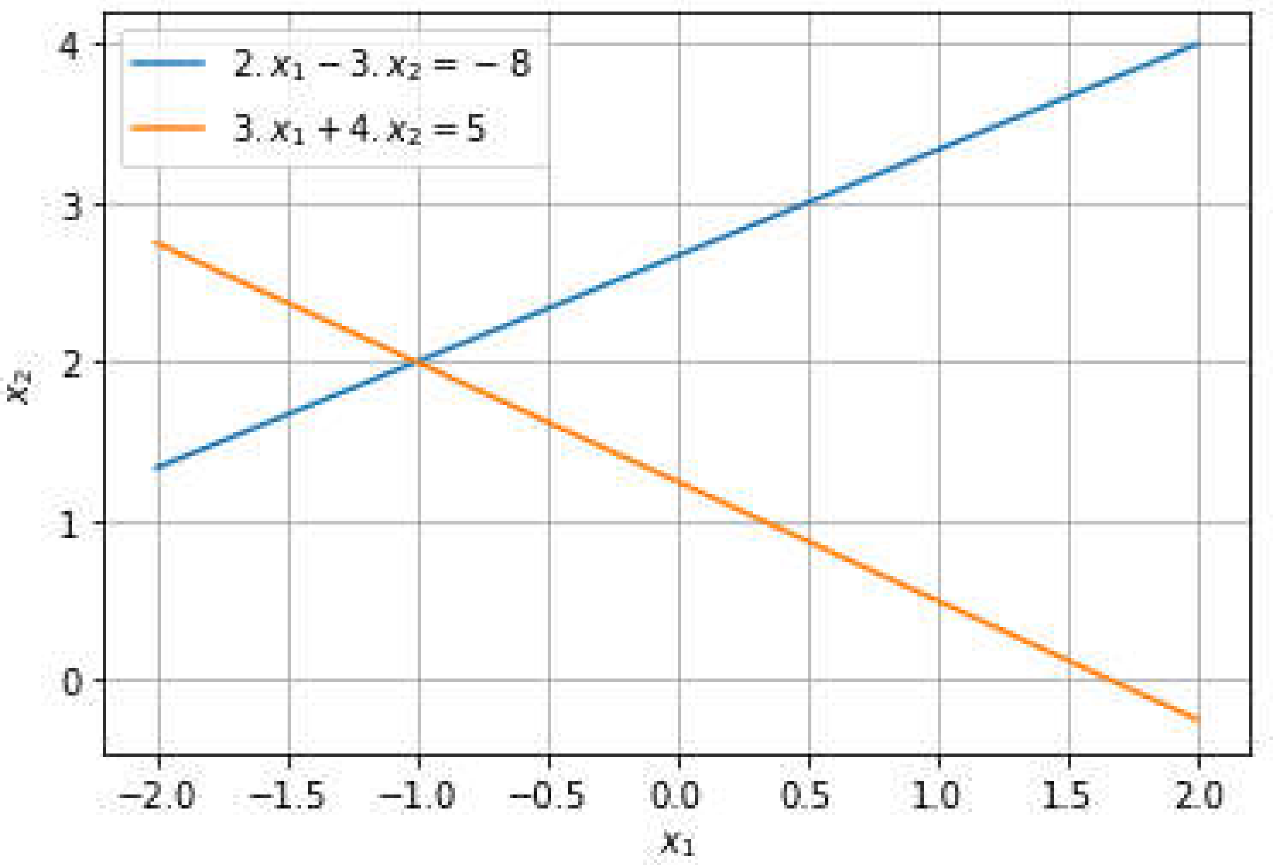

Figura 1 - Solução gráfica do conjunto de duas equações (sistema possível e determinado).

Aplicando uma operação elementar tipo 2:

$k.(2.x_1 - 3.x_2) = k.(-8)$ Exemplo $k = 8{,}5$ não alteraria a linha 1 por exemplo.

Agora vamos a uma sequência de operações: $L_1 \longleftarrow -\frac{1}{2}.L_1$ e $L_2 \longleftarrow 3.L_1 + L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1{,}5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 8{,}5 & 17 \end{bmatrix}$$

Obtendo a visualização gráfica do problema.

