MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Integração numérica

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

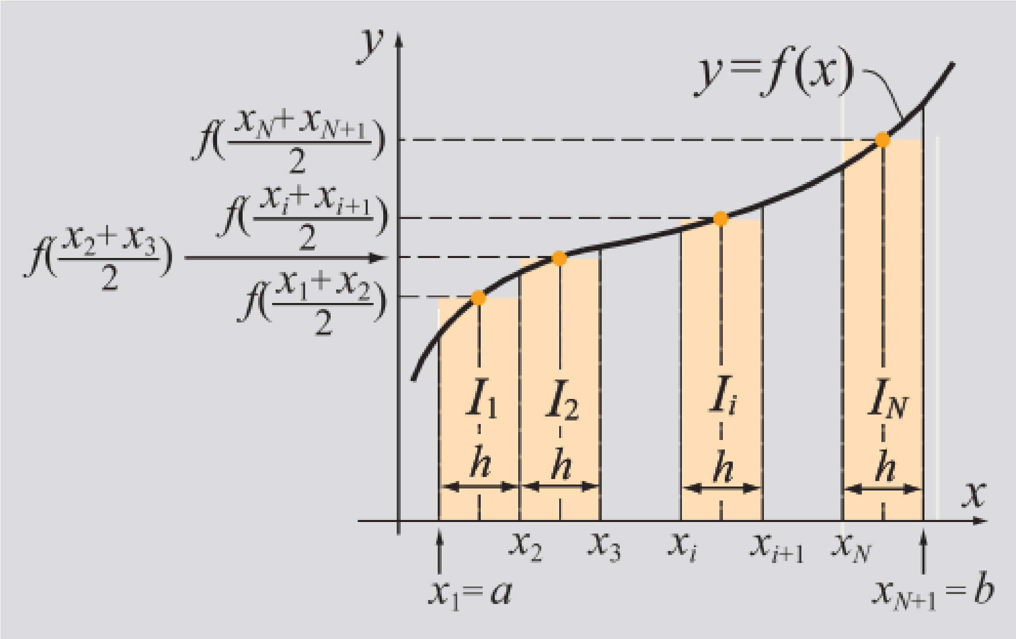
A integração numérica consiste na aplicação de métodos numéricos para determinação de integrais definidas.

Este método é utilizado por diversas áreas do conhecimento para resolução de problemas que envolvam o cálculo de uma integral, como por exemplo em elementos finitos na etapa do cálculo da matriz de rigidez.

Em suma determinaremos um número $I(f)$ que corresponde à uma integral de uma função $f(x)$ entre os limites a e b.

Os métodos mais conhecidos de integração numérica consistem na divisão do domínio [a, b] em retângulos como mostrado na Figura que apresenta o método do ponto central composto.

Figura 1 – Integração numérica empregando o método do ponto central [1].



QUADRATURA DE GAUSS

A quadratura de Gauss é um dos métodos mais empregados para solução numérica de integrais.

Tal método consiste em uma soma ponderada. Portanto a sua forma geral é dada como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} C_i . f(x_i) \tag{1}$$

Onde C_i representa o vetor de pesos e x_i os pontos de Gauss no intervalo [a, b]. Portanto na forma estendida temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_1.f(x_1) + C_2.f(x_2) + \ldots + C_3.f(x_3) \tag{2}$$

O conjunto de pesos C_i é dado por meio de tabelas encontradas em diversas fontes. Estes pesos são determinados fazendo com que a equação (1) seja exata quando $f(x) = 1, x, x^2, x^3, etc$ e com intervalo de [-1, 1]. Portanto ao aplicar o método da Quadratura de Gauss é necessário transformar o domínio da integração. Para isso aplicaremos a equação (3):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + a + b}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}dt \tag{3}$$

Tabela 1 - Tabela dos pesos e pontos de Gauss [1].

n (Número de pontos)	Coeficientes C_i (pesos)	Pontos de Gauss x_i
2	$C_1 = 1$ $C_2 = 1$	$x_1 = -0{,}57735027$ $x_2 = 0{,}57735027$
3	$C_1 = 0{,}5555556$ $C_2 = 0{,}8888889$ $C_3 = 0{,}5555556$	$x_1 = -0{,}77459667$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0{,}77459667$
4	$C_1 = 0{,}3478548$ $C_2 = 0{,}6521452$ $C_3 = 0{,}6521452$ $C_4 = 0{,}3478548$	$x_1 = -0{,}86113631$ $x_2 = -0\ 33998104$ $x_3 = 0{,}33998104$ $x_4 = 0{,}86113631$
5	$C_1 = 0{,}2369269$ $C_2 = 0{,}4786287$ $C_3 = 0{,}5688889$ $C_4 = 0{,}4786287$ $C_5 = 0{,}2369269$	$x_1 = -0{,}90617985$ $x_2 = -0{,}53846931$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0{,}53846931$ $x_5 = 0{,}90617985$
6	$C_1 = 0{,}1713245$ $C_2 = 0{,}3607616$ $C_3 = 0{,}4679139$ $C_4 = 0{,}4679139$ $C_5 = 0{,}3607616$ $C_6 = 0{,}1713245$	$x_1 = -0{,}93246951$ $x_2 = -0{,}66120938$ $x_3 = -0{,}23861919$ $x_4 = 0{,}23861919$ $x_5 = 0{,}66120938$ $x_6 = 0{,}93246951$

Vamos aplicar essa transformação de domínio na integral $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$:

$$x = \frac{1}{2}(t.(b-a)+a+b) = \frac{1}{2}(t.(3-0)+0+3) = \frac{3}{2}(t+1)$$

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)dt = \frac{1}{2}(3-0)dt = \frac{3}{2}dt$$

$$\int_0^3 e^{-x^2}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} e^{-\left[\frac{3}{2}(t+1)\right]^2}\,dt$$

Exemplo 1.1: Dada as funções f(x) apresentadas em a e b determinar o valor da integral nos intervalos informados.

$f(x) = e^{-x^2}$ $[1, 1.5]$ a)

$f(x) = 1/x$ $[3, 3.6]$ b)

Resolução do exemplo 1:

$$dx = \frac{1}{2}(b - a)dt = \frac{1}{2}(1{,}5 - 1)dt = \frac{1}{4}\, dt$$

Ponto 1 de Gauss (t_i = -0,57735027, w_i =1)

$$\frac{1}{4}\,.\,e^{-t_1{}^2} = \frac{1}{4}.\,\mathrm{e}^{-(\frac{1}{4}(-0{,}57735027+5))^2} = \frac{1}{4}.\,\mathrm{e}^{-(1{,}1057)^2}$$

$$\frac{1}{4}\,.\,e^{-t_1{}^2} = \frac{1}{4}.\,\mathrm{e}^{-(\frac{1}{4}(+0{,}57735027+5))^2} = \frac{1}{4}.\,\mathrm{e}^{-(1{,}3943)^2}$$

REFERÊNCIAS

[1] Gilat A, Suramanian V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 2008.

[2] Chapra SC, Canale RP. Métodos numéricos para engenharia. 2011.

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA