MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Métodos iterativo - Gauss-Seidel

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

O método de Gauss-Seidel é um dos algoritmos mais empregados na resolução de sistemas de equações lineares datando-se do final do século XVIII. Estas técnicas são eficientes para sistemas com grande quantidade de zeros e de maior dimensionalidade [1].

Este método consiste em determinar a solução a partir de um "chute inicial". Após esse chute inicial o conjunto solução é encontrado a partir de uma sucessão de iterações que empregam informações do sistema.

Como o método parte de uma solução inicial os valores de ${x_i}^k$ podem ser dados de forma similar que a equação do sistema triangular superior. Vejamos o exemplo [2]:

$$\begin{cases} 3.x_1 - 0{,}1.x_2 - 0{,}2.x_3 = 7{,}85 \\ 0{,}1.x_1 + 7{,}0.x_2 - 0{,}3.x_3 = -19{,}3 \\ 0{,}3.x_1 - 0{,}2.x_2 + 10.x_3 = 71{,}4 \end{cases} \tag{1}$$

Empregando como chute inicial:

$$ {x_i}^1 = \begin{bmatrix} 2{,}6167 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Iteração 1

$$x_1^{1+1} = \frac{b_1 - a_{12}.x_2^{1} - a_{13}.x_3^{1}}{a_{11}} = \frac{7,85 + 0,1.0 + 0,2.0}{3} = 2,6167 \quad (3)$$

$$x_2^{1+1} = \frac{b_2 - a_{21}.x_1^{1+1} - a_{23}.x_3^{1}}{a_{22}} = \frac{-19,3 - 0,1.2,6167 + 0,3.0}{7} = -2,7945 \quad (4)$$

$$x_3^{1+1} = \frac{b_3 - a_{31}.x_1^{1+1} - a_{32}.x_2^{1+1}}{a_{33}} = \frac{71,4 - 0,3.2,6167 + 0,2.(-2,7945)}{10} = 7,0056 \quad (5)$$

Perceba que estamos utilizando informação da iteração k+1 dentro do processo de obtenção das novas variáveis. No método de Jacobi, por exemplo, empregamos apenas informações da iteração k. Após essa iteração o vetor solução é dado por:

$$x_i^{2} = [2,6167 \quad -2,7945 \quad 7,0056] \quad (6)$$

Iteração 2

$$x_1{}^3 = \frac{b_1 - a_{12}.x_2{}^2 - a_{13}.x_3{}^2}{a_{11}} = \frac{7{,}85 + 0{,}1.(-2{,}7945) + 0{,}2.7{,}0056}{3} = 2{,}9905 \quad (7)$$

$$x_2{}^3 = \frac{b_2 - a_{21}.x_1{}^3 - a_{23}.x_3{}^1}{a_{22}} = \frac{-19{,}3 - 0{,}1.2{,}9905 + 0{,}3.7{,}0056}{7} = -2{,}4996 \quad (8)$$

$$x_3{}^3 = \frac{b_3 - a_{31}.x_1{}^3 - a_{32}.x_2{}^3}{a_{33}} = \frac{71{,}4 - 0{,}3.7{,}0056 + 0{,}2.(-2{,}4996)}{10} = 7{,}0003 \quad (9)$$

Entendendo o processo iterativo para 4 variáveis ($n = 4$):

$$x_1{}^t = \frac{b_1 - a_{12}.x_2{}^t - a_{13}.x_3{}^t - a_{14}.x_4{}^t}{a_{11}} \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}.\left[-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.x_j^t + bi\right] \quad (10)$$

$$x_2{}^t = \frac{b_2 - a_{21}.x_1{}^{t+1} - a_{23}.x_3{}^t - a_{24}.x_4{}^t}{a_{22}} \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}.\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}.x_j^{t+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.x_j^t + bi\right] \quad (11)$$

O processo iterativo só finaliza quando o critério de parada é satisfeito. Este critério é disposto na equação (12):

$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} \leq tol, tol > 0 \quad (12)$$

O método iterativo parte da premissa de que um chute inicial é necessário. Este valor inicial pode não estar próximo ao valor da solução e então à solução não converge. Para verificar essa capacidade de convergência iremos verificar a condição suficiente da diagonal dominante conforme equação (13):

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{13}$$

Isto é, o valor absoluto do coeficiente da diagonal em cada equação deve ser maior que a soma dos valores absolutos dos outros coeficientes na equação. Essa é dita uma condição suficiente pois embora o método possa as vezes funcionar se a equação (13) não for satisfeita, a convergência é garantida se essa condição for satisfeita [2].

Vamos ver um exemplo para a seguinte matriz de coeficiente:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1 \\ |a_{11}| = 5 \\ \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = 2 + 2 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} i = 2 \\ |a_{22}| = |-4| = 4 \\ \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = |-1| + 0 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} i = 3 \\ |a_{22}| = 8 \\ \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = |-2| + 3 = 5 \end{array} \tag{14}$$

enquanto erro > tol **faça**

para i = 1 **até** n

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} . x_k^{t+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} . x_j^{t} + bi \right]$$

Erro = eq. (12):

Exemplo 1.1 [1]**:** Utilizando um método iterativo determine o conjunto solução dos sistemas abaixo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a)}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textbf{ b)}$$

REFERÊNCIAS

[1] Burden RL, Faires JD. Numerical analysis. 9. ed., International ed. Belmont, Calif.: Brooks/Cole; 2011.

[2] Chapra SC. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas. 3ª edição. AMGH; 2013.

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA