MÉTODOS COMPUTACIONAIS

DR. MARCOS NAPOLEÃO RABELO
DR. WANDERLEI M. PEREIRA JUNIOR

Introdução a solução de sistema de equações lineares

Grupo de Pesquisa e Estudos em Engenharia (GPEE)

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Em diversos problemas no campo das ciências aplicadas é comum a escrita das informações do problema por meio das equações. Sendo que estas equações podem interagir, serem complementares entre outras possibilidades.

Sabendo que uma equação é uma expressão algébrica de igualdade entre variáveis é essencial que se conheça maneiras de resolver este tipo de equação ou sistema de equações. Portanto esse capítulo tem como foco o aprendizado de técnicas numéricas que permitam a resolução de sistemas de equações.

Antes de iniciarmos o processo de entendimento dos modelos possíveis para solução de um sistema de equações é necessário compreender como é o formato de uma equação linear.

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_{n-1}.x_{n-1} + a_n.x_n = b \tag{1}$$

Onde: $a_1, \ldots, a_n$ representam os coeficientes (Conjunto dos $\mathbb{R}$); $x_1, \ldots, x_n$ representam as variáveis; e b o termo independente da equação linear. De uma forma geral podemos escrever que um sistema linear é representado pela equação (2). Neste caso $\boldsymbol{A}$ pode ser representado por uma matriz de coeficientes e também conhecido como o operador de transformação linear, $\boldsymbol{x}$ é o vetor que contém as informações que se deseja determinar $\boldsymbol{b}$ e o vetor de termos independentes.

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 3.x_1 + 2.x_2 = 18 \\ -1.x_1 + 2.x_2 = 2^1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[1] Equação homogênea é aquela onde o termo independente $b = 0$.

SOLUÇÃO GRÁFICA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Chapra [1] afirma que o método gráfico é uma "boa" forma de resolver conjunto de equações de pequena ordem ($n \leq 3$). Pois em um sistema de equações $n \times n$ cada equação representa uma plano de dimensão $n-1$ inserido no $\mathbb{R}^n$.

No exemplo anterior escrever as equações em termos de x_2:

$$\begin{cases} x_2 = -{}^{3}/_{2}\, x_1 + 9 \\ x_2 = {}^{1}/_{2}\, x_1 + 1 \end{cases} \tag{4}$$

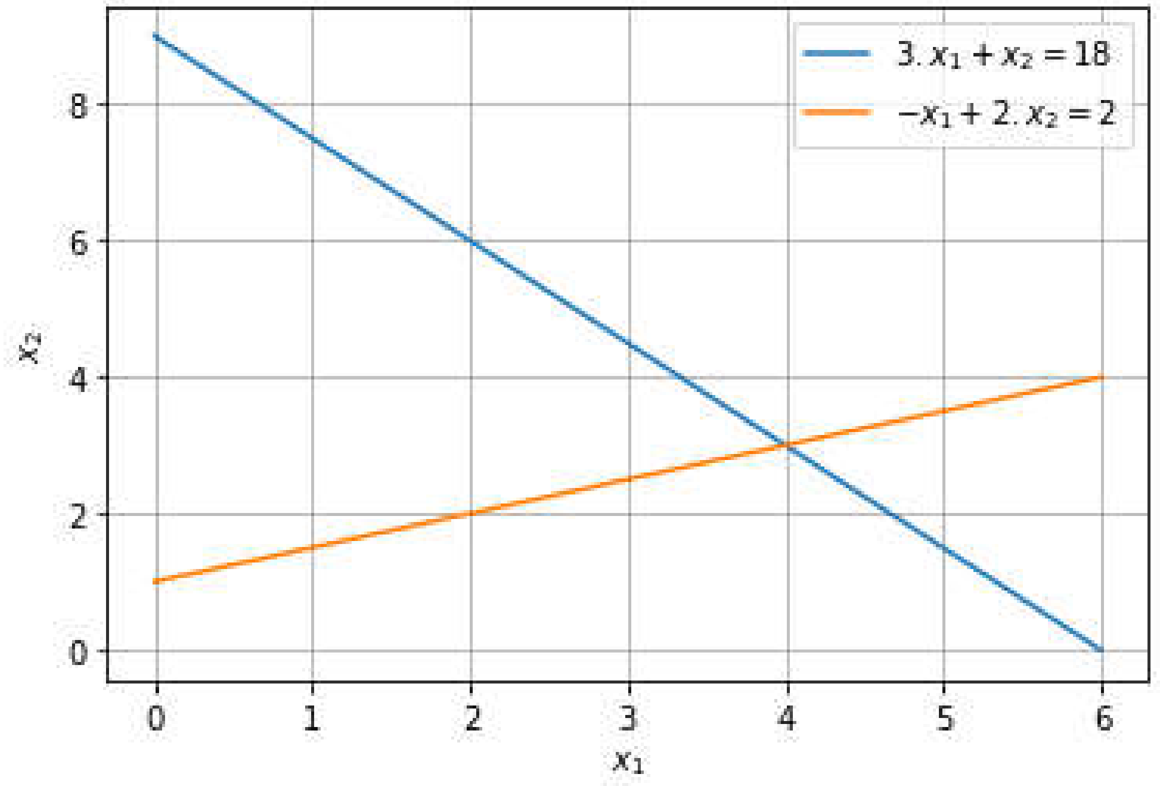

Figura 1 - Solução gráfica do conjunto de duas equações (sistema possível e determinado).