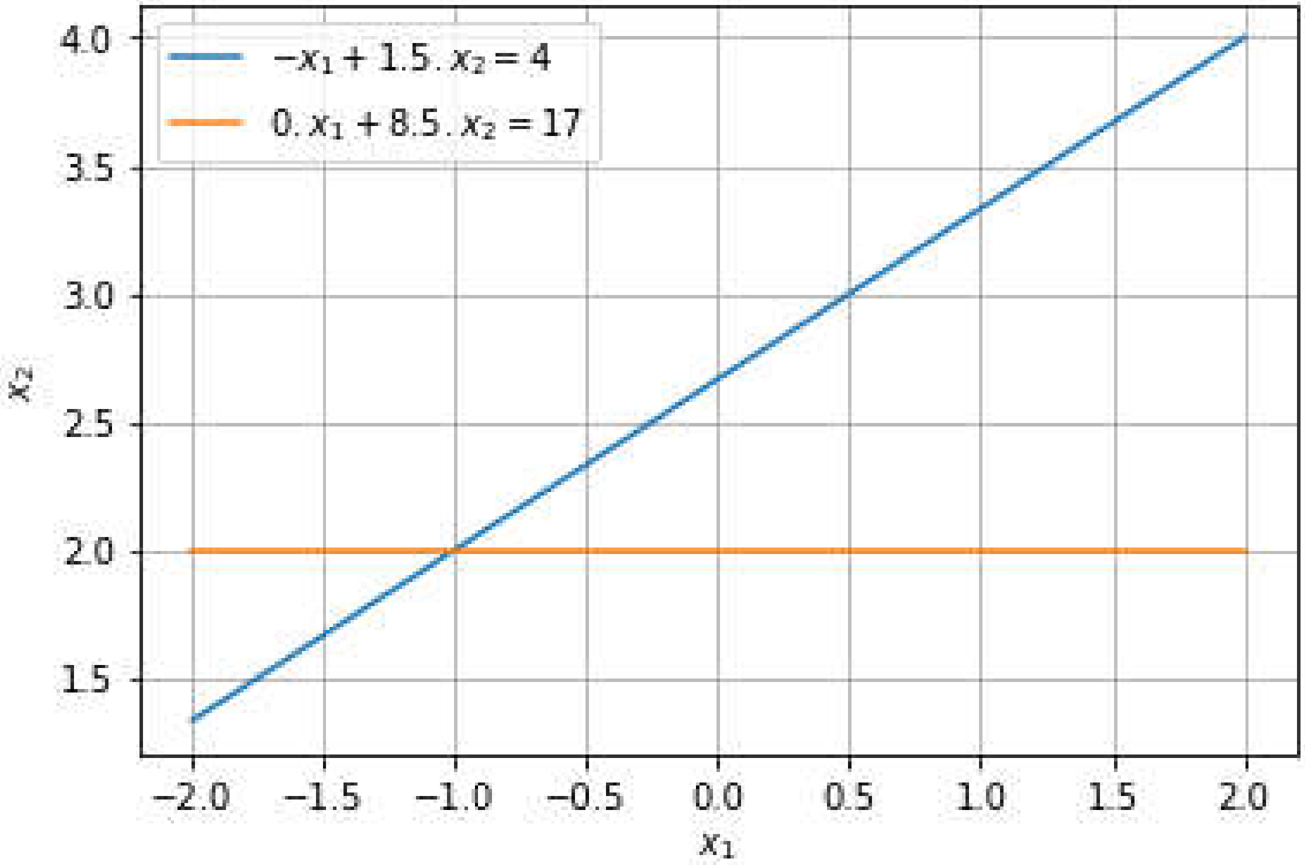

Figura 2 - Solução gráfica do conjunto de duas equações após as operações elementares.

SISTEMAS TRIANGULARES

A matriz de coeficientes apresenta uma forma triangular, seja ele superior ou inferior:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \quad a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \dots + a_{1n}.x_n = b_2 \\ \quad\quad a_{33}.x_3 + \dots + a_{3n}.x_n = b_3 \\ \quad\quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad\quad a_{nn}.x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Após a formação do sistema superior ou inferior é possível determinar o valor do vetor solução:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (2)$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}.x_n}{a_{(n-1)(n-1)}} \quad (3)$$

Fazendo o caso geral para a forma triangular superior:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.x_j}{a_{ii}} \tag{4}$$

Para um sistema triangular inferior:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij}.x_j}{a_{ii}} \tag{5}$$

Exemplo 1.1 [1]: Utilizando a formulação para sistemas triangulares determine o vetor solução dos seguintes sistemas lineares. Considere que o mesmo já foi verificado quanto a existência de uma solução.

$$\begin{cases} 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 = 11 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad\quad 2.x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{a)}$$

$$\begin{cases} 3.x_1 = 9 \\ x_1 + 2.x_2 = 5 \\ 2.x_1 - 4.x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{b)}$$

Solução manual do exemplo a)

Montagem da matriz aumentada $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Iteração $k = 1 \quad i = 3$

$$x_3 = \frac{b_3 - \cancel{\sum a_{ij} . x_j}}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{4}{2} = 2$$

$$Iteração\ k = 2 \quad i = 2$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}.x_3)}{a_{22}} \qquad x_2 = \frac{1 - (-1\,.\,2)}{1} = 3$$

$$Iteração\ k = 3 \quad i = 1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3)}{a_{11}} \qquad x_1 = \frac{11 - (1\,.\,3 + 3\,.\,2)}{2} = 1 \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Conforme o exercício acima é possível criar o pseudocódigo do modelo triangular superior:

$x = b_n \,/\, a_{nn}$
para $i = (n-1)$ **até** 1
  $soma = 0$
  para $j = (i+1)$ **até** n
    $soma = soma + a_{ij} \,.\, x_j$
  $x_i = (b_i - soma) \,/\, a_{ii}$

ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

O primeiro método de solução de sistemas consiste em transformar o sistema de equações lineares em um modelo triangular e a partir desse modelo é possível aplicar os algoritmos vistos anteriormente.