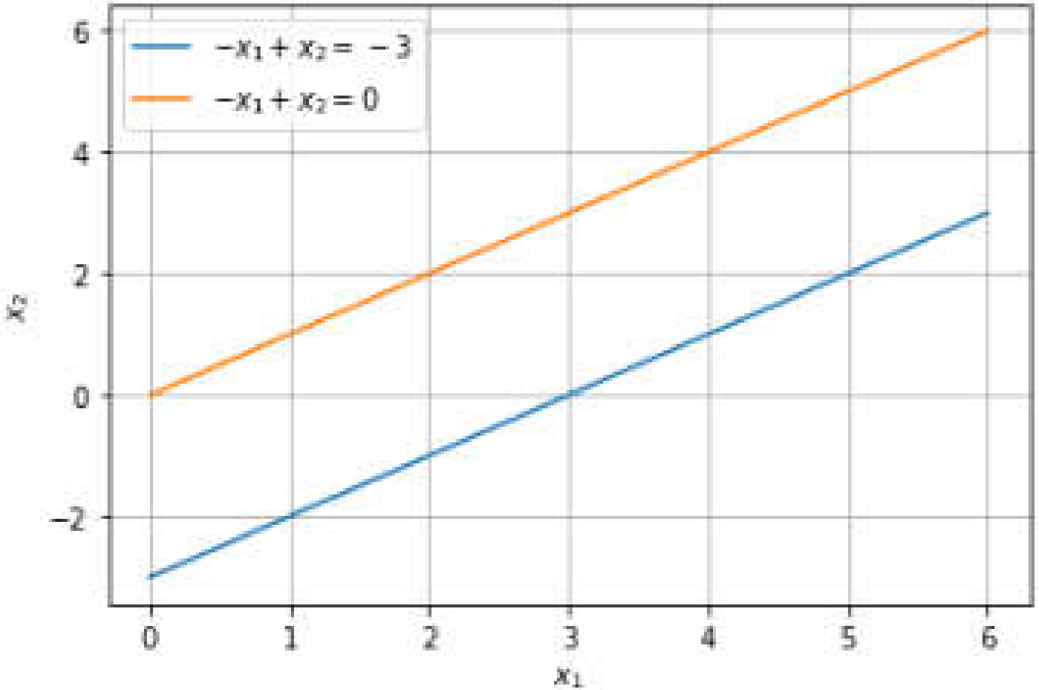

Figura 2 - Solução gráfica para um sistema impossível.

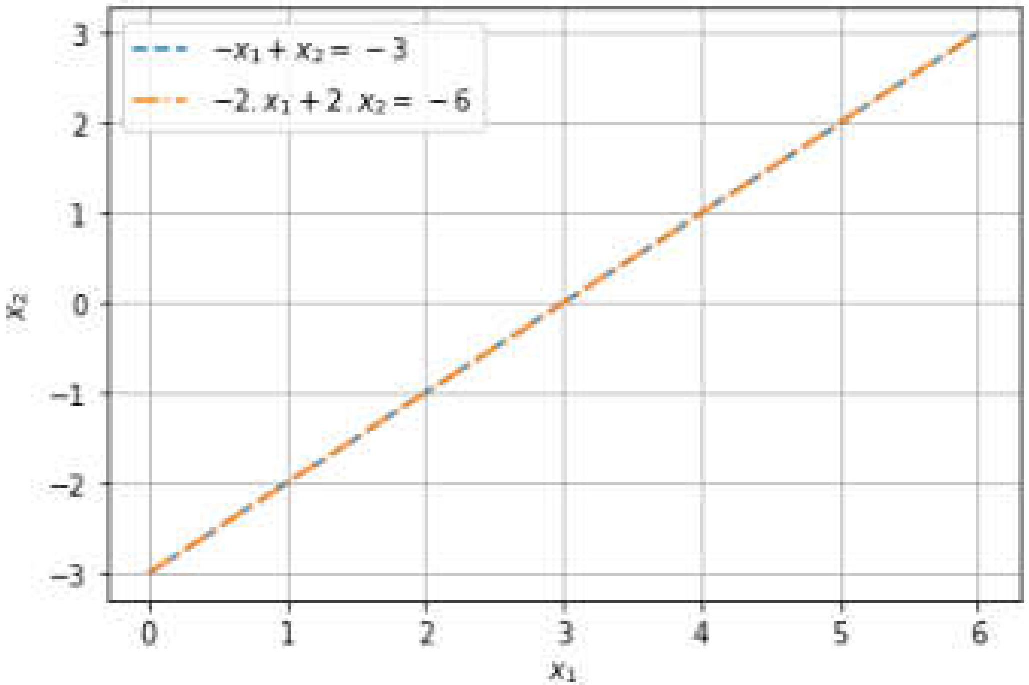

Figura 3 - Solução gráfica para um sistema possível e indeterminado.

Para caso de sistemas com um número de equação relativamente maior é necessário uso de outros processos.

Métodos Diretos: O termo método direto refere-se às técnicas que, na ausência de erros de arredondamento e após um determinado número finito de iterações é capaz de calcular a solução exata do sistema linear, caso ela exista.

Métodos Iterativos: Métodos iterativos consistem em sequências de aproximação do vetor solução $\boldsymbol{x}$ a partir de um valor inicial $\boldsymbol{x}^0$. O processo se repete até que a desigualdade (5) seja respeitada para um valor de r é suficientemente pequeno.

$$r < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x}\| \tag{5}$$

REFERÊNCIAS

[1] Chapra SC. Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas. 3ª edição. AMGH; 2013.

OBRIGADO!

GPEE

GRUPO DE PESQUISAS E ESTUDOS EM ENGENHARIA