Para este processo de eliminação progressiva vamos empregar o conceito de pivô que um elemento escolhido para fazer a transformação de uma determinada linha. Chamaremos essa linha "especial" de linha do pivô. A ideia básica é que possamos chegar a um sistema semelhante ao da equação (1).

A Figura 3 ilustra o processo de eliminação progressiva. Basicamente será aplicada uma operação elementar sobre a linha subsequente ao pivô, no caso deste exemplo linha i.

Pivô $$m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$$

Adicionar ou subtrair um múltiplo de uma equação a uma outra. $$L_i \leftarrow L_i - m_{ik}.L_k$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\
0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3k} & \cdots & A_{3j} & \cdots & A_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{kk} & \cdots & A_{kj} & \cdots & A_{kn} & b_k \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nk} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} & b_n
\end{array}\right]$$

$\leftarrow$ Linha do pivô

$\leftarrow$ Linha a ser transformada

Figura 3 – Ilustração do processo de eliminação de Gauss.

Exemplo da ideia do método:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$m_{21} = a_{21}/a_{11}$ $\quad$ $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}.L_1$ $\quad$ $m_{31} = a_{31}/a_{11}$ $\quad$ $L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}.L_1$

Iteração 2

$m_{32} = a_{32}/a_{22}$ $\quad$ $L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}.L_2$

Exemplo 1.2 [2]: Utilizando a formulação da eliminação de Gauss determine o conjunto solução dos sistemas de equações descritos abaixo:

$$\begin{cases} 3{,}0.\,x_1 - 0{,}1.\,x_2 - 0{,}2.\,x_3 = 7{,}85 \\ 0{,}1.\,x_1 + 7{,}0.\,x_2 - 0{,}3.\,x_3 = -19{,}3 \\ 0{,}3.\,x_1 - 0{,}2.\,x_2 + 10{,}.\,x_3 = 71{,}4 \end{cases} \text{a)}$$

$$\begin{cases} 1{,}0.\,x_1 - 1{,}0.\,x_2 - 2{,}0.\,x_3 = 2{,}0 \\ 2{,}0.\,x_1 + 1{,}0.\,x_2 - 1{,}0.\,x_3 = 1{,}0 \\ -2{,}0.\,x_1 - 5{,}0.\,x_2 + 3{,}0.\,x_3 = 3{,}0 \end{cases} \text{b)}$$

Solução manual do exemplo

Verificação da existência da solução

Resolução do determinante da matriz A que corresponde a matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 \\ 0{,}1 & 7{,}0 & -0{,}30 \\ 0{,}3 & -0{,}20 & 10{,}0 \end{bmatrix} \; det(A) \cong 210{,}35$$

Após verificar que o sistema possui solução podemos iniciar o procedimento iterativo de transformação das linhas.

Iteração 1

$$m_{21} = 0{,}10/3{,}0 \cong 0{,}0333 \qquad L_2 = L_2 - 0{,}0333.\,L_1$$

$$m_{31} = 0{,}30/3{,}0 = 0{,}1 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 0{,}10.\,L_1$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7{,}0 & -0{,}30 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}20 & 10{,}0 & 71{,}4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}0 & 7{,}003 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0{,}3 & -0{,}20 & 10{,}0 & 71{,}4 \end{bmatrix} \text{Operações na linha 2}$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}0 & 7{,}003 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0{,}3 & -0{,}20 & 10{,}0 & 71{,}4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}0 & 7{,}003 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0{,}0 & -0{,}19 & 10{,}02 & 70{,}6150 \end{bmatrix} \text{Operações na linha 3}$$

Iteração 2

$m_{32} = -0{,}19/7{,}0033 \cong -0{,}0271 \qquad L_3 = L_3 - (-0{,}0271).L_2$

$$\begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}0 & 7{,}003 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0{,}0 & -0{,}19 & 10{,}02 & 70{,}6150 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3{,}0 & -0{,}10 & -0{,}20 & 7{,}85 \\ 0{,}0 & 7{,}003 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 10{,}012 & 70{,}0843 \end{bmatrix} \text{Operações na linha 3}$$

Aplicando agora o conceito de sistema triangular superior com substituição retroativa:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3{,}0000 \\ -2{,}5000 \\ 7{,}00003 \end{bmatrix}$$

Conforme o exercício acima é possível criar o pseudocódigo da eliminação Gaussiana:

```
para k = 1 até (n − 1)
  para i = (k + 1) até n
      m = AB[i,k] / AB[k,k]
      AB[i, k:n+1] = AB[i, k:n+1] − m . AB[k, k:n+1]
  Execute x = SISTRIANGULAR[A, B]
```

REFERÊNCIAS

[1] Vitorino A, Ruggiero MAG. Algebra Linear e Aplicações 20--. https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/sistemas_triangulares.html (accessed August 23, 2021).

[2] Chapra SC. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas. 3ª edição. AMGH; 2013.

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA